Problemas de exámenes de Relaciones y Funciones

1. Se considera el conjunto $A = \{a,b\}$

   a) ¿Cuántas relaciones binarias se pueden definir sobre A?
   b) Encontrar todas la relaciones de equivalencia y todas las relaciones de orden que se pueden definir sobre A.
   c) Del apartado anterior deducir una condición necesaria i suficiente para que una relación binaria sea de equivalencia y de orden. Demostrar esta condicion para toda relación binaria definida sobre cualquier conjunto.

2. Considerar la relación siguiente definida sobre $\mathbf{N}$:

$$m\mathrm{R}n \text{ si y sólo si } (\exists k\in \mathbf{N})(m^2 = kn)$$

a) Estudiar sus propiedades (demostrando las que se satisfacen y dar contraejemplo de las que no se satisfacen)
b) Calcular los elementos de los conjuntos $\{n\in \mathbf{N} \mid 4\mathrm{R}n\}$ y $\{m\in \mathbf{N} \mid m\mathrm{R}4\}$

3. Sobre $\mathbf{N}^2$ se define la relación R : $(a,b)\mathrm{R}(c,d)$ si y sólo si $(2a+1)2^d \leq (2c+1)2^b$.

a) Demostrar que es una relación de orden total.
b) Ordenar según R los elementos del conjunto $B = \{0,1,2\}\times\{0,1,2\}$.

4. Considerar la relación R sobre $\mathbf{R}^2$ definida por:

$$(x_1,y_1)\mathrm{R}(x_2,y_2) \text{ si y sólo si } 5x_1^2-x_1-5x_2^2+x_2 = y_1-y_2$$

a) Demostrar que es una relación de equivalencia.
b) Calculad la clase a la que pertenece el punto (1,3).
c) Dar una interpretación (descripción) geométrica del conjunto cociente.

5. Consideremos un conjunto A y B un subconjunto de A. En $\mathcal{P}(A)$ definimos la siguiente relación: $X\mathrm{R}Y$ si y sólo si $X\cap B = Y\cap B$

a) Demostrar que R es una relación de equivalencia.
b) Define una aplicación bijectiva entre $\mathcal{P}(B)$ y $\mathcal{P}(A)/\mathrm{R}$

6. Demostrar que para toda función f de A en B y para todo subconjunto $X\subseteq A$, se verifica que $X\subseteq f^{-1}(f(X))$. Poner un ejemplo de una función y de un subconjunto que no verifiquen $f^{-1}(f(X)) \subseteq X$.

Demostrar que si f es injectiva, entonces $X = f^{-1}(f(X))$.

7. Sea el conjunto

$$A = \{(0,0),(1,0),(2,0),(3,0),(0,1),(1,1),(2,1),(3,1),(0,2),(1,2),(2,2),(3,2)\}$$

y sea la relación $(a,b)\mathrm{R}(c,d)$ si y sólo si $a \leq c$ y $b \leq d$

.

a) Probar que R es una relación de orden.
b) Representar el grafo asociado a A según la relación R.
c) Determinar (si existen) las cotas inferiores, las cotas superiores, el supremo, el ínfimo, el máximo y el mínimo del subconjunto $B = \{(1,1),(1,2),(2,1)\}$.

8. Referido al plano de coordenadas cartesianas, se considera el conjunto $\mathbf{Z}\times\mathbf{Z}$ de los puntos de coordenadas enteras. En este conjunto se define la relación

$$(a,b)\mathrm{R}(c,d) \text{ si y sólo si } (\exists m,n\in\mathbf{Z})(a-c = 2m \wedge b-a = 3n)$$

Probar que es de equivalencia, calcular el número de clases y buscar un representante de cada clase que esté a distancia mínima del origen.

9. En el conjunto $\{-3,-2,-1/2,1/3,2/3,3/2,3\}$ se considera la relación: $a\mathrm{R}b$ si y sólo si $a^2(b-1) = b^2(a-1)$. Demostrar que es de equivalencia y calculad el conjunto cociente.

10. Sea f una cierta aplicación de $\mathbf{Z}$ en $\mathbf{Z}$ y se considera la relación: $x\mathrm{R}y$ si y sólo si $f(x) \leq f(y)$ sobre $\mathbf{Z}$.

a) Demostrar que si f es injectiva, entonces R es una relación de orden.
b) Demostrar que si además f es creciente, entonces R es de orden total.

11. Sea el conjunto $M = \{1,2,3,4\}$ y f la aplicación de M en M definida por $f(1) = 3$, $f(2) = 3$, $f(3) = 4$ y $f(4) = 4$. Indicar cuáles de las siguientes relaciones son correctas y rectificar las que sean incorrectas:

$$\{f(1)\}\in M \;,\; f(M)\subseteq M \;,\; f(2)\in\mathcal{P}(M) \;,\; \{\{f(3)\}\}\in\mathcal{P}(M) \;,\; f^{-1}(1)\in\{f^{-1}(2)\}$$

$$\{f^{-1}(4)\}\in\mathcal{P}(\mathcal{P}(M) \;,\; f^{-1}(f(1)) = 1 \;,\; f(f^{-1}(1)) = 1 \;,\; f(\emptyset) = \{\emptyset\})$$

12. Se considera la aplicación f de $\mathbf{Q}-\{1\}$ en $\mathbf{Q}-\{2\}$ definida por $f(x) = (2x+3)/(x-1)$. Demostrar que es biyectiva y hallar f^{-1}.

13. Consideremos la función f de $\mathbf{N}^2$ en $\mathbf{N}^2$ definida por: $f(x,y) = (2x+y,x+2y)$

a) Es injectiva? Es exhaustiva?
b) Calcular $f \circ f$ y $f \circ f \circ f$.
c) Demostrar por inducción que $f^n(x,y) = (\alpha_n x+\beta_n y,\beta_n x+\alpha_n y)$, siendo $\alpha_n = (3^n+1)/2$ y $\beta_n = (3^n-1)/2$.

14. Sean f y g les aplicaciones de $\mathbf{R}^2$ en $\mathbf{R}^2$ definidas por:

$$f(x,y) = (3x-y,2y) \qquad\qquad g(x,y) = (xy,x^2+y^2)$$

a) Demostrar que f es biyectiva y calcular f^{-1}.
b) Calcular $f \circ g$ y $g \circ f$.
c) Demostrar que $f^n(x,y) = (3^n x+(2^n-3^n)y,2^n y)$

15. Consideremos las aplicaciones f de $\mathbf{Z}/(24)$ en $\mathbf{Z}/(23)$ y g de $\mathbf{Z}/(24)$ en $\mathbf{Z}/(24)$ definidas por $f(\langle x\rangle) = g(\langle x\rangle) = \langle 6\rangle\langle x\rangle+\langle 4\rangle$.

a) calcular $f^{-1}(\langle 2\rangle)$ y $g^{-1}(\langle 2\rangle)$
b) clasificar f y g.

16. Consideremos la función f de $\mathbf{R}^{-}\cup\{0\}$ en $\mathbf{R}$ definida por $f(x) = x/(x+1)$.

a) Demostrar por inducción que $f^n(x) = x/(nx+1)$.
b) Clasificar f.
c) Definir una restricción bijectiva de f y la correspondiente función inversa.

17. Por cada par $(a,b)\in \mathbf{R}\times\mathbf{R}-\{(0,0)\}$ se define la aplicación $F_{a,b}$ de $\mathbf{R}\times\mathbf{R}$ en sí mismo tal que $F_{a,b}(x,y) = (ax-by,bx+ay)$. Demostrar que $F_{a,b}$ es bijectiva, calcular $(F_{a,b})^{-1}$ y $F_{a,b} \circ F_{c,d}$.

18. En $\mathbf{Z}\times\mathbf{Z}$ se considera la relación $(a,b)\mathrm{R}(c,d)$ si y sólo si $2a+c = (3)$ y $3b+d = (4)$. Demostrar que R es una relación de equivalencia y calcular el conjunto cociente.