Problemas de exámenes de Aplicaciones Lineales y Matrices

1. Consideramos $f \in \mathrm{End}(\mathbf{R}^n)$, que tiene matriz $\mathbf{A}$ respecto la base canónica. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es incorrecta?

a) Si $\boldsymbol{v}$ es un vector propio con valor propio asociado λ, entonces $(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})\mathbf{x} = \mathbf{0}$.
b) Si λ es un valor propio, entonces $\mathrm{rang}(f-\lambda I) < n$
c) Si $\boldsymbol{v}_1$ y $\boldsymbol{v}_2$ son vectores propios, entonces $\boldsymbol{v}_1+\boldsymbol{v}_2$ es vector propio.
d) Si λ_1 y λ_2 son dos valores propios diferentes, entonces $V(\lambda_1)+V(\lambda_2)$ es una suma directa.

2. Consideramos $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ matrices cuadradas del mismo orden e inversibles. Cual de las siguientes afirmaciones es incorrecta?

a) $\mathbf{A}\mathbf{A}^t$ es simétrica.
b) $\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{B}+\mathbf{A}) = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}+\mathbf{I}$
c) $\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{B}+\mathbf{A})\mathbf{B}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}+\mathbf{B}^{-1}$
d) $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{A} = \mathbf{B}$

3. Consideramos la aplicación lineal f de $\mathbf{R}_3(x)$ en $\mathbf{R}_2(x)$ definida por

$$f(ax^3+bx^2+cx+d) = (a-c+2d)x^2+ (-2a+b)x+ (b-2c+4d)$$

a) Encontrar la matriz de f respecto de las bases canónicas de ambos espacios.
b) Clasificar f hallando Nuc(f), Im(f) y rang(f).
c) Encontrar la matriz de f respecto de las bases $(x^3-1,x^2-1,x-1,1)$ y $(x^2-1,x-1,1)$.
d) Si se considera F el subespacio generado por el polinomio $1+x^2$ de $\mathbf{R}_2(x)$, $F^{\perp}$ considerando el producto escalar ordinario.

4. Dado el endomorfismo f de $\mathbf{R}^3$ que tiene por matriz $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} n & 1 & 1 \\ 1 & n & 1 \\ 1 & 1 & n \end{pmatrix}$ respecto a la base canónica,

a) Calcular los valores y los vectores propios del endomorfismo.
b) Calcular una base de vectores propios ortonormal respecto el producto escalar ordinario.
c) Calcula $\mathbf{A}^{-1}$, cuando exista.
d) Cuando no exista, $\mathbf{A}^{-1}$ encontrar Nuc(f) e Im(f).

5. Sea f la aplicación de $\mathbf{R}_2(x)$ en sí mismo definida por

$$f(P(x)) = (x^2+1)P''(x)+(x+4)P'(x)+P(x)$$

a) Demostrar que f es un endomorfismo.
b) Calcular la matriz de f en la base canónica de de $\mathbf{R}_2(x)$.

c) Resolver la ecuación $(x^2+1)P''(x)+(x+4)P'(x)+P(x) = 0$ en $\mathbf{R}_2(x)$.
d) Calcular una base de $\mathbf{R}_2(x)$ formada por vectores propios de f que tengan norma 1 respecto del producto escalar sobre $\mathbf{R}_2(x)$ siguiente:

$$<P(x),Q(x)> = \int_{-1}^{1} P(x)Q(x)\,dx$$

6. Dado el endomorfismo f de $\mathbf{R}^4$ definido por:

$f(\boldsymbol{e}_1) = 2\boldsymbol{e}_2$, $f(\boldsymbol{e}_2) = \boldsymbol{e}_1+a\boldsymbol{e}_2$, $f(\boldsymbol{e}_3) = \boldsymbol{e}_1+2\boldsymbol{e}_2-\boldsymbol{e}_3$, $f(\boldsymbol{e}_4) = \boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{e}_2+\boldsymbol{e}_3-\boldsymbol{e}_4$

siendo $(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3,\boldsymbol{e}_4)$ una base de $\mathbf{R}^4$,

a) Calcular la matriz de f respecto a la base $(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3,\boldsymbol{e}_4)$.
b) Clasificar el endomorfismo según los valores del parámetro a.
c) Para $a = 0$ encontrar el antimagen del vector $(1,-1,1,-1)$.
d) Por que valores del parámetro a es diagonalizable el endomorfismo? Hallar la matriz diagonal.

7. Si f es un endomorfismo de $\mathbf{R}^4$ que verifica

$$\begin{aligned} f(1,1,0,0) &= (0,1,0,-1) \\ f(1,0,1,0) &= (1,1,1,0) \end{aligned}$$

hallar su matriz derespecto de las bases canónicas y su determinante en cada uno de los siguientes supuestos: 1) Si $\mathrm{Nuc}(f) = \mathrm{Im}(f)$ 2) $f \circ f = I$.

8. Hallar la potencia n-ésima de la matriz

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

demostrando el resultado por inducción y mediante la diagonalización de $\mathbf{A}$.

9. Demostrar que la sucesión en $\mathbf{R}$ dada por

$$u_0 = 0 \quad , \quad u_1 = 1 \quad , \quad u_n = 4u_{n-1}-3u_{n-2}$$

puede escribirse en forma matricial como $\mathbf{U}_n = \mathbf{A}\mathbf{U}_{n-1}$ siendo $\mathbf{U}_{n-1} = (u_n \;\; u_{n-1})^t$. Identificar la matriz $\mathbf{A}$, demostrar que $\mathbf{U}_n = \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{U}_1$ y hallar la expresión del término general u_n en función de n.

10. Estudiar para qué valores reales de t la matriz

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} t+3 & t^2-10 \\ 1 & t+1 \end{pmatrix}$$

es diagonalizable. En este caso escribir la ecuación de la diagonalización. En caso contrario decidir si es reducible a una matriz de Jordan, hallarla y hallar la base de Jordan.

11. Un vendedor de vehículos desea tener la exclusiva de una determinada marca, para lo cual se le exige que venda en un año un mínimo total de 100 vehículos de los tres tipos que fabrica la marca, bicicletas de 50.000 pts., motocicletas de 1.000.000 pts. y automóviles de 5.000.000 pts., con una facturación mínima de 100.000.000 pts. ¿Cuántos vehículos de cada clase deberá vender como mínimo para conservar la exclusiva?

12. Sea $\mathbf{R}_n(x)$ el conjunto de los polinomios sobre $\mathbf{R}$ de grado menor o igual que n. Si f es el endomorfismo de $\mathbf{R}_1(x)$ definido por las dos condiciones

a) $f(1+x) = 2-x$
b) $\text{Nuc}(f) = \text{Im}(f)$

hallar la matriz de f respecto de la base canónica. Si g es el endomorfismo de $\mathbf{R}_2(x)$ definido por las dos condiciones

a) los polinomios de término independiente nulo se transforman en sí mismos,
b) el núcleo de g está formado por los polinomios que tienen sus coeficientes iguales,

hallar la matriz de g respecto de la base canónica de $\mathbf{R}_2(x)$. Si h es el endomorfismo de $\mathbf{R}_2(x)$ definido por

$h(1) = a+x+x^2$
$h(x) = 1+x+x^2$
$h(x^2) = 1+bx+x^2$

hallar su rango según los valores de a y b. Hallar bases de $\text{Nuc}(g \circ h)$ e $\text{Im}(g \circ h)$.

13. Sean los espacios vectoriales $\mathbf{R}^2$ y $M_{(2,2)}(\mathbf{R})$. Consideremos el conjunto $S = \{f_1, f_2, f_3, f_4\}$ de endomorfismos de $\mathbf{R}^2$ tales que

$$f_1(x,y) = (x+y,y) \quad , \quad f_2(x,y) = (x+2y,4y) \quad , \quad f_3(x,y) = (0,3x) \quad , \quad f_4(x,y) = (x-y,y)$$

y sea la aplicación g de $M_{(2,2)}(\mathbf{R})$ en $\mathbf{R}^2$ tal que $g(\mathbf{A}) = \mathbf{A} \cdot (1 \;\; 1)^t$.

a) Hallar las matrices asociadas a los endomorfismos del conjunto S y demostrar que forman una base del espacio vectorial $M_{(2,2)}(\mathbf{R})$.

b) Demostrar que g es una aplicación lineal y hllar su matriz asociada en las bases canónicas.
c) Hallar la matriz de g en las bases ((1,2),(0,–1)) de $\mathbf{R}^2$ y la base de $M_{(2,2)}(\mathbf{R})$ hallada en el apartado a).
d) Hallar Nuc(g) e Im(g), indicando sus dimensiones y bases respectivas.
e) A partir de una base del núcleo completarla hasta obtener una base de $M_{(2,2)}(\mathbf{R})$.

14. Sea f un endomorfismo de $\mathbf{R}^3$ tal que

$$\text{Nuc}(f) = [(-5,1,0),(-3,0,1)] \quad , \quad f((1,0,0)) = (2,-1,1)$$

Se pide

a) Matriz de f en la base canónica.
b) Estudiar la diagonalización, la triangularización y la matriz de Jordan, indicando las respectivas bases.
c) Hallar la matriz de f asociada a la base $(\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2,\boldsymbol{u}_3,)$ tal que $f(\boldsymbol{u}_1) = f(\boldsymbol{u}_2) = \boldsymbol{u}_3$, siendo $\boldsymbol{u}_3$ una base del núcleo de f. Si $\boldsymbol{u}_3 = (2,-1,1)$, hallar esta base.

15.Sea el conjunto $E = \{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a+d = 0\} \subseteq M_{(2,2)}(\mathbf{R})$

a) Demostrar que es un subespacio vectorial y hallar una base B_1 y su dimensión.
b) Sea la aplicación f de E en $\mathbf{R}^2$ tal que

$$f\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = f\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = f\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} = (1,2)$$

Hallar la matriz de f en las bases B_1, hallada antes, y la B_2 ((1,0),(1,3)).
c) Hallar la dimensión y bases de Nuc(f) e Im(f).

16.Encontrar la forma de Jordan y la base de Jordan del endomorfismo de $\mathbf{R}^4$ que en la base canónica tiene por matriz

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ -3 & 0 & -3 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

17. Sea f el endomorfismo de $\mathbf{R}^3$ que verifica las condiciones:

a) Nuc(f) = $\{(x,y,z)\in \mathbf{R}^3 \mid x+y = 0 \ , \ 2x+y-z = 0\}$
b) (1,1,0) es vector propio de valor propio 2
c) $f(1,-2,1) = (a,-1,-1)$

Calcular la matriz **A** de f en la base canónica, los vectores y valores propios de f. Estudiar si es diagonalizable y calcular $\mathbf{A}^8$ para $a = -2$.

18. La aplicación f entre $M_{(2,2)}(\mathbf{R})$ y $\mathbf{R}_2(x)$ de fórmula

$$f\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ax^2+(b-c)x+d$$

¿es una aplicación lineal?. En caso afirmativo hallar su matriz en las bases canónicas, la base y dimensión de los subespacios Nuc(f) e Im(f) y clasificar f. Las matrices

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

¿forman base de $M_{(2,2)}(\mathbf{R})$? Los polinomios $1+x$, $1+x^2$ y $x+x^2$ ¿forman base de $\mathbf{R}_2(x)$?; en caso afirmativo hallar la matriz de f en estas nuevas bases.

19. Para el endomorfismo de $\mathbf{R}^3$ cuya matriz tespecto a las bases canónicas es $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

reducirlo, si es posible, a forma diagonal y a forma triangular y hallar la forma reducida de Jordan y la correspondiente base.

20. Estudiar, según los valores de a, la diagonalización de la matriz $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & 1 & -1 \\ 1 & a & 1 \\ -1 & 1 & a \end{pmatrix}$.

y hallar, si es posible, la matriz diagonal y una base ortonormal que la diagonalice.

21. Dado el endomorfismo f de $M_{(2,2)}(\mathbf{R})$

$$f\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+2c & -2a-b-2c \\ -a-2c & 2a+b+2c \end{pmatrix}$$

a) Encontrar la matriz asociada a *f* en la base canónica.
b) Encontrar el núcleo, la imagen y clasificar *f*
c) Indicar la matriz de *f* en la base

$$\left(\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}\right)$$

d) Estudiar la diagonalización de *f*, dando la expresión matricial de la diagonalización.

22. En $\mathbf{R}_3(x)$, espacio vectorial de los polinomios de grado mas pequeño o igual a 3, con coeficientes reales, se considera la aplicación *f* de $\mathbf{R}_3(x)$ en $\mathbf{R}_3(x)$ definida por:

$f(P(x)) = mP(x)+P'(x)$

a) Demostrar que *f* es una aplicación lineal.
b) Encontrar la matriz asociada a *f* en la base canónica.
c) Encontrar el nucleo y la imagen según los valores de *m*. Clasificar *f*
d) Para $m = 1$ encontrar la matriz asociada a *f* en la base $(2,x+1,x^2-1,x^3+1)$.
e) Estudiar la diagonalización de *f*.

23. En $\mathbf{R}^4$ se considera una base $(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3,\boldsymbol{e}_4)$ y un endomorfismo *f* que cumple:

$f(\boldsymbol{e}_1) = f(\boldsymbol{e}_1) = f(\boldsymbol{e}_1) = f(\boldsymbol{e}_1) = \boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2+\boldsymbol{e}_3+\boldsymbol{e}_4$

a) Encontrar la matriz asociada en la base $(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3,\boldsymbol{e}_4)$.
b) Encontrar la matriz asociada en la base $(\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_2+\boldsymbol{e}_3,\boldsymbol{e}_3+\boldsymbol{e}_4,\boldsymbol{e}_4-\boldsymbol{e}_1)$.
c) Diagonalizar *f* indicando la expresión matricial de la diagonalización.
d) Determinar una base del núcleo y de la imagen, y clasificarla.

24. De un endomorfismo *f* de $\mathbf{R}^3$, se sabe que

$$f(1,1,0) = (5,-1,3) \quad , \quad f(1,-2,0) = (5,2,3) \quad , \quad f(0,0,1) = (0,a,b)$$

a) Calcular la matriz de *f* respecto de la base canónica.
b) Diagonalizar, en los casos que sea posible, la matriz anterior.

25. Demostrar que un aplicación lineal *f* de $\mathbf{R}^{n+1}$ en $\mathbf{R}^n$ no es injectiva, y que es exhaustiva si y solo si dim (Nuc(*f*)) =1.

26. Consideremos el subespacio $E = \{ \begin{pmatrix}0 & a\\ b & a+b\end{pmatrix} \mid a,b\in \mathbf{R} \}$ y el endomorfismo de *E* definido

por $f\begin{pmatrix} 0 & a \\ b & a+b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 6a+3b \\ -2a-b & 4a+2b \end{pmatrix}$

a) Comprobar que ($\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$) forman una base de E.

b) Calcula la matriz de f respecto a la base del apartado anterior y clasificar f.

27. Consideremos el endomorfismo f de $\mathbf{R}^3$ que respecto a la base canónica que tiene por matriz asociada:

$$\begin{pmatrix} 4 & a & -3 \\ 3 & -2 & -3 \\ 3 & -3 & -2 \end{pmatrix}$$

a) Comprobar que 1 es un valor propio para a cualquier valor de a.
b) Determinar a para que $\dim(V(1)) = 2$. Para esta a, demuestra que f diagonaliza y calcula la base respecto de la cual diagonaliza.
c) Si un vector tiene de componentes 1, ,2 y 3 respecto de la base del apartado anterior, calcular las componentes de su imagen, respecto de la base canónica.

28. Consideramos el endomorfismo f de $\mathbf{R}^3$ que verifica:

$$f(0,1,1) = (0,a,2) \quad , \quad f(0,1,0) = (-5,0,-3) \quad , \quad f(1,-1,0) = (8,-2,6)$$

a) Calcular la matriz de f respecto a la base canónica.
b) Clasifica f en función del parámetro a.
c) Calcula a para que 2. sea un valor propio de f.
d) Con la a calculada al apartado anterior, determina si f diagonaliza.

29. Estudiar la solución del sistema:

$$\left.\begin{array}{l} 2x-ay+z = 0 \\ 2x-2y+z = 0 \\ x+2y-4z = 0 \\ 4x+2y-7z = 0 \end{array}\right\}$$

según los valores de a.

30. Consideramos la matriz $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & b \\ 3 & 0 & a \end{pmatrix}$

a) Estudia la diagonalización de **A** segundo los valores de a y b.
b) Para $a = b = 1$ calcular $\mathbf{A}^{10}$.

31. Calcula la inversa, según los valores de a, de la matriz:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ a & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

32. Calcular la imagen del endomorfismo de $\mathbf{R}^3$ definido por $f(x,y,z) = (y+z,x+ay+bz,x+z)$ según los valores de a y b.

33. De un endomorfismo f de $\mathbf{R}^3$ sabemos que

$$\text{Nuc}(f) = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \mid x+y+z = 0 \ , \ x = y\} \qquad V(2) = [(1,1,1),(1,0,1)]$$

a) Calcular la matiz **A** de f respecto a la base canónica.
b) Calcular $\mathbf{A}^{10}$.
c) Si $F = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \mid 2x+z = 0\}$ calcular una base de $f(F)$.

34. Se considera el endomorfismo de $\mathbf{R}^4$ que en la base canónica tiene por matriz:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -2 & 6 & 9 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 2 & 1 \\ 0 & -8 & 4 & -1 \end{pmatrix}$$

Calcular los valores propios, los vectores propios, y determina si diagonaliza.

35. Dado el conjunto $A = \{ \begin{pmatrix} a & b+c \\ -b+c & a \end{pmatrix} \mid a,b,c \in \mathbf{R} \}$ y la aplicación definida sobre A:

$$f\begin{pmatrix} a & b+c \\ -b+c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2b+c \\ -2b+c & 0 \end{pmatrix}$$

a) Comprobar que A es un subespacio vectorial de $M_{(2,2)}(\mathbf{R})$.

b) Comprobar que los vectores $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$ pertenecen a A y encontrar una base de A que los contenga.

c) Encontrar la matriz asociada a f en la base de la apartado anterior.
d) Calcular Nuc(f), Im(f) y clasificarla.

36. Consideremos el endomorfismo de $\mathbf{R}^{13}$ tal que su polinomio característico es $(x-2)^{13}$, $\dim(\mathrm{Nuc}(f-2I) = 4$, $\dim(\mathrm{Nuc}(f-2I)^2 = 7$, $\dim(\mathrm{Nuc}(f-2I)^3 = 10$, $\dim(\mathrm{Nuc}(f-2I)^4 = 12$ y $\dim(\mathrm{Nuc}(f-2I)^5 = 13$. Hallar la forma reducida de Jordan.

37. Dado el endomorfismo g de K^3 tal que $g(x,y,z) = (-x,-z,y)$, estudiar su diagonalización para los casos $K = \mathbf{C}$ y $K = \mathbf{R}$. encontrando la matriz diagonal y la base asociada. En caso de no ser diagonalizable, hallar la forma de Jordan y la base asociada.

38. Encontrar los posibles valores propios de un endomorfismo f, tal que $f^2 = f = I$.

39. Dado el conjunto $A = \{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \mid a,b,c \in \mathbf{R} \}$ y la aplicación definida sobre A:

$$f\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+c & b \\ b & a+b+c \end{pmatrix}$$

a) Demostrar que A es un subespacio vectorial de $M_{(2,2)}(\mathbf{R})$.
b) Encontrar una base y la dimensión de M.
c) Demostrar que f es lineal.
d) Encontrar la matriz asociada a f en la base del apartado b)
e) Encontrar una base del Nuc(f) y de Im(f), indicando la dimensión.

40. Se considera la matriz $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1/2 & \alpha\sqrt{2}/2 & 3/2 \\ -\sqrt{2}/2 & 1 & \sqrt{2}/2 \\ 1/2 & \alpha\sqrt{2}/2 & 1/2 \end{pmatrix}$

Encontrar α para que la matriz $\mathbf{A}$ sea diagonalizabley la expresión matricial de la diagonalización.

41. Sea f el endomorfismo de un espacio E que en la base $(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3)$ tiene por matriz asociada:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1-a \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix}$$

a) Calcular Nuc(f) e Im(f) en función del parámetro a.
b) Determinar si f diagonaliza según los valores de a.
c) Calcular la matriz de f en la base $(\boldsymbol{e}_3,\boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2)$

42. Sea f el endomorfismo de $\mathbf{R}^3$ que en la base canónica tiene por matriz asociada

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} k & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 \\ 1 & 1 & k \end{pmatrix}$$

a) Calcular rango, núcleo e imagen de f en función del parámetro k.
b) Calcular los vectores y valores propios de f en función del parámetro k y estudiar la diagonalización de f.

43. Sea F el endomorfismo de $\mathbf{R}^3$ que respecto a la base canónica tiene por matriz

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & 5 & 5 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -4 & -3 \end{pmatrix}$$

a) ¿Para qué valores de a es diagonalizable?
b) Para $a = 1$ calcular $\mathbf{A}^7$

44. Sea Sea f un endomorfismo de un espacio vectorial U referido a una base $(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3)$. Sean los vectores $\boldsymbol{u}_1 = \boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{u}_2 = \boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_3$, $\boldsymbol{u}_3 = \boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_3$ tales que sus imágenes son $f(\boldsymbol{u}_1) = 2\boldsymbol{e}_1+a\boldsymbol{e}_2+\boldsymbol{e}_3$, $f(\boldsymbol{u}_2) = \boldsymbol{e}_1+a\boldsymbol{e}_2+2\boldsymbol{e}_3$ y $f(\boldsymbol{u}_3) = 3\boldsymbol{e}_1+3\boldsymbol{e}_3$.

a) Hallar la matriz asociada a f en la base $(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3)$ y en la base $(\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2,\boldsymbol{u}_3)$.
b) Hallar Nuc(f) e Im(f) según los distintos valores de a.
c) Estudiar la diagonalización de f según los distintos valores de a.

45. Sea el conjunto $A = \{ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \mid a,b \in \mathbf{R} \}$

a) Comprobar que A es un subespacio vectorial de $M_{(2,2)}(\mathbf{R})$ y hallar una base y su dimensión.
b) Hallar la matriz asociada en la base anterior del endomorfismo f de A en A definido por:

$$f\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+2b & a \\ -a & a+2b \end{pmatrix}$$

c) ¿Qué estructura tiene A con la suma y producto de matrices?

46. Para la matriz $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ demostrar que $(\mathbf{A}+\mathbf{A}^{-1}) = 2^{2n+1}\mathbf{A}$.

47. Sea el conjunto $A = \{ \begin{pmatrix} a & b \\ o & o \end{pmatrix} \mid a,b \in \mathbf{R} \}$

a) Demostrar que A es un subespacio.
b) Averiguar para que valores de a y b el conjunto $\{ \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & b \\ a & 0 \end{pmatrix} \}$ es l.i.
c) Sea la aplicación lineal f de $\mathbf{R}_2(x)$ en A definida por

$$f(1) = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad f(x) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad f(x^2) = \begin{pmatrix} 0 & b \\ a & 0 \end{pmatrix}$$

calcular la matriz $\mathbf{A}$ de f respecto de las bases canónicas y estudiar su diagonalización. Triangulizarla para $a = -1$ y $b = 1$. Hallar su forma de Jordan y la base asociada para $a = 5$.

48. Razonar si es cierto o falso que si f es un endomorfismo de $\mathbf{R}^3$ tal que $\text{Im}(f) = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \mid x+y+z = 0 \ , \ z = 0\}$, entonces la ecuación $f(x,y,z) = (1,-1,0)$ tiene solución única.

49. Si $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ es la matriz de una aplicación lineal de $\mathbf{R}^3$ en $\mathbf{R}^2$, hallar las dimensiones de los subespacios $F = \{\boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^3 \mid f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}\}$ y $G = \{\boldsymbol{y} \in \mathbf{R}^2 \mid f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{y} \text{ con } \boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^3\}$.

50. Sea E un espacio vectorial real, $(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3)$ una base de E y f un endomorfismo de E tal que

$f(\boldsymbol{e}_1) = -\boldsymbol{e}_1+3\boldsymbol{e}_2-3\boldsymbol{e}_3$, $f(\boldsymbol{e}_2) = 2\boldsymbol{e}_2$, $f(\boldsymbol{e}_3) = -3\boldsymbol{e}_1+3\boldsymbol{e}_2-\boldsymbol{e}_3$. Hallar la matriz $\mathbf{A}$ de f respecto de la base $(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3)$. Si $(\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2,\boldsymbol{u}_3)$ es una base formada por vectores propios, hallar las componentes de $\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_2$ y $\boldsymbol{u}_3$ respecto de $(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3)$. Calcular $\mathbf{A}^{15}$.

51. Sea f un endomorfismo de $\mathbf{R}^3$ de matriz $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & a+2 & a \\ 3 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ respecto de la base canónica.

Discutir según los valores de $a \in \mathbf{R}$ las soluciones de la ecuación $f(x,y,z) = (1,0,1/2)$ y resolverla cuando sea posible. Discutir la existencia de f^{-1} y hallar su matriz respecto de la base canónica.

52. Resolver la ecuación matricial $\mathbf{XA} = \mathbf{B}$ siendo

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

para $a = 1$, $a = -2$ y $a = 3$.

53. Para el endomorfismo f de $\mathbf{R}^4$ definido por

$$f(x,y,z,t) = (x-z+(a+2)t, y+z-2t, 2z+(a-3)t, at)$$

Estudiar su rango y su diagonalización según los valores de a.

54. Sea f la aplicación entre los espacios vectoriales $\mathbf{R}^3$ y $M_{(2,2)}(\mathbf{R})$ definida por

$$f(x_1,x_2,x_3) = \begin{pmatrix} x_1-x_2 & x_2-x_3 \\ x_3-x_1 & x_1-x_2 \end{pmatrix}$$

a) Demostrar que es lineal.
b) Hallar la matriz de f en las bases canónicas.
c) Hallar el núcleo, la imagen y el rango de f y clasificarla.

55. Sea f el endomorfismo de $\mathbf{R}^3$ definido por $f(x,y,z) = (ay,bz,cx)$.

a) Hallar la matriz $\mathbf{A}$ de f en la base canónica.
b) Hallar su rango y estudiar su diagonalización según los valores de a, b y c.

c) Calcular $\mathbf{A}^2$, $\mathbf{A}^3$ y deducir cuanto es $\mathbf{A}^k$.

56. En $M_{(2,2)}(\mathbf{R})$, consideramos el subconjunto:

$$F = \{\mathbf{M} \in M_{(2,2)}(\mathbf{R}) \mid \mathbf{M}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ K \end{pmatrix}\}$$

a) Qué valor ha de tener el parámetro K, para que F sea un subespacio vectorial de $M_{(2,2)}(\mathbf{R})$. Demostrarlo y dar una base y la dimensión.
b) Dadas las bases de $M_{(2,2)}(\mathbf{R})$

$$B_1 = (\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}) \quad \text{y} \quad B_2 = (\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix})$$

hallar la matriz de cambio de base de B_1 a B_2.
c) Sea $\mathbf{A} \in M_{(2,2)}(\mathbf{R})$ tal que en la base B_1 tiene por componentes (1,2,0,1). Hallar las componentes de $\mathbf{A}$ en la base B_2 y determinar A.

57. Dado el endomorfismo de $\mathbf{R}^n$ que con respecto a la base canónica tiene por matriz:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & ... & 0 \\ . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & 0 & ... & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & ... & 0 \end{pmatrix}$$

a) Para $n = 4$, hallar la forma canónica de Jordan y una base asociada.
b) Hallar el polinomio característico de la matriz $\mathbf{A}$ de orden n, los valores propios reales y los vectores propios asociados.

58. Sea $f \in \text{End}(\mathbf{R}^4)$ tal que

$$f(1,1,1,1) = (1,1,0,0) \quad , \quad f(1,1,1,0) = (1,0,0,0) \quad , \quad f^2 \text{ es el endomorfismo nulo}$$

a) Calcular la matriz asociada a la base canónica.
b) Hallar el Nuc (f), Im (f) y el rang(f).
c) Calcular la matriz de f asociada a la base ((1,-1,0,0), (0,1,-1,0), (0,0,1,-1), (0,0,0,1)).

59. Sea $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ y la aplicación f de $M_{(2,2)}(\mathbf{R})$ en sí mismo definida por $f(\mathbf{X}) = \mathbf{P}\,\mathbf{X}$.

Demostrar que f es un endomorfismo, hallar su matriz $\mathbf{A}$ respecto de la base canónica, así como su rango, núcleo e imagen. Si $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, demostrar que $\det(\mathbf{A}) = \det^2(\mathbf{P})$.

60. Si f y g son endomorfismos de $\mathbf{R}^3$ cuyas matrices respecto a las bases canónicas son

$$\mathbf{A}_f = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad \mathbf{A}_g = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Probar que $S = \{\boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^3 \mid f(\boldsymbol{x}) = g(\boldsymbol{x})\}$ es un subespacio y hallarle una base.

61. Para el endomorfismo de $\mathbf{R}^3$ de matriz $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -3 & a & 0 \\ -10 & 7 & -5 \\ b & 10 & -8 \end{pmatrix}$ respecto de una base $(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3)$ hallar a y b sabiendo que el vector $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_2$ es un vector propio. Con los valores hallados para a y b estudiar una diagonalización del endomorfismo.

62. Sea $f \in \text{End}(\mathbf{R}^4)$ tal que

$f(1,1,1,1) = f(1,1,0,0)$ $\qquad$ $f(1,1,1,0) = f(1,0,0,0)$ $\qquad$ f^2 el endomorfismo nulo

a) Calcular la matriz asociada a la base canónica.
b) Encontrar el Nuc(f), Im(f) y el rango (f).
c) Calcular la matriz de f asociada a la base ((1,-1,0,0),(0,1,-1,0),(0,0,1,-1),(0,0,0,1)).

63. Sea $f \in \text{End}(\mathbf{R}_2[x])$ tal que $f(P(x)) = 2P(x)+2P'(x)+P''(x)$.

a) Encontrar la matriz asociada a f respecto a la base $(2, 2+x, 2+x+2x^2)$
b) Calcular las bases y las dimensions del Nuc(f) y de Im(f)
c) Dado $V = [1+x+x^2, 2-2x+3x^3, 4+5x^2]$ encontrar una base i la dimensión de V y $f(V)$.
d) Estudiar la diagonalización de f, y en caso de no ser posible encontrar la matriz de Jordan y una base asociada.

64. Se considera la matriz

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Probar que la matriz $\mathbf{I}-\mathbf{A}$ tiene por inversa una matriz de la forma $\mathbf{I}+c\mathbf{A}$ y calcular el valor de c.
b) Determinar los valores propios de $\mathbf{A}$ e indicar si es diagonalizable.

65. Se consideran dos endomorfismos de $\mathbf{R}^3$que respecto a la base canónica vienen representados por las matrices

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -3 \\ 3 & 2 & 3 \\ -3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ a & 0 & c \\ b & c & 0 \end{pmatrix}$$

Sabiendo que (1,1,1) es vector propio de $\mathbf{B}$ con valor propio coincidente con el valor propio de multiplicidad 2 de $\mathbf{A}$, calcular:

a) Los valores de a,b y c de $\mathbf{B}$.
b) La base de vectores propios de $\mathbf{B}$.

66. Sea $f \in \text{End}(\mathbf{R}^4)$ definido por: $\text{Nuc}(f) = \{(x,y,z,t) \in \mathbf{R}^4 \mid 2x+y = 0\ ,\ z+2t = 0\}$, $f(0,0,0,1) = (2,0,2,0)$ y $f(1,0,0,0) = (2,0,2,0)$

a) Encontrar la matriz asociada a f en la base canónica $\mathbf{R}^4$.
b) Dado el subespacio $A = \{(x,y,z,t) \in \mathbf{R}^4 \mid x+y+z+t = 0\}$, encontrar una base de $f(A)$.
c) Encontrar la matriz de f en la base: $((1,1,0,0),(1,-1,0,0),(0,0,1,1),(0,0,1,-1))$.

67. Si $(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\boldsymbol{w})$ es una base de E, e.v.s. $\mathbf{R}$, y f es un endomorfismo de E definido por

$$f(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{u}+\boldsymbol{v} \qquad f(\boldsymbol{w}) = \boldsymbol{u} \qquad \text{Nuc}(f) = [\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}]$$

a) Hallar la matriz de f respecto de la base $(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\boldsymbol{w})$.
b) Hallar base y dimensión de $\text{Im}(f)$, $\text{Nuc}(f)$, $\text{Im}(f^2)$, $\text{Nuc}(f^2)$, $\text{Im}(f^3)$ y $\text{Nuc}(f^3)$.
c) Averiguar si E es suma directa de $\text{Im}(f)$ y $\text{Nuc}(f)$.

68. Si $(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3)$ es la base canónica de $\mathbf{R}^3$, y f es un endomorfismo de $\mathbf{R}^3$ definido por

$$f(\boldsymbol{e}_1) = (3,-1,0) \qquad f(\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2+\boldsymbol{e}_3) = (1,1,a) \qquad f(\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2) = (2,2,0)$$

a) Hallar la matriz de f respecto de la base canónica y de la base $(\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2,\boldsymbol{u}_3)$, siendo $\boldsymbol{e}_1 = \boldsymbol{u}_1-\boldsymbol{u}_2$, $\boldsymbol{e}_2 = \boldsymbol{u}_2+\boldsymbol{u}_3$ y $\boldsymbol{e}_3 = \boldsymbol{u}_3$.

b) Clasificar f según los valores de a.
c) estudiar la diagonalización de f según los valores de a.