INTERSECCIÓ DE SEGMENTS

Vera Sacristán

Geometria Computacional
Facultat d'Informàtica de Barcelona
Universitat Politècnica de Catalunya

INTERSECCIÓ DE SEGMENTS

INTERSECCIÓ DE SEGMENTS

Problema

Entrada: n segments del pla, $s_i = (p_i, q_i),\ i = 1 \ldots n$.
Sortida: Les $k = O(n^2)$ interseccions de parells de segments, (x, y, i, j).

INTERSECCIÓ DE SEGMENTS

Problema

Entrada: n segments del pla, $s_i = (p_i, q_i),\ i = 1 \ldots n$.
Sortida: Les $k = O(n^2)$ interseccions de parells de segments, (x, y, i, j).

Algunes aplicacions (a més de les que ja coneixeu)

Sistemes d'informació geogràfica
Detectar les interseccions entre els elements de les capes d'informació (ciutats, carreteres, serveis,...)

Visualització realista
Eliminar les parts ocultes d'una escena

INTERSECCIÓ DE SEGMENTS

Problema

Entrada: n segments del pla, $s_i = (p_i, q_i),\ i = 1 \ldots n$.
Sortida: Les $k = O(n^2)$ interseccions de parells de segments, (x, y, i, j).

Solució per força bruta

Comprovar la intersecció dels $\binom{n}{2}$ parells de segments. Aquest algorisme té cost $\Theta(n^2)$.

INTERSECCIÓ DE SEGMENTS

Problema

Entrada: n segments del pla, $s_i = (p_i, q_i),\ i = 1 \ldots n$.
Sortida: Les $k = O(n^2)$ interseccions de parells de segments, (x, y, i, j).

Solució per força bruta

Comprovar la intersecció dels $\binom{n}{2}$ parells de segments. Aquest algorisme té cost $\Theta(n^2)$.

Complexitat del problema

El problema té complexitat $\Omega(n^2)$, perquè hi ha configuracions de segments que tenen aquest nombre de talls.

INTERSECCIÓ DE SEGMENTS

Problema

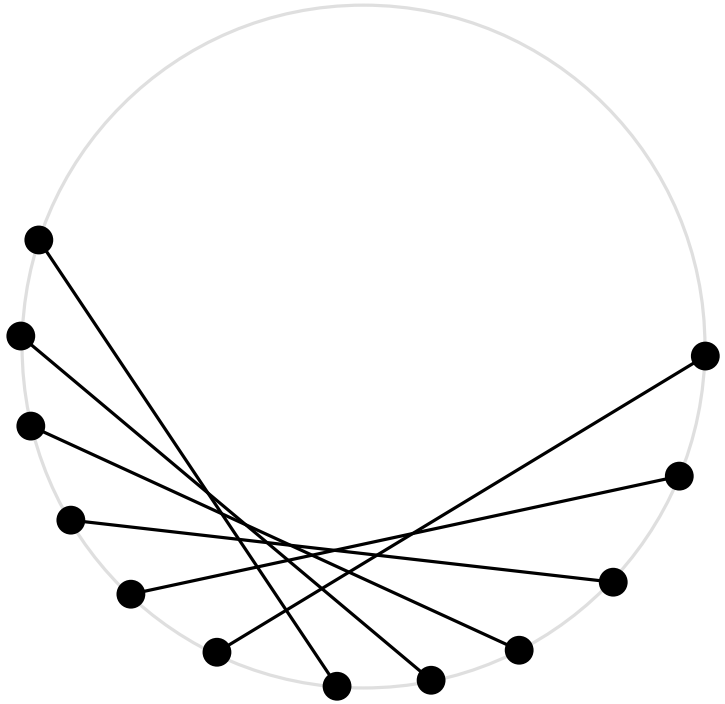
Entrada: n segments del pla, $s_i = (p_i, q_i),\ i = 1 \ldots n$.
Sortida: Les $k = O(n^2)$ interseccions de parells de segments, (x, y, i, j).

Solució per força bruta

Comprovar la intersecció dels $\binom{n}{2}$ parells de segments. Aquest algorisme té cost $\Theta(n^2)$.

Complexitat del problema

El problema té complexitat $\Omega(n^2)$, perquè hi ha configuracions de segments que tenen aquest nombre de talls.



INTERSECCIÓ DE SEGMENTS

Problema

Entrada: n segments del pla, $s_i = (p_i, q_i),\ i = 1 \ldots n$.
Sortida: Les $k = O(n^2)$ interseccions de parells de segments, (x, y, i, j).

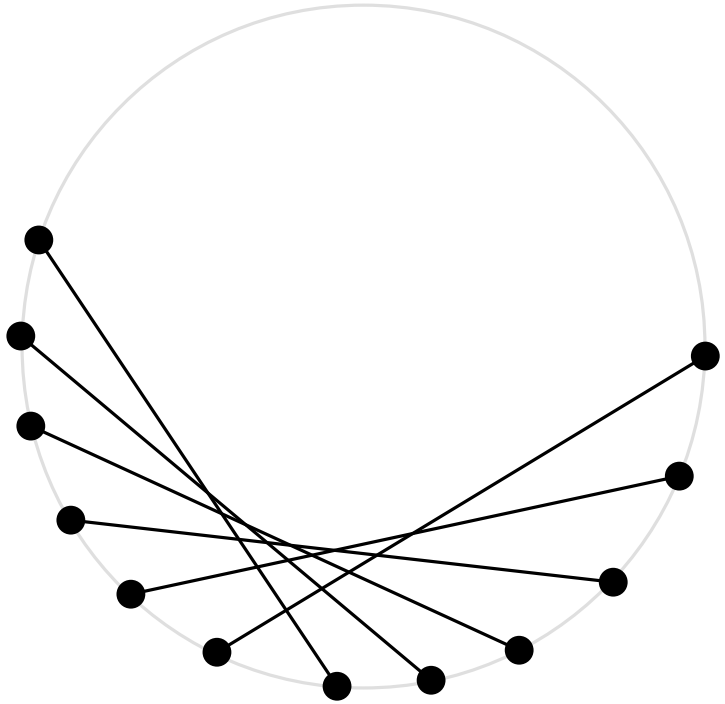
Solució per força bruta

Comprovar la intersecció dels $\binom{n}{2}$ parells de segments. Aquest algorisme té cost $\Theta(n^2)$.

Complexitat del problema

El problema té complexitat $\Omega(n^2)$, perquè hi ha configuracions de segments que tenen aquest nombre de talls.

Ara bé, existeixen conjunts de n segments amb un nombre d'interseccions substancialment inferior a $\binom{n}{2}$.



INTERSECCIÓ DE SEGMENTS

Problema

Entrada: n segments del pla, $s_i = (p_i, q_i),\ i = 1 \ldots n$.
Sortida: Les $k = O(n^2)$ interseccions de parells de segments, (x, y, i, j).

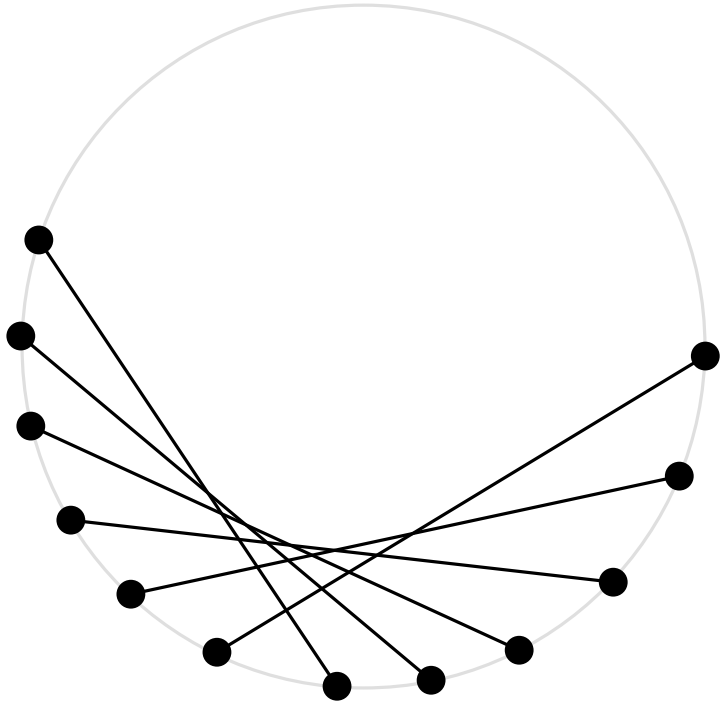
Solució per força bruta

Comprovar la intersecció dels $\binom{n}{2}$ parells de segments. Aquest algorisme té cost $\Theta(n^2)$.

Complexitat del problema

El problema té complexitat $\Omega(n^2)$, perquè hi ha configuracions de segments que tenen aquest nombre de talls.

Ara bé, existeixen conjunts de n segments amb un nombre d'interseccions substancialment inferior a $\binom{n}{2}$.



Solució output-sensitive

Algorisme el cost del qual depèn del nombre d'interseccions a reportar.

INTERSECCIÓ DE SEGMENTS

Problema

Entrada: n segments del pla, $s_i = (p_i, q_i),\ i = 1 \ldots n$.
Sortida: Les $k = O(n^2)$ interseccions de parells de segments, (x, y, i, j).

INTERSECCIÓ DE SEGMENTS

Problema

Entrada: n segments del pla, $s_i = (p_i, q_i),\ i = 1 \ldots n$.
Sortida: Les $k = O(n^2)$ interseccions de parells de segments, (x, y, i, j).

Observació 1

Si dos segments tenen projeccions disjuntes sobre una recta donada, aleshores són disjunts.

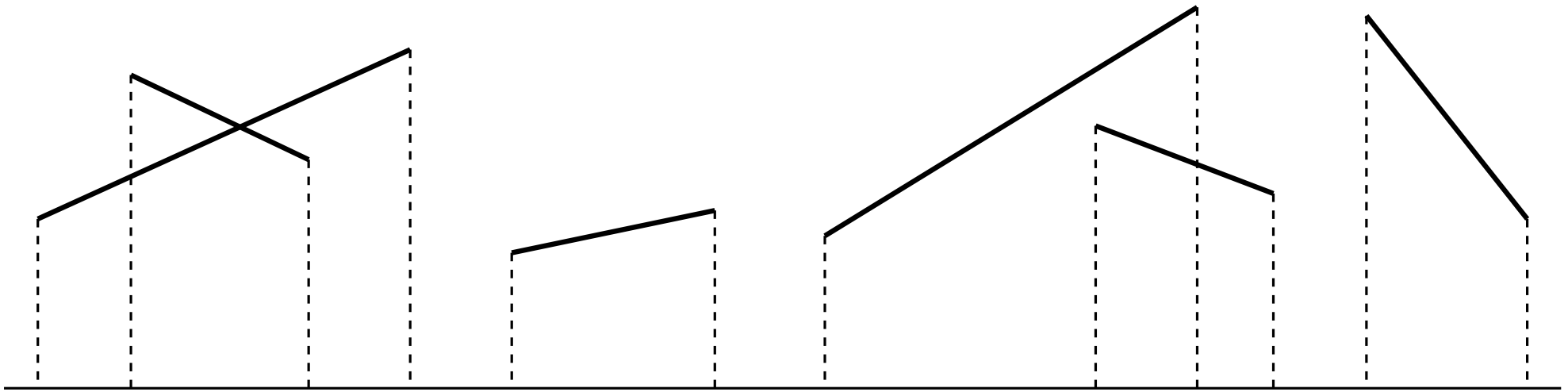
INTERSECCIÓ DE SEGMENTS

Problema

Entrada: n segments del pla, $s_i = (p_i, q_i),\ i = 1 \ldots n$.
Sortida: Les $k = O(n^2)$ interseccions de parells de segments, (x, y, i, j).

Observació 1

Si dos segments tenen projeccions disjuntes sobre una recta donada, aleshores són disjunts.



INTERSECCIÓ DE SEGMENTS

Problema

Entrada: n segments del pla, $s_i = (p_i, q_i),\ i = 1 \ldots n$.
Sortida: Les $k = O(n^2)$ interseccions de parells de segments, (x, y, i, j).

Observació 1

Si dos segments tenen projeccions disjuntes sobre una recta donada, aleshores són disjunts.

Observació 2

En escombrar el conjunt de segments amb una recta, dos segments que es tallen han de ser consecutius a la recta d'escombrat just abans de tallar-se.

INTERSECCIÓ DE SEGMENTS

Problema

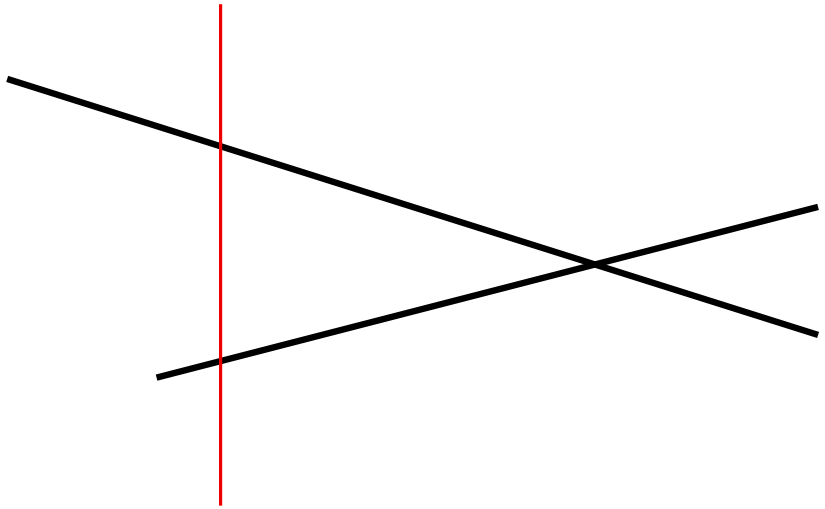
Entrada: n segments del pla, $s_i = (p_i, q_i),\ i = 1 \ldots n$.
Sortida: Les $k = O(n^2)$ interseccions de parells de segments, (x, y, i, j).

Observació 1

Si dos segments tenen projeccions disjuntes sobre una recta donada, aleshores són disjunts.

Observació 2

En escombrar el conjunt de segments amb una recta, dos segments que es tallen han de ser consecutius a la recta d'escombrat just abans de tallar-se.



INTERSECCIÓ DE SEGMENTS

Problema

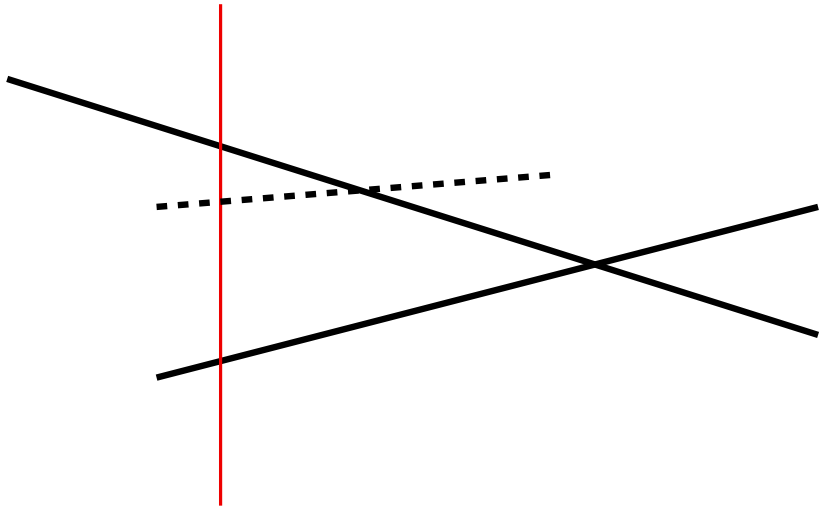
Entrada: n segments del pla, $s_i = (p_i, q_i),\ i = 1 \ldots n$.
Sortida: Les $k = O(n^2)$ interseccions de parells de segments, (x, y, i, j).

Observació 1

Si dos segments tenen projeccions disjuntes sobre una recta donada, aleshores són disjunts.

Observació 2

En escombrar el conjunt de segments amb una recta, dos segments que es tallen han de ser consecutius a la recta d'escombrat just abans de tallar-se.



INTERSECCIÓ DE SEGMENTS

Problema

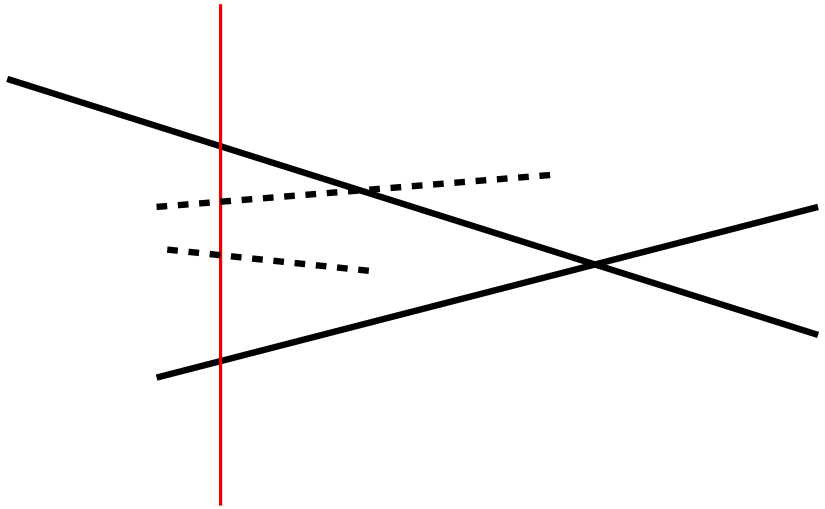
Entrada: n segments del pla, $s_i = (p_i, q_i),\ i = 1 \ldots n$.
Sortida: Les $k = O(n^2)$ interseccions de parells de segments, (x, y, i, j).

Observació 1

Si dos segments tenen projeccions disjuntes sobre una recta donada, aleshores són disjunts.

Observació 2

En escombrar el conjunt de segments amb una recta, dos segments que es tallen han de ser consecutius a la recta d'escombrat just abans de tallar-se.



INTERSECCIÓ DE SEGMENTS

Problema

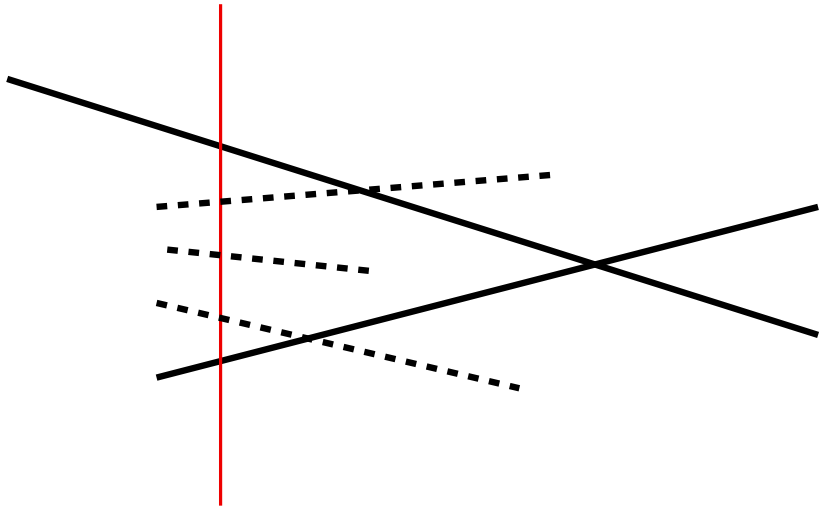
Entrada: n segments del pla, $s_i = (p_i, q_i),\ i = 1 \ldots n$.
Sortida: Les $k = O(n^2)$ interseccions de parells de segments, (x, y, i, j).

Observació 1

Si dos segments tenen projeccions disjuntes sobre una recta donada, aleshores són disjunts.

Observació 2

En escombrar el conjunt de segments amb una recta, dos segments que es tallen han de ser consecutius a la recta d'escombrat just abans de tallar-se.



Algorisme de Bentley-Ottman

Es tracta d'un algorisme d'escombrat.

Algorisme de Bentley-Ottman

Es tracta d'un algorisme d'escombrat.

Hipòtesis (que després eliminarem)

1. No hi ha abscisses repetides, és a dir: no hi ha segments verticals, i dos extrems dels segments, dos punts de tall entre segments o un extrem i un punt de tall mai no coincideixen sobre una mateixa vertical.

2. En cada punt d'intersecció, sols es tallen dos segments.

Algorisme de Bentley-Ottman

Es tracta d'un algorisme d'escombrat.

Hipòtesis (que després eliminarem)

1. No hi ha abscisses repetides, és a dir: no hi ha segments verticals, i dos extrems dels segments, dos punts de tall entre segments o un extrem i un punt de tall mai no coincideixen sobre una mateixa vertical.

2. En cada punt d'intersecció, sols es tallen dos segments.

Esdeveniments

- Tots els extrems dels segments (coneguts a priori)

- Tots els punts d'intersección entre segments (que es van descobrint a mida que avança l'escombrat)

INTERSECCIÓ DE SEGMENTS

Algorisme de Bentley-Ottman

Es tracta d'un algorisme d'escombrat.

Hipòtesis (que després eliminarem)

1. No hi ha abscisses repetides, és a dir: no hi ha segments verticals, i dos extrems dels segments, dos punts de tall entre segments o un extrem i un punt de tall mai no coincideixen sobre una mateixa vertical.

2. En cada punt d'intersecció, sols es tallen dos segments.

Esdeveniments

- Tots els extrems dels segments (coneguts a priori)

- Tots els punts d'intersección entre segments (que es van descobrint a mida que avança l'escombrat)

Recta d'escombrat

Relació dels segments interceptats, en ordre vertical, de dalt a baix.

INTERSECCIÓ DE SEGMENTS

Algorisme de Bentley-Ottman

INTERSECCIÓ DE SEGMENTS

Algorisme de Bentley-Ottman

Entrada: n segments del pla, $s_i = (p_i, q_i),\ i = 1 \ldots n$.
Sortida: Les $k = O(n^2)$ interseccions de parells de segments, (x, y, i, j).

INTERSECCIÓ DE SEGMENTS

Algorisme de Bentley-Ottman

Entrada: n segments del pla, $s_i = (p_i, q_i),\ i = 1 \ldots n$.
Sortida: Les $k = O(n^2)$ interseccions de parells de segments, (x, y, i, j).

Inicialització:
- Ordenar els $2n$ extrems per abscissa i guardar la informació a E.
- La recta R comença buida.

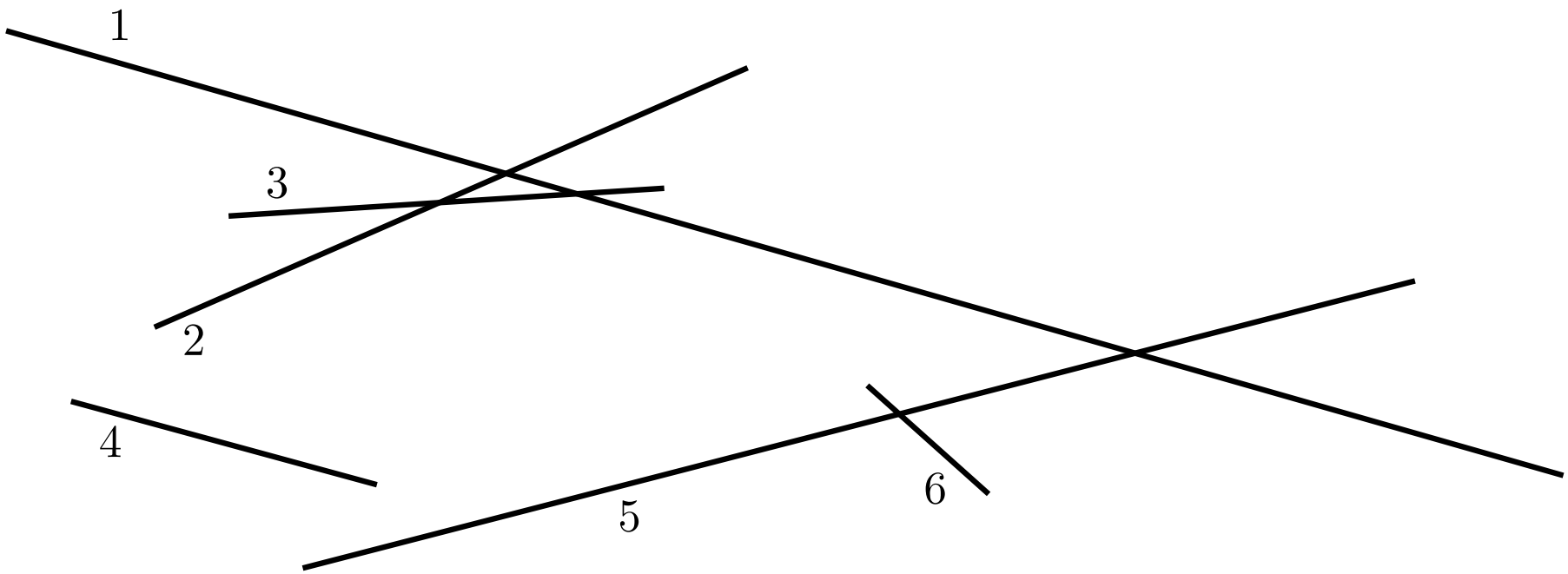
INTERSECCIÓ DE SEGMENTS

Avenç

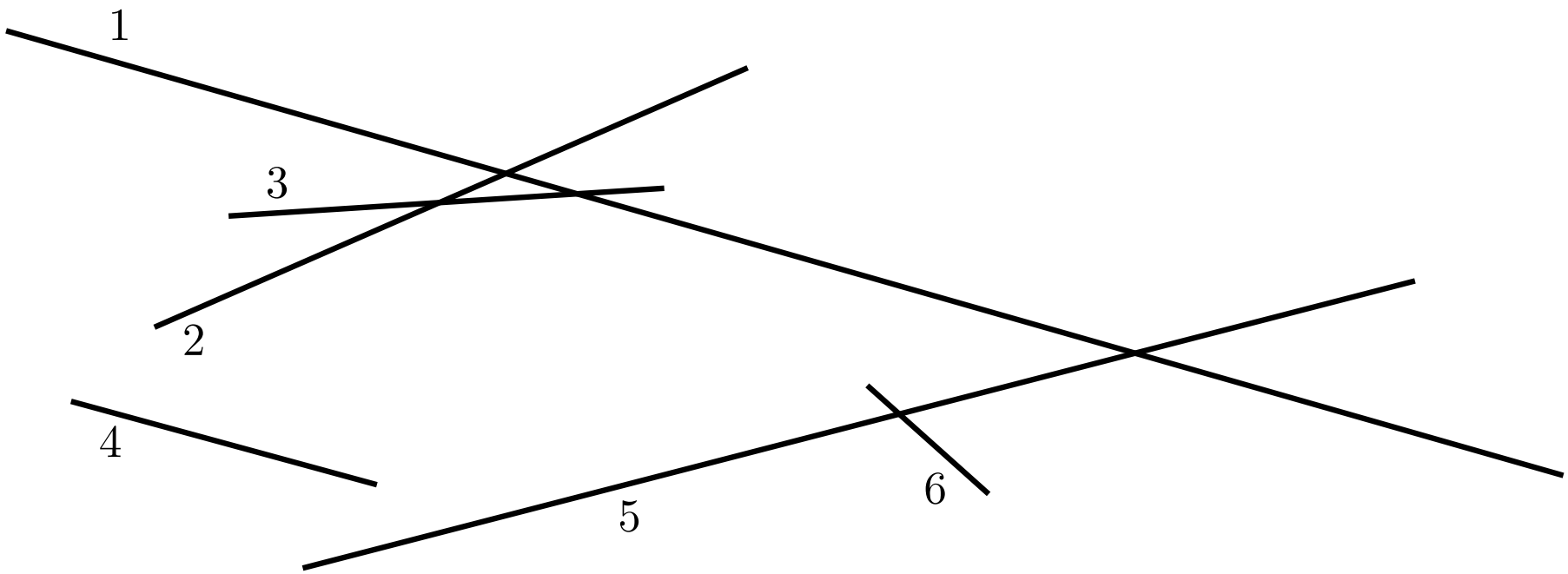
Mentre $E \neq \emptyset$ fer:

1. $p = \min E$
2. Si $p = \text{inici}(s)$, aleshores:
   - Insertar s a R
   - Si s^- i s es tallen a la dreta de p, insertar el punt de tall a E i reportar-lo (si cal). Idem per a s^+
3. Si $p = \text{final}(s)$, aleshores:
   - Si s^- i s^+ es tallen a la dreta de p, insertar el punt de tall a E i reportar-lo (si cal).
   - Esborrar s de R
4. Si $p = s_1 \cap s_2$ amb $s_1 <_R s_2$, aleshores:
   - Si s_1^- i s_2 es tallen a la dreta de p, insertar el punt de tall a E i reportar-lo (si cal). Idem per a s_2^+ i s_1.
   - Intercanviar l'ordre de s_1 i s_2 a R
5. Esborrar p de E

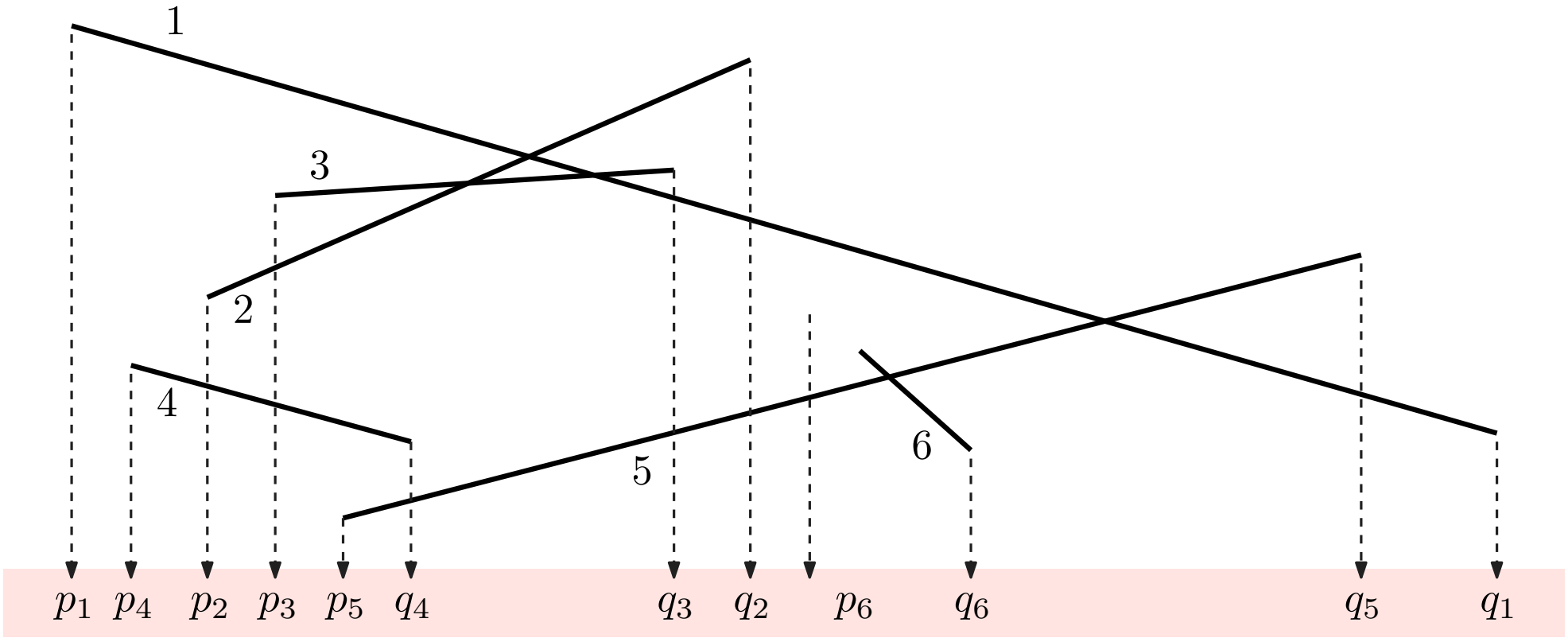
Simulació de l'algorisme de Bentley-Ottman



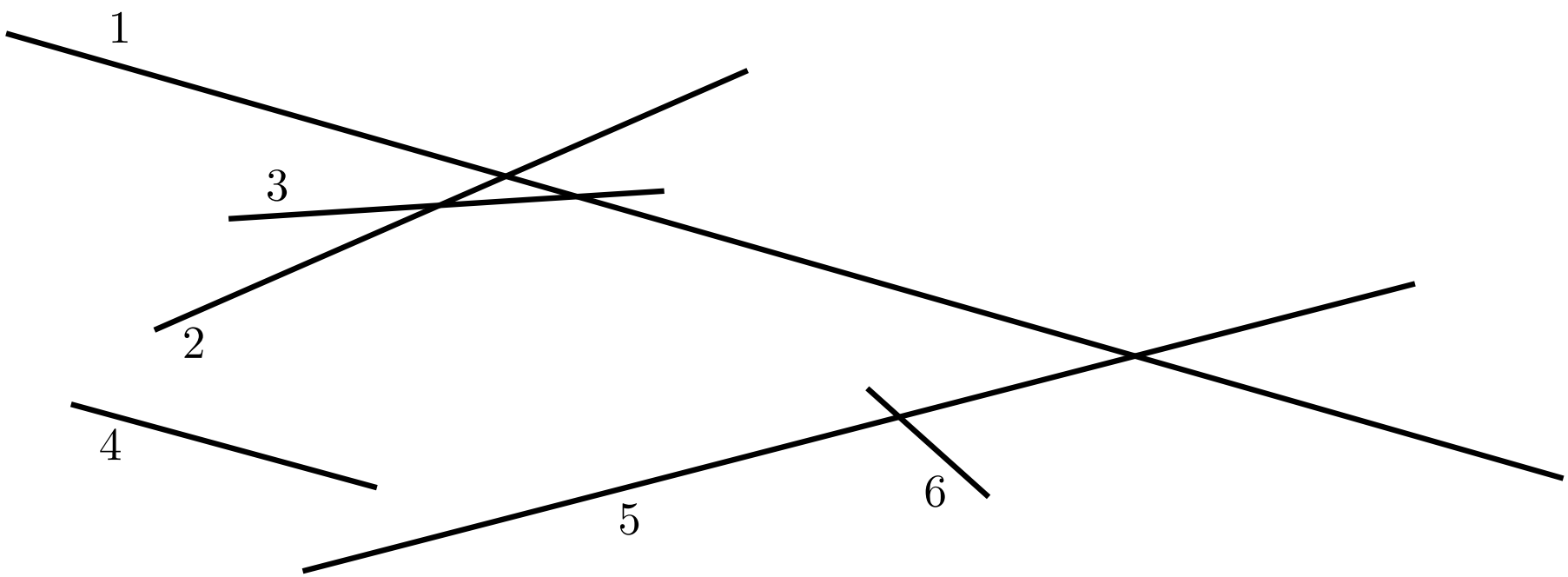
Simulació de l'algorisme de Bentley-Ottman



Simulació de l'algorisme de Bentley-Ottman

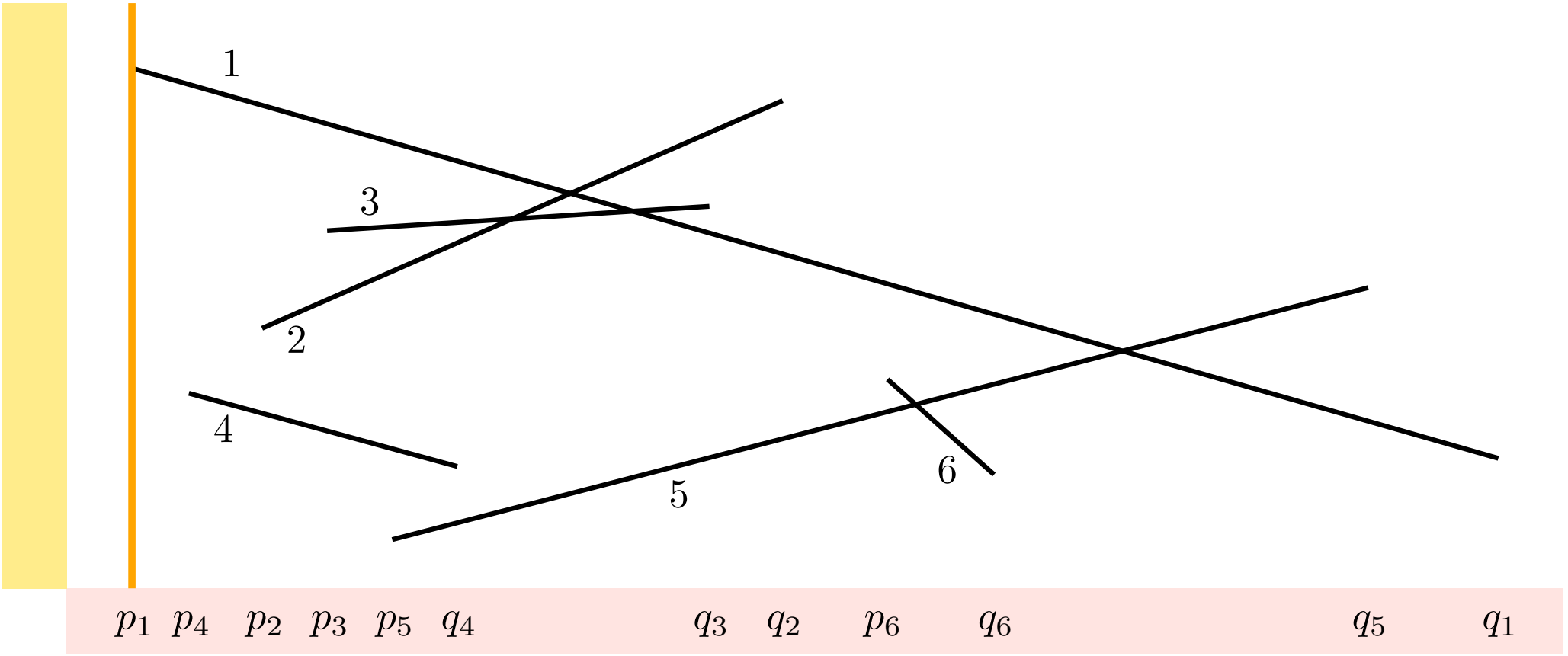


Simulació de l'algorisme de Bentley-Ottman

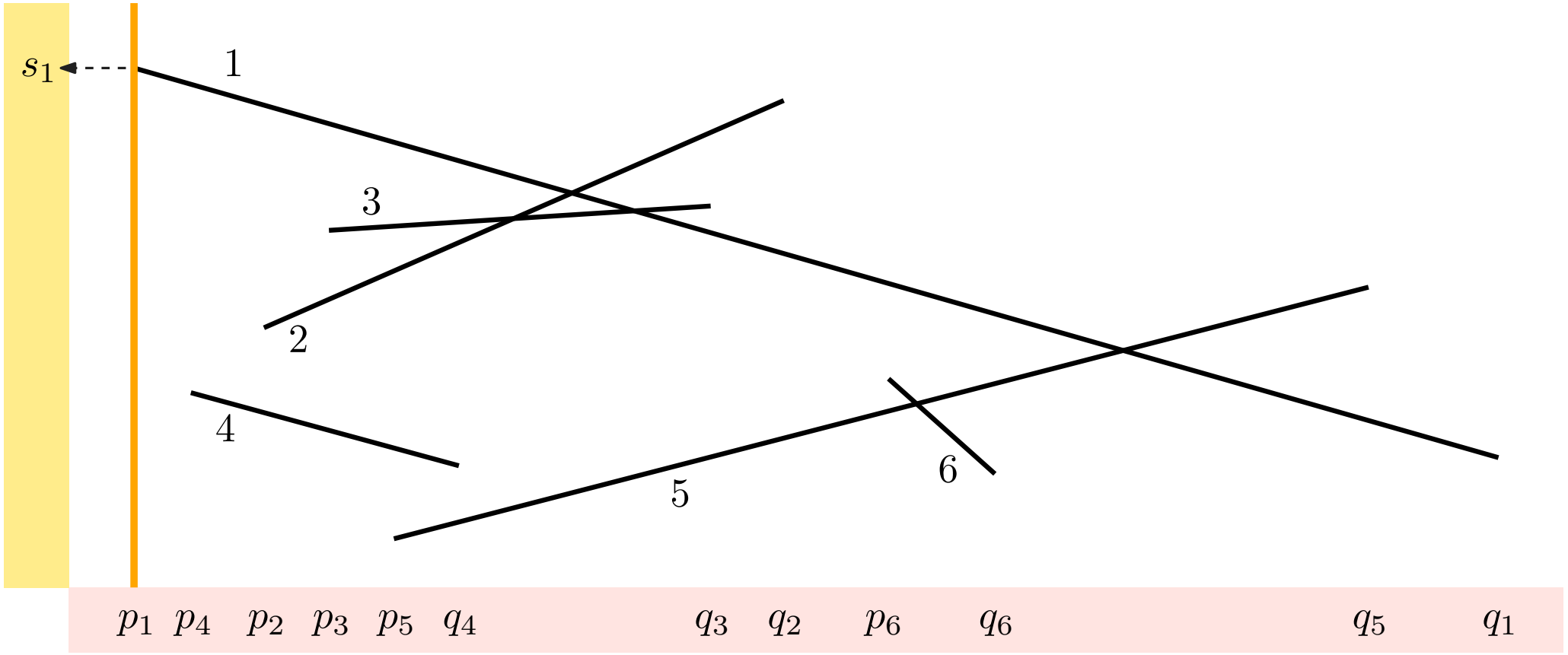


p_1 p_4 p_2 p_3 p_5 q_4 q_3 q_2 p_6 q_6 q_5 q_1

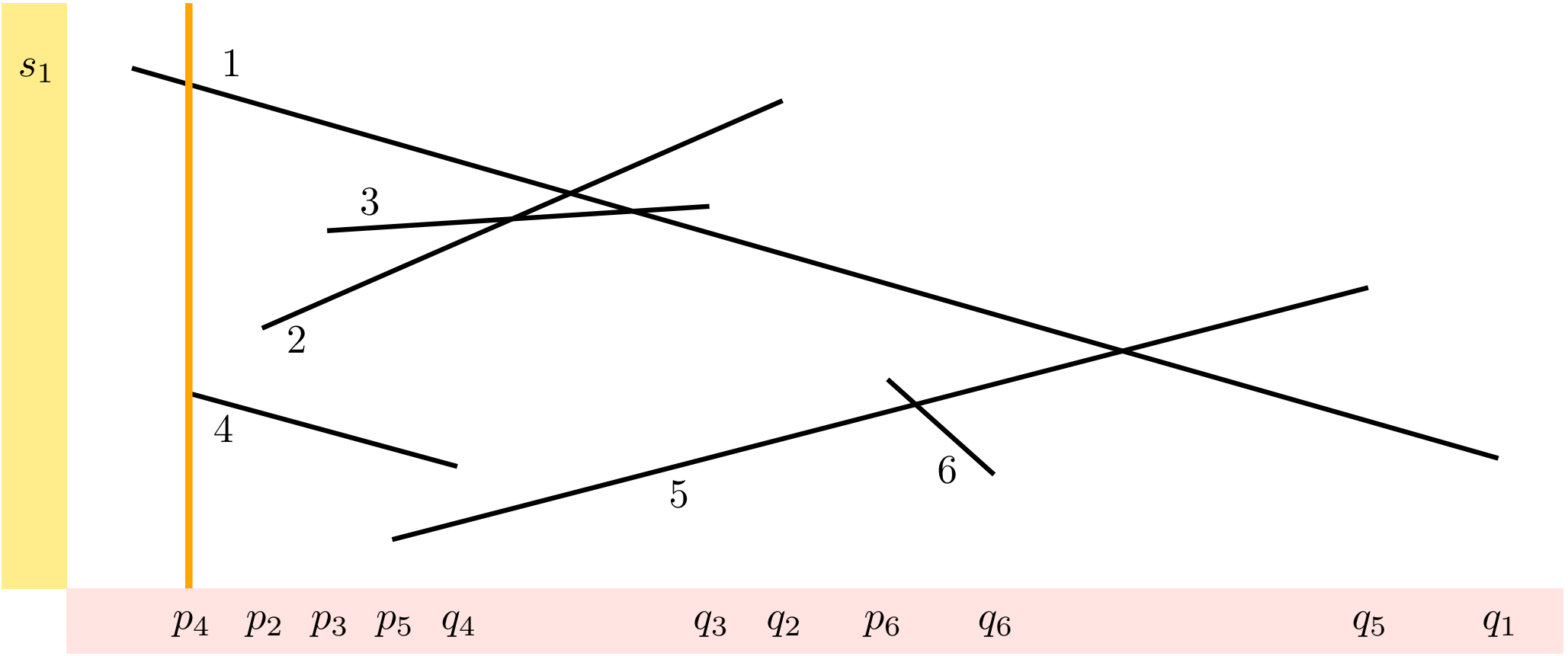
Simulació de l'algorisme de Bentley-Ottman



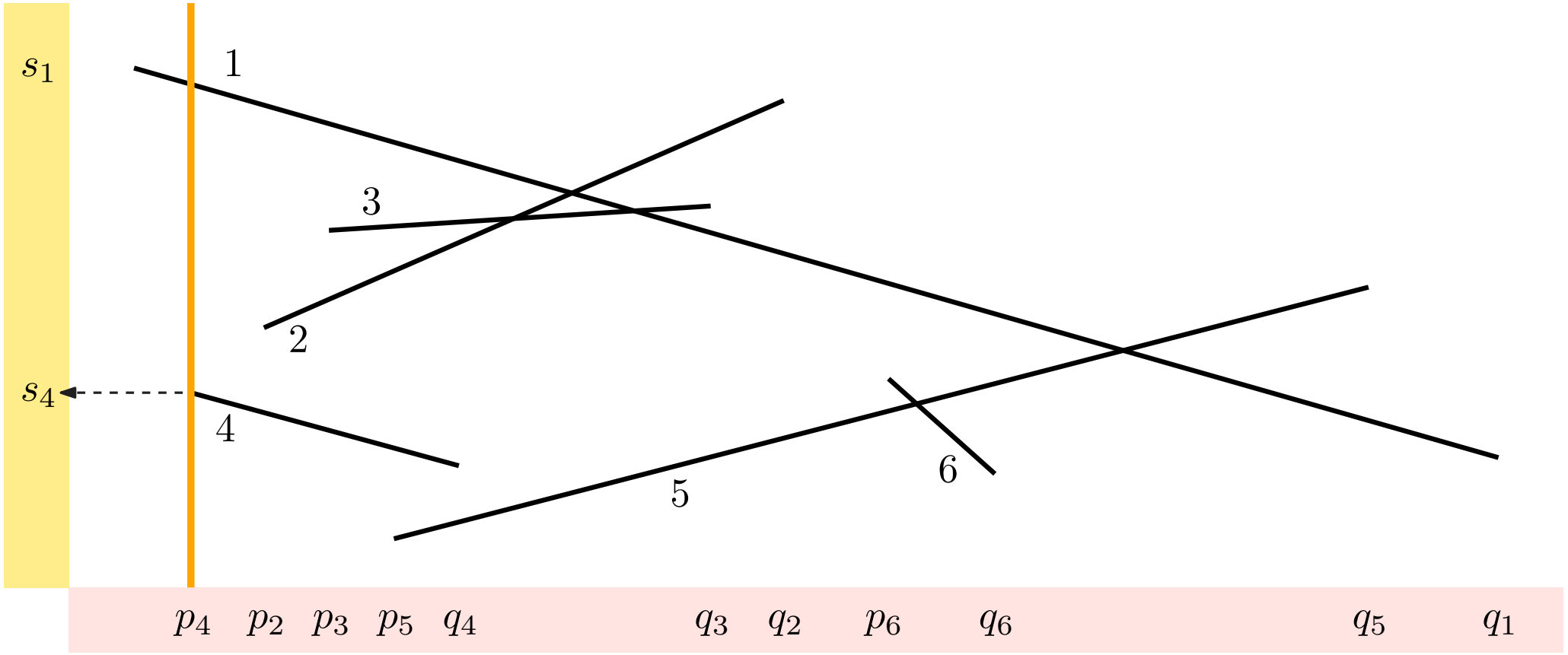
Simulació de l'algorisme de Bentley-Ottman



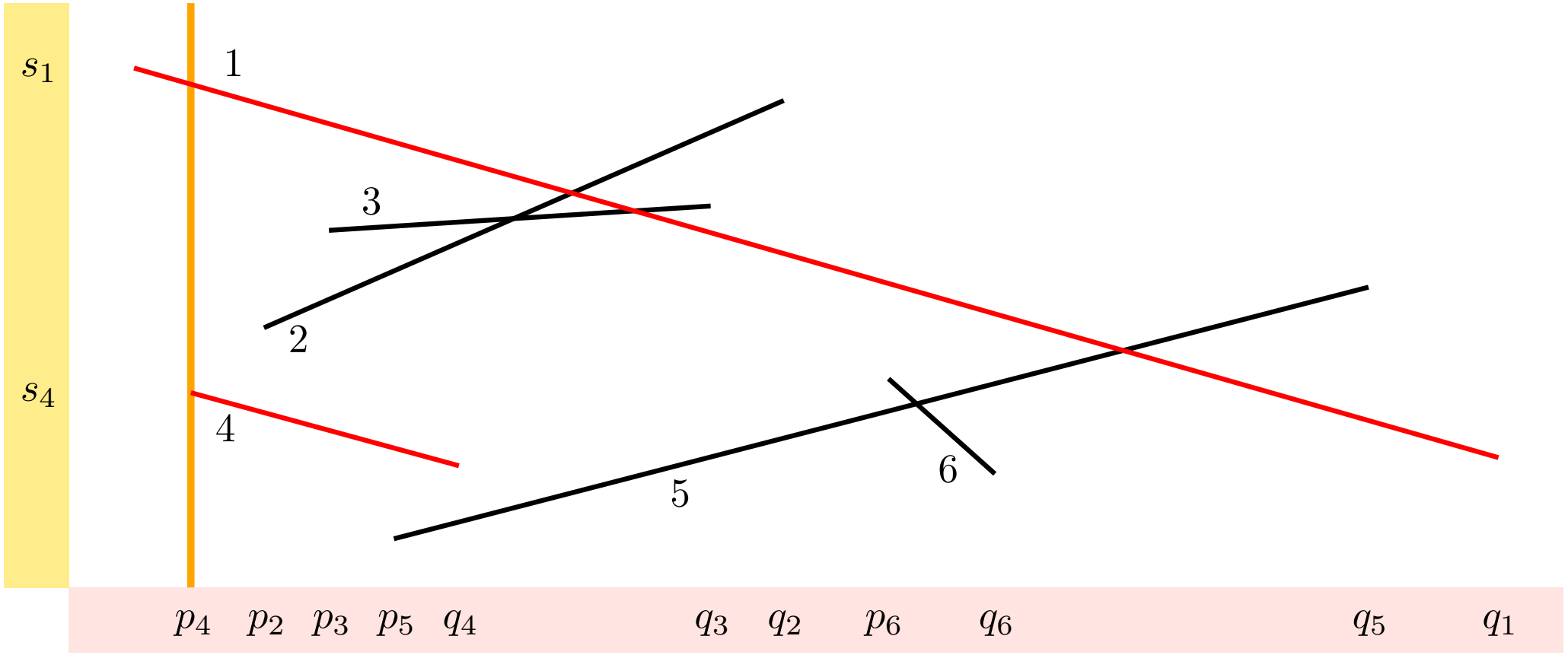
Simulació de l'algorisme de Bentley-Ottman



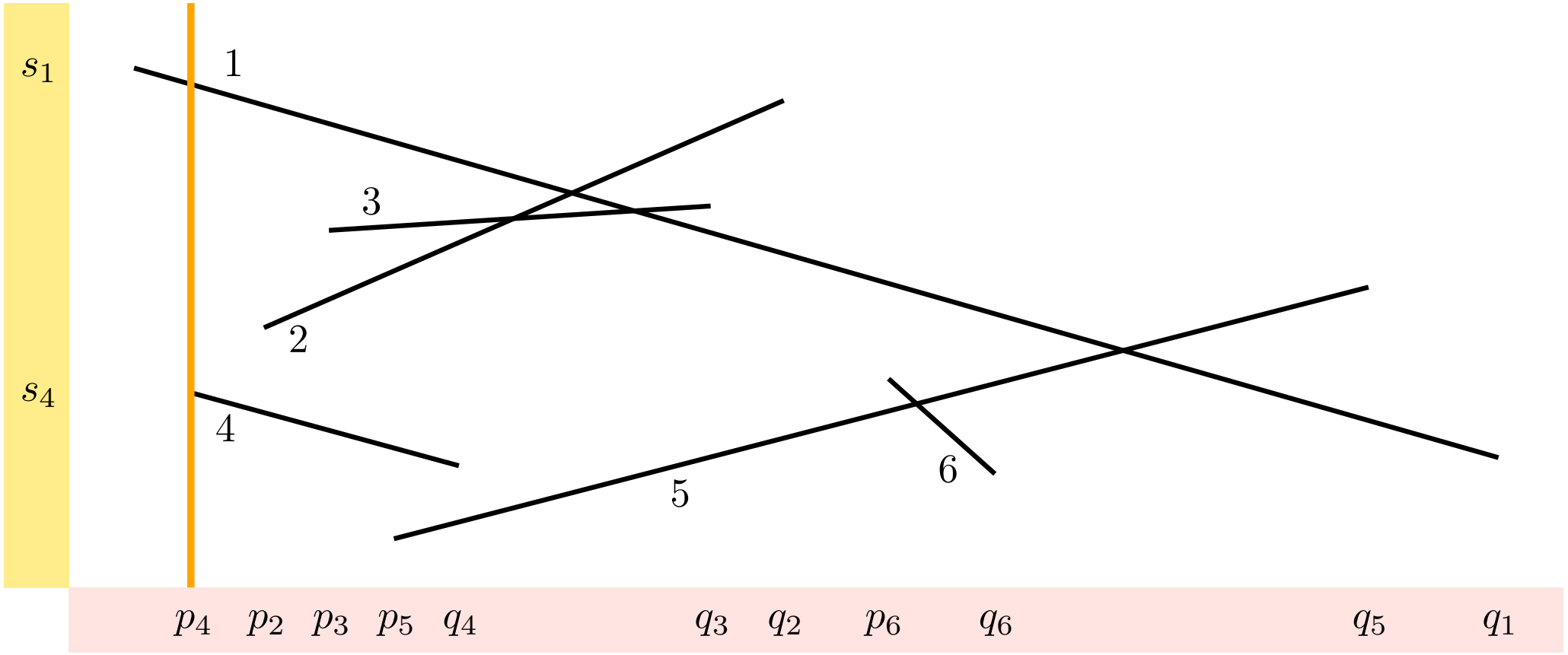
Simulació de l'algorisme de Bentley-Ottman



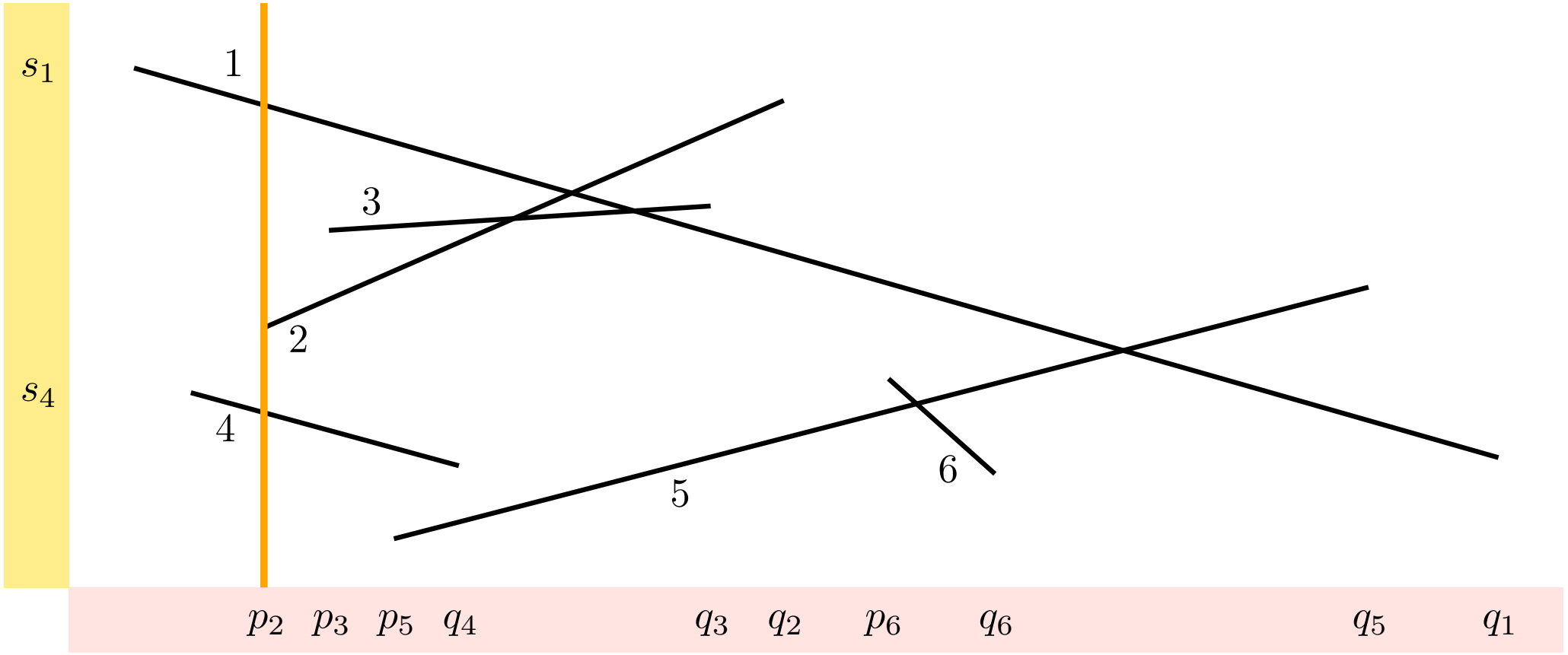
Simulació de l'algorisme de Bentley-Ottman



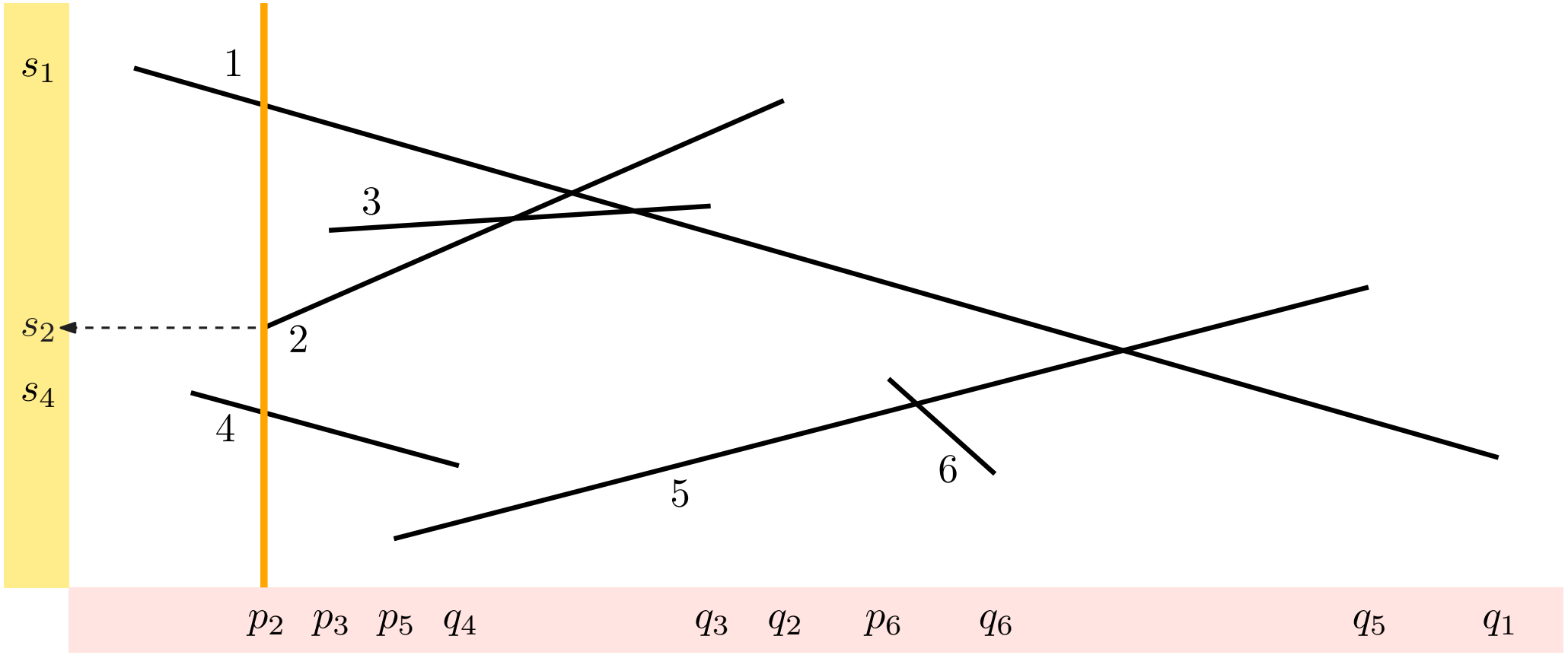
Simulació de l'algorisme de Bentley-Ottman



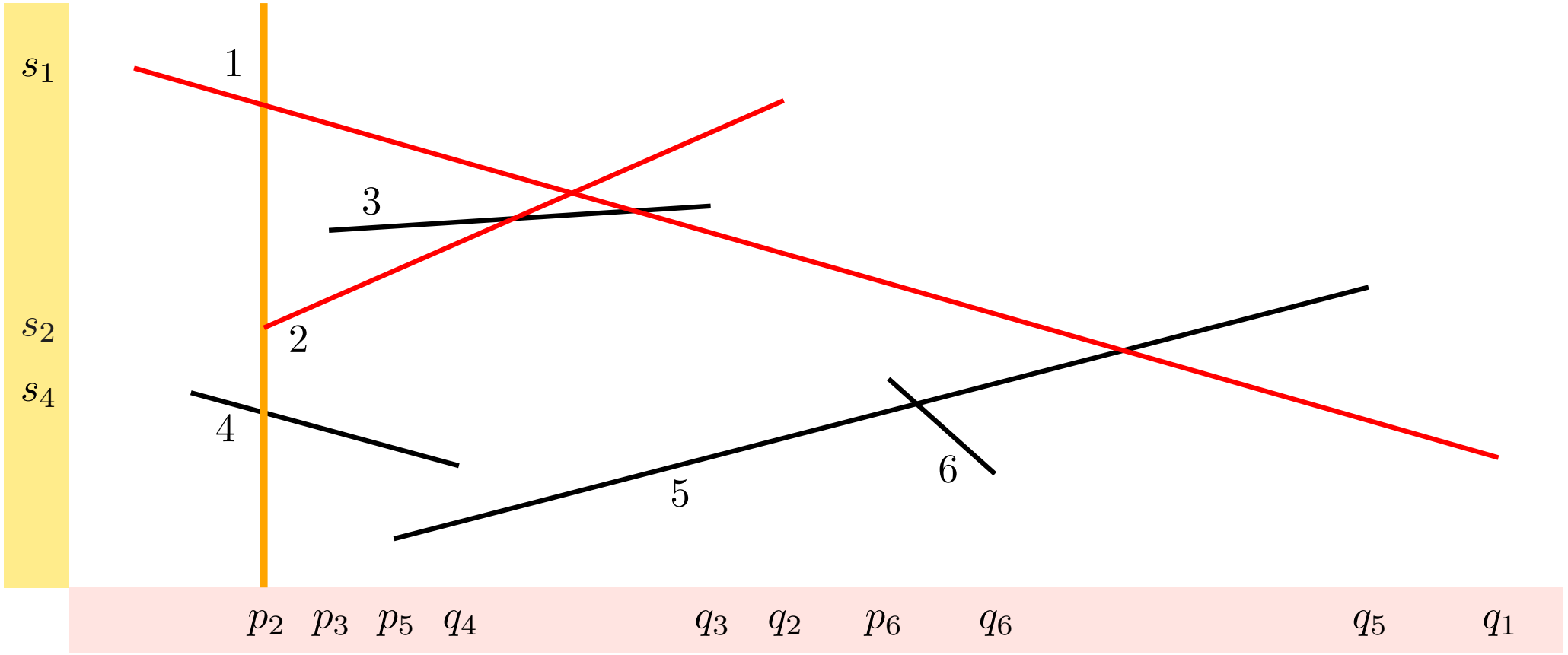
Simulació de l'algorisme de Bentley-Ottman



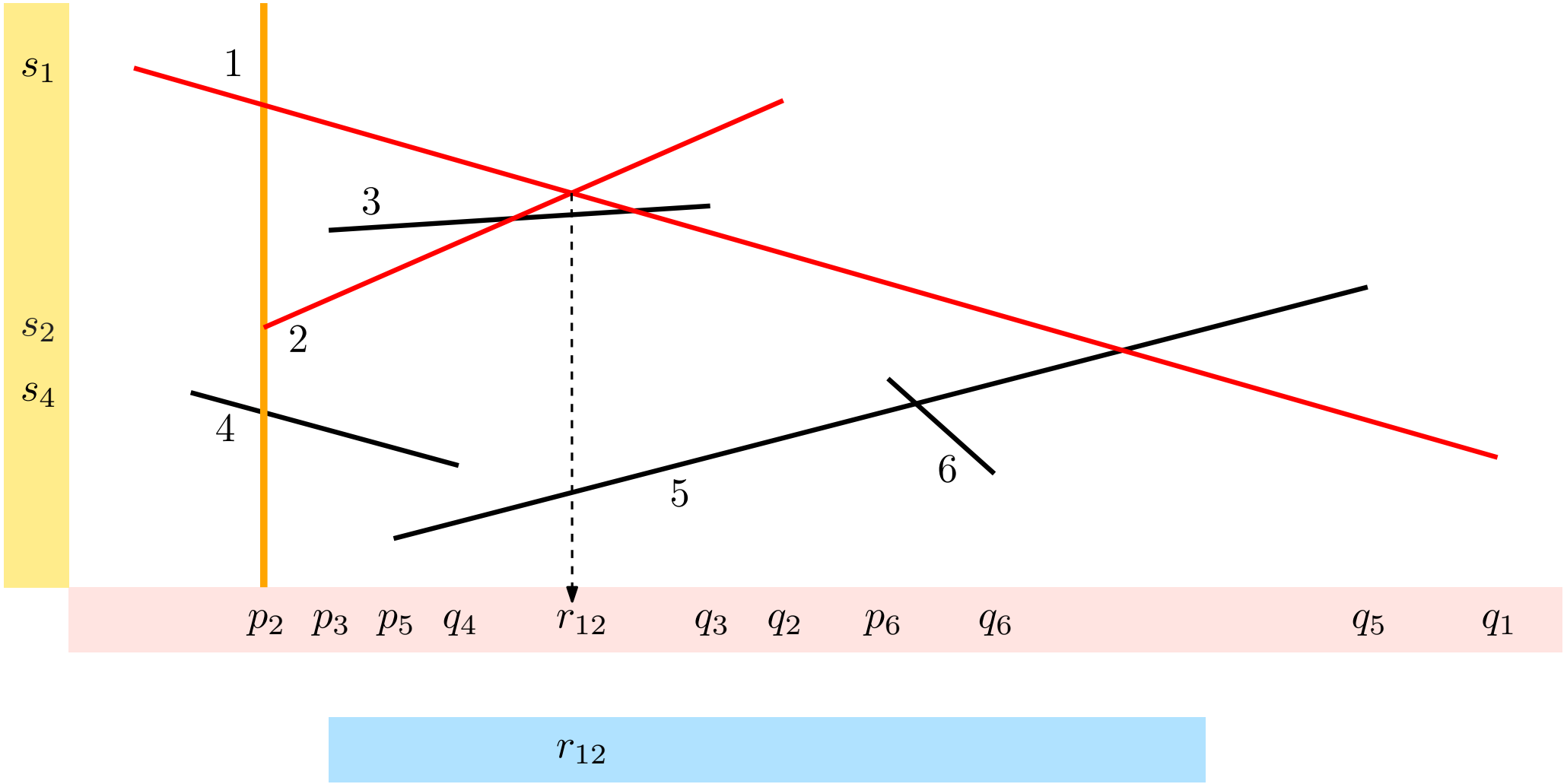
Simulació de l'algorisme de Bentley-Ottman



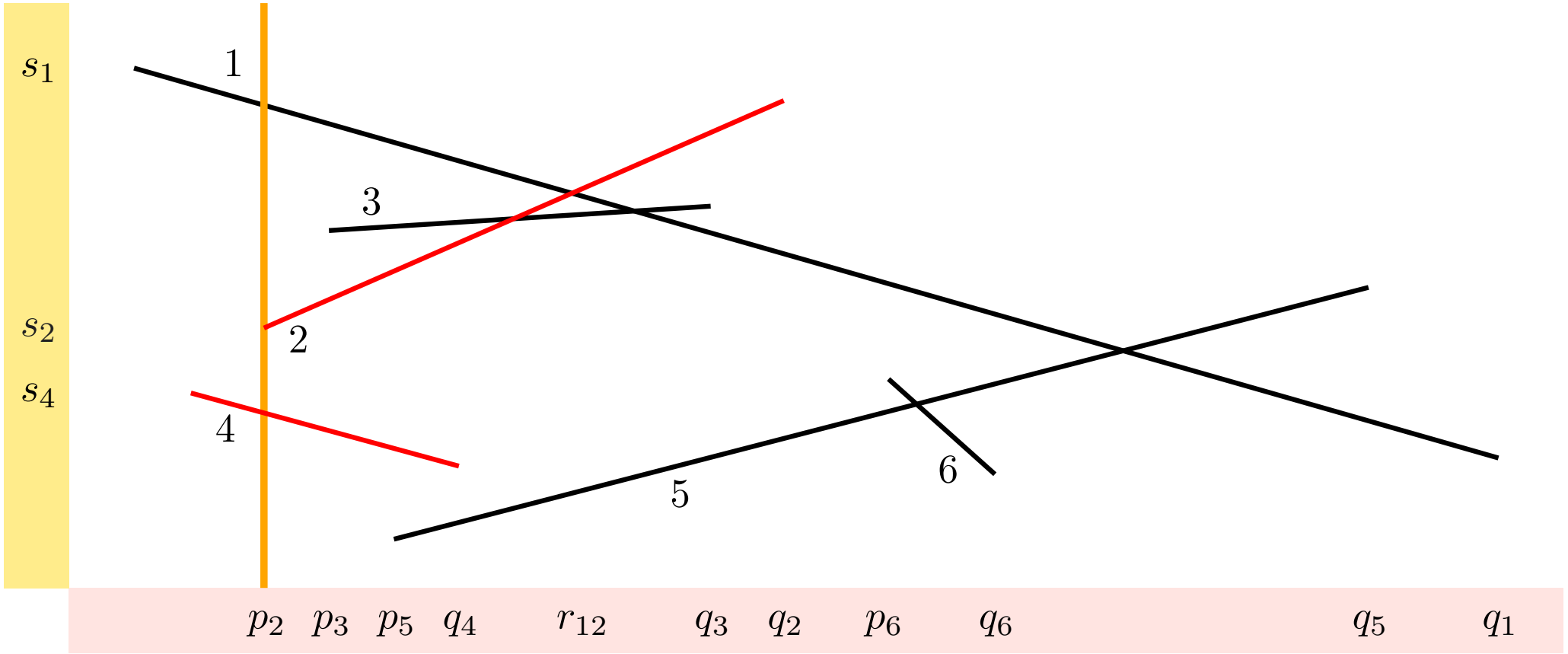
Simulació de l'algorisme de Bentley-Ottman



Simulació de l'algorisme de Bentley-Ottman

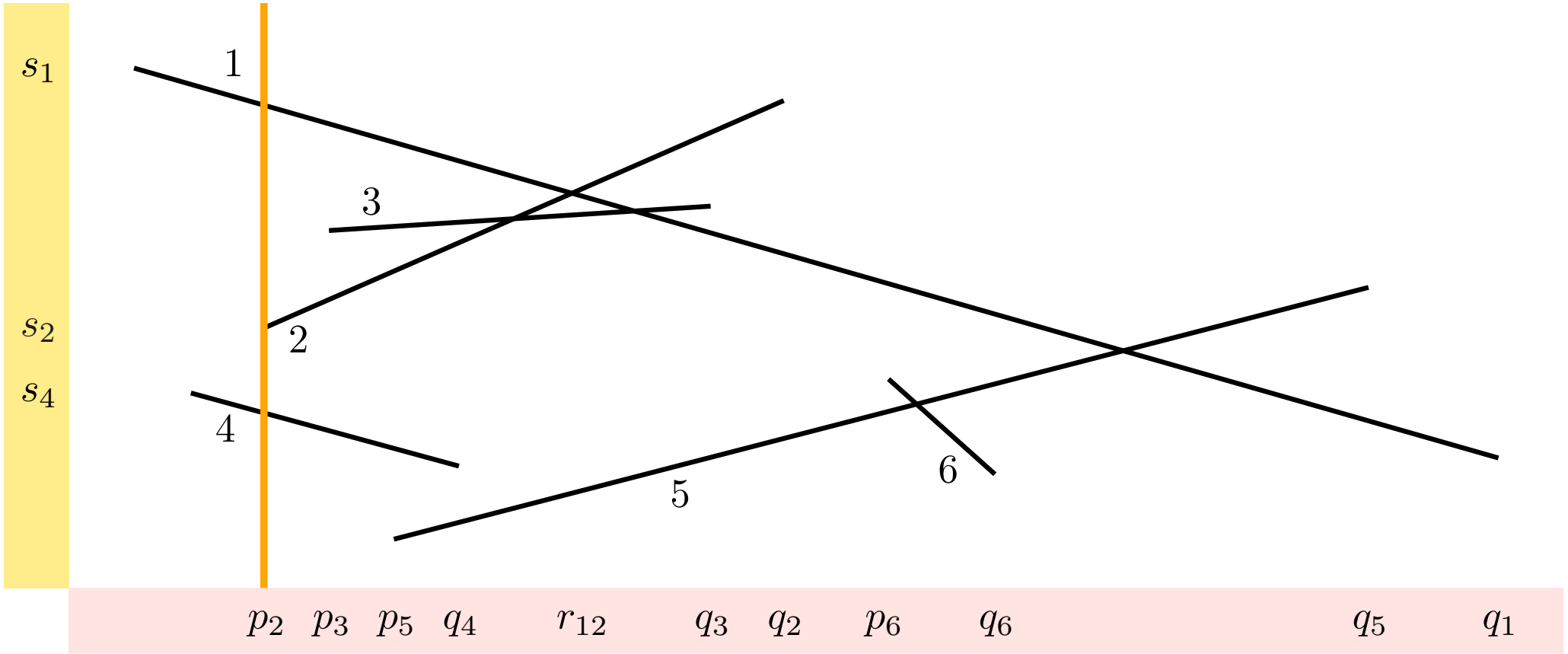


Simulació de l'algorisme de Bentley-Ottman



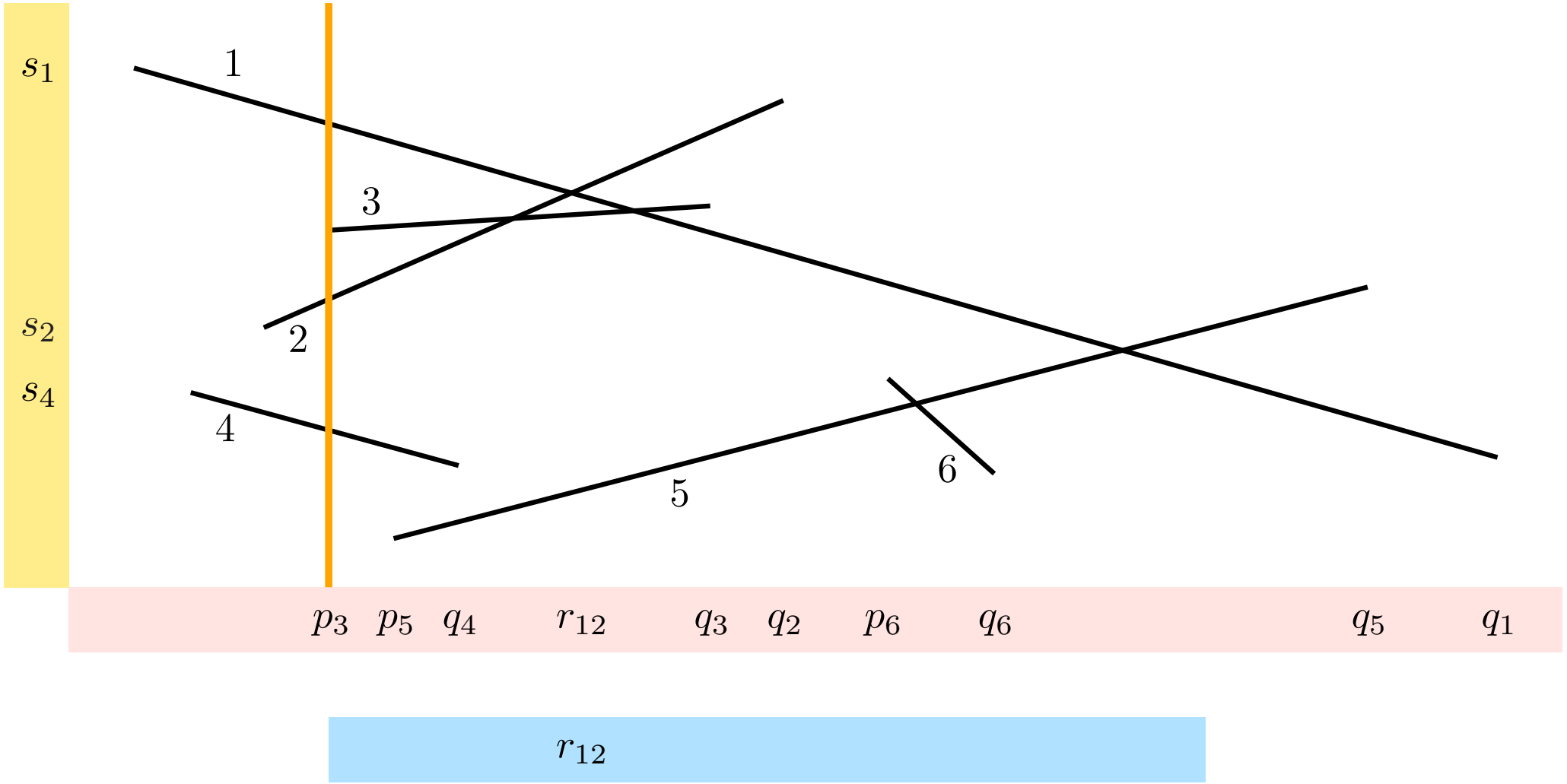
r_{12}

Simulació de l'algorisme de Bentley-Ottman

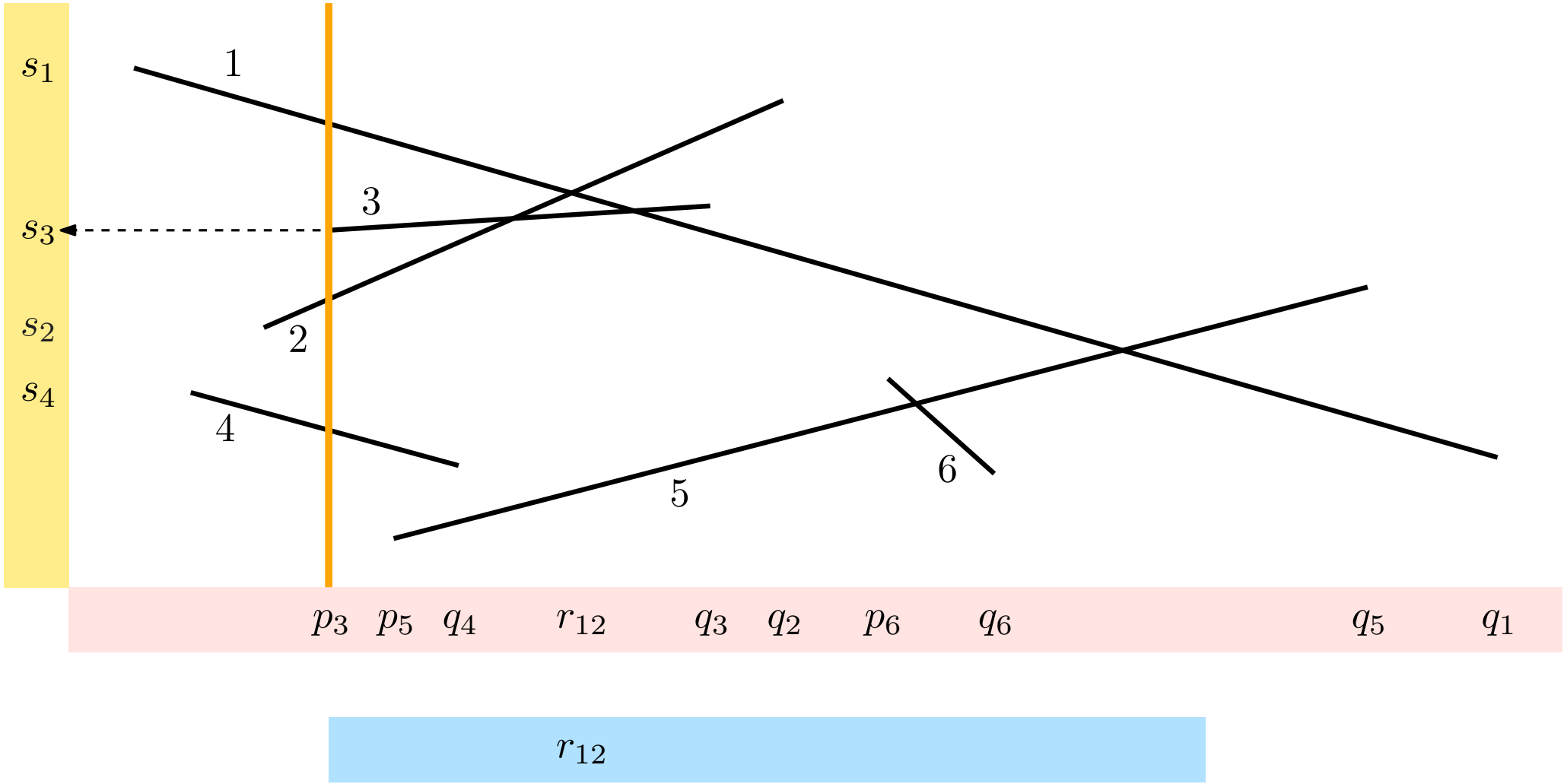


r_{12}

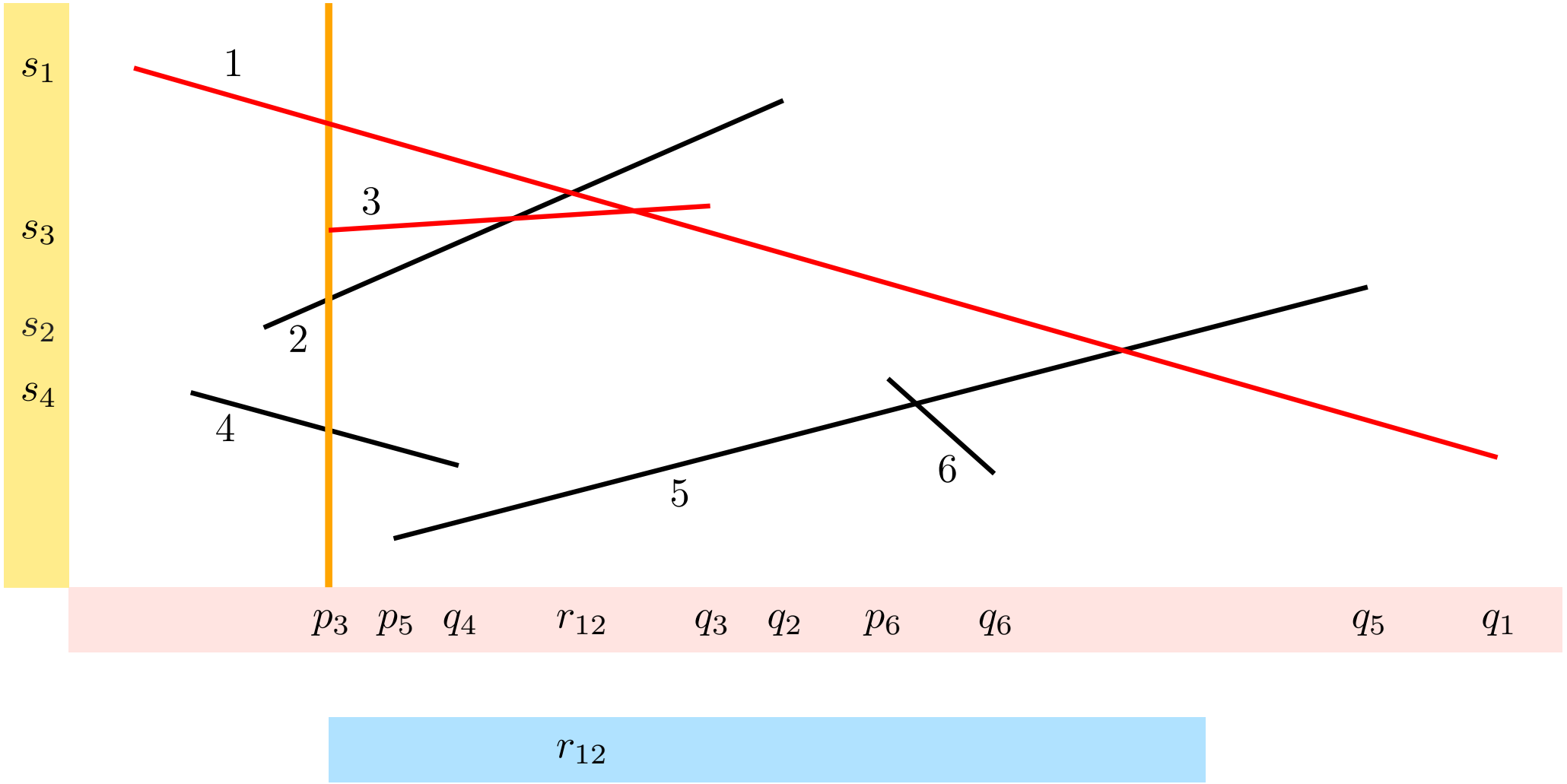
Simulació de l'algorisme de Bentley-Ottman



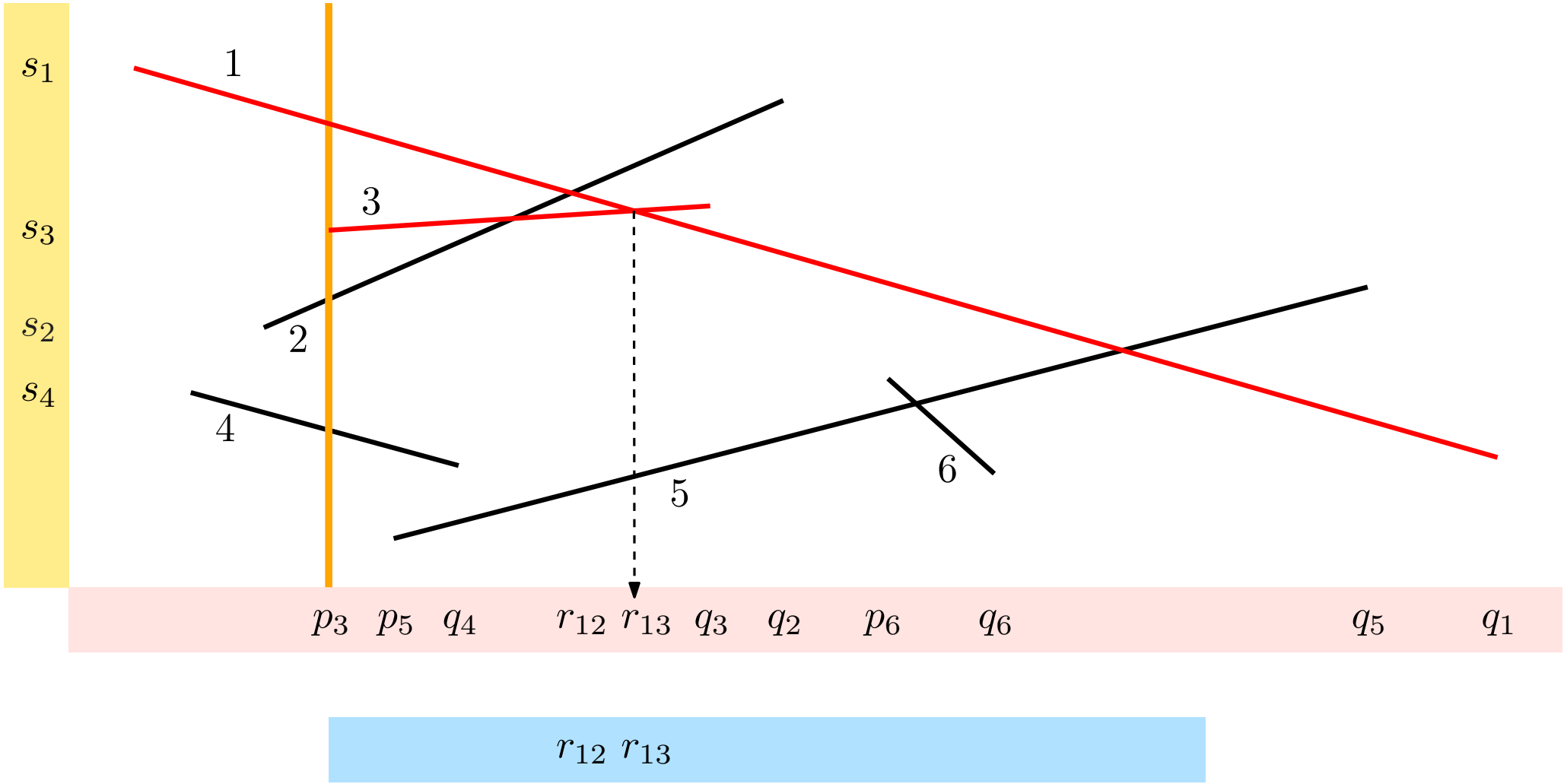
Simulació de l'algorisme de Bentley-Ottman



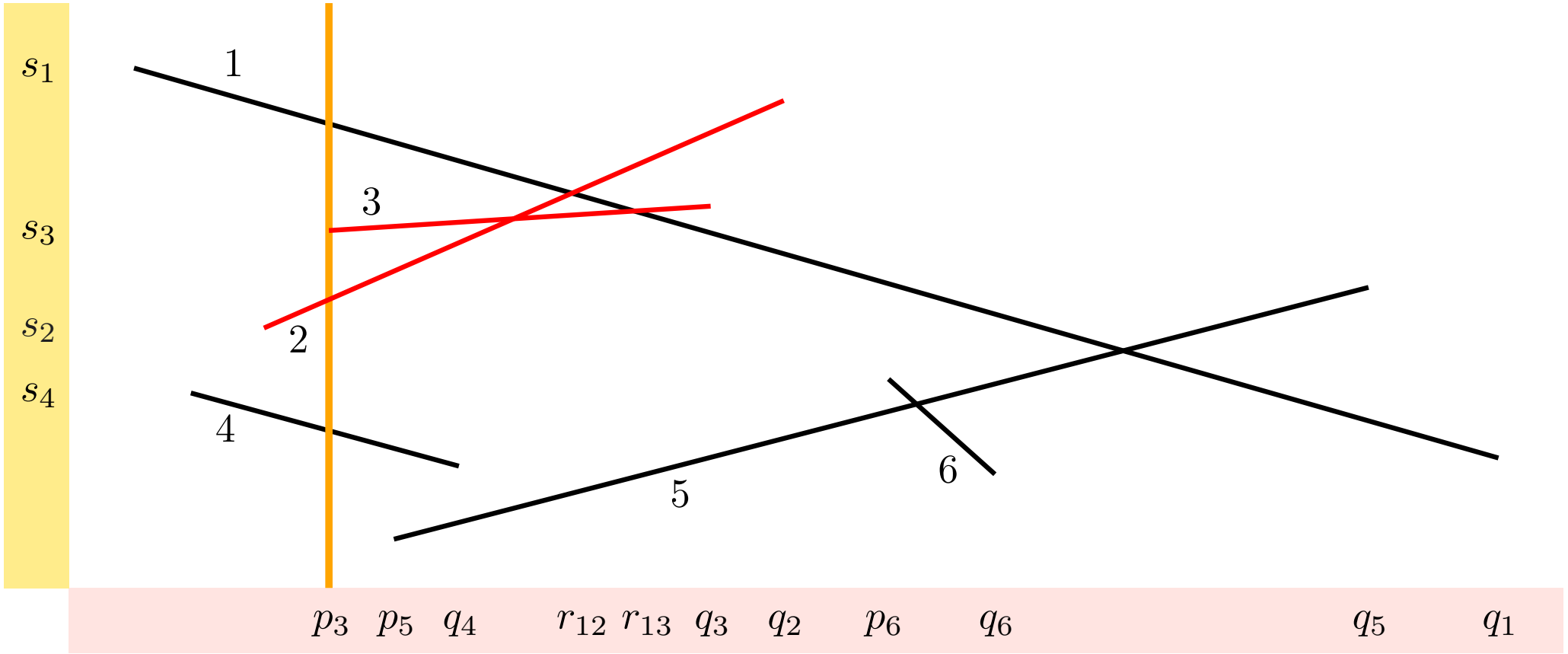
Simulació de l'algorisme de Bentley-Ottman



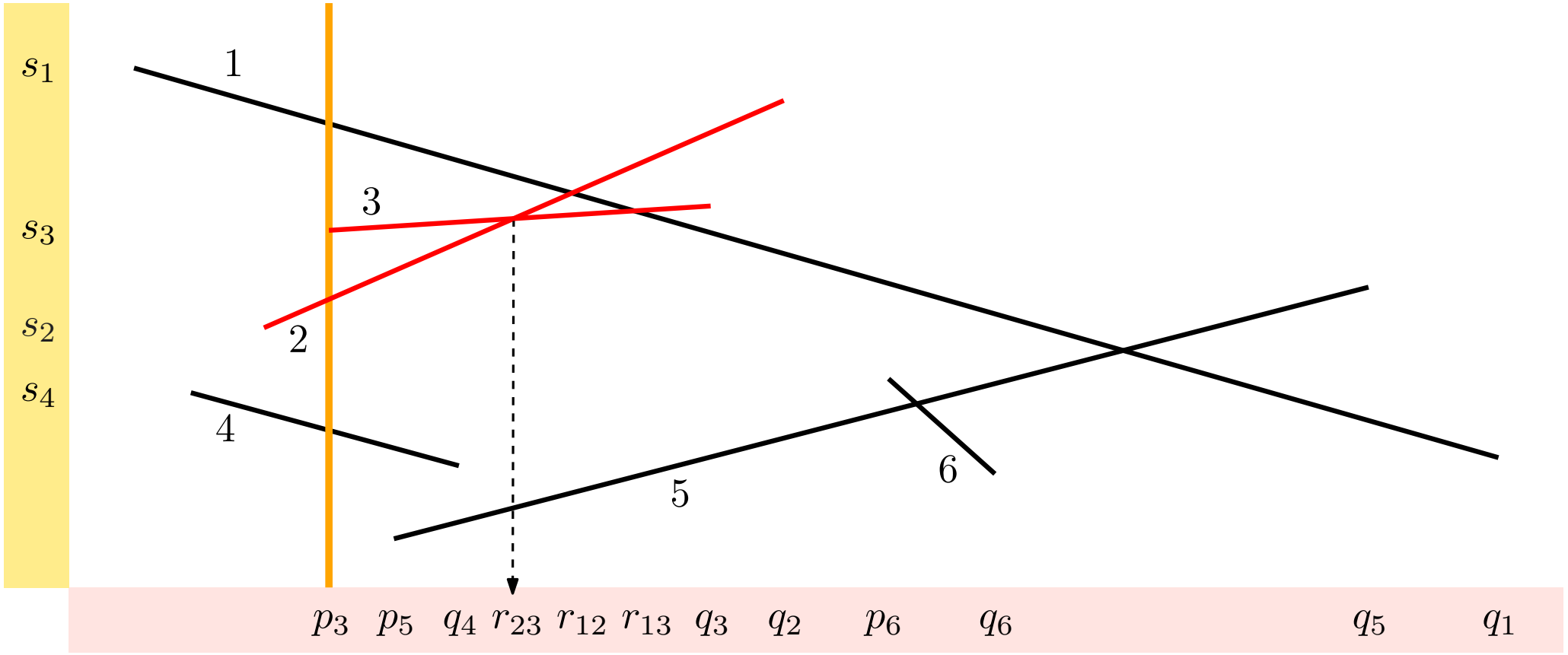
Simulació de l'algorisme de Bentley-Ottman



Simulació de l'algorisme de Bentley-Ottman

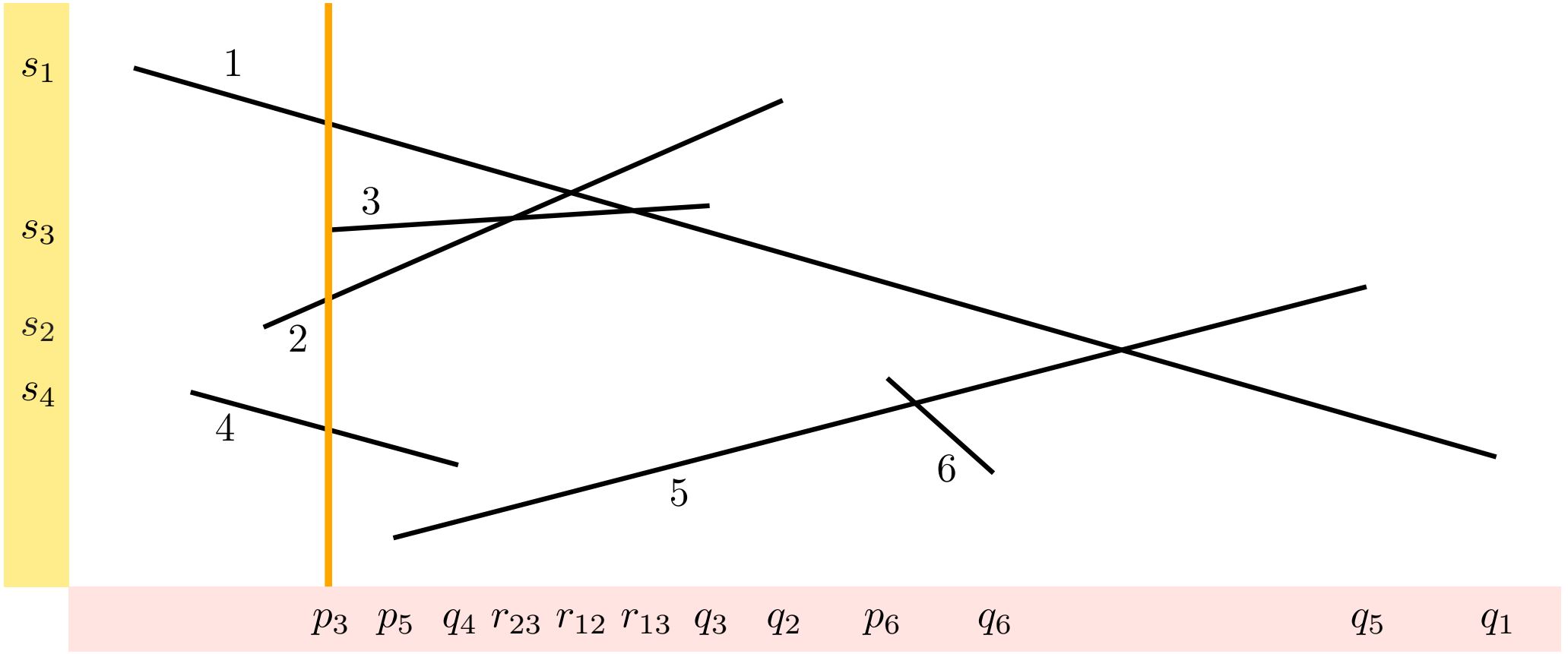


Simulació de l'algorisme de Bentley-Ottman

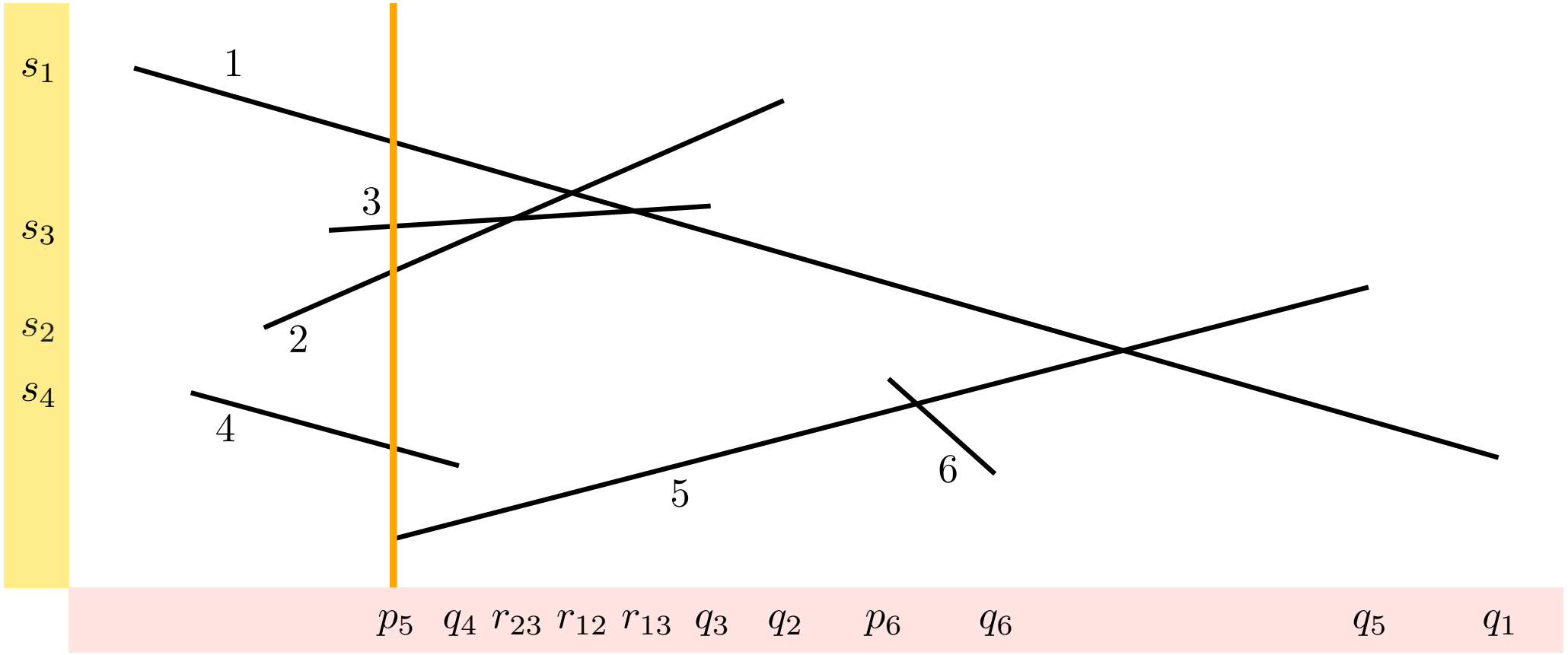


r_{23} r_{12} r_{13}

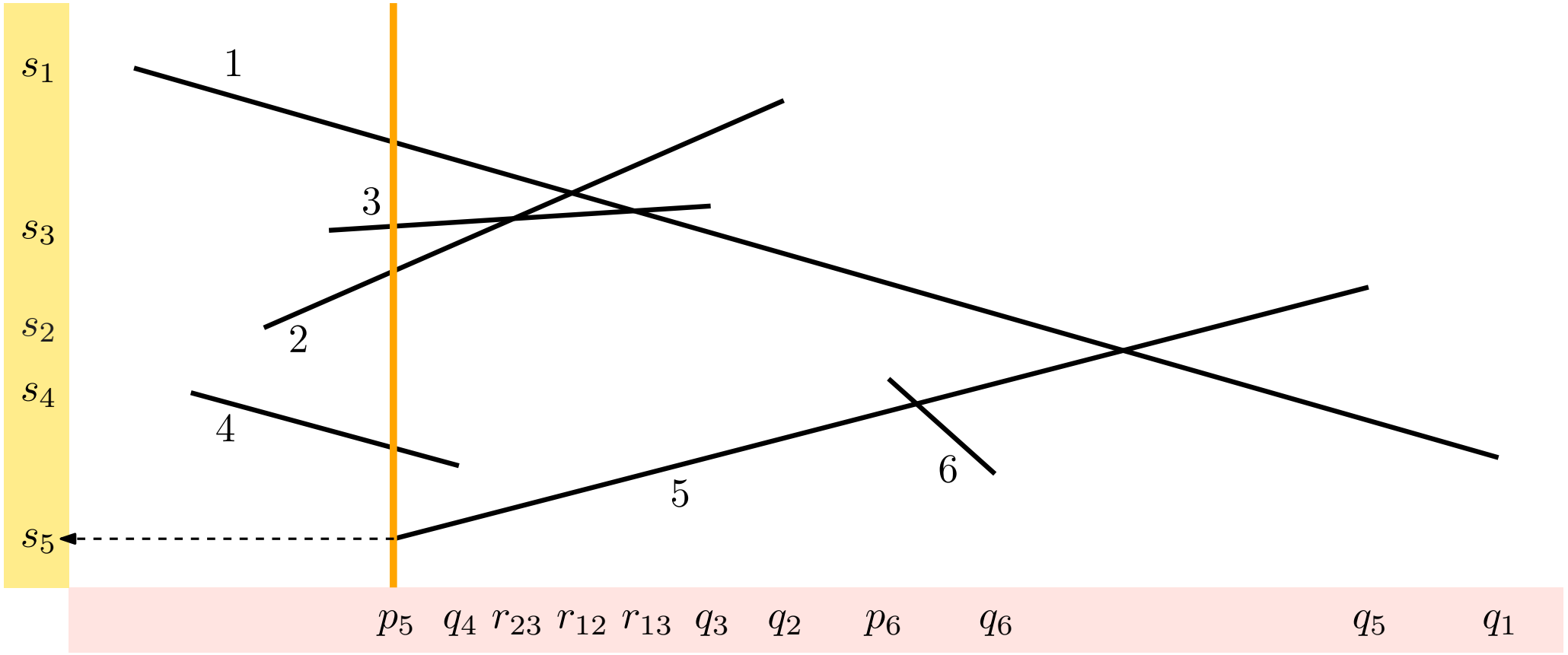
Simulació de l'algorisme de Bentley-Ottman



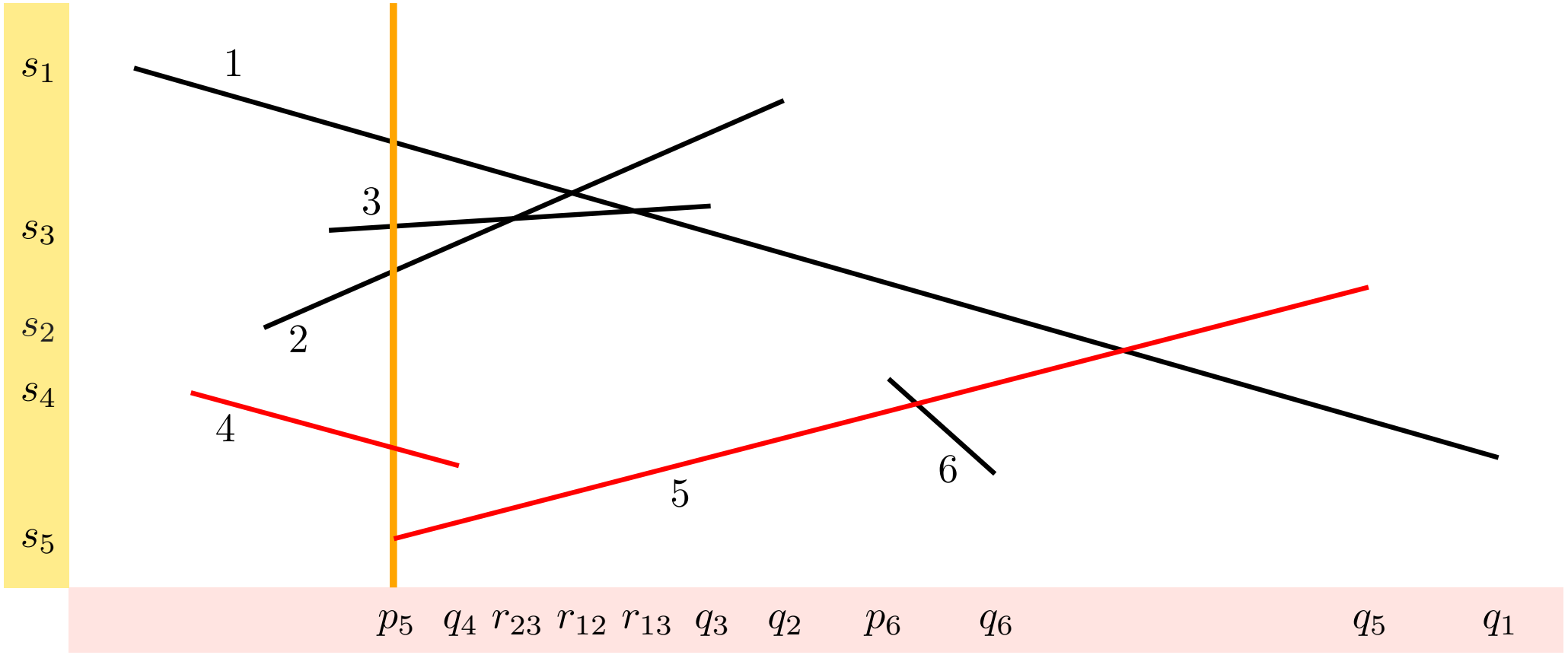
Simulació de l'algorisme de Bentley-Ottman



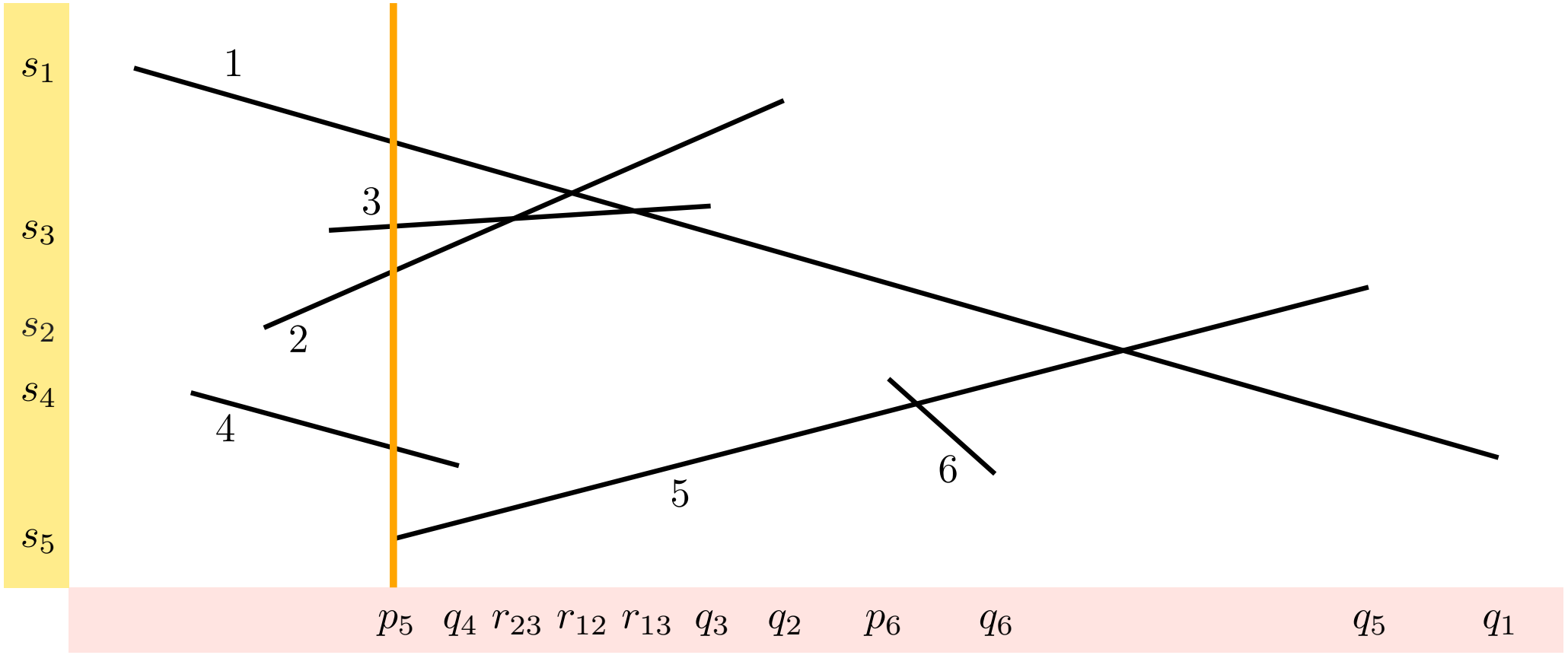
Simulació de l'algorisme de Bentley-Ottman



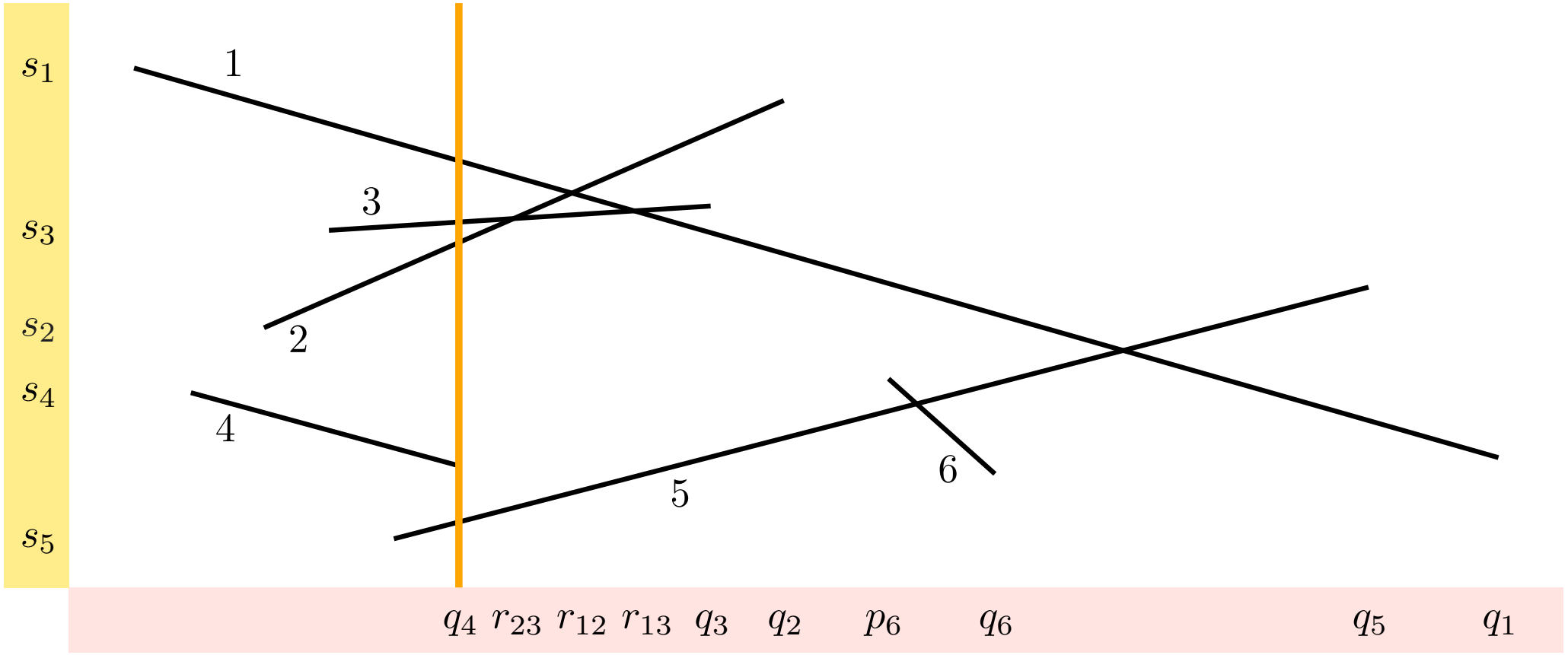
Simulació de l'algorisme de Bentley-Ottman



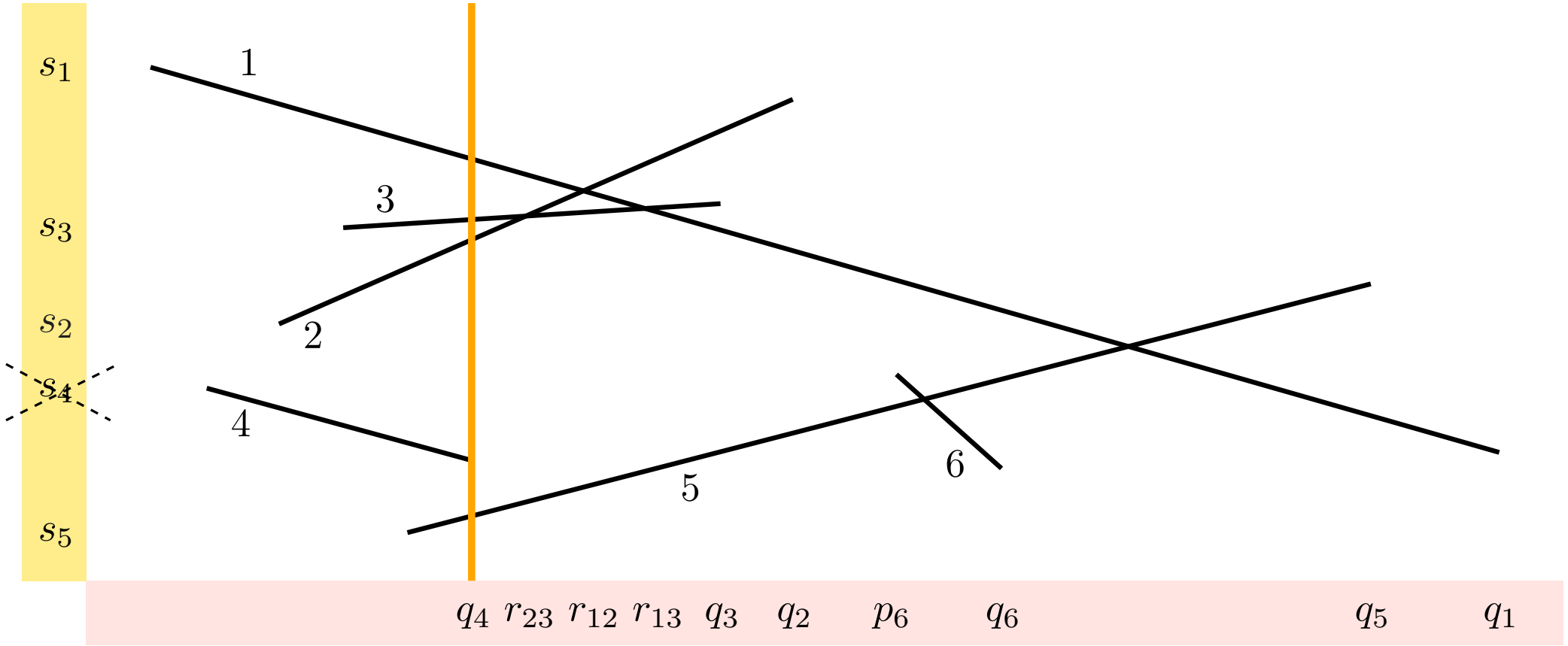
Simulació de l'algorisme de Bentley-Ottman



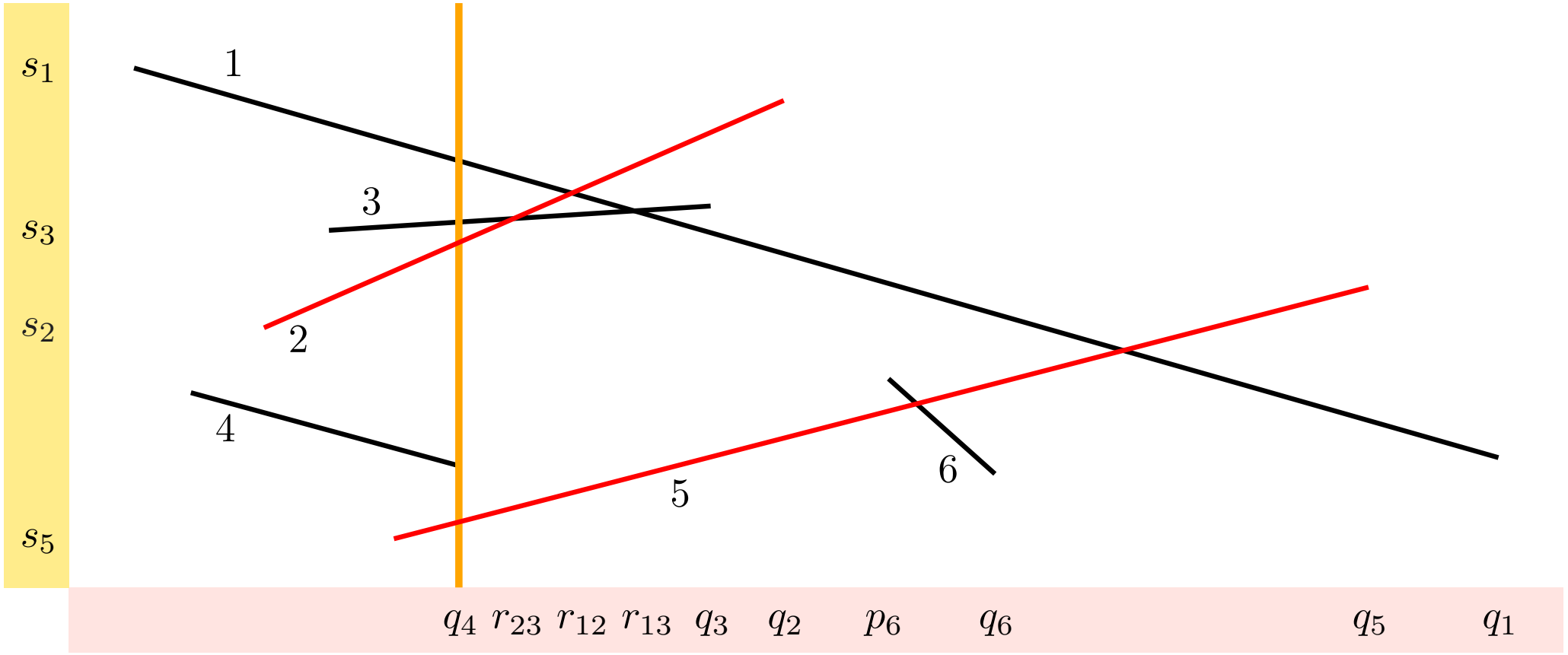
Simulació de l'algorisme de Bentley-Ottman



Simulació de l'algorisme de Bentley-Ottman

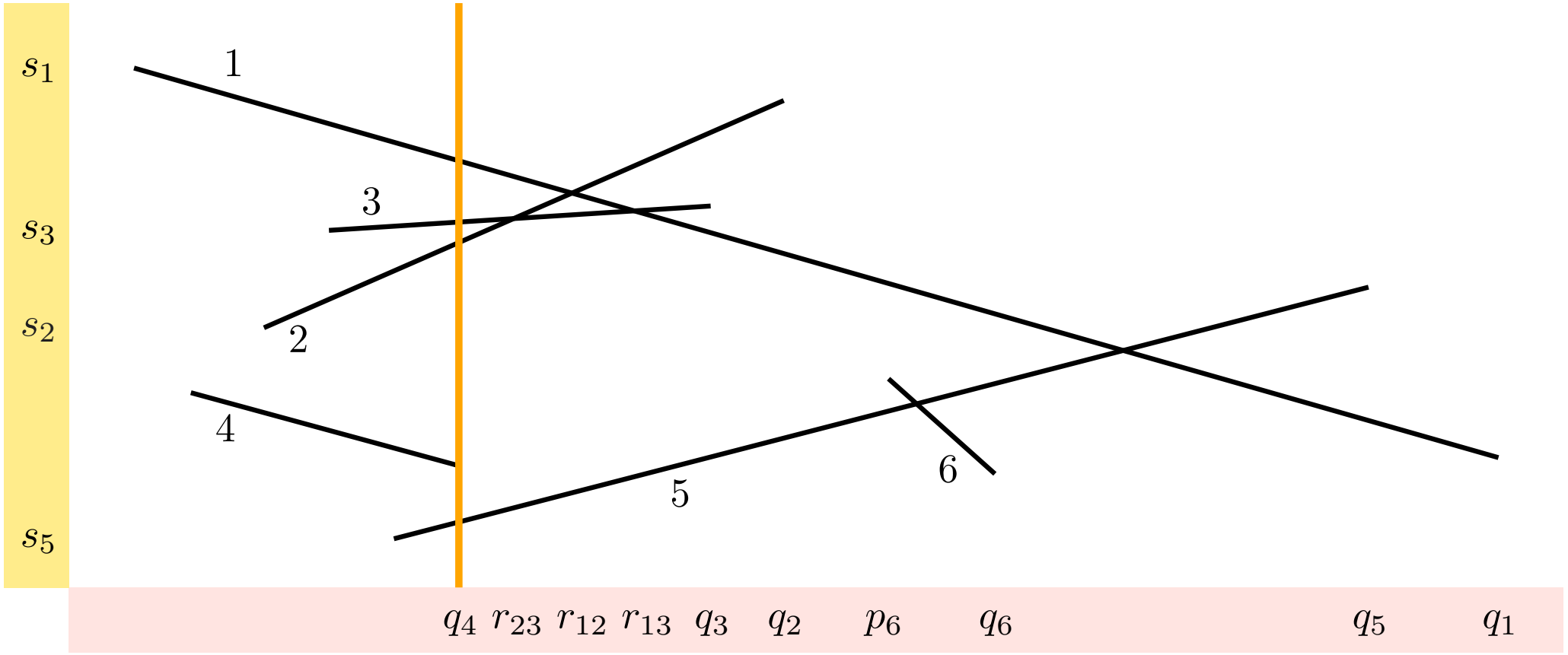


Simulació de l'algorisme de Bentley-Ottman



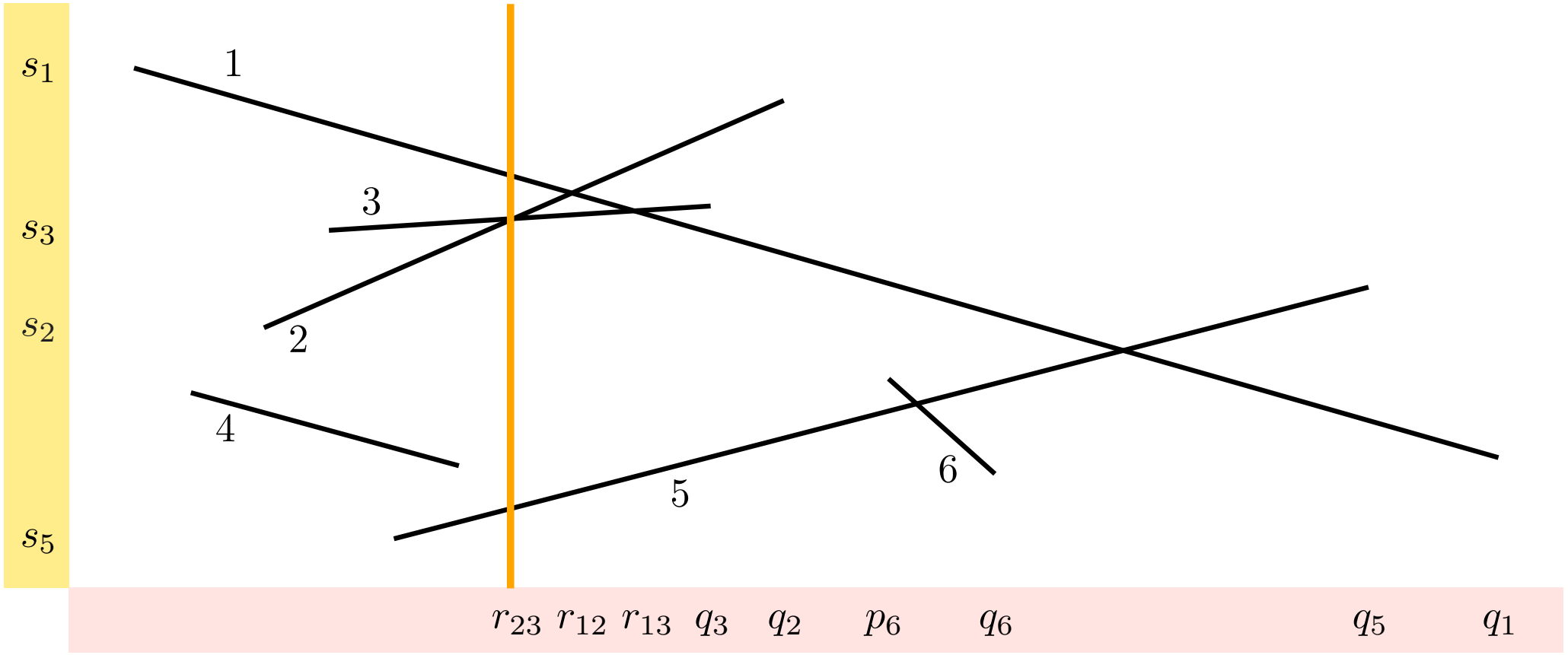
r_{23} r_{12} r_{13}

Simulació de l'algorisme de Bentley-Ottman



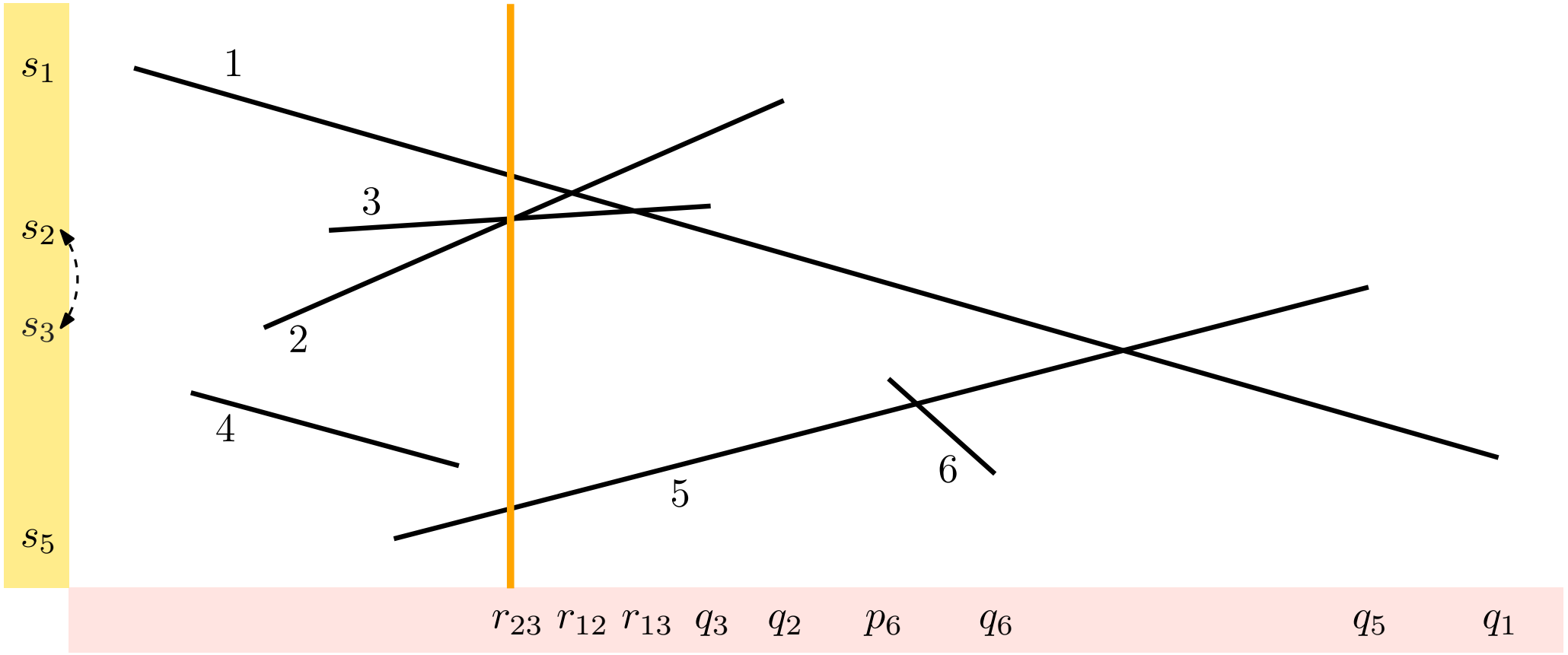
r_{23} r_{12} r_{13}

Simulació de l'algorisme de Bentley-Ottman



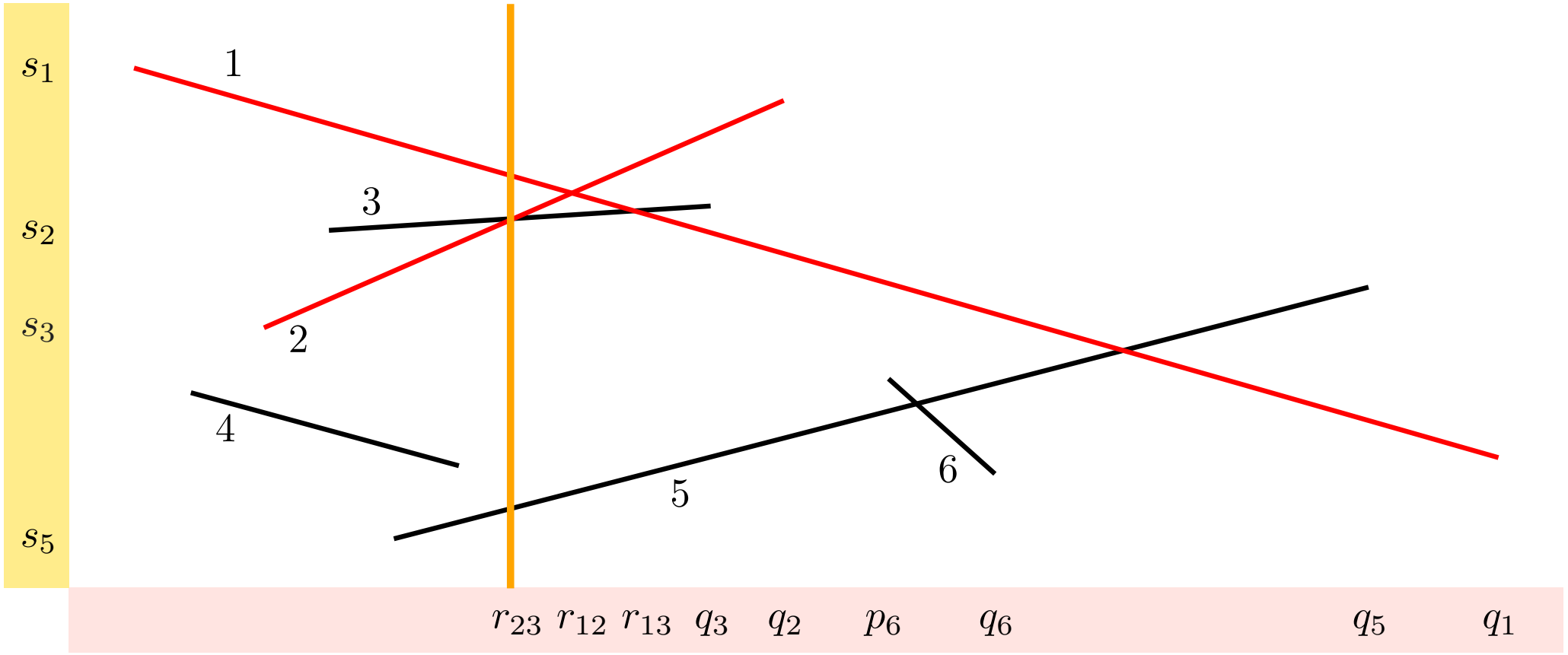
r_{23} r_{12} r_{13}

Simulació de l'algorisme de Bentley-Ottman



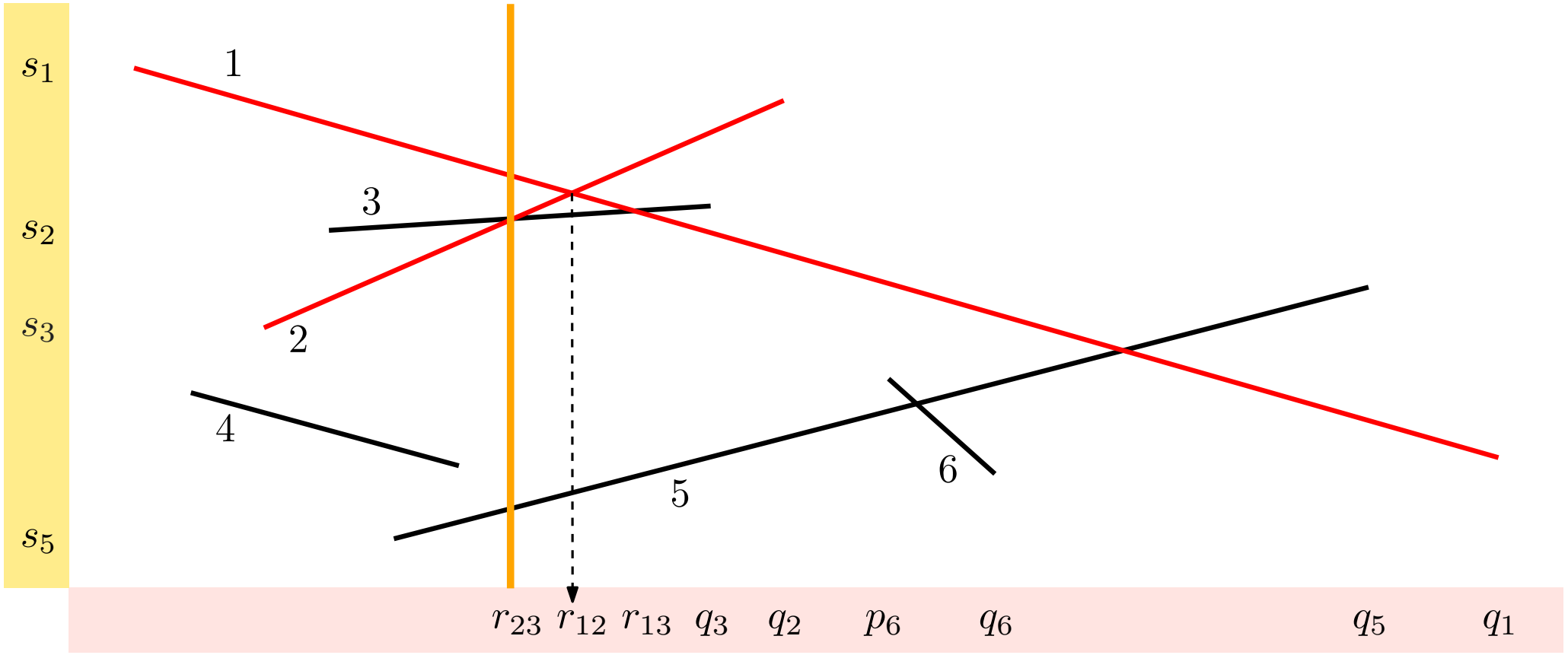
r_{23} r_{12} r_{13}

Simulació de l'algorisme de Bentley-Ottman



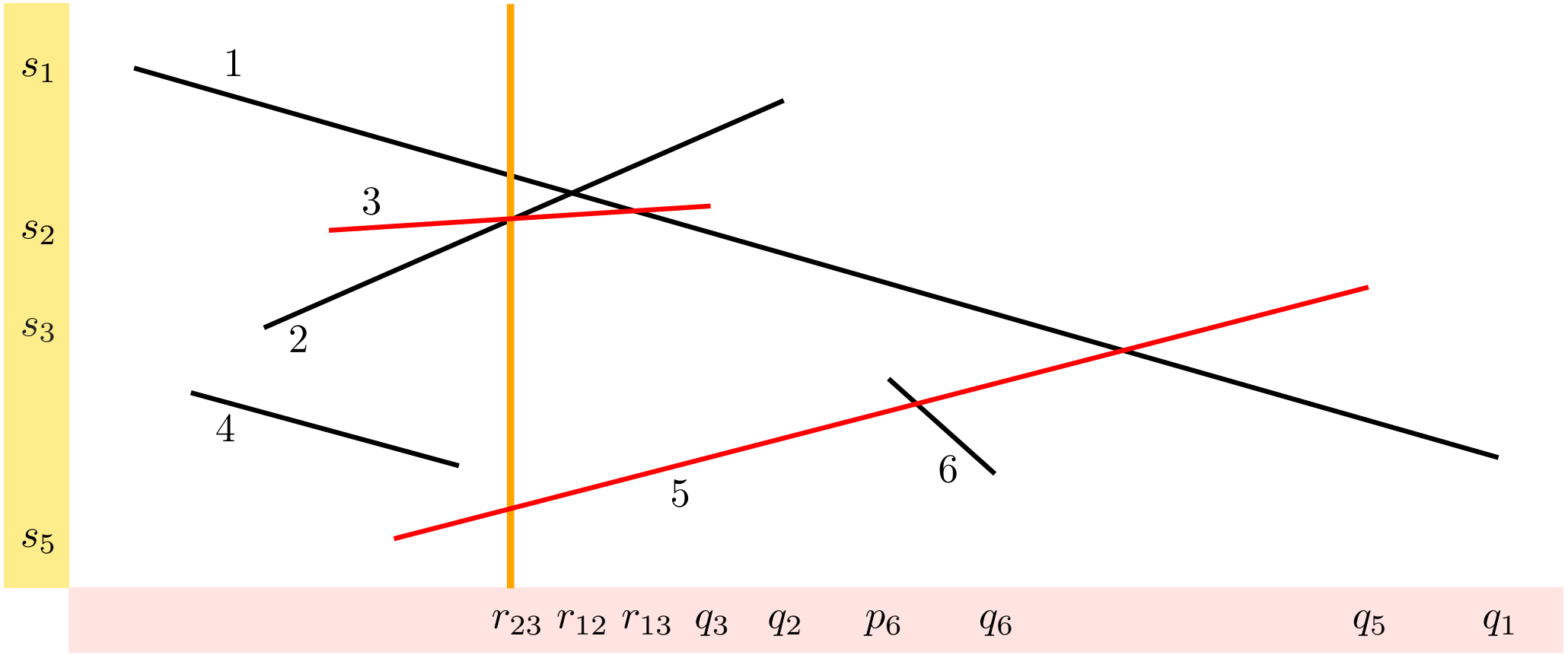
r_{23} r_{12} r_{13}

Simulació de l'algorisme de Bentley-Ottman



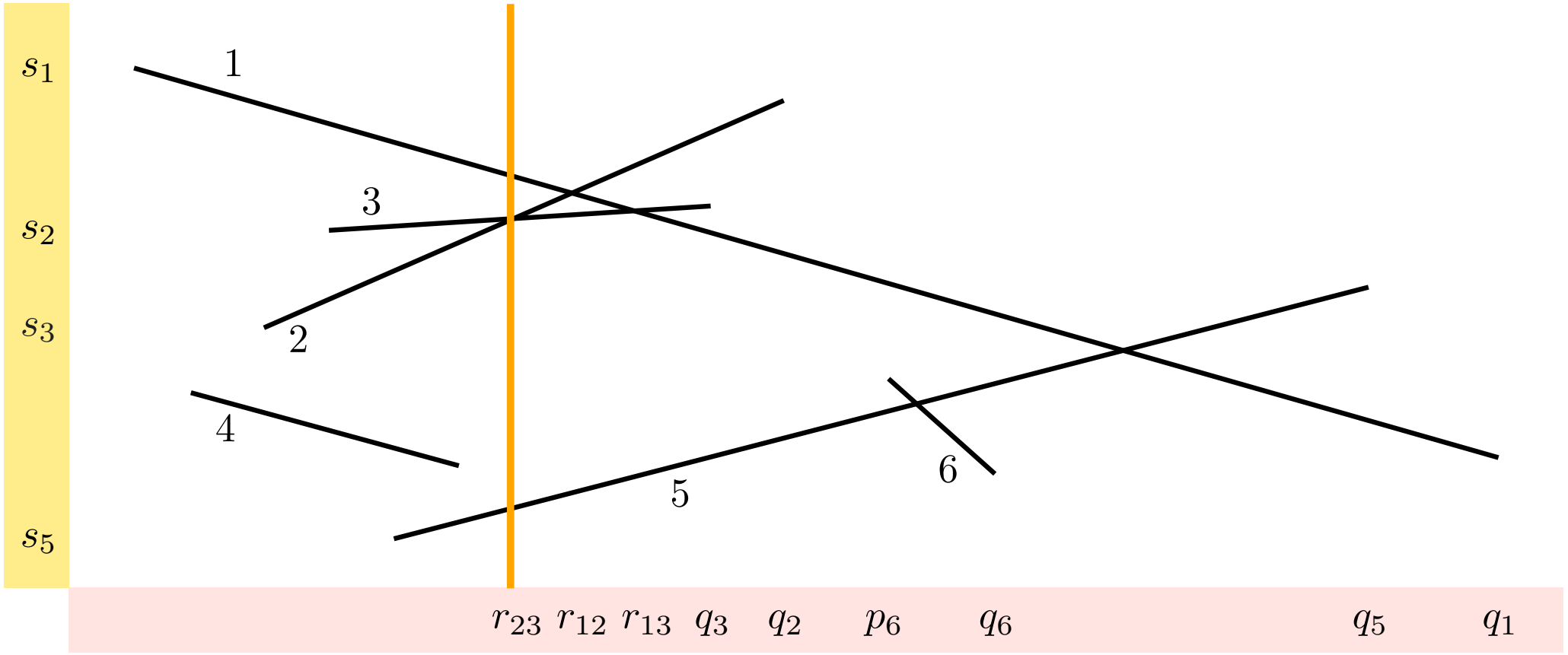
r_{23} r_{12} r_{13}

Simulació de l'algorisme de Bentley-Ottman



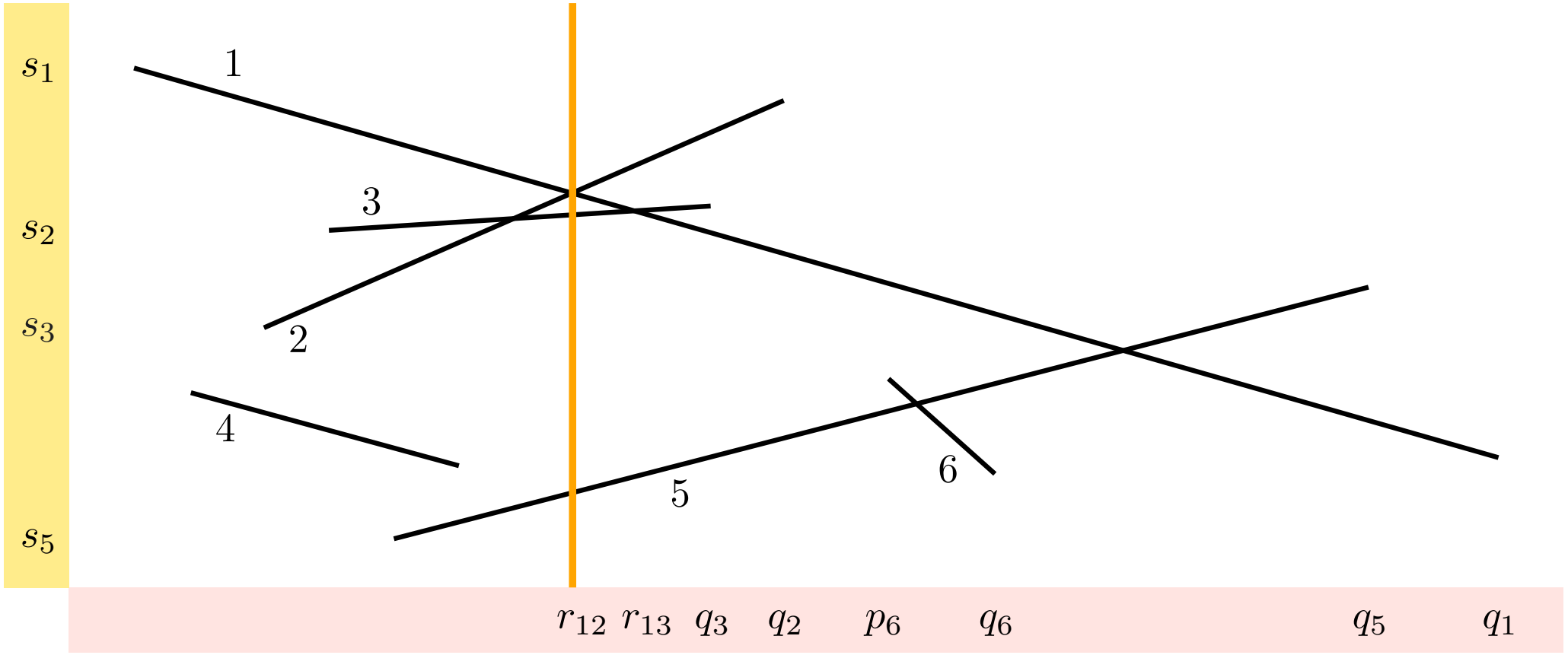
r_{23} r_{12} r_{13}

Simulació de l'algorisme de Bentley-Ottman

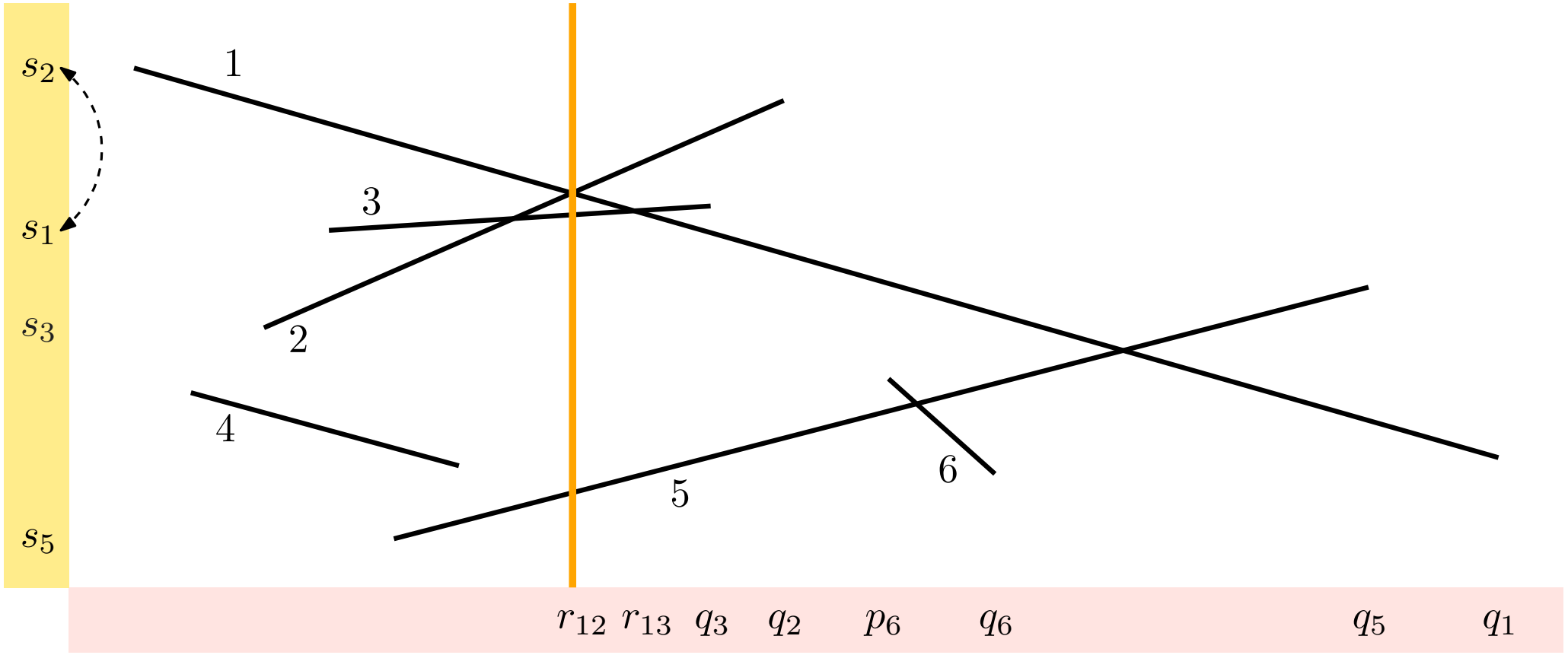


r_{23} r_{12} r_{13}

Simulació de l'algorisme de Bentley-Ottman

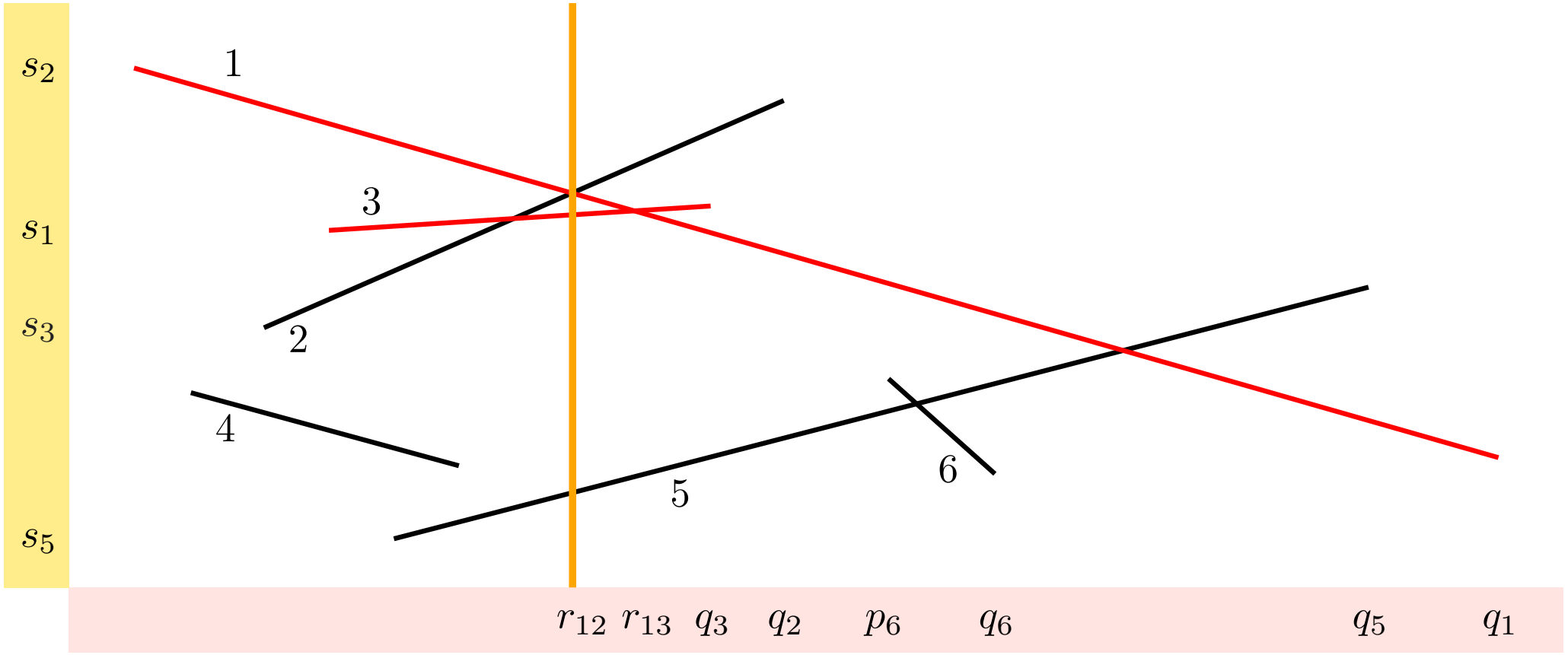


Simulació de l'algorisme de Bentley-Ottman



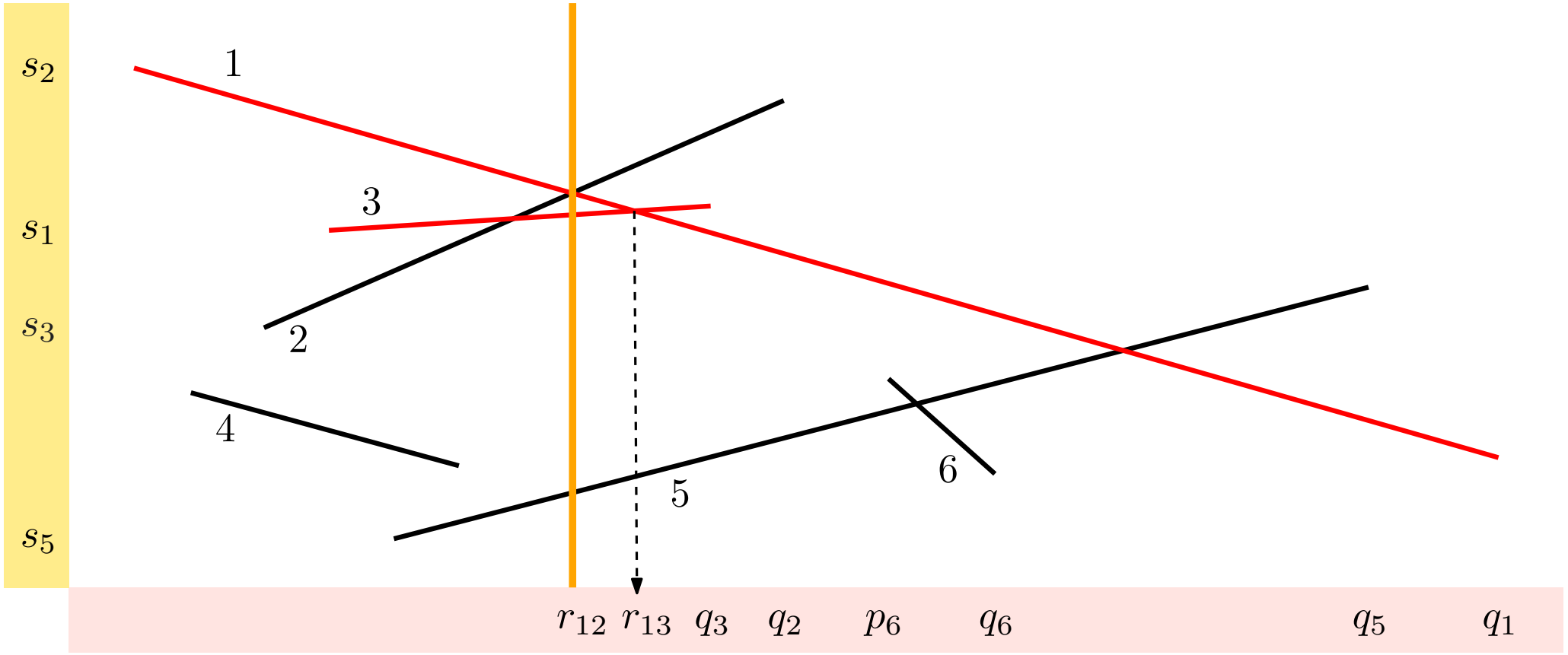
r_{23} r_{12} r_{13}

Simulació de l'algorisme de Bentley-Ottman



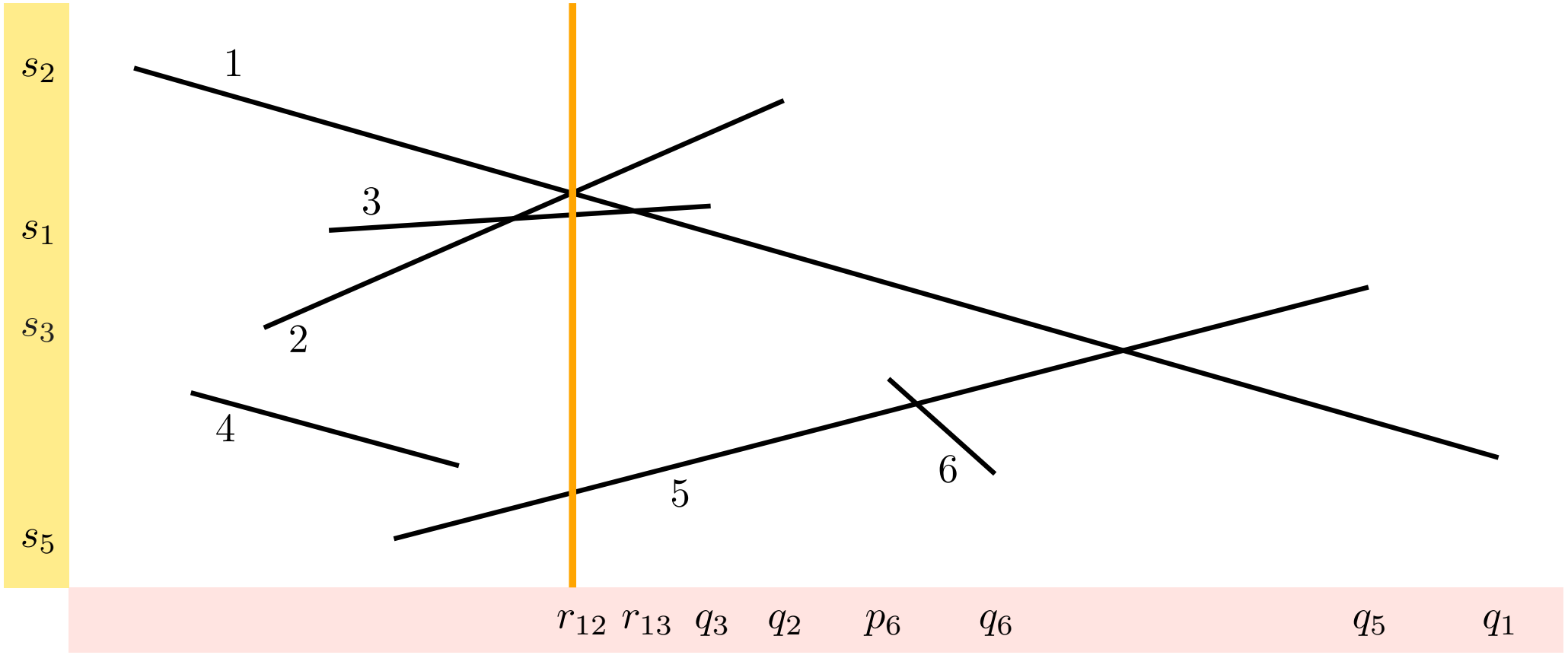
r_{23} r_{12} r_{13}

Simulació de l'algorisme de Bentley-Ottman

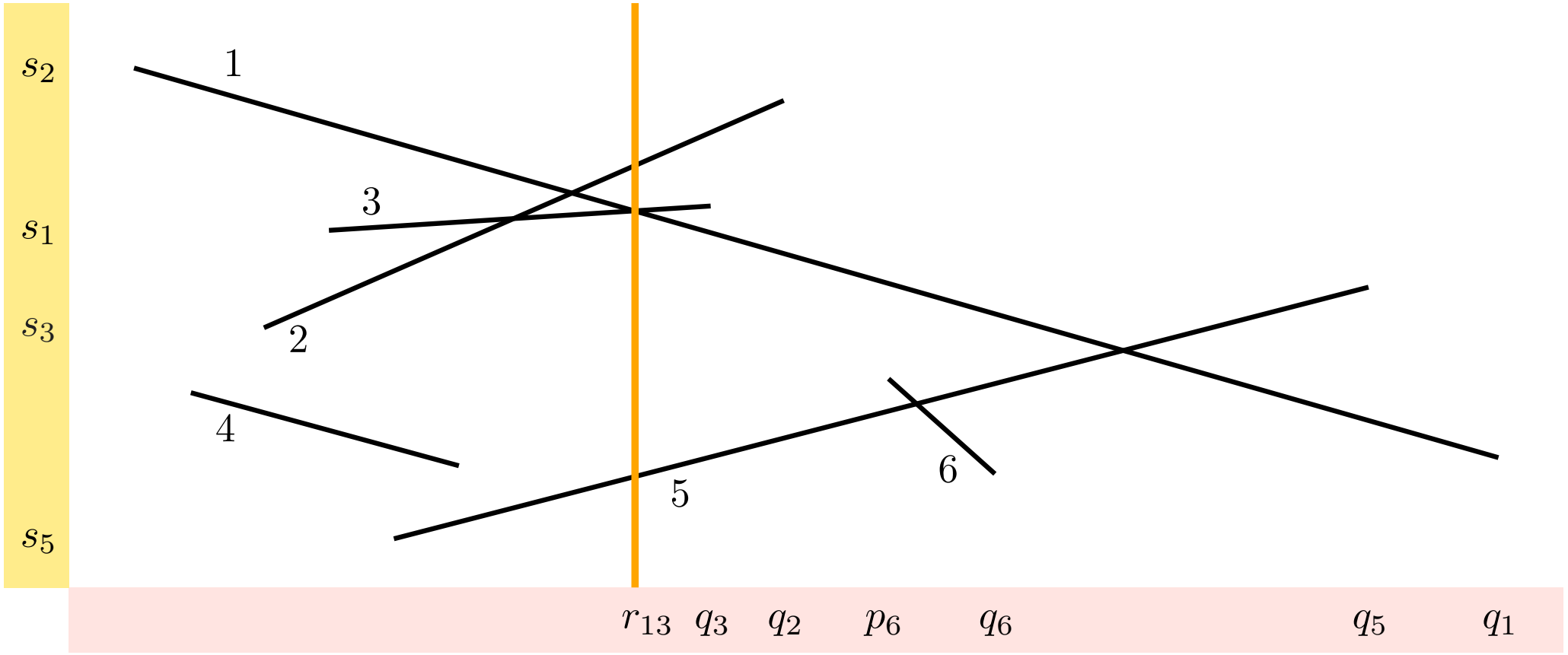


r_{23} r_{12} r_{13}

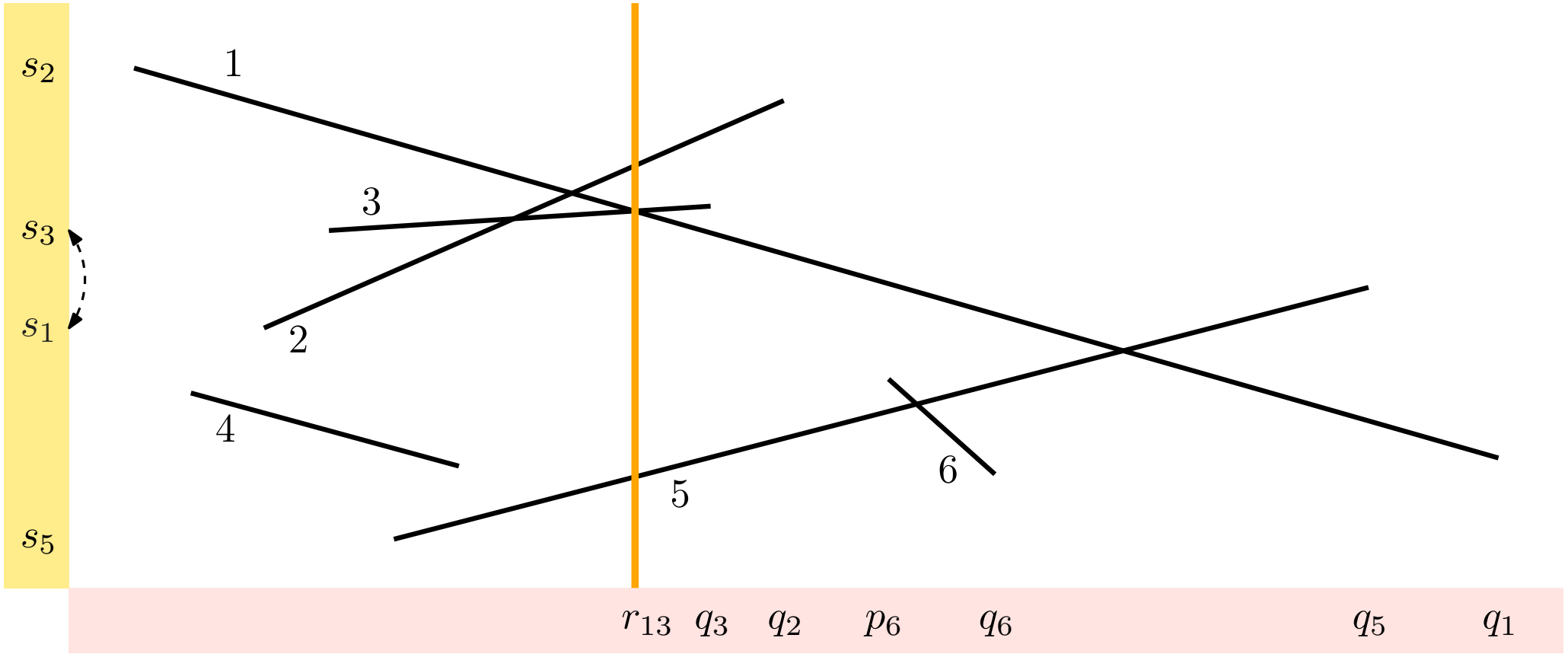
Simulació de l'algorisme de Bentley-Ottman



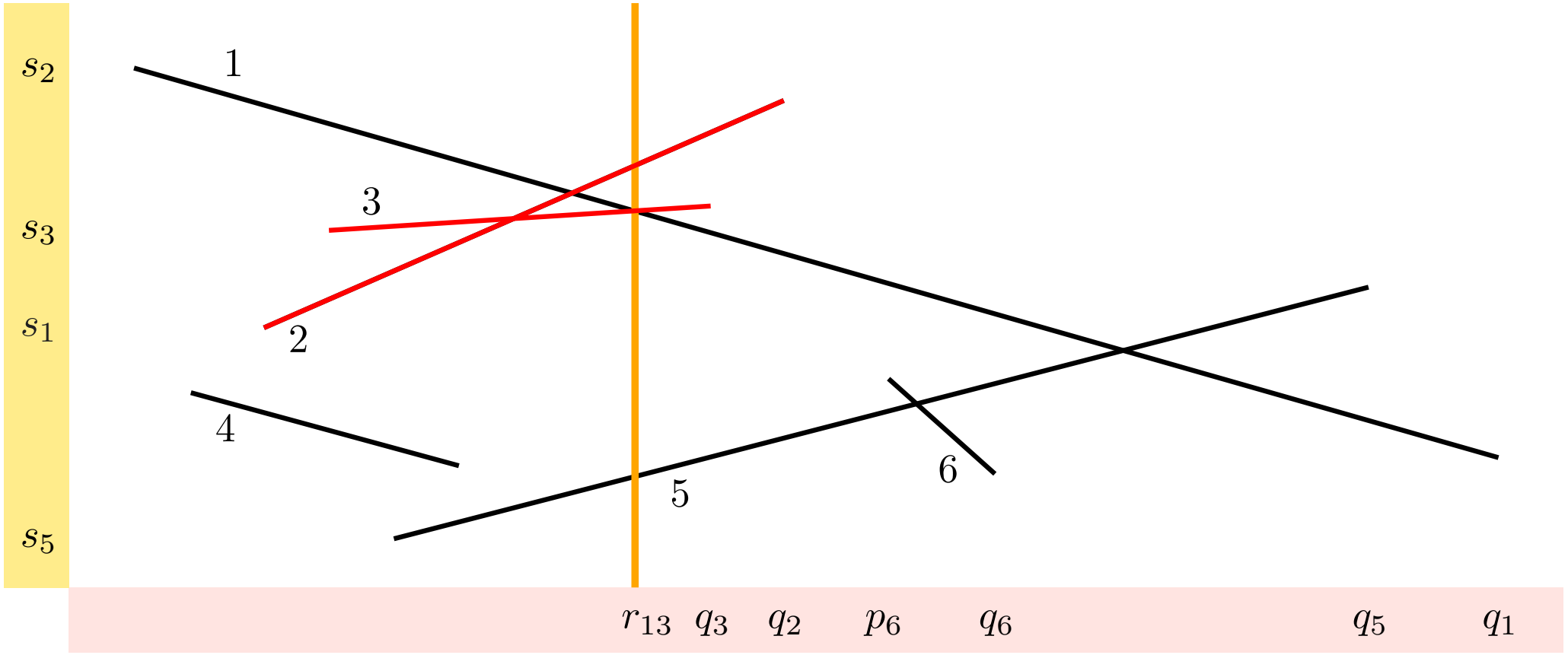
Simulació de l'algorisme de Bentley-Ottman



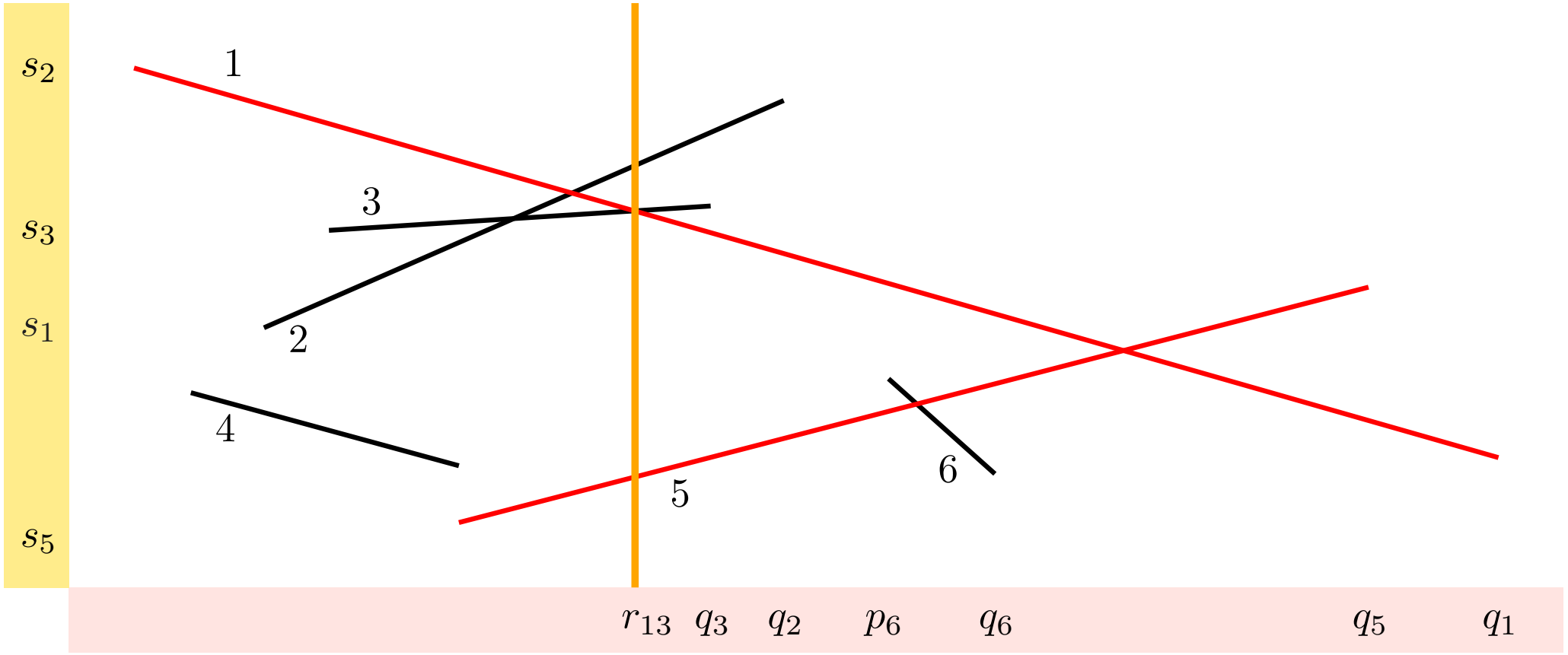
Simulació de l'algorisme de Bentley-Ottman



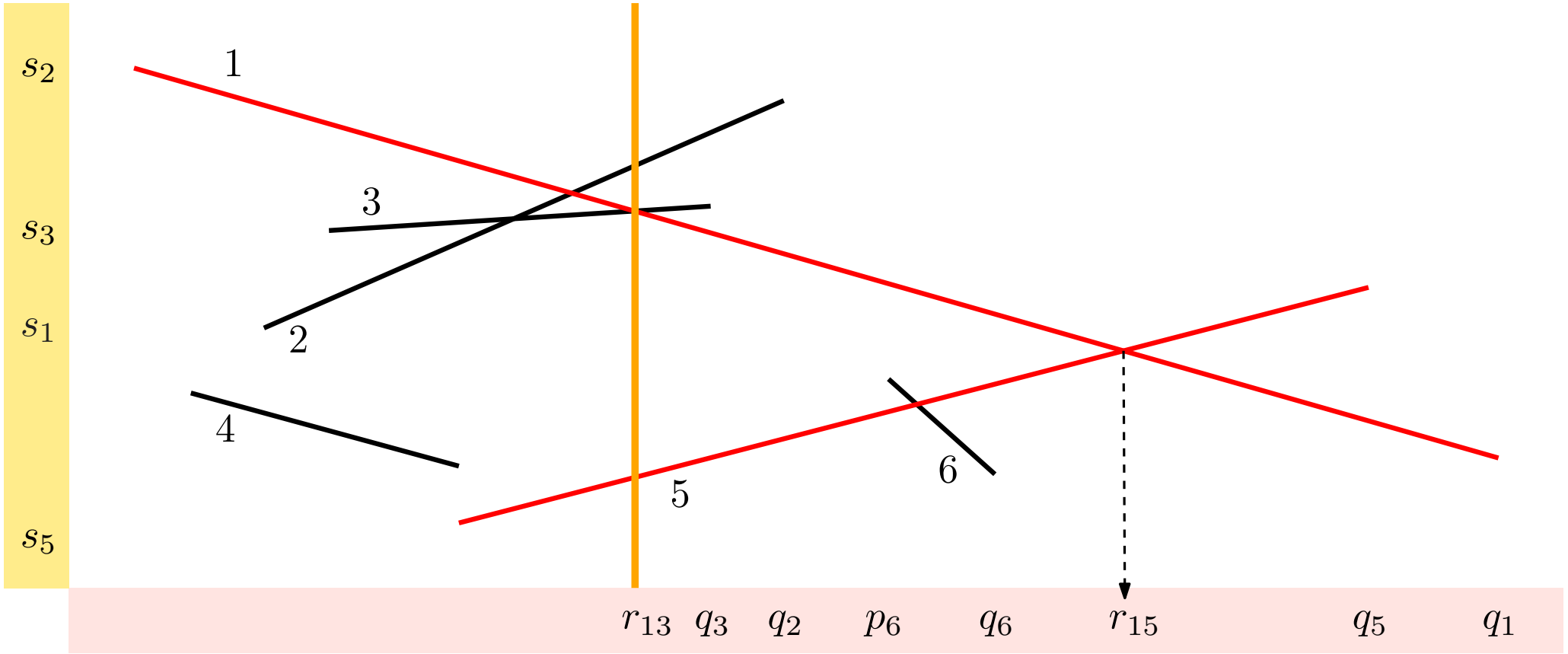
Simulació de l'algorisme de Bentley-Ottman



Simulació de l'algorisme de Bentley-Ottman

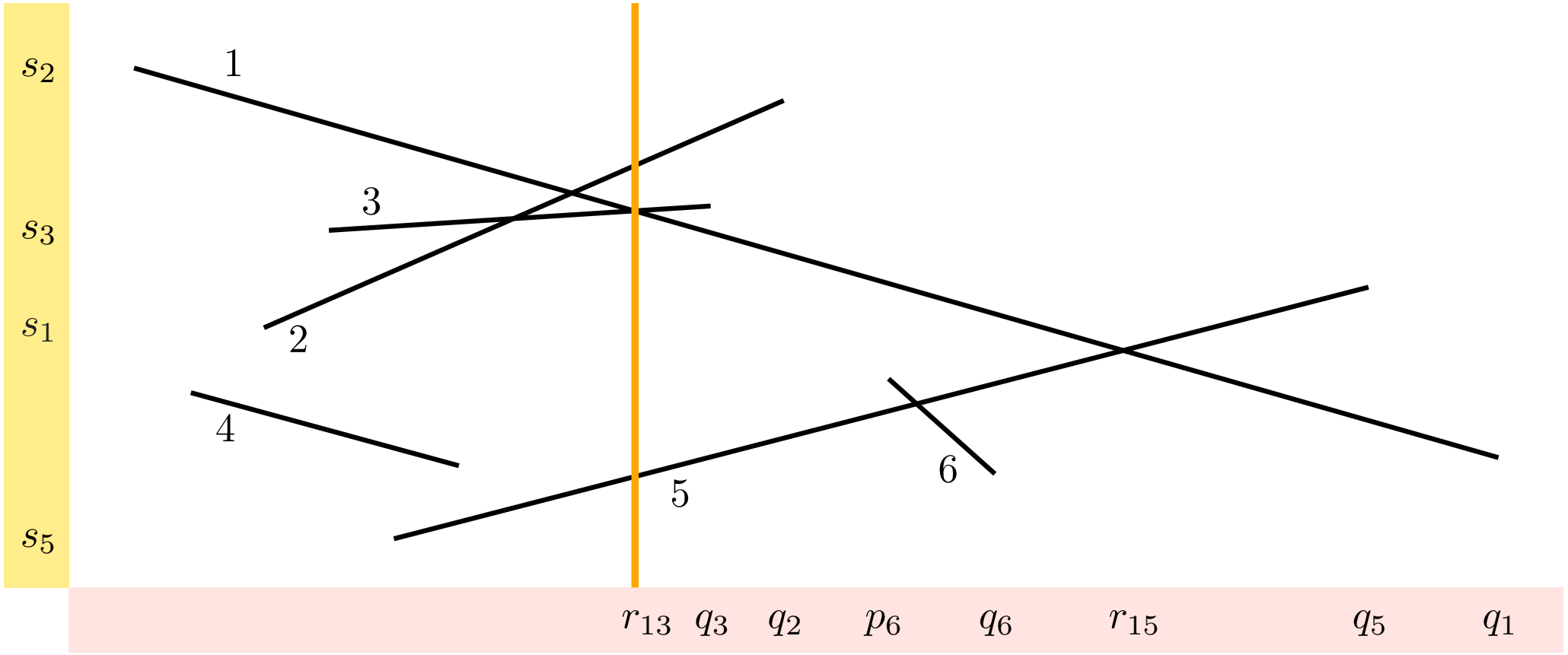


Simulació de l'algorisme de Bentley-Ottman

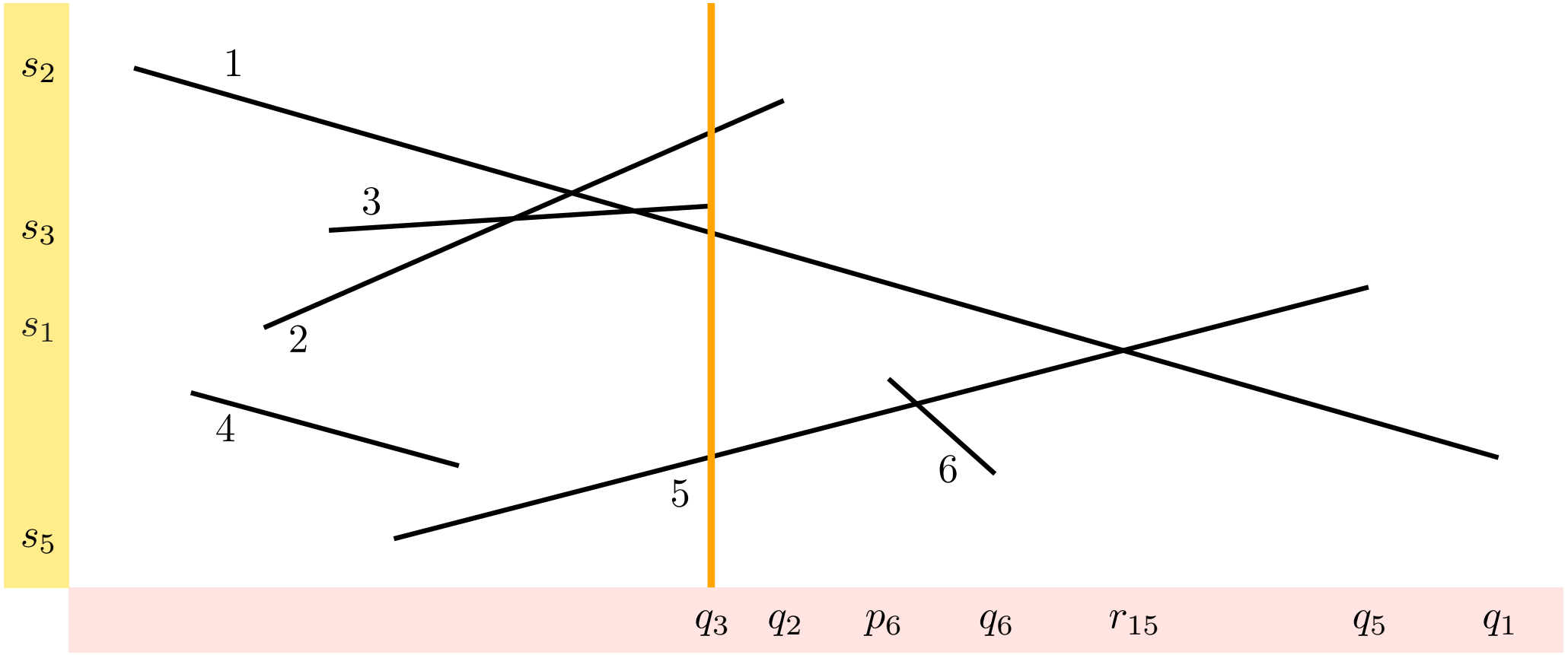


r_{23} r_{12} r_{13} r_{15}

Simulació de l'algorisme de Bentley-Ottman

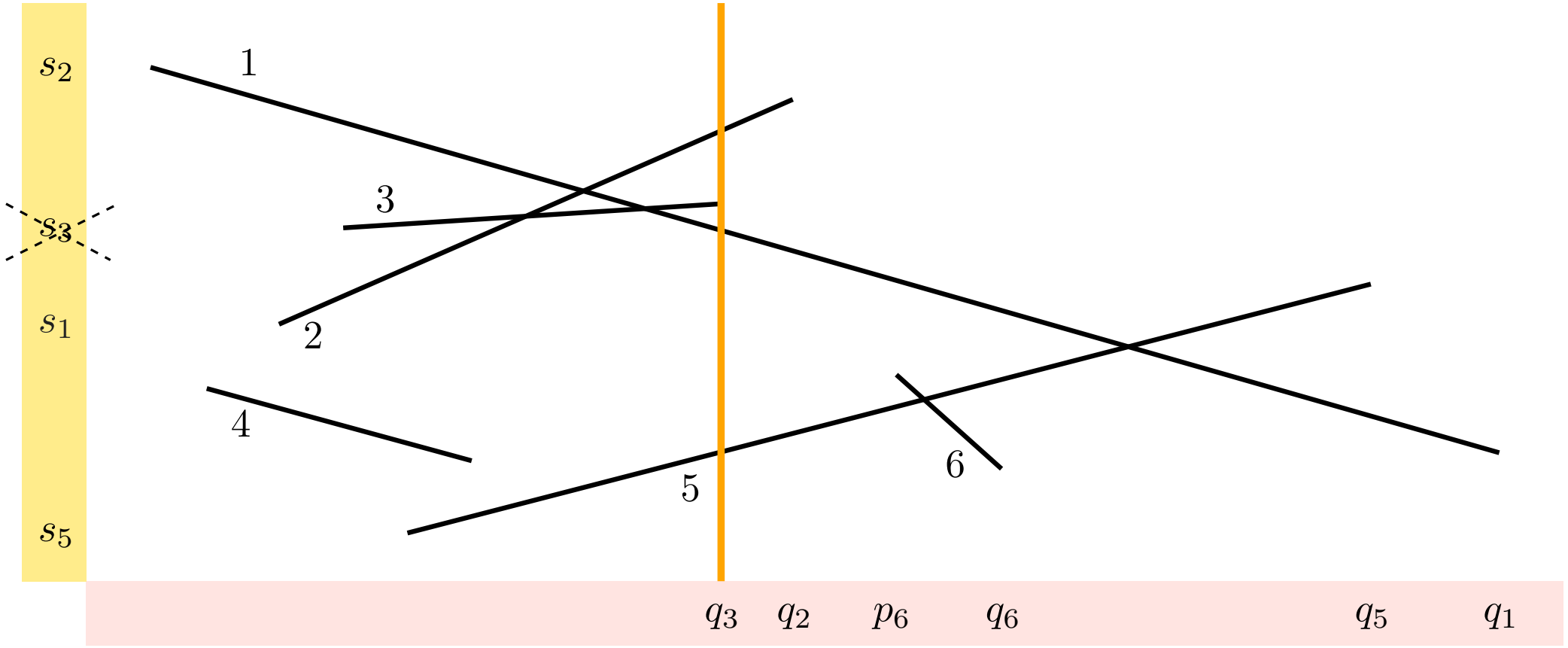


Simulació de l'algorisme de Bentley-Ottman

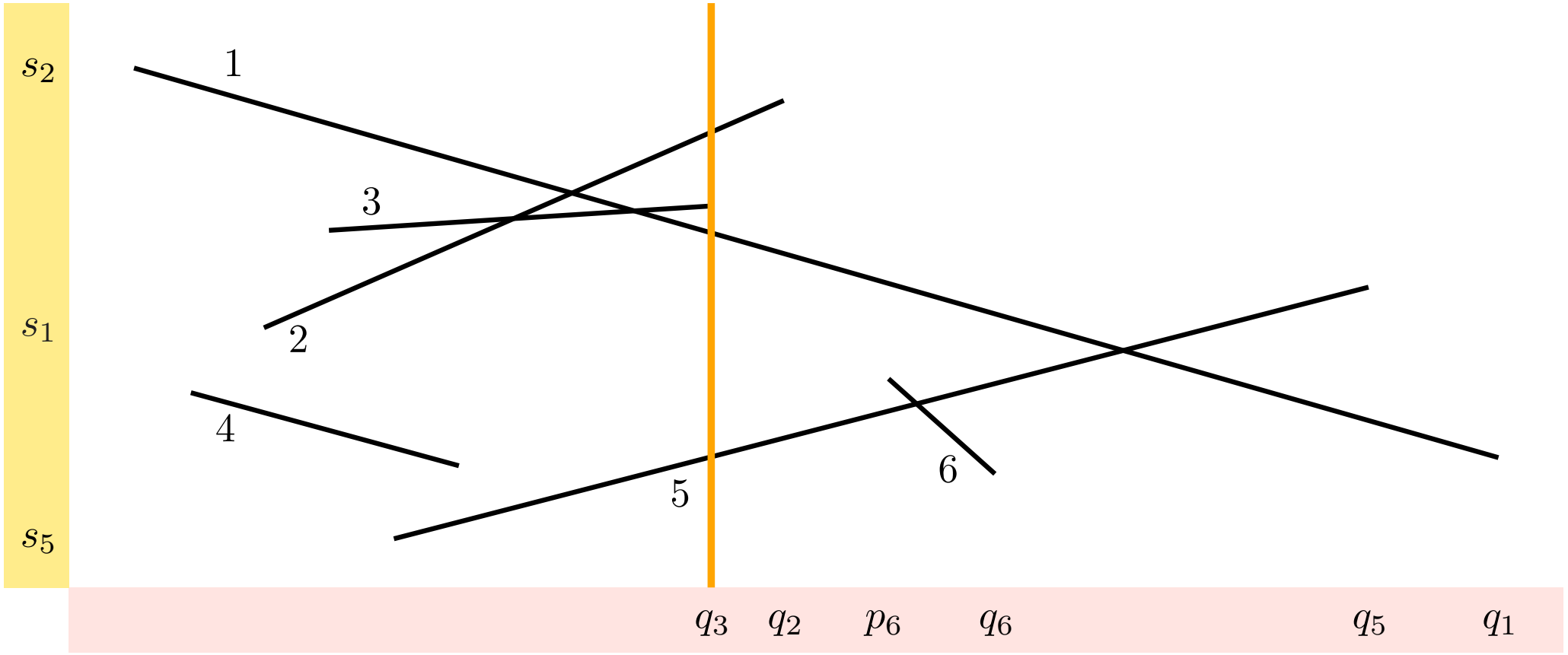


r_{23} r_{12} r_{13} r_{15}

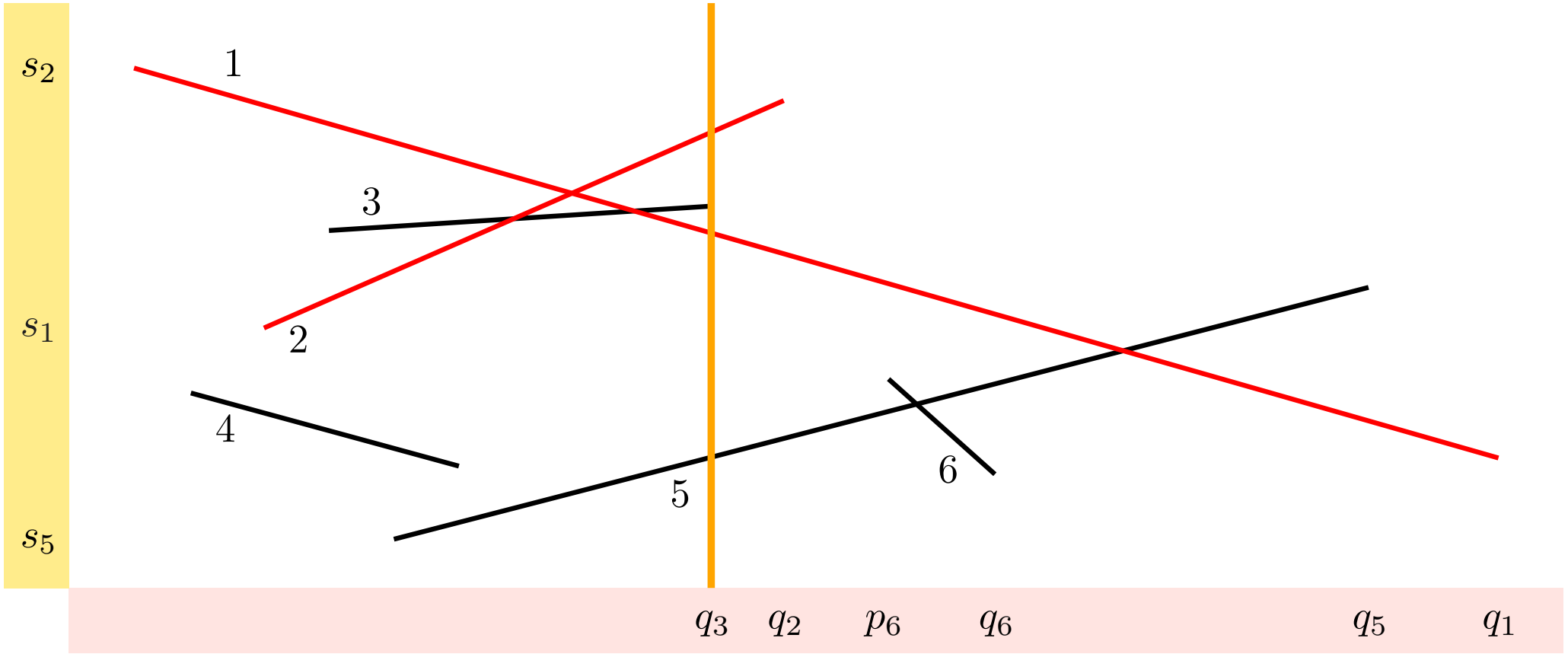
Simulació de l'algorisme de Bentley-Ottman



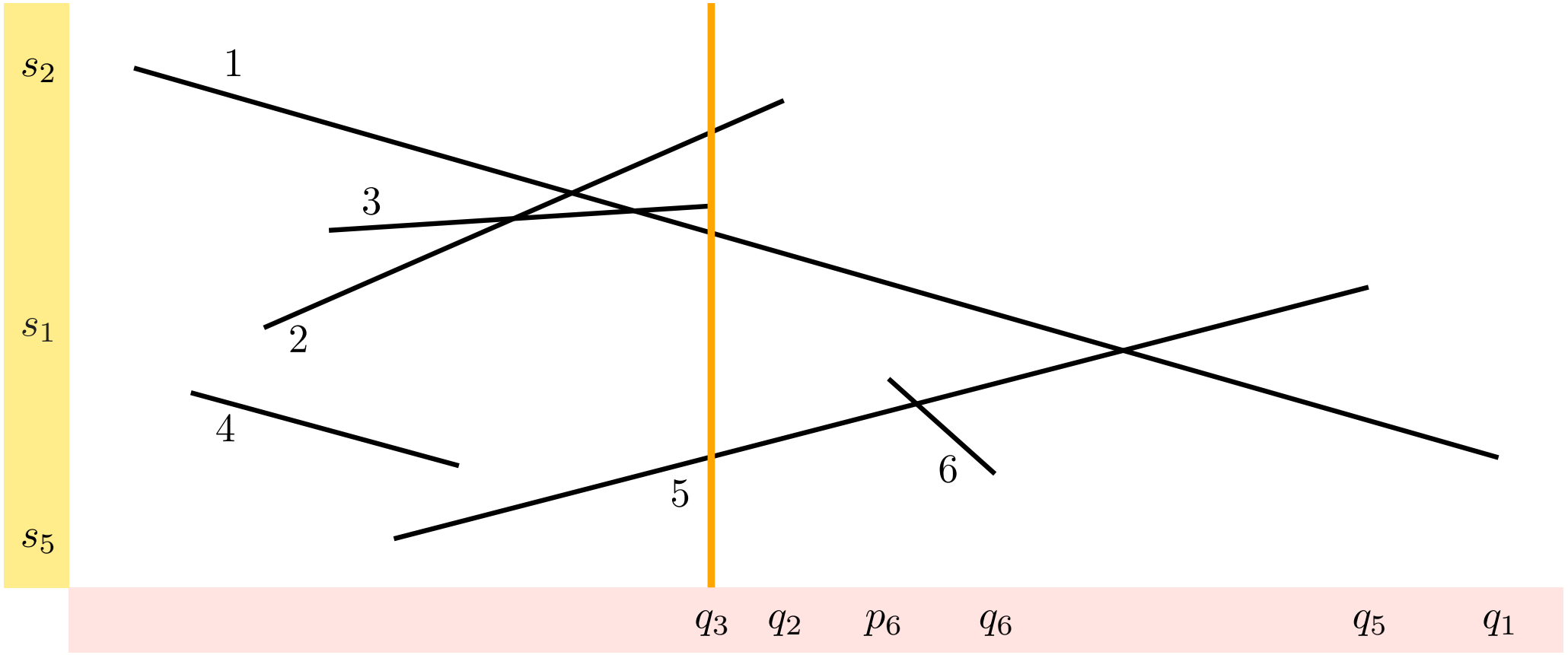
Simulació de l'algorisme de Bentley-Ottman



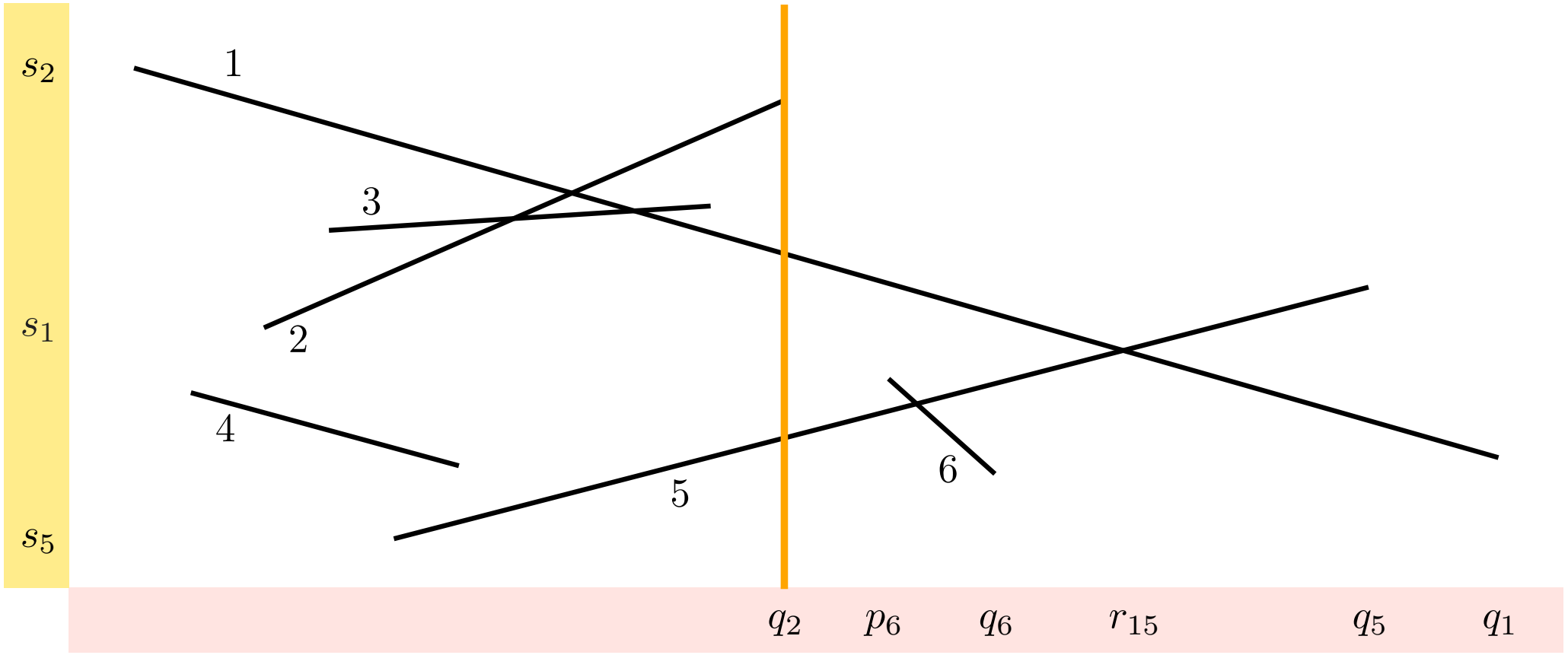
Simulació de l'algorisme de Bentley-Ottman



Simulació de l'algorisme de Bentley-Ottman

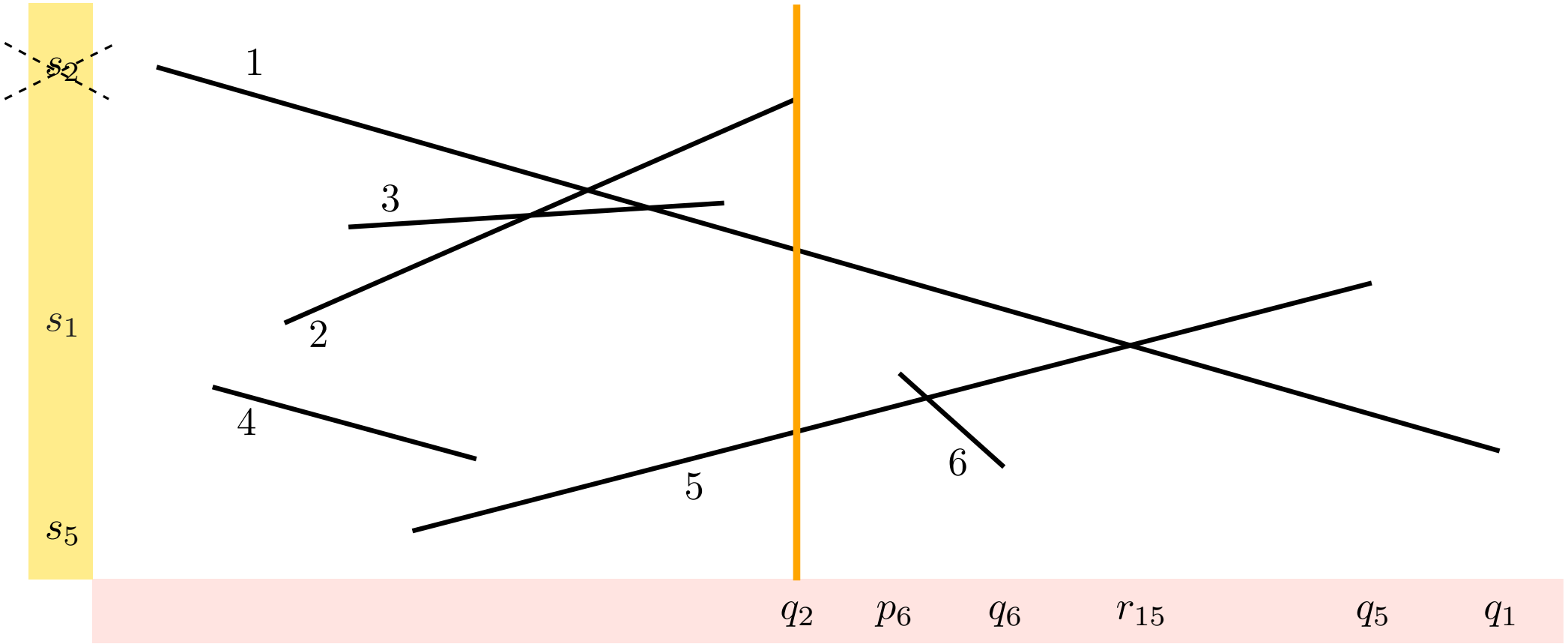


Simulació de l'algorisme de Bentley-Ottman



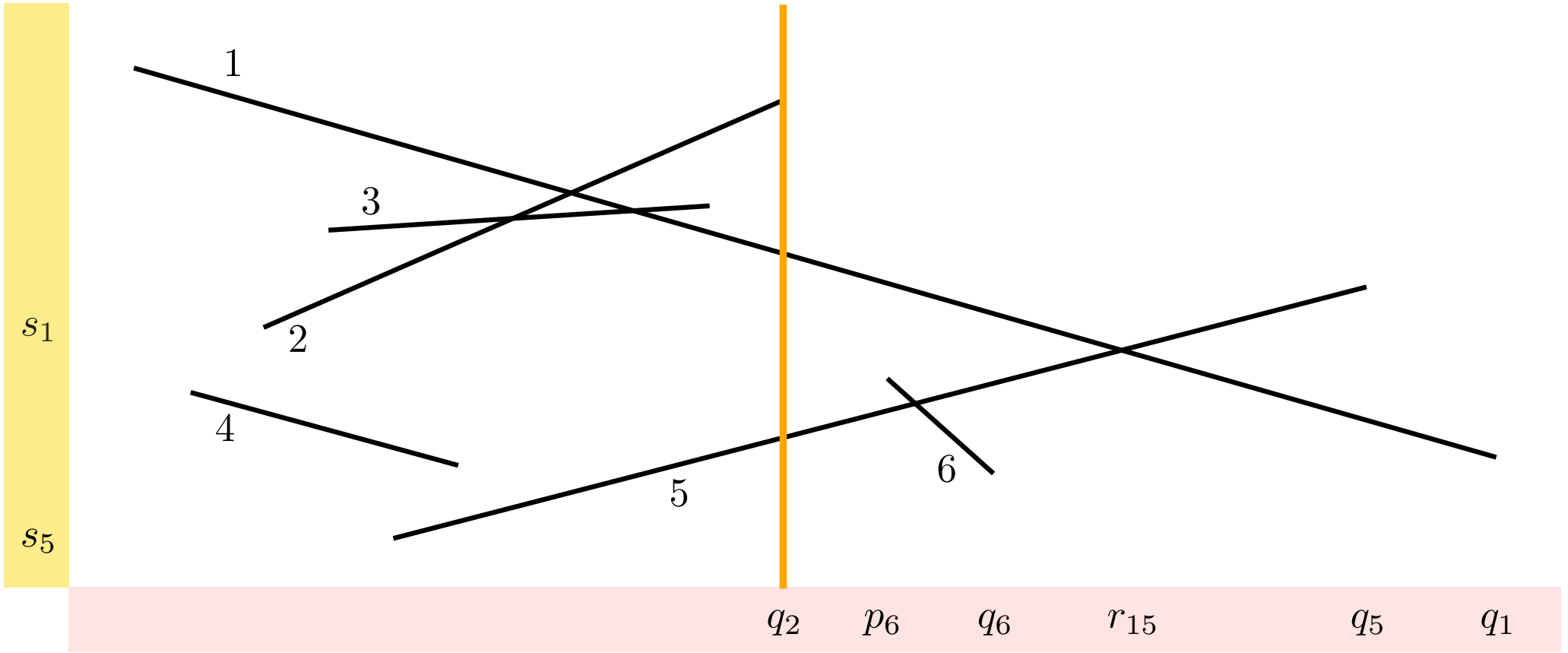
r_{23} r_{12} r_{13} r_{15}

Simulació de l'algorisme de Bentley-Ottman



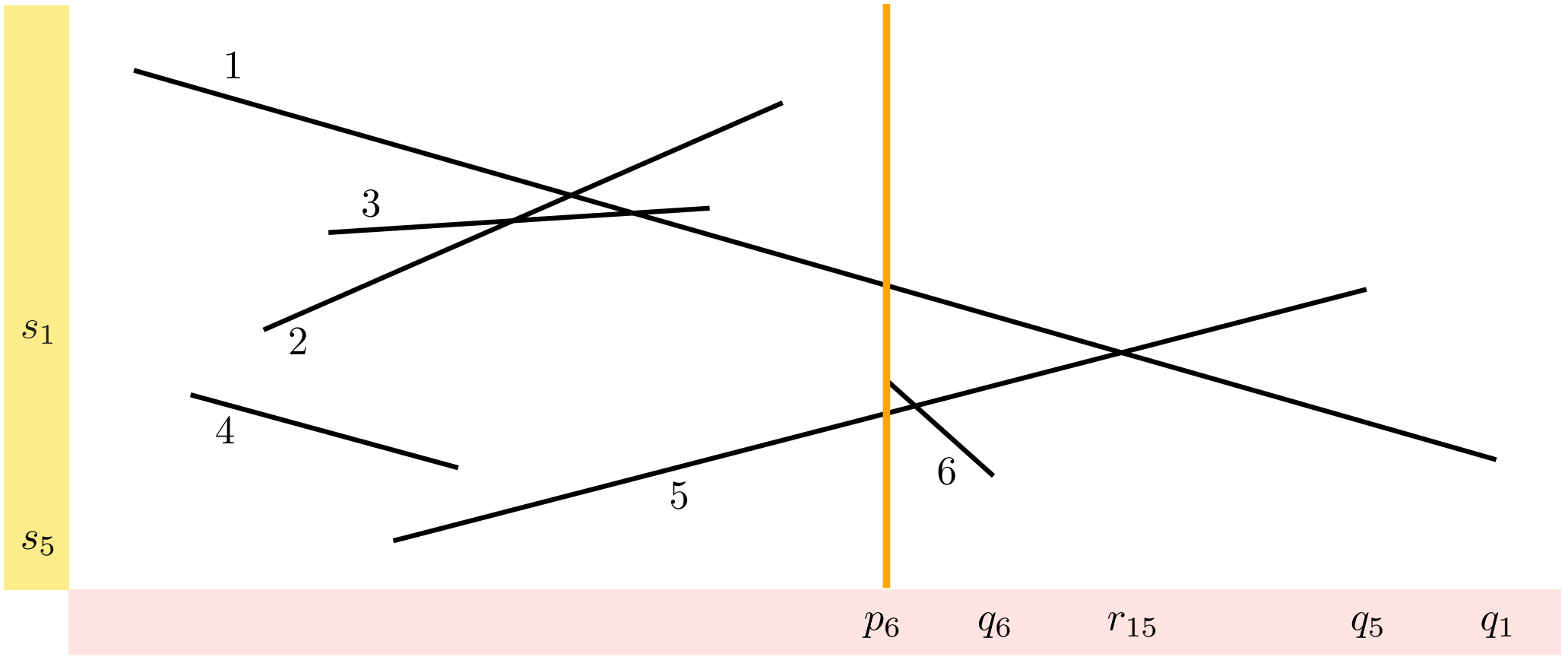
r_{23} r_{12} r_{13} r_{15}

Simulació de l'algorisme de Bentley-Ottman



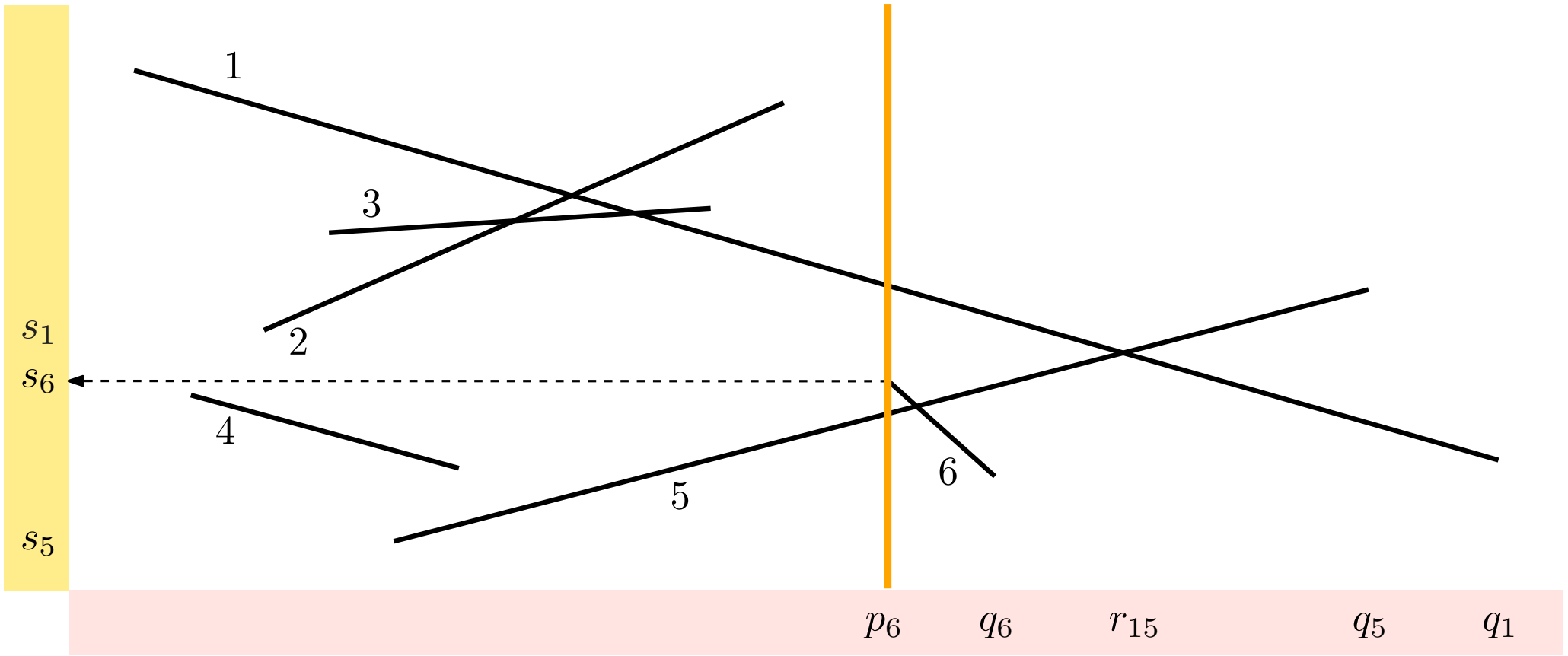
r_{23} r_{12} r_{13} r_{15}

Simulació de l'algorisme de Bentley-Ottman



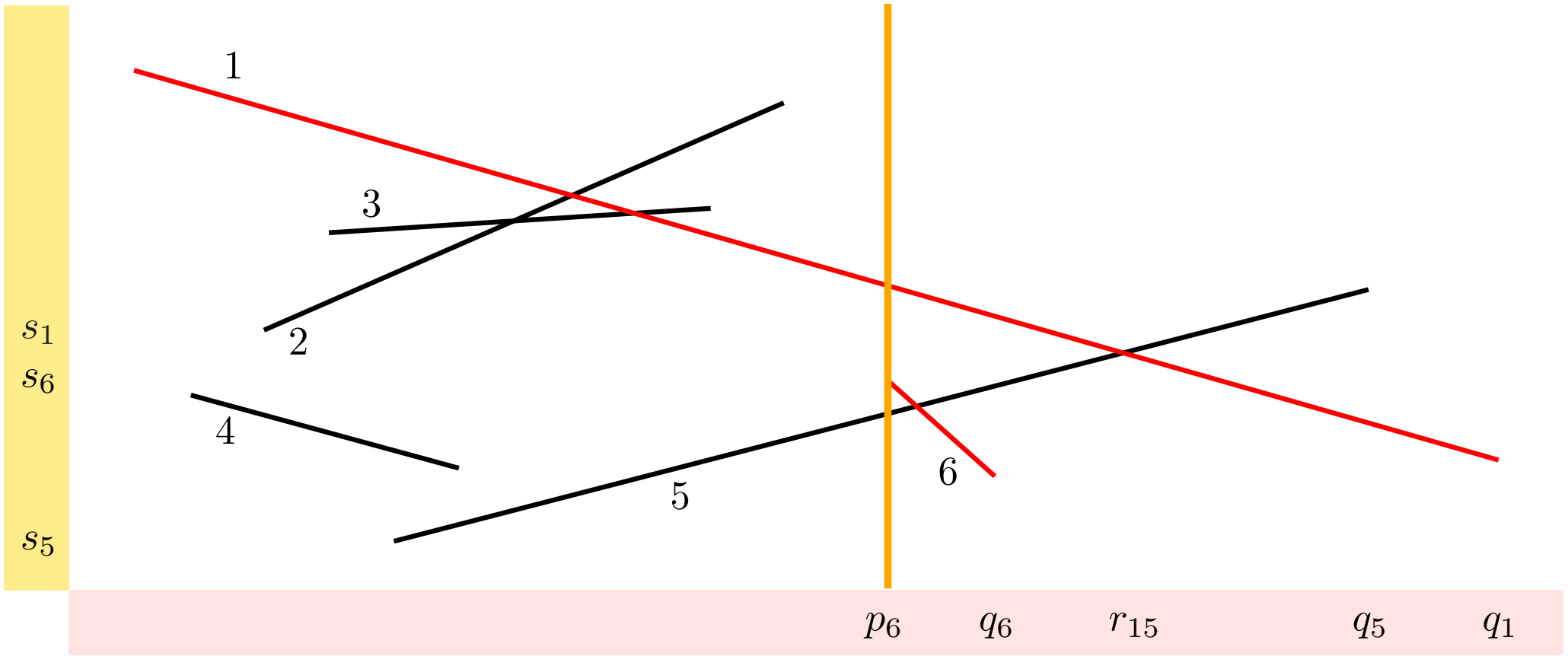
r_{23} r_{12} r_{13} r_{15}

Simulació de l'algorisme de Bentley-Ottman



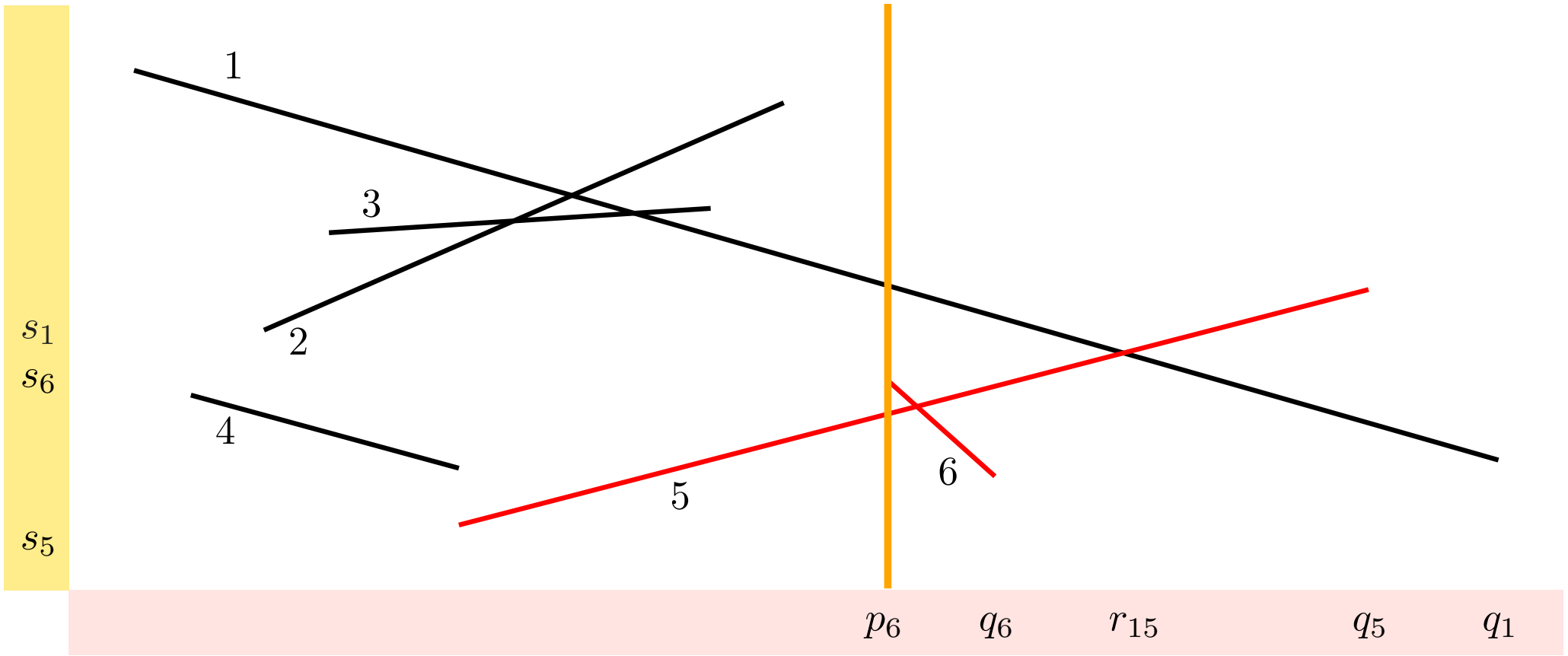
r_{23} r_{12} r_{13} r_{15}

Simulació de l'algorisme de Bentley-Ottman



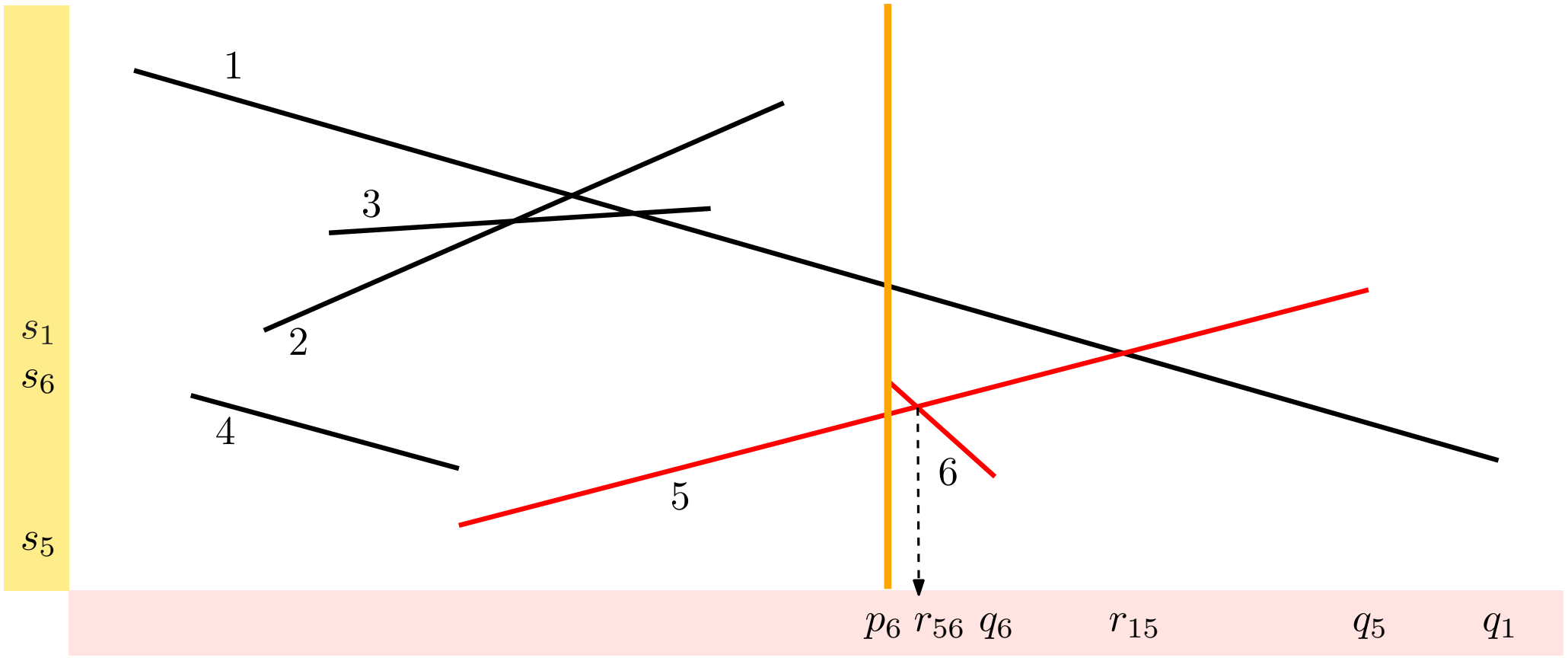
r_{23} r_{12} r_{13} r_{15}

Simulació de l'algorisme de Bentley-Ottman

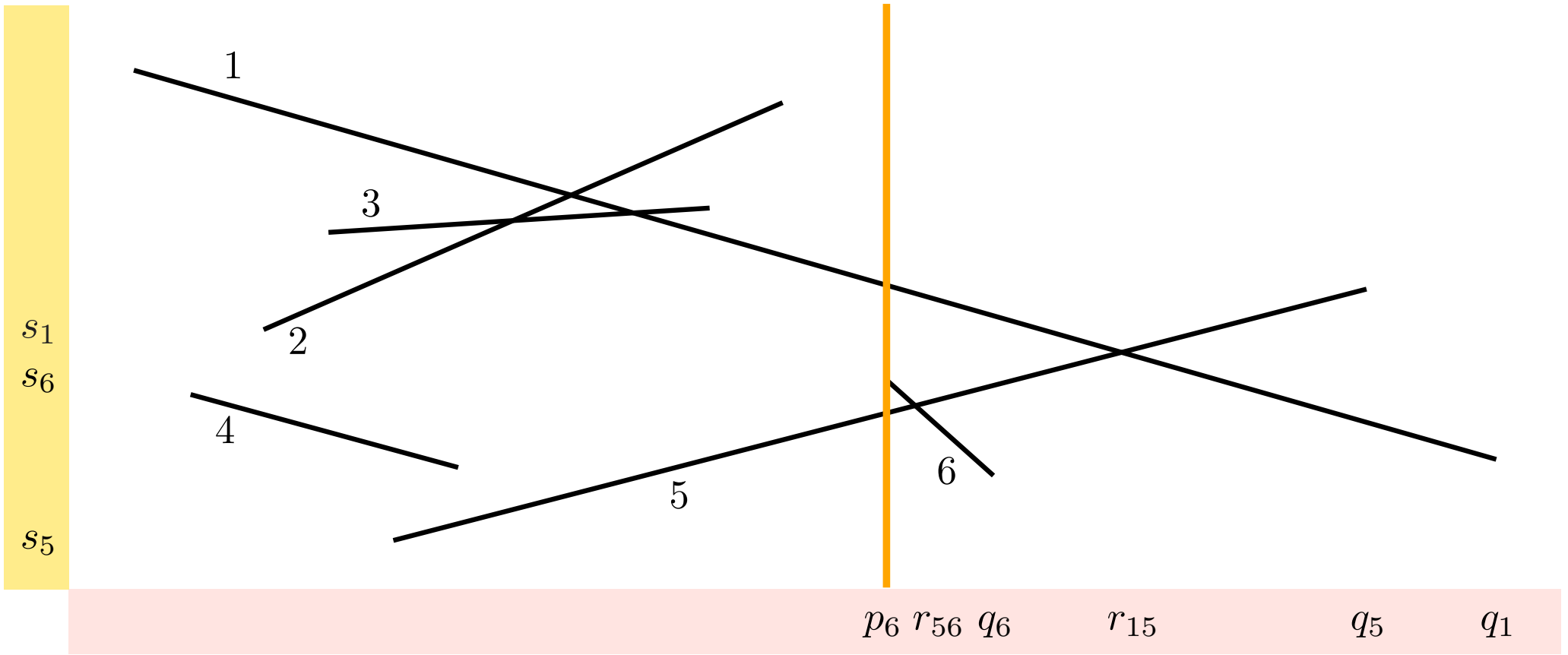


r_{23} r_{12} r_{13} r_{15}

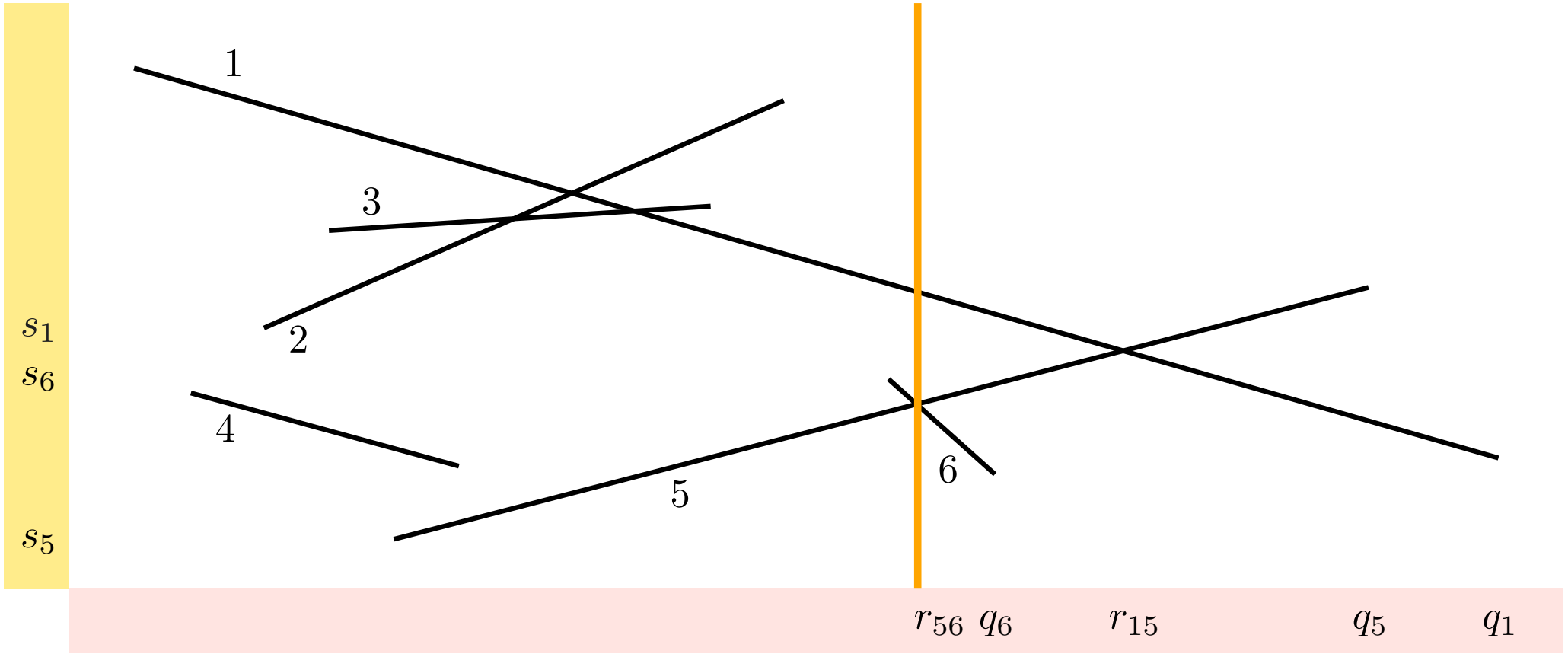
Simulació de l'algorisme de Bentley-Ottman



Simulació de l'algorisme de Bentley-Ottman

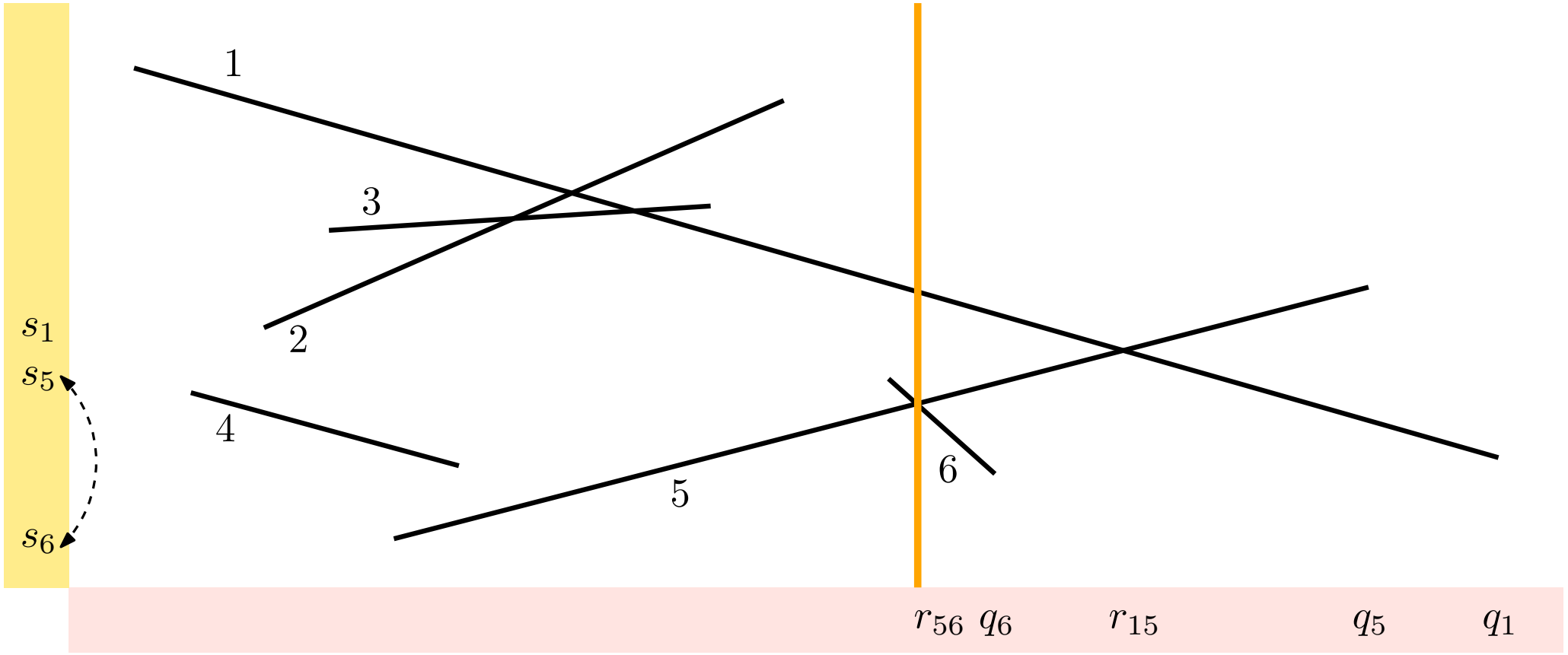


Simulació de l'algorisme de Bentley-Ottman

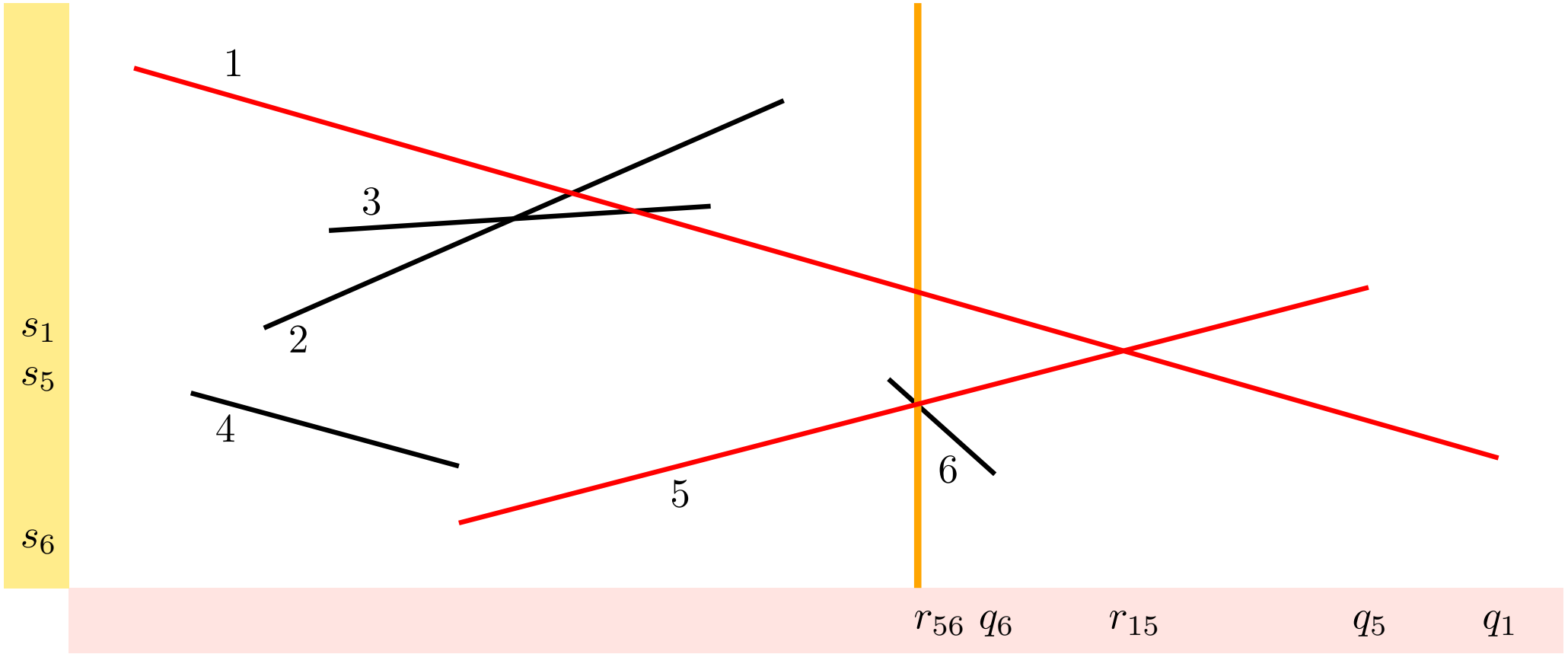


r_{23} r_{12} r_{13} r_{56} r_{15}

Simulació de l'algorisme de Bentley-Ottman

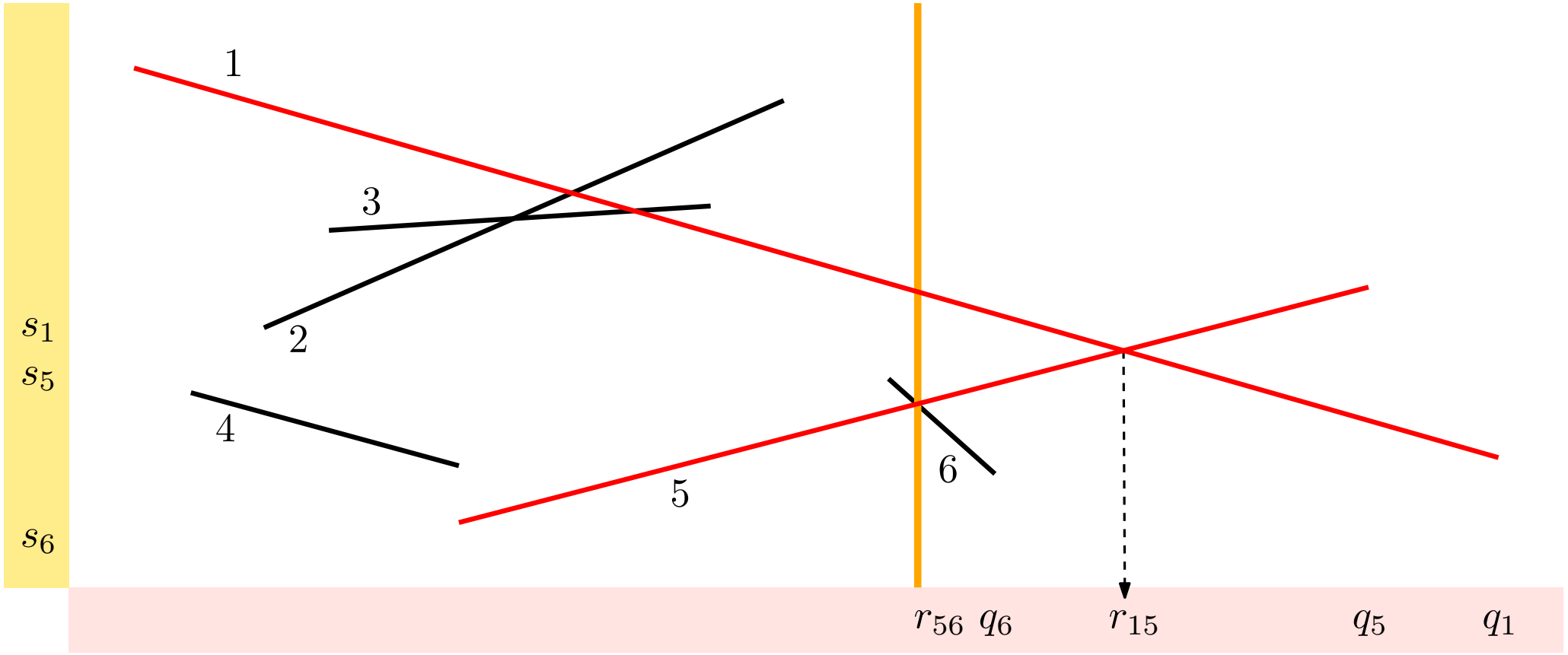


Simulació de l'algorisme de Bentley-Ottman



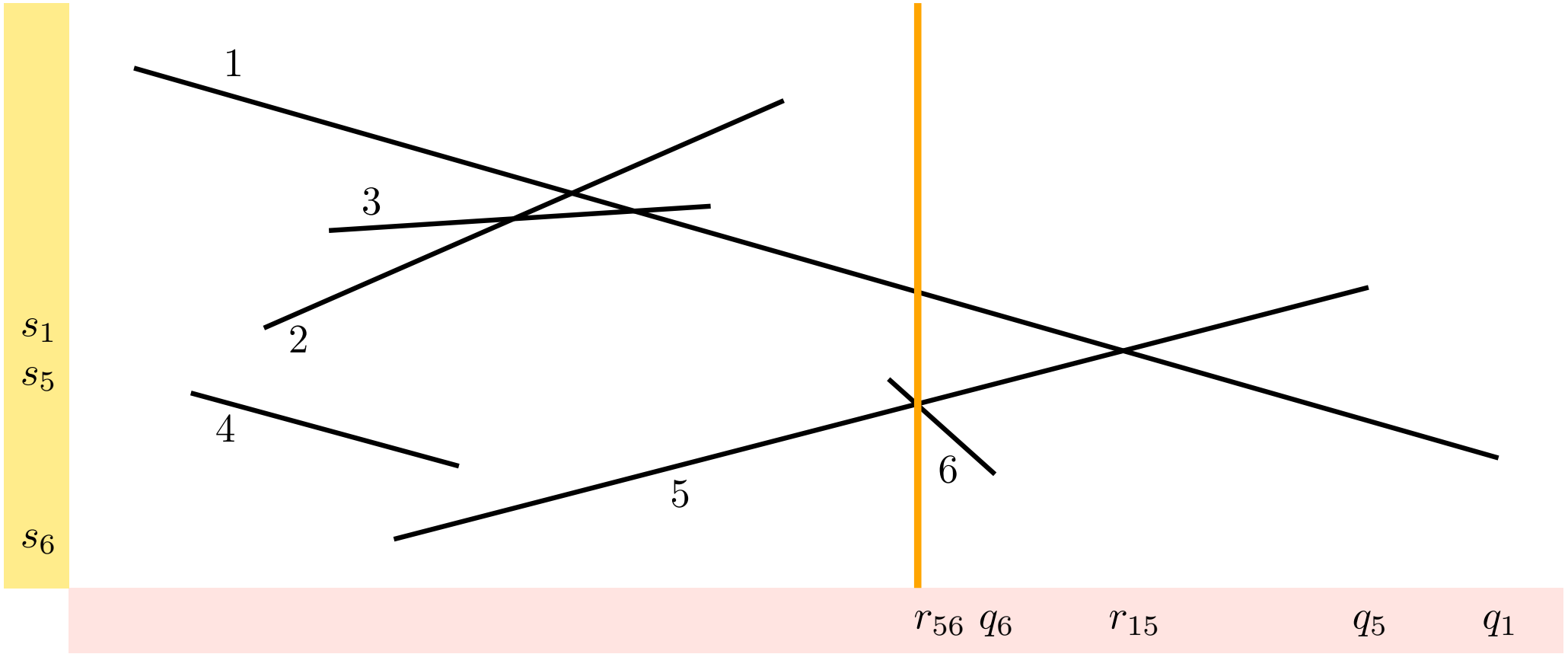
r_{23} r_{12} r_{13} r_{56} r_{15}

Simulació de l'algorisme de Bentley-Ottman



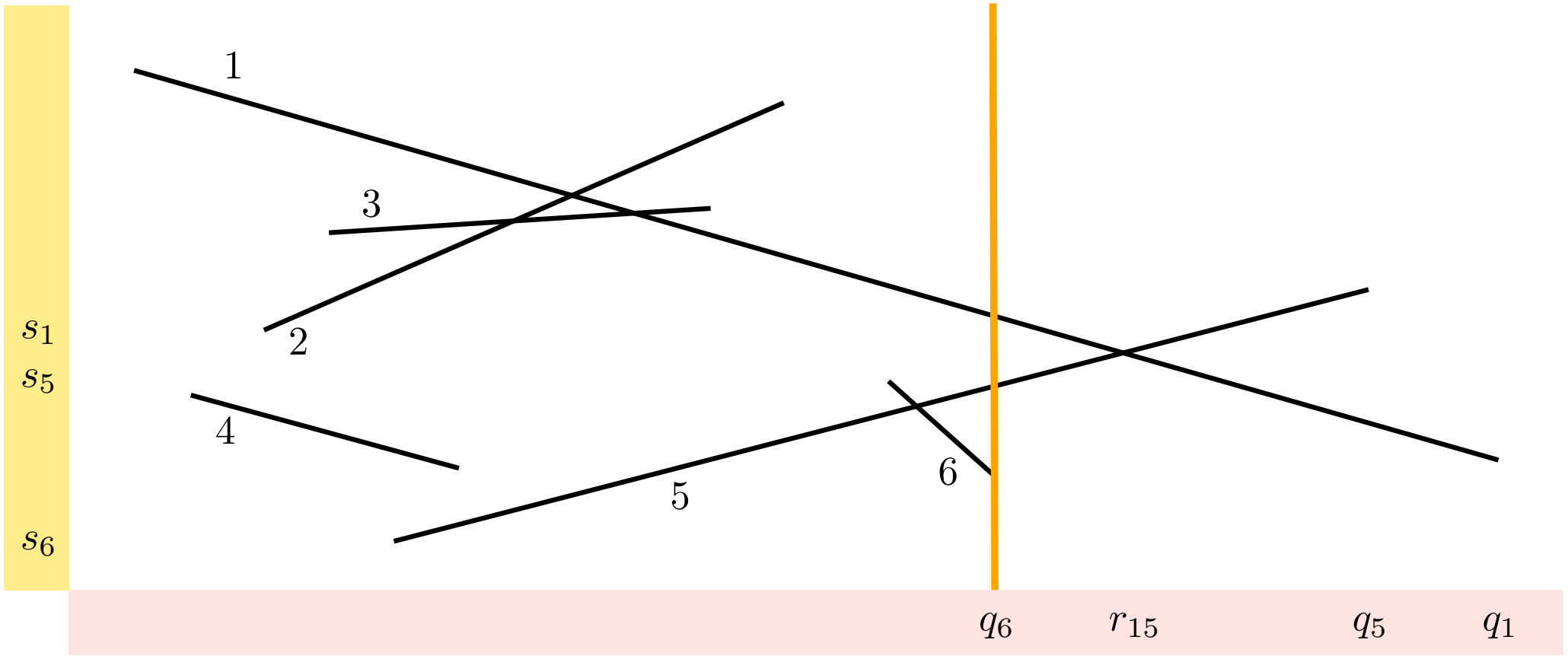
r_{23} r_{12} r_{13} r_{56} r_{15}

Simulació de l'algorisme de Bentley-Ottman



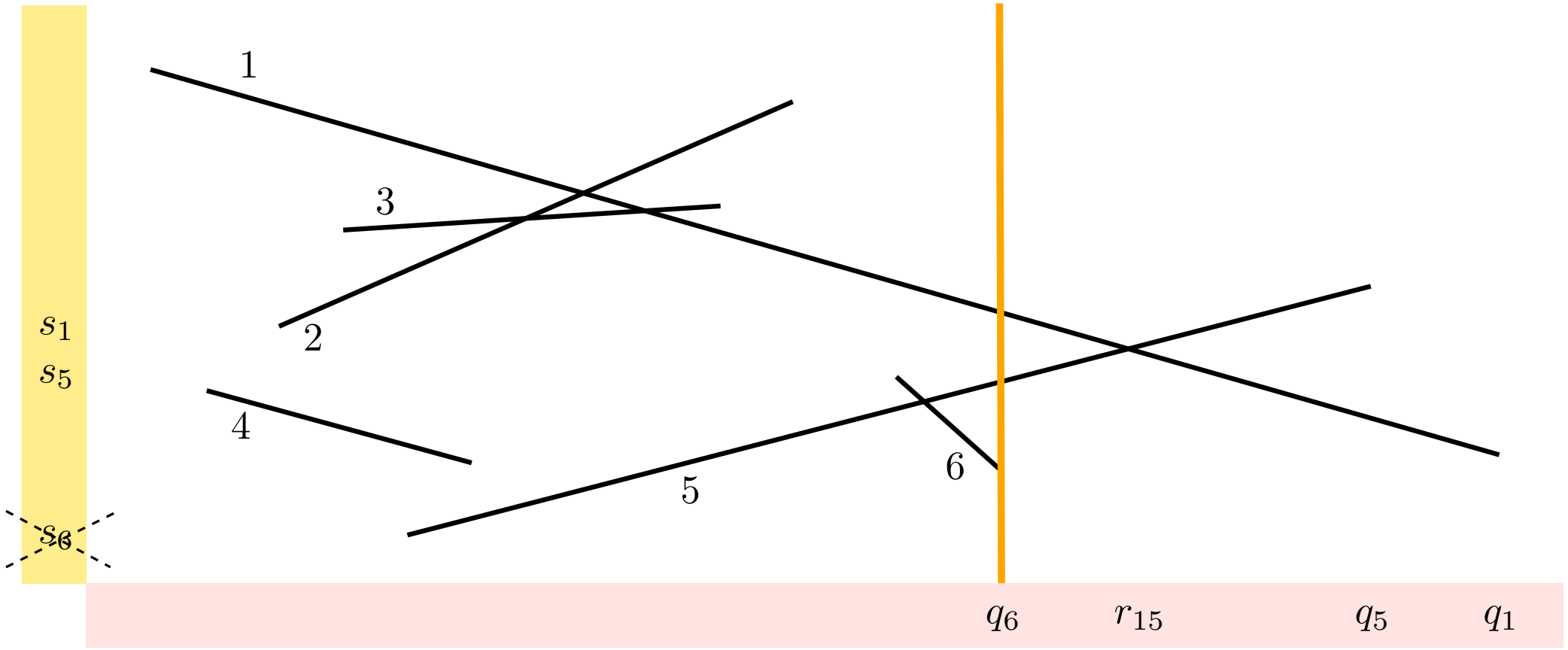
r_{23} r_{12} r_{13} r_{56} r_{15}

Simulació de l'algorisme de Bentley-Ottman

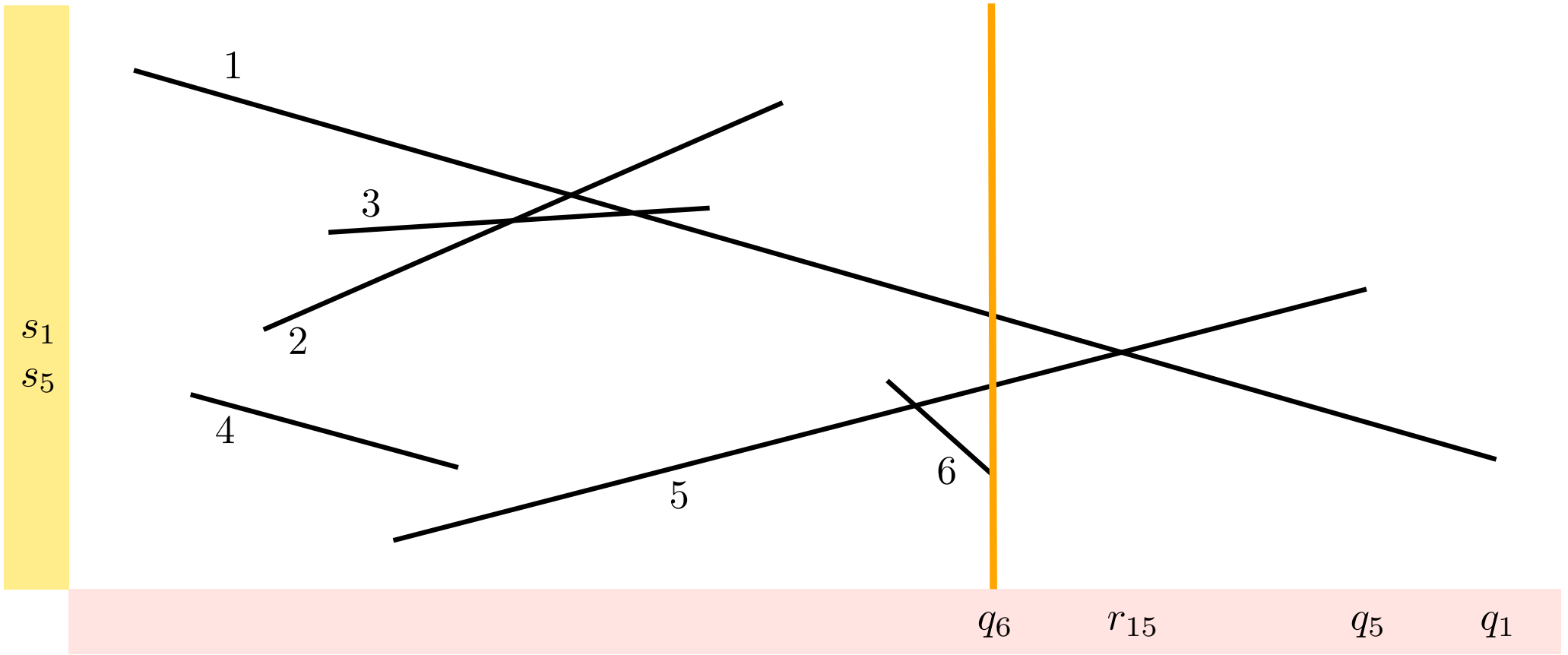


r_{23} r_{12} r_{13} r_{56} r_{15}

Simulació de l'algorisme de Bentley-Ottman

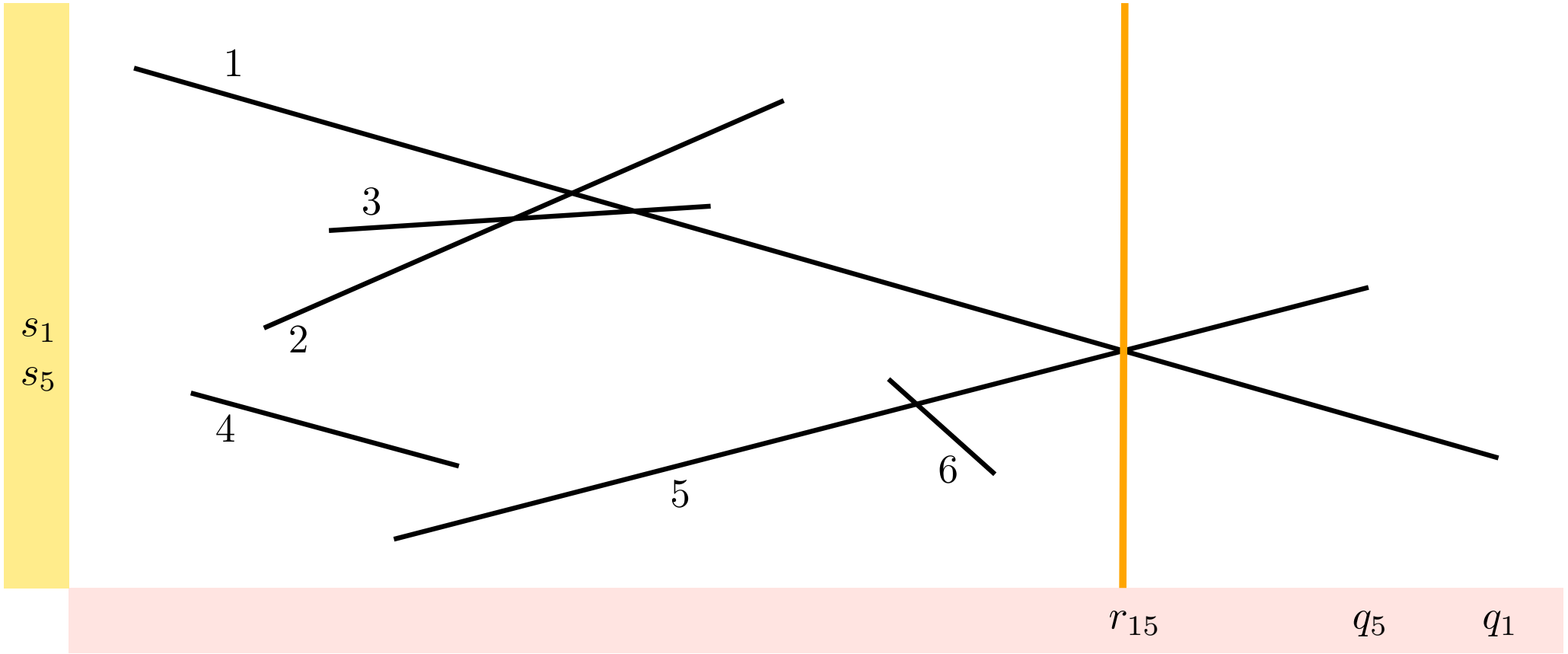


Simulació de l'algorisme de Bentley-Ottman



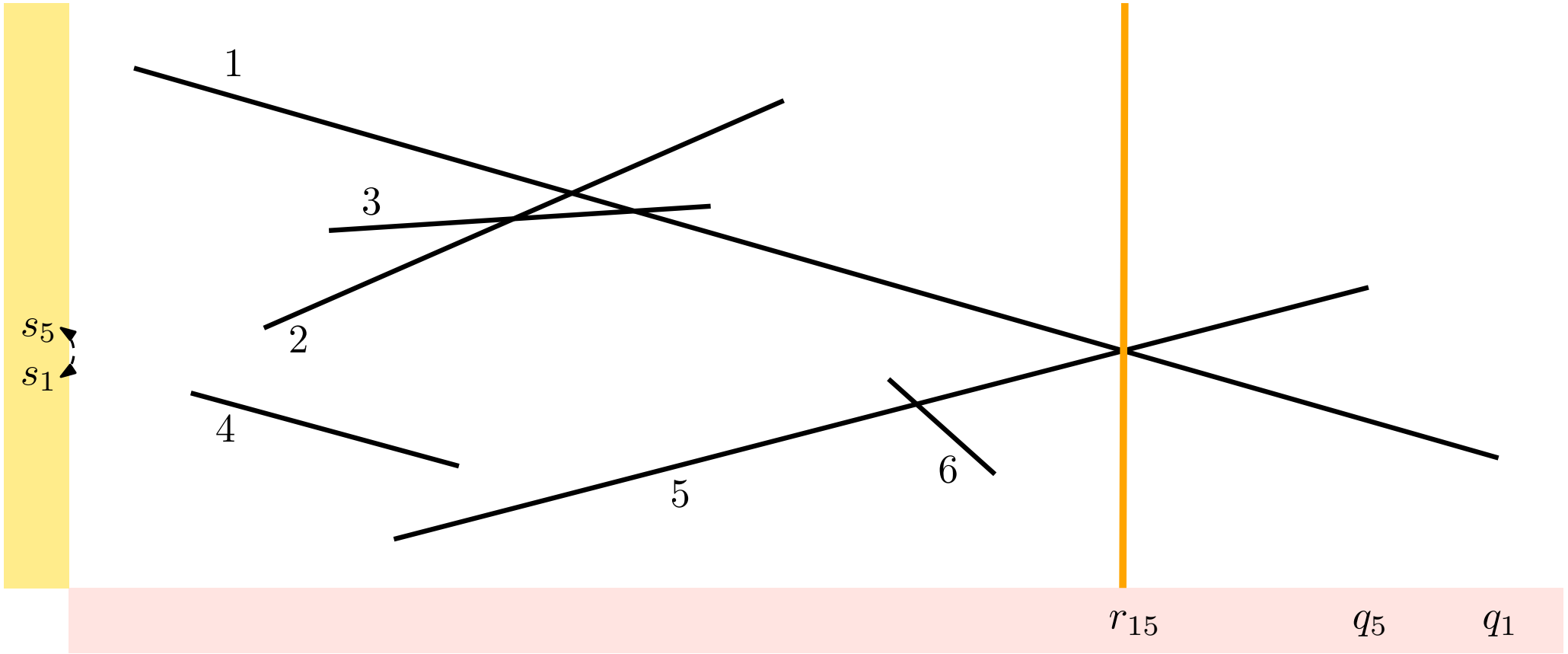
r_{23} r_{12} r_{13} r_{56} r_{15}

Simulació de l'algorisme de Bentley-Ottman



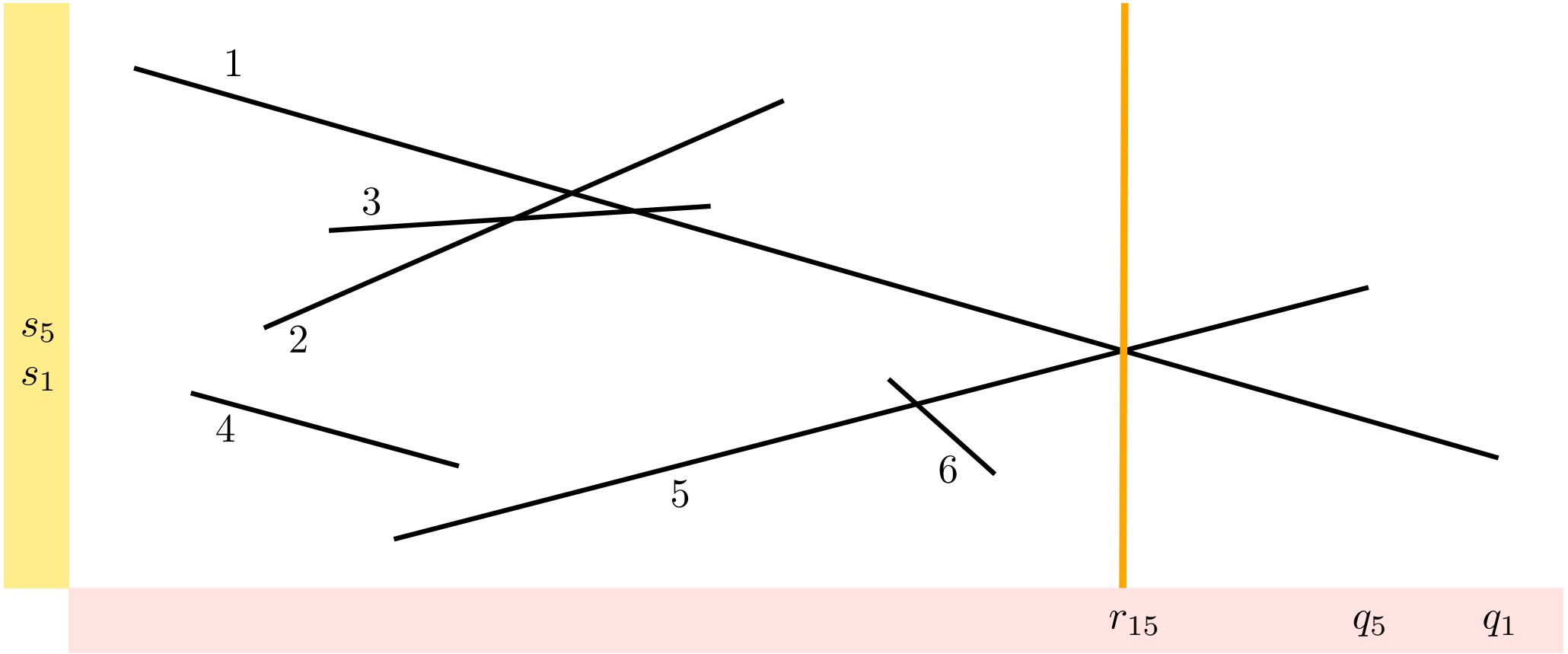
r_{23} r_{12} r_{13} r_{56} r_{15}

Simulació de l'algorisme de Bentley-Ottman



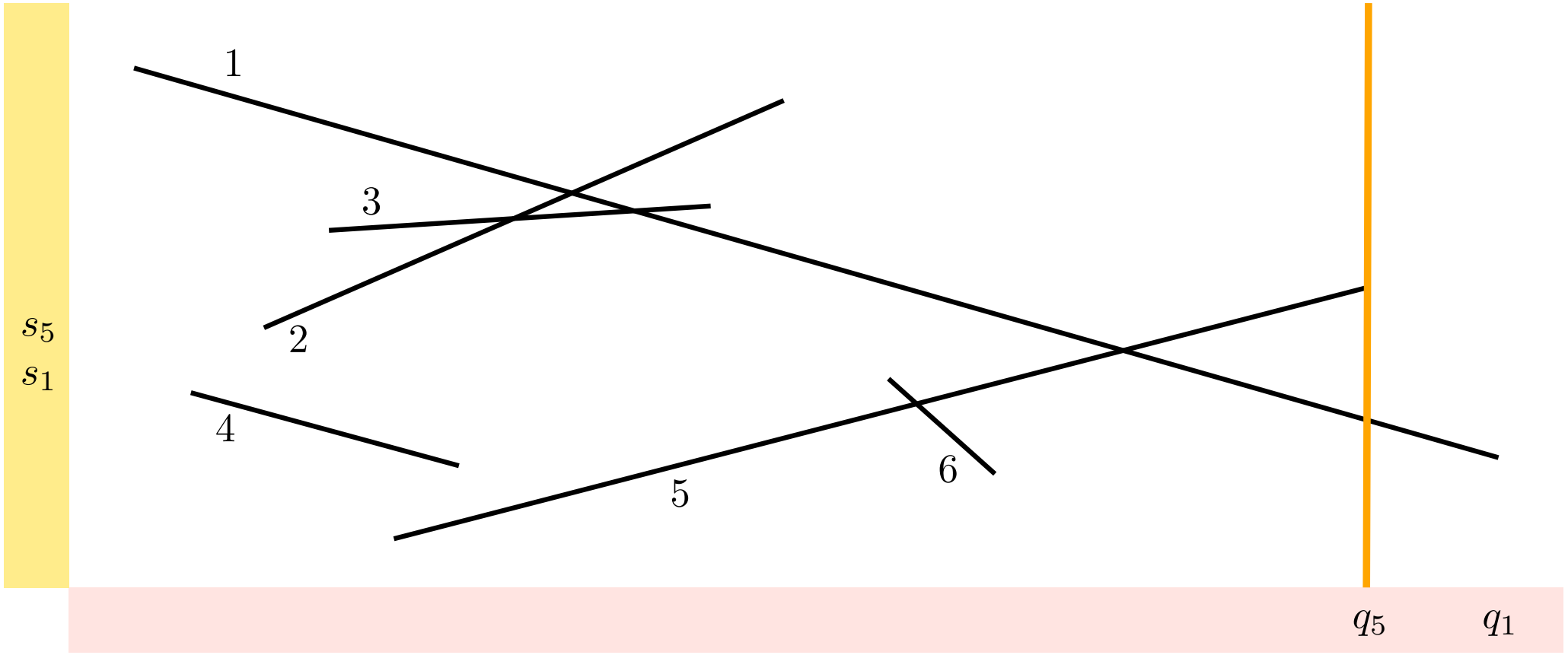
r_{23} r_{12} r_{13} r_{56} r_{15}

Simulació de l'algorisme de Bentley-Ottman



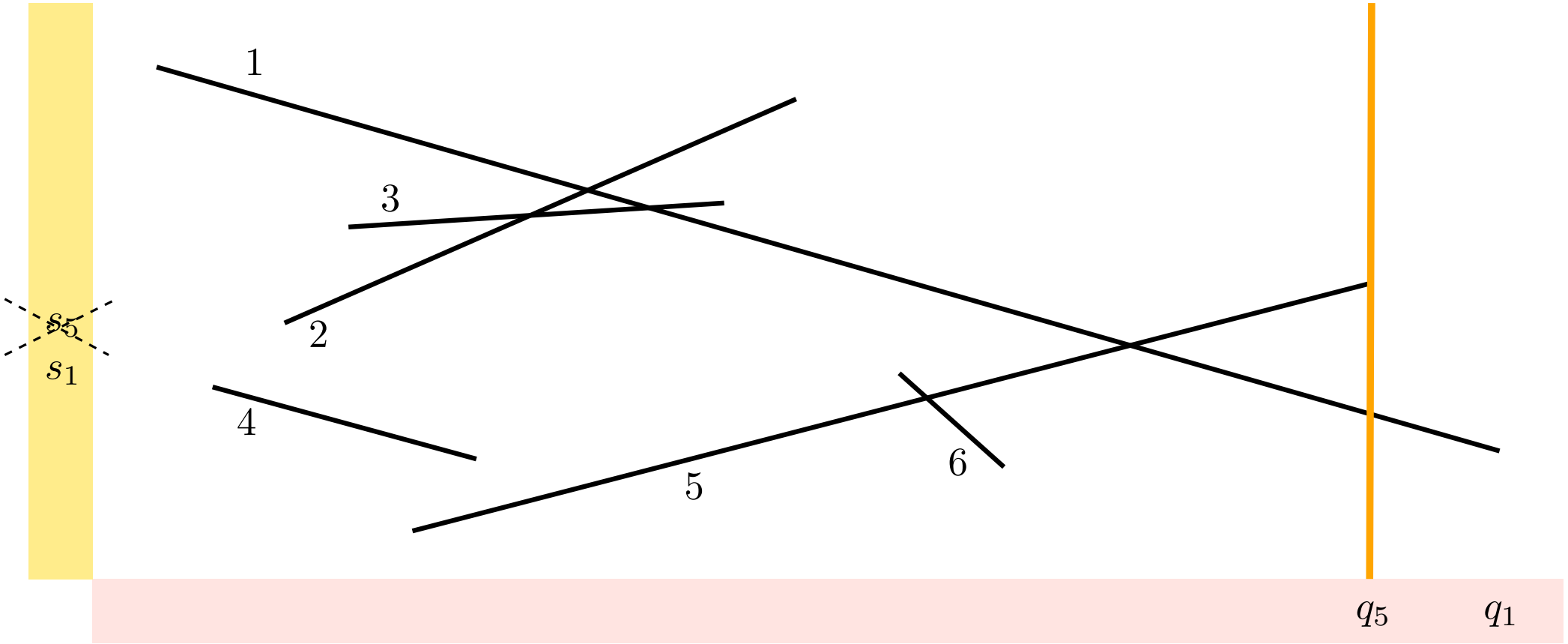
r_{23} r_{12} r_{13} r_{56} r_{15}

Simulació de l'algorisme de Bentley-Ottman



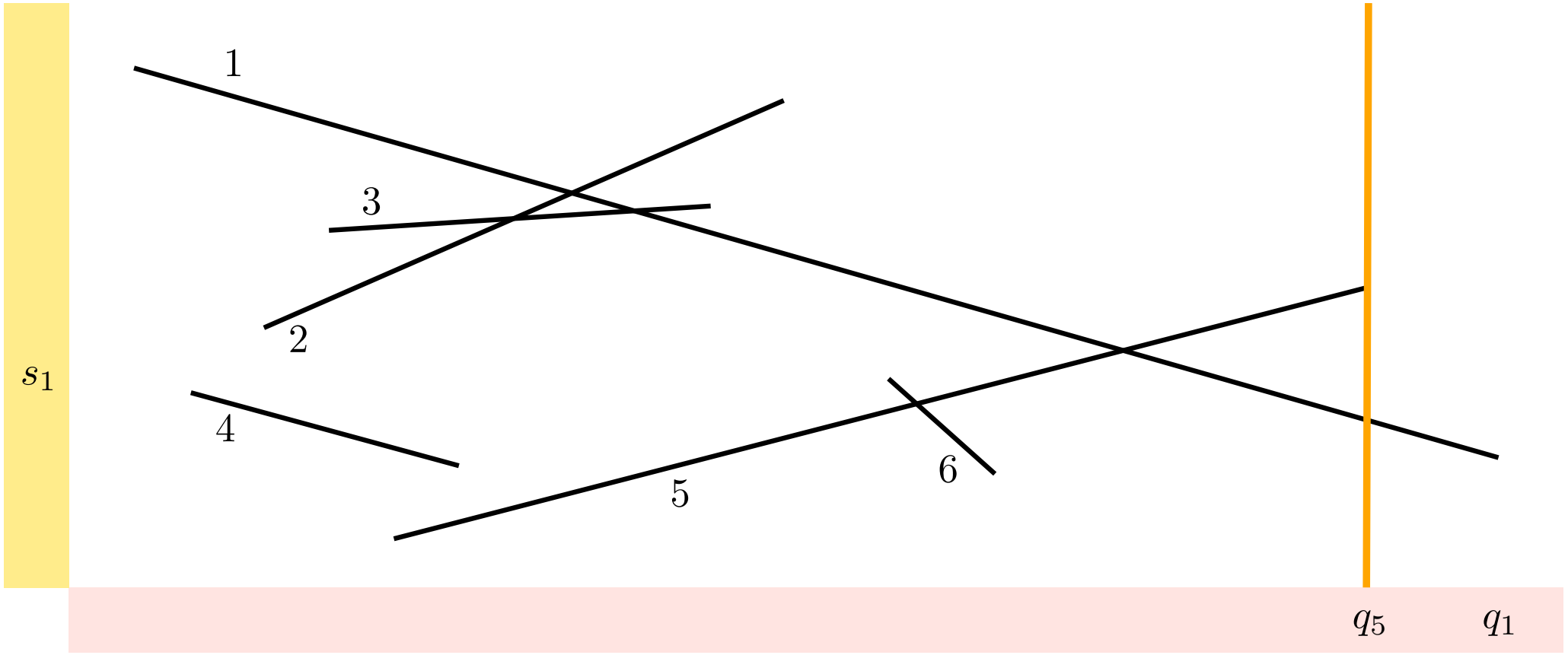
r_{23} r_{12} r_{13} r_{56} r_{15}

Simulació de l'algorisme de Bentley-Ottman



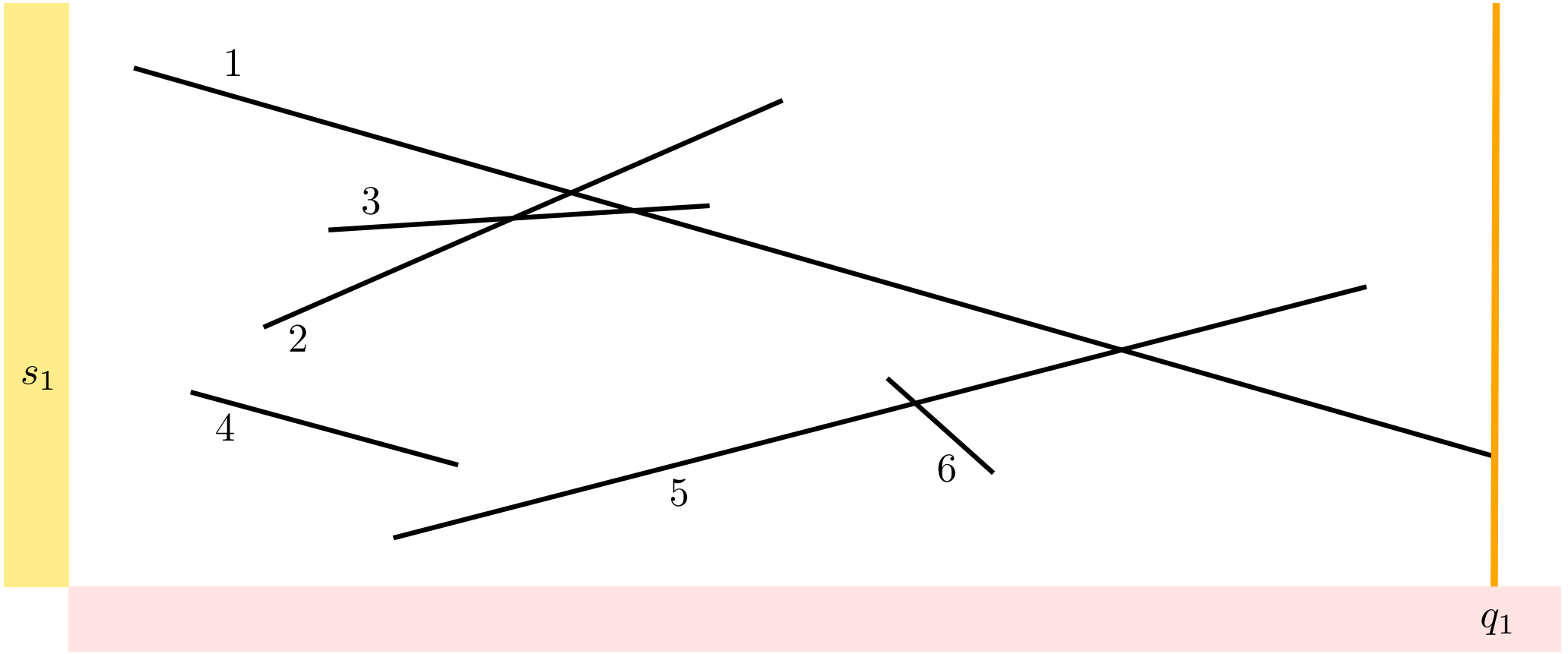
r_{23} r_{12} r_{13} r_{56} r_{15}

Simulació de l'algorisme de Bentley-Ottman



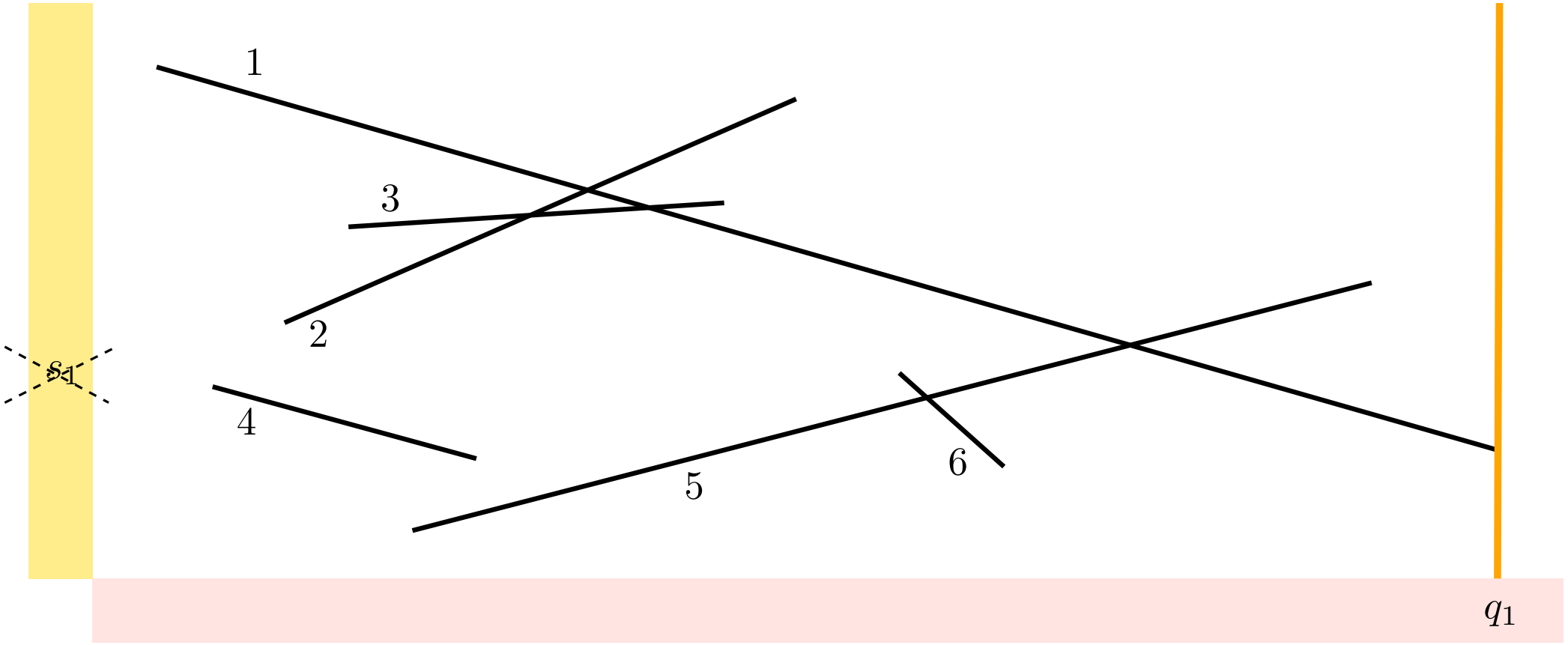
r_{23} r_{12} r_{13} r_{56} r_{15}

Simulació de l'algorisme de Bentley-Ottman



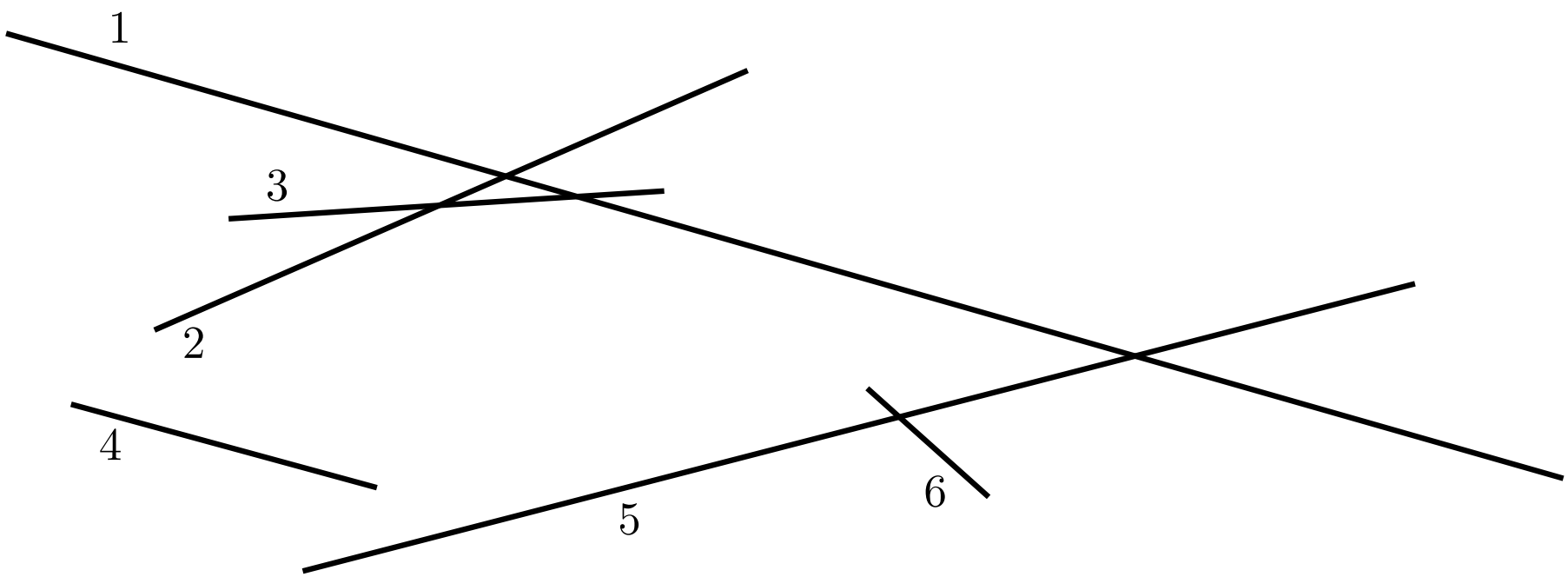
r_{23} r_{12} r_{13} r_{56} r_{15}

Simulació de l'algorisme de Bentley-Ottman



r_{23} r_{12} r_{13} r_{56} r_{15}

Simulació de l'algorisme de Bentley-Ottman



r_{23} r_{12} r_{13} r_{56} r_{15}

INTERSECCIÓ DE SEGMENTS

Algorisme de Bentley-Ottman

Algorisme de Bentley-Ottman

Correcció

- L'algorisme troba totes les interseccions (gràcies a l'Observació 2)
- L'algorisme no troba cap falsa intersecció (ja que els talls es comproven)

Algorisme de Bentley-Ottman

Correcció

- L'algorisme troba totes les interseccions (gràcies a l'Observació 2)
- L'algorisme no troba cap falsa intersecció (ja que els talls es comproven)

Gestió dels casos degenerats

- Per manegar el cas que diversos punts puguin tenir la mateixa abscissa, sols cal que la cua d'esdeveniments, E, emmagatzemi els punts en ordre lexicogràfic, i no sols per ordre d'abscissa.
- L'algorisme pot detectar, trivialment, si dos o més segments es tallen en més d'un punt (és a dir, es tallen en un segment), donat que s'atura als seus extrems.
- Una petita modificació permet també resoldre el cas que tres o més segments es tallen en un mateix punt: sols cal invertir el seu ordre a la recta d'escombrat en el moment que l'algorisme s'atura al punt de tall.

INTERSECCIÓ DE SEGMENTS

Algorisme de Bentley-Ottman

Estructures de dades

Algorisme de Bentley-Ottman

Estructures de dades

Recta d'escombrat, R:

Ha de mantenir l'ordre total dels segments interceptats i suportar:

- insertar(s)
- esborrar(s)
- transposar(s_1, s_2)
- anterior(s)
- posterior(s)

Un diccionari (arbre binari equilibrat) permet fer cadascuna d'aquestes operacions en temps $O(\log n)$

Algorisme de Bentley-Ottman

Estructures de dades

Cua d'esdeveniments, E:

Ha de mantenir l'ordre total dels esdeveniments i suportar:

- mínim (reportar i extreure)
- insertar(p)
- memberQ(p)

Una cua de prioritat (arbre binari equilibrat) permet fer cadascuna d'aquestes operacions en temps $O(\log n)$

Algorisme de Bentley-Ottman

Complexitat (temps)

Algorisme de Bentley-Ottman

Complexitat (temps)

Inicialització: $O(n \log n)$

Avenç (es fa $2n + k$ cops):

1. $O(\log n)$
2. 3. 4. $O(\log n)$
5. $O(\log n)$

Total: $O((n + k) \log n)$

Algorisme de Bentley-Ottman

Complexitat (temps)

Inicialització: $O(n \log n)$

Avenç (es fa $2n + k$ cops):

1. $O(\log n)$
2. 3. 4. $O(\log n)$
5. $O(\log n)$

Total: $O((n + k) \log n)$

Els comptes anteriors corresponen al cas no degenerat.
En el cas que els punts de tall, v_i, puguin correspondre a més de dos segments, el cost total de l'avenç de l'algorisme és $O((\sum_{i=1}^{k} \text{grau}(v_i)) \log n)$. Ara bé, si es consideren els punts v_i com a vèrtexs del graf:

$$\sum_{i=1}^{k} \text{grau}(v_i) \leq 2a = O(a) = O(v) = O(2n + k) = O(n + k).$$

Algorisme de Bentley-Ottman

Complexitat (espai)

Algorisme de Bentley-Ottman

Complexitat (espai)

En cada pas de l'algorisme, la recta d'escombrat emmagatzema, com a molt, n segments.

Algorisme de Bentley-Ottman

Complexitat (espai)

En cada pas de l'algorisme, la recta d'escombrat emmagatzema, com a molt, n segments.

En la formulació exposada fins aquí, la cual d'esdeveniments emmagatzema, en algun moment de l'algorisme, tots els punts de tall, que són $k = O(n^2)$.

Algorisme de Bentley-Ottman

Complexitat (espai)

En cada pas de l'algorisme, la recta d'escombrat emmagatzema, com a molt, n segments.

En la formulació exposada fins aquí, la cual d'esdeveniments emmagatzema, en algun moment de l'algorisme, tots els punts de tall, que són $k = O(n^2)$.

Tanmateix, una petita modificació permet que la cua d'esdevaniment emmagatzemi, en cada pas de l'algorisme, com a molt 2n-1 esdeveniments. Això es pot aconseguir si, a cada pas, sols es guarden a E les interseccions dels segments que són adjacents a R, els quals s'esborren quan deixen de ser-ho.

INTERSECCIÓ DE SEGMENTS

El problema de decisió

INTERSECCIÓ DE SEGMENTS

El problema de decisió

Entrada: n segments del pla, $s_i = (p_i, q_i),\ i = 1 \ldots n$.
Sortida: Si/No hi ha intersecció entre alguns dels segments, i reportar un testimoni

INTERSECCIÓ DE SEGMENTS

El problema de decisió

Entrada: n segments del pla, $s_i = (p_i, q_i),\ i = 1 \ldots n$.
Sortida: Si/No hi ha intersecció entre alguns dels segments, i reportar un testimoni

Solució

L'Algorisme de Bentley-Ottman resol aquest problema en temps $O(n \log n)$.

INTERSECCIÓ DE SEGMENTS

El problema de decisió

Entrada: n segments del pla, $s_i = (p_i, q_i),\ i = 1 \ldots n$.
Sortida: Si/No hi ha intersecció entre alguns dels segments, i reportar un testimoni

Solució

L'Algorisme de Bentley-Ottman resol aquest problema en temps $O(n \log n)$.

Fita inferior

El problema de decisió és $\Omega(n \log n)$.

INTERSECCIÓ DE SEGMENTS

El problema de decisió

Entrada: n segments del pla, $s_i = (p_i, q_i),\ i = 1 \ldots n$.
Sortida: Si/No hi ha intersecció entre alguns dels segments, i reportar un testimoni

Solució

L'Algorisme de Bentley-Ottman resol aquest problema en temps $O(n \log n)$.

Fita inferior

El problema de decisió és $\Omega(n \log n)$.

Això es demostra per reducció del problema d'unicitat sobre enters:

Donats $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{N}$, es construeixen $p_i = (x_i, 0)$, $q_i = (x_i, 1)$ i $s_i = (p_i, q_i)$.
Els segments es tallen si, i només si, els nombres originals tenien repeticions.

Si no us agrada la degeneració dels segments, considereu els punts següents:
$p_i = (x_i - \frac{1}{2i}, 0)$ i $q_i = (x_i + \frac{1}{2i}, 1)$.

INTERSECCIÓ DE SEGMENTS

El problema de reportar totes les interseccions

El problema de reportar totes les interseccions

Corol·lari

El problema de reportar totes les interseccions és $\Omega(k + n \log n)$, ja que

- Reportar requereix $\Omega(k)$
- Decidir requereix $\Omega(n \log n)$

El problema de reportar totes les interseccions

Corol·lari

El problema de reportar totes les interseccions és $\Omega(k + n \log n)$, ja que

- Reportar requereix $\Omega(k)$
- Decidir requereix $\Omega(n \log n)$

Algorisme òptim

Existeix un algorisme de Chazelle i Edelsbrunner que resol aquest problema en temps $\Theta(k + n \log n)$.

El problema de reportar totes les interseccions

Corol·lari

El problema de reportar totes les interseccions és $\Omega(k + n \log n)$, ja que

- Reportar requereix $\Omega(k)$
- Decidir requereix $\Omega(n \log n)$

Algorisme òptim

Existeix un algorisme de Chazelle i Edelsbrunner que resol aquest problema en temps $\Theta(k + n \log n)$.

Conseqüències

- El problema de decidir si un polígon és simple es pot resoldre en temps $O(n \log n)$.
- El problema de decidir si dos polígons simples es tallen es pot resoldre en temps $O(n \log n)$.

PER SABER-NE MÉS

- F. Preparata, M. Shamos, *Computational Geometry: An introduction (revised ed.)*, Springer, 1993.
- M. de Berg, O. Cheong, M. van Kreveld, M. Overmars: *Computational Geometry: Alhorithms and Applications*, Springer.
- J-D. Boissonnat, M. Yvinec, *Algorithmic Geometry*, Cambridge University Press, 1998.