TETRAEDRALITZACIONS A L'ESPAI

Semiespai

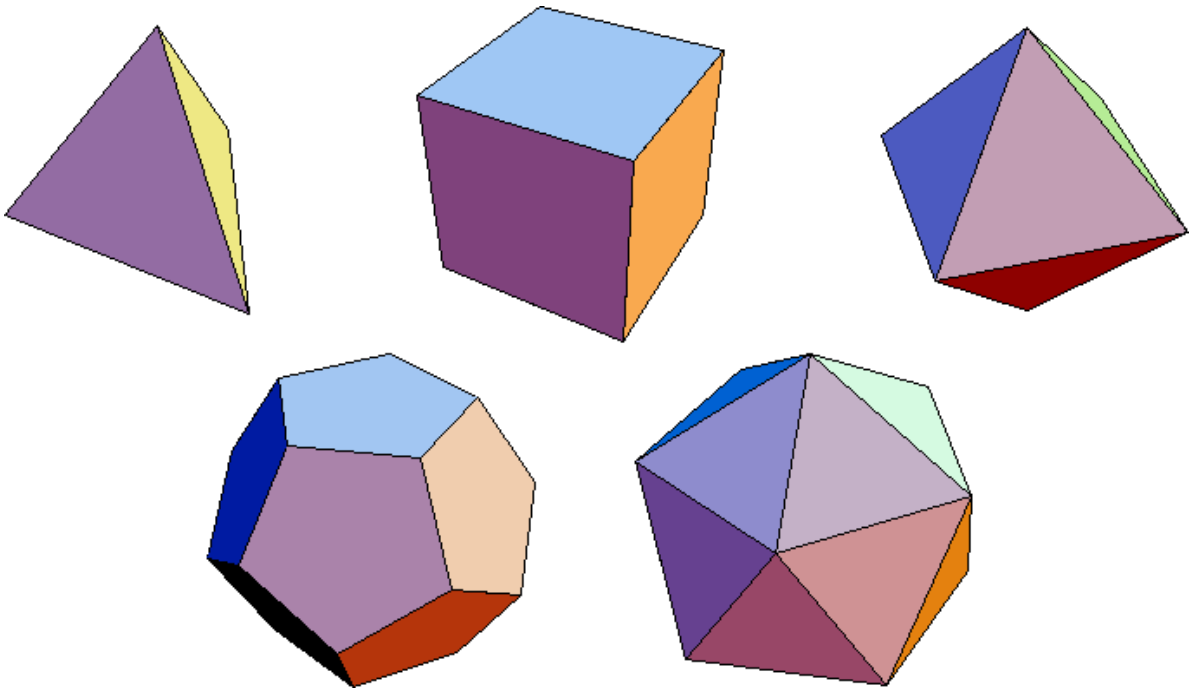
El pla $\pi : ax+by+cz+d=0$ determina dos *semiespais oberts*:

$h^+ = \{(p_x, p_y, p_z) \mid ap_x + bp_y + cp_z + d>0\}$; $h^- = \{(p_x, p_y, p_z) \mid ap_x + bp_y + cp_z + d<0\}$;

i dos *semiespais tancats*:

$\bar{h}^+ = \{(p_x, p_y, p_z) \mid ap_x + bp_y + cp_z + d\geq 0\}$; $\bar{h}^- = \{(p_x, p_y, p_z) \mid ap_x + bp_y + cp_z + d\leq 0\}$;

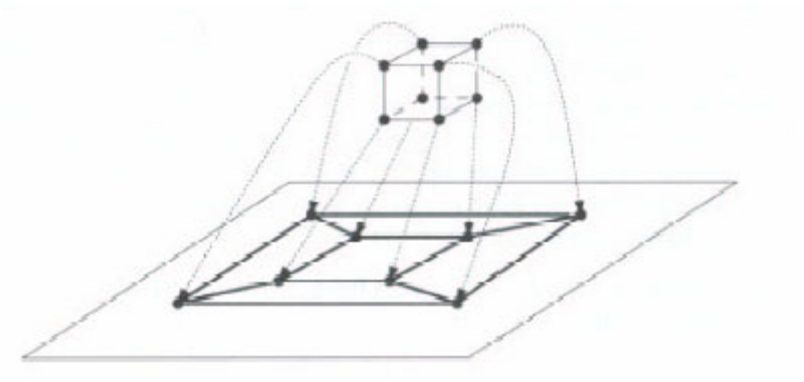
Un *poliedre convex* és la intersecció d'un conjunt finit de semiespais tancats. Quan la intersecció és afitada (continguda a una esfera de radi finit), s'anomena *politop.*



Politops convexos.

Un politop de quatre cares és un *tetràedre*, un de sis cares un *hexàedre*, ...

El nombre de costats i de cares d'un politop de *n* vèrtexs són d'ordre *O(n)* (la projecció a un pla del politop és un graf planar).



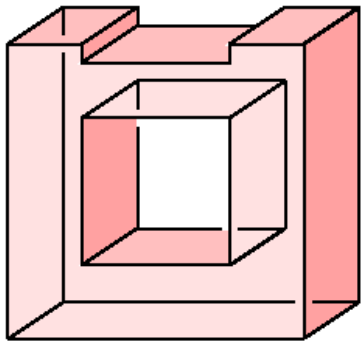
Políedre

Un *políedre P* és la unió d'un conjunt finit de politops, de manera que:

- la frontera de *P* és un conjunt connex format per polígons plans de l'espai, anomenats *cares*;
- la intersecció de dues cares és una col·lecció de punts, anomenats *vèrtexs*, i segments, anomenats *arestes*, comuns a les dues cares;
- cada aresta és compartida per almenys dues cares.

Un políedre és tancat si cada aresta és compartida per exactament dues cares del conjunt.

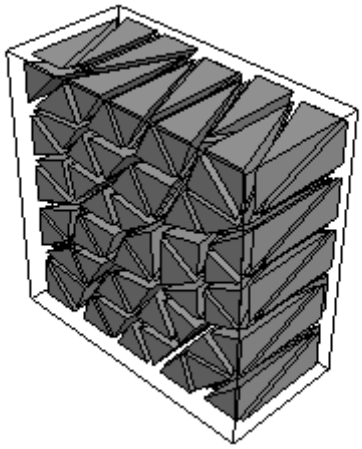
Un políedre és *simple* si és homeomorf a una esfera.



Políedre no convex, tancat i no simple.

Tetraedralitzacions

Una *tetraedralització* és una partició d'un domini - típicament definit per un políedre, un conjunt de punts, o un PLS – en un conjunt *T* de tetràedres, que intersequen només en els vèrtexs, arestes i cares que tenen en comú.

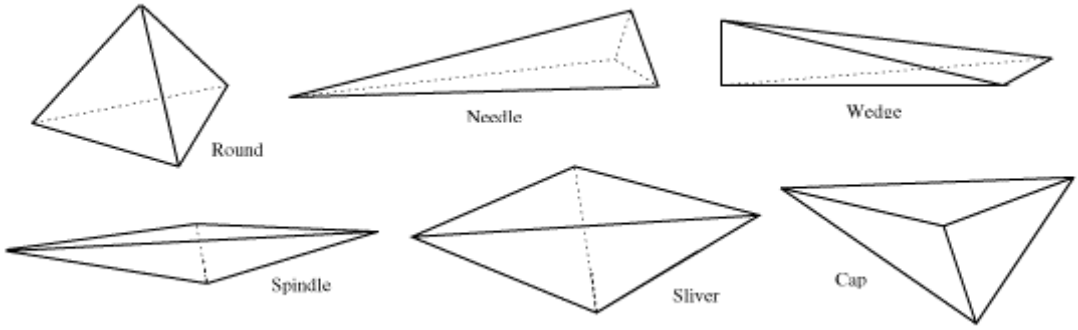


Tetraedralització d'un prisma.

Aparença d'un tetràedre

La qualitat d'una tetraedralització depèn de la "forma" dels tetràedres que la conformen.

Cada vèrtex d'un tetràedre defineix un *angle sòlid* i cada costat defineix un *angle diedre*. En els dos casos, en interessa que els angles no siguin ni massa petits ni massa grans. Observeu que angles sòlids no massa petits impliquen angles diedres no massa grans i que un angle sòlid gran implica angles diedres petits. Tenint en compte els angles sòlids i dièdrics, els tetràedres poden ser classificar en 6 classes diferents:



Round: no té angles petits ni grans de cap tipus. És l'ideal.

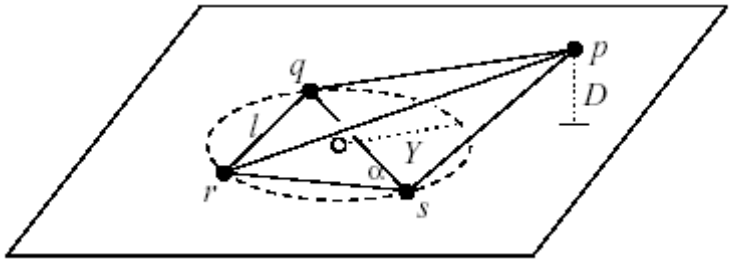
Needle: té un angle sòlid petit, però no té angles diedres ni petits ni grans.

Wedge: té angles diedres petits, però no té ni angles sòlids ni dièdrics grans.

Spindle: angles sòlids petits però no de grans i angles dièdrics grans però no de petits.

Cap: té un angle sòlid molt gran (quasi pla).

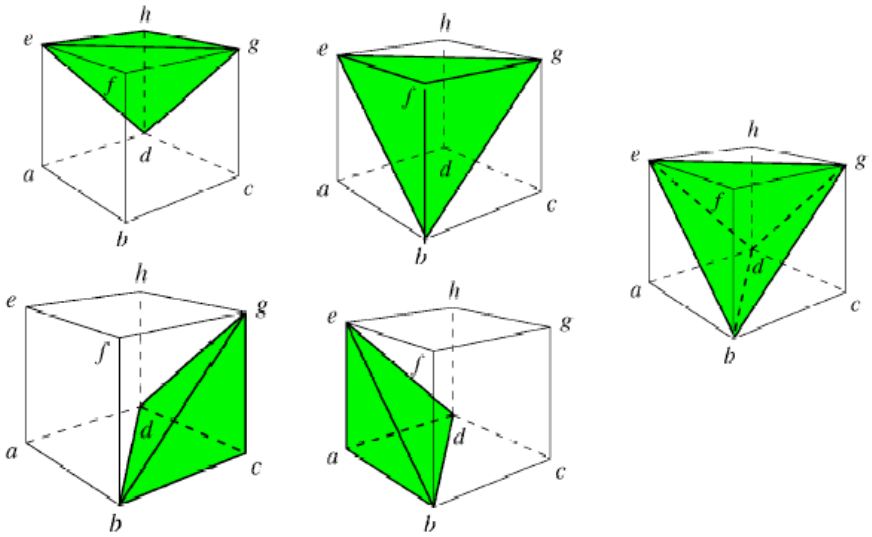
Sliver: angles dièdrics petits i grans, però sense angles sòlids grans. Per exemple un tetràedre determinat per quatre punts gairebé coplanars, situats igualment separats sobre un cercle màxim de l'esfera que els conté.



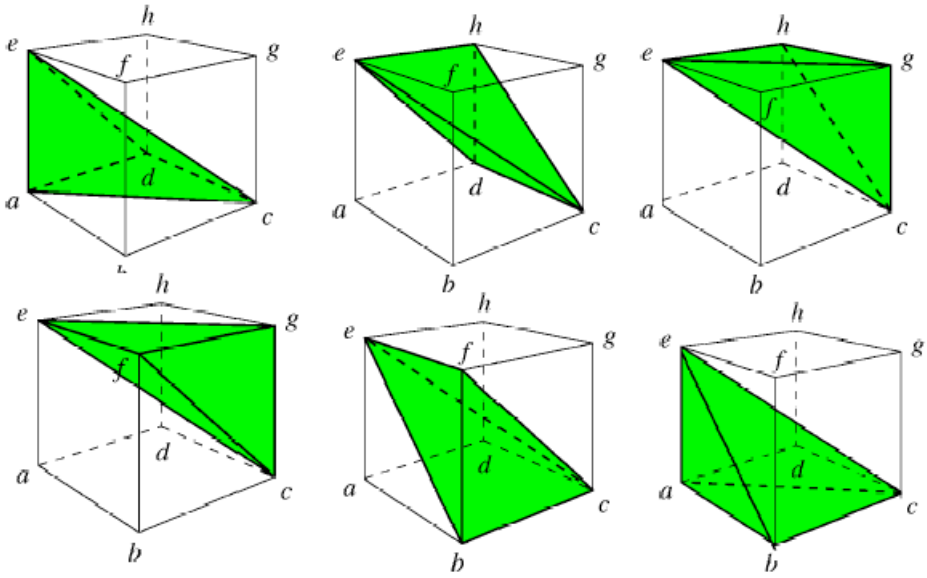
Exemple de sliver.

Tetraedralització d'un políedre

Un políedre pot tenir tetraedralitzacions amb diferent nombre de tetràedres.



Tetraedralització d'un cub amb 5 tetràedres.



Tetraedralització d'un cub amb 6 tetràedres.

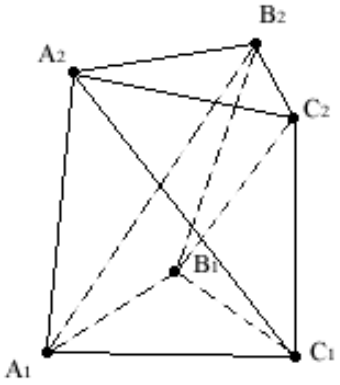
Teorema: tot políedre *convex* de *n* vèrtexs es pot tetraedralitzar amb *O(n)* tetràedres.

Prova

Escollir un vèrtex *v*, triangular cada cara del políedre que no és adjacent a *v*, i després connectar *v* a cada triangle.

Políedre de Schönhardt

No tot políedre és tetraedralitzable sense afegir punts de Steiner, com passa per exemple amb el políedre de Schönhardt. A continuació descriurem com construir aquest políedre. Començarem partint d'un prisma triangular amb tres cares rectangulars. Fixarem la cara inferior del prisma i girarem lleugerament la cara superior al voltant del seu centre en el pla que la conté. Cada una de les tres cares rectangulars quedarà dividida per una diagonal en dues cares triangulars amb un costat reflex (d'angle dièdric interior més gran que π), que "entre cap a l'interior" del políedre. El vèrtex superior esquerra i l'inferior dret de cada una de les (anteriors) cares rectangulars, al quedar separats per un costat reflex, no són mútuament visibles des de dins del políedre. Qualsevol conjunt de quatre vèrtexs del políedre ha de contenir dos vèrtexs separats per un costat reflex, per tant cap tetràedre els vèrtexs del qual també ho siguin del políedre no estarà totalment inclòs en el políedre. Conseqüentment, el políedre de Schönhardt no es pot tetraedralitzar sense un vèrtex addicional, situat per exemple al "centre" del políedre.



Políedre de Schönhardt

Teorema: tot políedre de n vèrtexs es pot tetraedralitzar fent servir $O(n^2)$ punts de Steiner amb un total de $O(n^2)$ tetràedres.

Teorema: tot políedre amb n vèrtexs i r costats reflex és pot partir en $O(n+r^2)$ tetràedres fent servir $O(n+r^2)$ punts de Steiner.

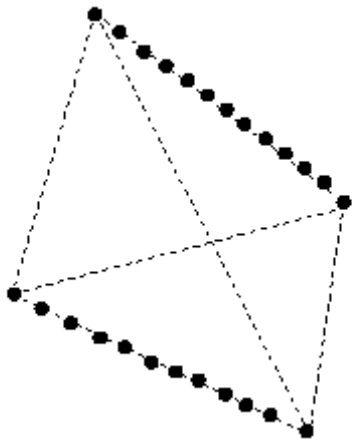
Tetraedralització d'un conjunt de punts

Teorema: Sigui S un conjunt de n punts de l'espai, *amb cap subconjunt de quatre punts en un mateix pla*, de manera que n_e punts de S són de la frontera de $CH(S)$ i que els restants $n_i=n-n_e$ són interiors a $CH(S)$. Es pot tetraedralitzar S amb $2n_e-7+3n_i \in O(n)$ tetràedres.

Prova

Fent servir la fórmula d'Euler, no és difícil veure que $CH(S)$ té $2n_e-4$ triangles a la frontera i per tant el seu interior pot ser tetraedralitzat connectant un vèrtex arbitrari v a tots els triangles no incidents amb v. Donat que un vèrtex té almenys grau 3, obtenim almenys $2n_e-7$ tetràedres. Després, per acabar, afegirem d'un en un els restants punts interiors a $CH(S)$, descomposant el tetràedre que el conté en quatre nous tetràedres.

Quan els n punts de S estan en *posició especial*, no és sempre possible obtenir una tetraedralització amb $O(n)$ tetràedres. A la figura inferior tenim $n/2$ punts a cada un dels dos segments no colineals. La única tetraedralització possible en aquest cas s'obté amb els $O(n^2)$ tetràedres construïts agafant parells de punts consecutius del primer segment i parells de punts consecutius del segon segment.



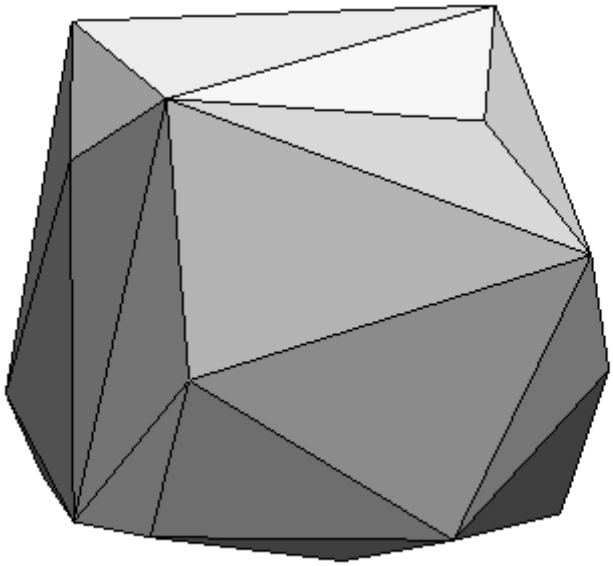
Conjunt que es tetraedralitza amb $O(n^2)$ tetràedres.

Tetraedralització de Delaunay

Un conjunt de punts de l'espai *S* és *no degenerat* si no hi ha quatre punts que pertanyin a un pla i no hi ha cinc punts que pertanyin a una esfera. A partir d'ara suposarem que *S* és no degenerat.

Un tetràedre definit per quatre punts de *S* és un *tetràedre de Delaunay* si l'esfera que els circumscriu no conté cap punt de *S* al seu interior.

La unió de tots els tetràedres de Delaunay forma la *tetraedralització de Delaunay*, *DT(S)*, de *S*. La tetraedralització de Delaunay és única. Tot conjunt de punts admet una tetraedralització de Delaunay.



Tetraedralització de Delaunay.

Tetraedralitzacions Delaunay amb $O(n^2)$ tetràedres

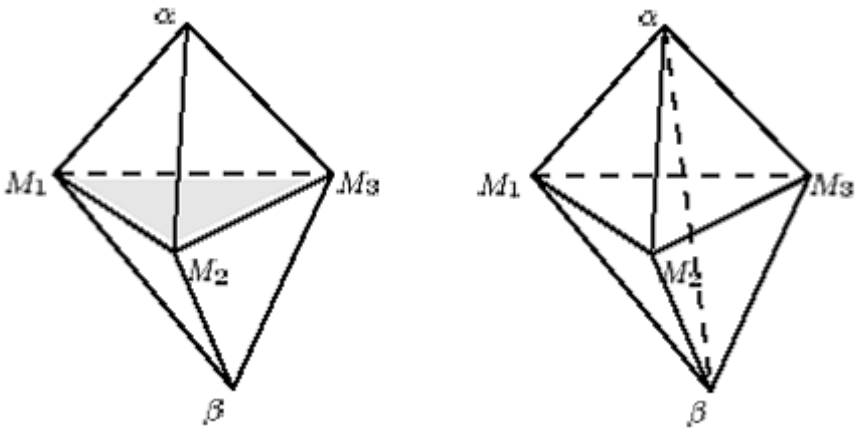
Considerarem la corba (*moment*) $M = \{(t^1,t^2,t^3) \mid t \in R\}$. Volem comprovar que qualsevol conjunt de punts sobre aquesta corba té una tetraedralització de Delaunay amb almenys $O(n^2)$ tetràedres.

Lema: Qualsevol pla interseca a M com a màxim a 3 punts i qualsevol esfera interseca a M com a màxim a 4 punts.

Sigui $S = \{p_i=(t_i^1, t_i^2 \ t_i^3) \mid 1 \le i \le n\}$, amb $t_1, \ldots, t_n$ reals arbitraris. Com que la projecció sobre el pla de M és la paràbola $M^* = \{(t^1,t^2) \mid t \in R\}$, els punts de M estan en posició convexa. El Lema anterior implica que qualsevol tetràedre determinat per quatre punts $p_i, \ p_{i+1}, p_j, p_{j+1}$, amb $i<j$, és de Delaunay. Per tant la tetraedralització de Delaunay de S com a mínim té $O(n^2)$ tetràedres.

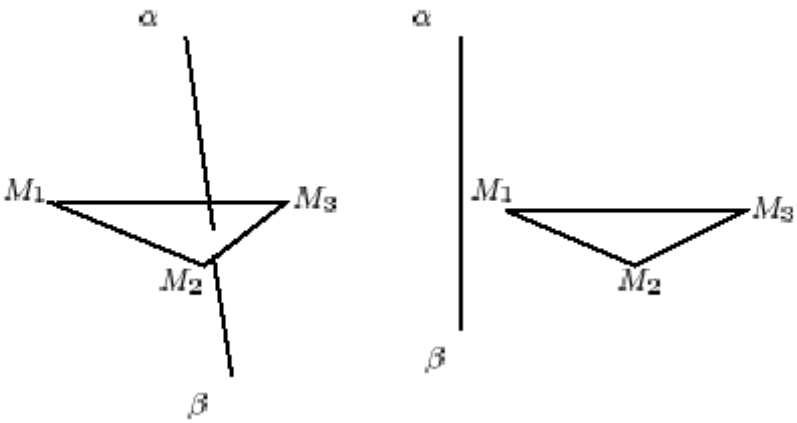
Flips

A R^3, els flips es fan sobre conjunts de cinc punts que defineixen un bitetràedre. Hi ha els dos tipus de flipat bàsics que es mostren a la figura següent:



El políedre de l'esquerra és la composició de dos tetràedres $\alpha M_1M_2M_3$ i $\beta M_1M_2M_3$ que comparteixen la cara $M_1M_2M_3$. Un flip 2-3 consisteix en substituir aquests dos tetràedres pels tres tetràedres de la dreta $\alpha M_1M_2\beta$, $\alpha M_2M_3\beta$ i $\alpha M_3M_1\beta$, que comparteixen el costat $\alpha\ \beta$. Un flip 3-2 passa els tres tetràedres de la dreta en els dos inicials de l'esquerra.

Un flip 2-3 només és possible si el segment $\alpha\ \beta$ talla la cara $M_1M_2M_3$ i un flip 3-2 és només possible si la cara $M_1M_2M_3$ talla segment $\alpha\ \beta$.



Algorismes de càlcul de la tetraedralització de Delaunay

Transformació al dual

Es redueix a computar l'envolopant convexa a R^4 (per exemple amb *Qhull*).

Complexitat en temps i espai $O(n^2)$.

Mètodes incrementals [Bowyer, Watson, Joe, Edelsbrunner-Shah]

Inserten els punts un a un, mantenint a cada moment la tetraedralització Delaunay dels punts.

Temps i espai $O(n^2)$.

Flipat Incremental [Joe]

Si s'intenta generalitzar el algorisme de flipat fet servir per a obtenir la DT al pla començant amb una tetraedralització qualsevol i fent servir una seqüència arbitrària de flips es pot arribar a una tetraedralització amb tetràedres que no siguin localment Delaunay, de manera que no es pugui seguir flipant. No obstant si es fa un flipat "incremental" el mètode funciona: afegir punts d'un en un i després flipar fins a obtenir la DT del conjunt de punts afegits [Joe].

Temps i espai $O(n^2)$.

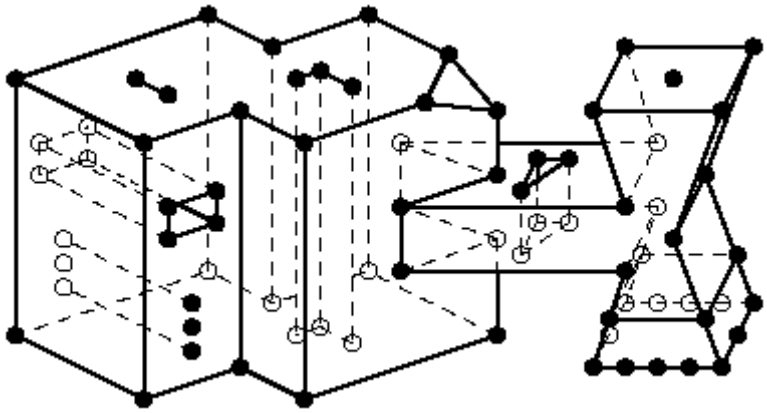
Tetraedralització restringida de Delaunay

A l'espai *no* existeix un anàleg a la triangulació restringida de Delaunay d'un PSLG del pla (conseqüència de la impossibilitat de tetraedralitzar el políedre de Schönhardt sense punts de Steiner).

Piecewise-linear complex (PLC)

Un *piecewise-linear complex* (PLC) és un conjunt *C* de vèrtexs, arestes i cares tal que:

- la intersecció de dos elements de *C* o és buida o és un element de *C*;
- la frontera de cada cara de *C* consisteix d'un o més poligonals o polígons disjunts.



Tetraedralització conforme

Una tetraedralització *T* es diu que és *conforma* a un PLC *C* si qualsevol cara de *C* és la unió de cares de *T*.

Algorisme [Cohen-Steiner, Colin de Verdièrez, Yvinec]

Donat un PLC *C*, determina un conjunt de punts *P*, que inclou els vèrtexs de *C*, de manera que la tetraedralització de *P* es conforma a *C*.

Complexitats:

nombre de punts de Steiner: ?
temps: ?