# Problemas de exámenes de Lógica

1. Pasar a forma normal conjuntiva la formula proposicional

$$(\neg(P \wedge Q) \rightarrow (Q \vee R)) \leftrightarrow \neg P \rightarrow ((R \wedge S) \rightarrow P\ )$$

2. Obtener la forma normal conjuntiva de la formula proposicional

$$\neg(((\neg(A \rightarrow B) \vee (B \rightarrow \neg C)) \rightarrow ((A \wedge B) \rightarrow C) \vee (C \leftrightarrow D)))$$

3. Encontrar un contraejemplo de

$$(\neg A \wedge E \rightarrow \neg P \vee \neg Q) \wedge (\neg E \vee D \rightarrow \neg B \wedge P) \wedge (\neg B \vee \neg\, P \rightarrow \neg C \vee Q) \ \Rightarrow\ C \vee D \rightarrow \neg B \vee A$$

4. Encontrar un contraejemplo de

$$(\neg C \wedge E \rightarrow G) \wedge (\neg Q\ \rightarrow (\neg N \rightarrow A)) \wedge (\neg M \wedge G \rightarrow\ N) \wedge (P \vee M \rightarrow \neg A) \wedge (P\ \rightarrow \neg M) \Rightarrow (\neg G\ \rightarrow (M \rightarrow \neg \mathrm{N}))$$

5. Demostrar la invalidez del razonamiento siguiente:

$$(P \wedge Q\ ) \wedge (M \rightarrow (R \wedge S)) \wedge (S \rightarrow (T \wedge \neg Q))\ \ \Rightarrow\ \neg(P \wedge M)$$

6. Demostrar

$$(\neg A \rightarrow B \wedge \neg C) \wedge (\ D \wedge \neg C \rightarrow \mathrm{A}) \wedge (A \wedge D \rightarrow \neg B)\ \Rightarrow\ D \rightarrow\ A \wedge \neg B\ 56$$

7. Demostrar que

$$(\neg C \wedge \neg G \rightarrow \neg Q\ ) \wedge (N \rightarrow (\neg A\ \rightarrow\ Q)) \wedge (\neg M \rightarrow (\neg N \rightarrow \neg G)) \wedge (A\ \rightarrow (\neg P\ \wedge \neg M) \wedge (C \rightarrow \neg M)\ \ \Rightarrow\ \ (N\ \rightarrow (\neg G \rightarrow \neg M))$$

8. Demostrar la validez del siguiente razonamiento:

$$(P \vee \neg Q \rightarrow R \vee M) \wedge (R \rightarrow T \vee S) \wedge (N \rightarrow S) \wedge (M \wedge \neg R \rightarrow N)\ \ \Rightarrow \neg P \rightarrow (\neg(Q\ \vee R) \rightarrow T \vee S)$$

9. Demostrar que

$(R \to (P \wedge \neg Q)) \wedge (\neg S \to (\neg T \vee U)) \wedge \neg(S \wedge \neg R) \wedge (T \to (S \wedge \neg U)) \Rightarrow (T \wedge \neg U) \to (P \vee Q)$

10. Averiguar si $(\neg P \leftrightarrow Q) \wedge (Q \to \neg R) \wedge R \Rightarrow P \wedge \neg Q$

11. Demostrar que el esquema lógico que a continuación se indica es incorrecto:

$(R \to (P \wedge \neg Q)) \wedge (\neg S \to (\neg T \vee U)) \wedge \neg(S \wedge \neg R) \wedge (T \to (S \wedge \neg U)) \Rightarrow \neg T \to (S \vee \neg R)$

12. Averiguar si la fórmula $\neg(A \to B) \vee \neg(B \to C) \to \neg(C \to D) \wedge \neg(D \to E)$ implica $A \to C$.

13. Averiguar si es cierto el siguiente razonamiento: Si el jueves voy a Platea y el viernes voy a La Sala, entonces el sábado voy al cine; el sábado no fui al cine y el viernes fui a La Sala, luego el jueves no fui a Platea.

14. Formalizar y demostrar: Duermo o navego por internet o no tengo hambre; cuando como, tengo sed y no tengo frío; cuando tengo hambre, no duermo y no navego por internet; cuando no duermo, como; por tanto, cuando tengo hambre y no navego por internet, tengo sed.

15. Formalizar y demostrar: Cuando me deprimo, como níscalos y arenques; cuando como arenques, tengo sed y frío; tanto si tengo frío como si tengo sed, en ambos casos, como galletas; cuando como galletas, si tengo sed, no como arenques; por tanto, cuando como arenques, no como galletas y no me deprimo.

16. Formalizar la proposición "Algunos profesores solo aprueban a los que asisten a clase".

17. Construir una interpretación lingüística de la formula $\forall x\,(E(x) \to \forall y(As(y) \wedge \neg Ap(x,y))$ para los predicados $E(x)$: $x$ es estudiante, $As(y)$: $y$ es una asignatura y $Ap(x,y)$: $x$ aprueba $y$.

18. Con los símbolos y significados siguientes:

$a$: Alberto
$b$: Berta
$G(x)$: $x$ es generoso
$H(x)$: $x$ es honrado
$T(x,y)$: $x$ trata con $y$

a) dar interpretaciones lingüísticas a:

1) $\forall x\,(H(x) \to T(b,x))$

2) $(\forall x\ G(x)) \rightarrow (\forall x\ T(b,x))$
3) $\exists x\ (H(x) \wedge \neg T(x,a) \wedge \neg T(x,b))$

b) formalizar:

1) Todos los generosos tratan con el Alberto.
2) Si nadie fuese honrado Alberto no trataría con nadie.
3) Si todos los honrados fuesen generosos, todos trataríamos con todos

19. Para los símbolos y significados siguientes:

*a*: Alberto
*b*: Berta
$G(x)$: $x$ es generoso
$H(x)$: $x$ es honrado
$T(x,y)$: $x$ trata con $y$

a) dar interpretaciones lingüísticas a:

1) $\forall x\ (T(a,x) \rightarrow G(x))$
2) $(\forall x\ \forall y\ T(x,y)) \rightarrow (\forall x\ G(x) \wedge \forall x\ H(x)$
3) $\forall x\ (G(x) \rightarrow (\forall y\ T(x,y))$

b) formalizar:

1) Alberto trata solo con la gente que trata con Berta
2) Berta no trata con nadie que no sea honrado
3) Todos tratan con la gente honrada

20. Formalizar las proposiciones que a continuación se dan usando los símbolos que en cada caso se adjuntan. Ejemplo:

a) Hoy hace sol y nos vamos de excursión al Canigó: $S$, $E(x)$, $c$
b) Hay anarquistas que no son ricos pero también hay que si lo son: $A(x)$, $R(x)$
c) Hay franceses que solo son amigos de los catalanes: $F(x)$, $A(x,y)$, $C(y)$
d) Hay franceses que son amigos de todos los catalanes: $F(x)$, $A(x,y)$, $C(y)$
e) Los vendedores ambulantes engañan a todos los tontos: $V(x)$, $E(x,y)$, $T(y)$
f) En verano Bernardo y todos sus hijos se hartan de hamburguesas: $E$, $b$, $F(x,y)$, $H(x,y)$, $h$

21. Utilizando los predicados

$F(x)$: $x$ es famoso
$I(x)$: $x$ es italiano
$A(x,y)$: $x$ adora a $y$

definidos sobre el universo de todas las personas,

a) formalizar:

1) No hay ningún famoso que sea adorado por todos los italianos,
2) Si ningún italiano fuera famoso, nadie adorarÌa a nadie,
3) No hay ningún italiano que adore solo a los italianos famosos,

b) interpretar:

1) $\forall x\ (I(x) \rightarrow \exists y\ (A(x,y) \wedge \neg I(y)))$
2) $\forall x\ (\forall y\ A(y,x) \rightarrow I(x) \wedge F(x))$
3) $\forall x\ (I(x) \rightarrow F(x)) \rightarrow \forall x\ \exists y\ A(x,y)$

22. Utilizando los predicados

$F(x)$: $x$ es famoso
$I(x)$: $x$ es italiano
$A(x,y)$: $x$ adora a $y$

definidos sobre el universo de todas las personas, y la constante $J$: Juan

a) formalizar:

1) Todos los italianos adoran a Juan,
2) Los famosos solo adoran a los italianos,
3) Si algún italiano fuera famoso habría alguien que adoraría a Juan.

b) interpretar:

1) $\forall y\ (F(y) \rightarrow \neg A(J,y))$
2) $(\forall y\ I(y) \rightarrow (\exists x\ A(x,J) \wedge \exists x\ \neg A(J,x))$
3) $\exists x\ (I(x) \wedge \forall y\ (F(y) \rightarrow \neg A(x,y)))$

23. Utilizando los predicados $P(y)$: $y$ es político, $A(x,y)$: $x$ aprecia a $y$, formalizar el razonamiento: "Todo aquel que no aprecia a ningún fanático, no aprecia a ningún político. Hay algún político que es apreciado por alguien. Por tanto, hay algún fanático que es apreciado por alguien".

24. Formalizar el siguiente razonamiento: "Hay pintores con técnica pero sin imaginación. Todos los pintores son artistas. No todos los pintores tienen técnica. Todo ingeniero tiene técnica. Por tanto, no todo artista es ingeniero".

25. Formalizar: "Lancelot no quiere ninguno de sus amigos. Los amigos de Lancelot odian a todos aquellos a los que Lancelot quiere. El rey Arturo es amigo de Lancelot. Lancelot quiere la reina

Ginebra. Por tanto, el rey Arturo odia la reina Ginebra". (Observación: considerar que odiar y querer son opuestos uno del otro.)

26. Averiguar si $\neg\exists x\forall y\,(P(x,y) \to \exists z\,Q(x,y,z))$ equivale a $\forall x\exists y\,(P(x,y) \wedge \forall z\,\neg Q(x,y,z))$

27. Averiguar si son correctas las siguientes implicaciones

a) $\neg Q(s) \wedge \forall x\,(P(x) \to Q(x)) \;\Rightarrow\; \neg P(s)$
b) $Q(s) \wedge \forall x\,(P(x) \to Q(x)) \;\Rightarrow\; P(s)$
c) $P(s) \wedge \exists x\,(P(x) \to Q(x)) \;\Rightarrow\; Q(s)$
d) $\neg P(s) \wedge \exists x\,(P(x) \to Q(x)) \;\Rightarrow\; \neg Q(s)$

28. Encontrar un contraejemplo de $\exists x\,\exists y\,(Q(x,y) \to P(y)) \;\wedge \exists x\,\exists y\,Q(x,y) \;\Rightarrow\; \exists y\,P(y)$

29. Probar que el esquema lógico $\exists x\,P(x) \wedge \exists x\,Q(x) \to\; \exists x(P(x) \wedge Q(x))$ es incorrecto.

30. El esquema lógico que a continuación se indica es incorrecto. Encontrar un contraejemplo.

$P(a) \wedge \forall x\,(P(x) \to\; S(f(x))) \wedge \forall x\,(S(x) \to\; P(f(x))) \;\Rightarrow\; S(f(f(a)))$

31. Demostrar la invalidez del siguiente razonamiento:

$$\exists x\,(P(x) \wedge A(x)) \wedge \forall x\,(P(x) \to G(x)) \wedge \exists x\,(P(x) \wedge \neg A(x)) \;\;\Rightarrow\;\; \forall x\,(A(x) \to G(x))$$

32. Encontrar un contraejemplo de

$$\neg\exists x\,(P(x) \wedge Q(x,a)) \wedge \forall x\,(R(x) \to \exists y\,(Q(x,y) \wedge P(y))) \;\;\Rightarrow\;\; \exists x\,(\neg R(x))$$

33. Demostrar que no es cierto que de las premisas

$\forall x\,(A(x) \vee B(x) \to ((C(x) \wedge D(x)) \vee E(x) \to F(x)))$
$\exists x\,(B(x) \wedge \neg A(x))$
$\forall x\,((D(x) \to F(x)) \wedge \neg G(x) \to B(x))$

se deduce $\exists x\,(C(x) \to G(x))$

34. Averiguar si de las premisas $\forall x\,(A(x) \to \neg B(x))$ y $\exists x\,(B(x) \to \neg C(x))$ se puede concluir que $\forall x\,(\neg B(x))$

35. Hallar la forma normal de Skolem de la formula $\forall x\,(A(x,y) \to \exists y(\neg B(x))$

36. Demostrar que la fórmula $\forall x\,(\neg\exists y\,(Q(y) \wedge R(x,y)) \to \neg\exists y\,(P(y) \wedge S(x,y))$ implica la fórmula $\exists x\,\forall y\,(S(x,y) \wedge \forall y\,(R(x,y) \to \neg Q(y)) \to \neg P(y))$

37. Demostrar que de

$\forall x\,(T(a,x) \to G(x)) \wedge ((\forall x\,\forall y\,T(x,y)) \to (\forall x\,G(x) \wedge \forall x\,H(x)) \wedge \forall x\,(G(x) \to (\forall y\,T(x,y))$

se deduce $(\exists x\,\neg H(x)) \to (\exists x\,\neg T(a,x))$

38. Demostrar que el esquema lógico que a continuación se indica es correcto:

$$\forall x\,\forall z\,((P(x,z) \vee \exists y\,(A(x,y) \wedge P(y,z))) \to A(x,z)) \;\Rightarrow\; \forall y\,((\exists x\,\exists z\,(P(x,y) \wedge P(y,z) \wedge P(x,z))) \to A(y,y))$$

39. Demostrad la validez del siguiente razonamiento:

$$\forall x\,(A(x) \to (B(x) \to C(x)) \wedge \wedge \exists x\,(B(x) \wedge D(x) \wedge \neg E(x)) \wedge \wedge \forall x\,((A(x) \to C(x)) \to (F(x) \to E(x))) \;\Rightarrow\; \exists x\,(D(x) \wedge \neg F(x))$$

40. Demostrar la validez o la invalidez del razonamiento siguiente:

$$\exists x\,(P(x) \wedge L(x)) \wedge \exists x\,(L(x) \wedge \neg S(x)) \;\Rightarrow\; \exists x\,(\neg S(x) \wedge P(x))$$

41. Analizar la validez o invalidez de

a) $\forall x\,\forall y\,(Q(x,y) \to P(x)) \wedge \exists x\,(Q(x,x) \vee R(x)) \;\Rightarrow\; \forall x\,(P(x) \vee R(x))$
b) $\forall t\,\neg A(t,t) \wedge \exists x\,\forall y\,(A(x,y) \vee B(y)) \;\Rightarrow\; \exists y\,B(y)$

42. Analizar la validez o invalidez de

a) $\exists x\,\forall y\,R(x,y) \to \exists y\,\forall x\,Q(x,y) \;\Rightarrow\; \exists z\,(\forall y\,R(z,y) \to \forall x\,Q(x,z))$
b) $\forall t\,\neg A(t,t) \wedge \forall y\,\exists x\,(A(x,y) \vee B(x)) \;\Rightarrow\; \exists x\,B(x)$

43. Formalizar y demostrar: "Los hijos de los amigos de los animales son amigos de los animales. Los amigos de los animales no maltratan a los animales. Pedro es amigo de los animales. Juana es hija de Pedro. Por tanto, Juana no maltrata a los animales".

44. Formalizar el razonamiento siguiente y demostrar su validez: "Todo alumno de la escuela estudia informática, ingeniería técnica o arquitectura técnica. Todos los que estudian informática tienen ordenador. Juan es un alumno de la escuela que no estudia arquitectura técnica, ni tiene ordenador. Luego, Juan estudia ingeniería técnica".

45. Formalizar y demostrar si es cierto que: "Los ricos y las personas con buen corazón ayudan a los pobres. Los ladrones que no tienen buen corazón son ricos. Joaquina es pobre, Enrique es un ladrón y Nieves tiene buen corazón. Por tanto, Nieves y Enrique ayudan a la Juaquina".

46. Formalizar y demostrar: "Pedro es un ciudadano de Gerona. Pedro afeita a todos los ciudadanos de Gerona que no se afeitan a si mismos, y solo a ellos. Por tanto, Pedro no afeita a nadie".

47. Si $A$, $B$, $C$ son subconjuntos de un mismo referencial, entonces el conjunto $A' \cap B \cap C'$ es igual al $(B–A')' \cap (A'–B)' \cap (C'–B)' \cap C'$.

48. Si $A$, $B$ y $C$ son subconjuntos de un referencial, expresar $((A \cup B)–(B–C)) \cup (B–(A \cap C)$ como unión de intersecciones.

49. Demostrar que $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \cap \mathbb{P}(B)$

50. Dado un referencial $E$, $A \subseteq E$, $B \subseteq E$ y $S_1 = A \cap B$, $S_2 = A' \cap B$, $S_3 = A \cap B'$, $S_4 = A' \cap B'$ demostrar que $S_1 \cup S_2 \cup S_3 \cup S_4 = E$ y que $\forall i \, \forall j \, (i \neq j \Rightarrow S_i \cap S_j = \emptyset)$

51. Demostrar que

a) $\mathbb{P}(A–B) \neq \mathbb{P}(A)–\mathbb{P}(B)$
b) $(A \cup B) \cap B' = A \Leftrightarrow A \cap B = \emptyset$

52. Demostrar por inducción sobre los naturales la igualdad

$$\sum_{k=1}^{n} r^k = \frac{r^{n+1}–r}{r–1}$$

53. Formalizar con esquemas lógicos correctos (sin hacer ninguna demostración):

a) Me gusta comer pato asado con ciruelas solo si es Navidad y tengo mucha hambre.
Ni es Navidad ni tengo mucha hambre. Entonces, no me gusta comer pato asado con

ciruelas.
b) Todos los magos de verdad son capaces de transformarlo todo. Raul no es capaz de transformar la sociedad. Entonces, hay quien no es mago de verdad.

54. Demostrar que

$(A \to (B \vee \neg C) \wedge D) \wedge (E \to \neg B \vee \neg D) \wedge (B \wedge \neg E \to F \wedge G) \Rightarrow G \to (A \wedge C \to \neg B \vee F)$

55. Demostrar que de las premisas

$\forall x\ (M(x) \to \neg S(x))$
$\forall x\ (P(x) \to S(x))$
$\forall x\ (P(x) \to V(x))$
$\exists x\ (M(x) \wedge V(x))$
$\forall x\ (B(x) \to \neg S(x))$

no se deduce $\forall x\ (B(x) \to M(x))$

56. Formalizar con esquemas lógicos correctos (sin hacer ninguna demostración):

a) Si cuando estoy en la cama leo me entra sueño. Si cuando estoy fuera de la cama como no leo. Si cuando estoy en la cama me entra sueño, me olvido del tiempo. Entonces, como y leo solo cuando me olvido del tiempo.
b) Los coches que no pueden llegar a todas partes no son como tienen que ser. El Cherokee y el Audi 4 son coches como tienen que ser. Entonces, hay coches que pueden llegar al Polo Norte.

57. Probar que de

$(A \vee B \to C \wedge \neg D) \wedge (B \vee E \to F \wedge \neg G) \wedge (E \vee \neg C \vee \neg G \to B \vee \neg D) \wedge (\neg E \wedge F \to A \vee C)$

no se deduce $G \to (A \vee \neg C \vee B \to \neg F)$

58. Demostrar que de las premisas

$\forall x\ (M(x) \to \neg S(x))$
$\forall x\ (\exists y\ P(x,y) \to S(x))$
$\forall x\ (V(x) \to \exists z\ P(x,z))$

se deduce $\forall x\ (M(x) \to \neg V(x))$