Problemas de exámenes de Geometría

1. Consideramos los planos π_1: $X = P+\lambda_1\boldsymbol{u}_1+\lambda_2\boldsymbol{u}_2$ y π_2: $X = Q+\mu_1\boldsymbol{v}_1+\mu_2\boldsymbol{v}_2$. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es incorrecta?

a) Si $\pi_1 \cap \pi_2 \neq \emptyset$, entonces $\dim([\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2,\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2]) \geq 2$
b) $[\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2] \cap [\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2] \neq \{\boldsymbol{0}\}$
c) Si π_1 paralelo a π_2, entonces $[\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2] \subseteq [\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2]$
d) Si π_1 perpendicular a π_2, entonces $[\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2] \perp [\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2]$

2. Dado un cubo de arista de longitud a, se considera una diagonal D del mismo y una arista d de una de sus caras, de tal manera que las rectas d y D se cruzan. Encontrar la distancia entre las rectas d y D. Encontrar la ecuación de la recta r que pasa por el punto $P(3,-1,0)$, es coplanaria con la recta $\frac{x}{2} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z}{5}$ y paralela al plano $-3x+y-4z+4 = 0$.

3. Estudiar, según los valores del parámetro a, la compatibilidad del sistema

$$\begin{aligned} ax+y+z &= 1 \\ x+ay+z &= a \\ x+y+az &= a^2 \end{aligned}$$

e interpretar geométricamente, tanto las ecuaciones del sistema como los resultados sobre su compatibilidad.

4. Un cuadrado está situado sobre el plano $x+y+z = 3$ y dos vértices opuestos son los puntos $A(1,1,1)$ y $C(0,2,1)$. Hallar la longitud del lado del cuadrado y los otros dos vértices.

5. Sea el plano π: $x+y+z = 1$ y sea la recta r: $x-y+z = 1$, $2x+y+z = 3/2$.

a) Determinar el punto P intersección de π y r.
b) Determinar la recta que pasa por P, es perpendicular a r y está contenida en π.

6. Determinar a por que las rectas

r: $x-2z-1= 0$, $y-z-2 = 0$
s: $x+y+z-1 = 0$, $x-2y+2z-a = 0$

sean coplanarias y encontrar la ecuación del plano que las contiene.

7. Encontrar el ángulo que forma la diagonal de la base de un cubo de lado 1, con la diagonal del cubo que tiene como origen un vértice de la primera diagonal.

8. En un rectangulo *ABCD* consideramos los puntos *M*: punto medio entre *C* y *D*, *N*: punto del segmento *AC* situado a una distancia $\|\boldsymbol{AC}\|/3$ de *A*. Calcular las coordenadas de los puntos *A*, *B*, *C* y *D* respecto al sistema de referencia $(N;\boldsymbol{NC},\boldsymbol{NM})$.

9. Dos vértices consecutivos de un rectángulo son $P(1,1,-3)$ y $Q(-1,0,0)$. Los otros dos vÉrtices pertenecen a una recta *r* que pasa por $C(4,3,-5)$. Encontrar:

a) La ecuación de esta recta .
b) La ecuación del plano π que contiene al rectángulo.
c) Los otros dos vértices del rectángulo.
d) Las dos rectas de π, perpendiculares a *r*, y que disten 2 unidades de *Q*.

10. Consideramos las rectas

$$r: \frac{x}{1} = \frac{y}{0} = \frac{z}{-1} \quad , \quad s: \begin{cases} x = 1+\lambda \\ y = \lambda \\ z = 0 \end{cases} \quad , \quad t: \begin{cases} x-y+z = 1 \\ y = \lambda \end{cases}$$

a) Buscar los puntos *A*, *B*, intersección de *r* y *s* con la perpendicular común.
b) Buscar el punto *C*, proyección del punto $P(1,1,1)$ sobre la recta *t*.
c) Buscar el punto *D*, simétrico del punto *C* respecto a la recta *AB*.
d) Calcular el área del cuadrilátero *ABCD*.

11. Hallar:

a) el plano que pasa por $P = (3,2,1)$, $Q = (3,1,-5$ y es perpendicular al plano $6x+7y+2z = 10$.
b) El plano que pasa por $R = (1, -2, -1)$ y $S = (2, 5, 6)$ y el paralelo al eje *OX*.
c) El plano que pasa por (2, 2, 1) y contiene a la recta $\frac{x}{2} = \frac{y-4}{-1} = z$

12. Dada la recta *r*: $x+3 = (y-2)/2 = (z-1)/3$ hallar:

a) la recta *s* que pertenece al plano que contiene a *r*, al punto $P(1,0,0)$, y es perpendicular a *r*.
b) la recta *t* que es perpendicular a *r* y a *s*, y pasa por el punto de intersección de *r* y *s*.

13. Consideremos las rectas

$$r: \begin{cases} x = 2+\lambda \\ y = 2+\lambda \\ z = 1 \end{cases} \qquad s: \begin{cases} x+y-z = 1 \\ -x+y-z = -1 \end{cases}$$

a) Calcular el punto de intersección de r y s, y el ángulo que forman
b) Calcular las dos rectas que pasan por el punto anterior y forman un ángulo de 60° con r y s.

14. Se consideran las rectas

$$r: \frac{x-2}{3} = y = \frac{z+1}{5}$$
$$s: \begin{cases} x+y-z = 0 \\ 2x+3y = -6 \end{cases}$$
$$t: (x,y,z) = (1,1,0)+\lambda(1,-1,0)$$

a) Determina la posición relativa entre r y s y la distancia entre ambas.
b) Calcula la recta paralela a t que corta a r y s.

15. Se consideran las rectas

$$r: \frac{x-2}{3} = \frac{y-1}{2} = z \qquad s: \frac{x-a}{a} = y-1 = z+1 \qquad t: \begin{cases} x = 2 \\ x+y-2z = 1 \end{cases}$$

a) Determinar a para que r y s se corten, calculando en este caso su punto de intersección P.
b) Calcular la distancia de P a la recta t.

16. Dada la recta $r: \begin{cases} x+y-z = 0 \\ x-2y+z = 7 \end{cases}$, calcula la recta s que pasando por $P(1,0,2)$ corta y es perpendicular a r.

17. En el espacio afín de dimensión 4 encontrar la intersección de los planos:

$$\alpha: \begin{cases} x-z+2t = 1 \\ -x+2y+t = -1 \end{cases} \qquad \beta: \begin{cases} 3x+y+z+t = 0 \\ 12x+y+z+6t = 3 \end{cases}$$

¿Qué figura es?. Encontrar sus ecuaciones paramétricas. Encontrar a para que esta variedad lineal

sea paralela a la variedad de ecuación $-4x+5y+z+at = 1$

18. Se considera el sistema de referencia $(O;\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3)$ verificando

$$\|\boldsymbol{e}_1\| = 1 \quad , \quad \|\boldsymbol{e}_2\| = 2 \quad , \quad \|\boldsymbol{e}_3\| = 2 \quad , \quad \boldsymbol{e}_1 \perp \boldsymbol{e}_2 \quad , \quad \angle(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2) = 60^\circ \quad , \quad \angle(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_3) = 60^\circ$$

a) Encontrar la expresión matricial del producto escalar respecto la base $(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3)$
b) Encontrar $\|\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2-\boldsymbol{e}_3\|$
c) Se considera el plano π que pasa por los puntos $A(1,0,2)$, $B(1,1,3)$ y $C(2,0,5)$. Calcular un vector ortogonal a π.
d) Ecuación cartesiana del plano π respecto del sistema de referencia:

$$(P(1,1,1);(-1,0,1),(0,-1,1),(1,0,1))$$

19. Sea la recta $r : (x,y,z) = (-1,-4,3)+\lambda(1,1,-1)$ y sea el punto $P(1,1,1)$. Calcular:

a) la distancia de P a r.
b) las rectas que pasen por P y cortan a r formando un ángulo de 45°.
c) Las coordenadas de P respecto el sistema de referencia $(Q(0,1,10);(1,-1,0),(1,1,1),(1,1,-2))$.

20. Sea el plano π: $x+y+z = 1$ y los puntos $P(0,1,1)$ y $Q(1,0,1)$.

a) Calcular la proyección ortogonal sobre π de la recta que pasa por P y Q.
b) Calculnar el punto de la anterior proyección que equidista de P y Q.

21. Sea la recta r: $(x,y,z) + (1,-1,0)+\lambda(2,3,1)$ y los planos π_1: $4x-4y+2z = 1$ y π_2: $3y-4z = -1$.

a) Calcular los puntos de r que equidistan de π_1 y de π_2.
b) Calcular la distancia entre la recta r y la recta $\pi_1 \cap \pi_2$.

22. Sea $R_1 = (O;\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3)$ un sistema de referencia del espacio afín euclídeo E_3 con un producto escalar de matriz asociada $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Un punto P en este sistema tiene por coordenadas (x_1,x_2,x_3). Sea otro sistema de referencia $R_2 = (A;\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2,\boldsymbol{u}_3)$ en el que el punto P tiene por coordenadas (y_1,y_2,y_3), siendo el punto $A(1,0,1)$ y $\boldsymbol{u}_1 = \boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{u}_2 = \boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_3$, $\boldsymbol{u}_3 = \boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2+\boldsymbol{e}_3$.

a) Hallar las ecuaciones de cambio del sistema de referencia en ambos sentidos.
b) ¿Cuál es la matriz del producto escalar utilizando el sistema de referencia R_2?
c) Respecto a R_1 un plano tiene por ecuación $x_1+2x_2+4x_3 = 1$, ¿qué ecuación tiene respecto de R_2?
d) Hallar un vector perpendicular al plano anterior utilizando el sistema de referencia R_2.

23. a) Dada la recta r: $x+y-z = 0$, $x-2y+z = 7$, hallar la recta s que pasa por $P(1,0,2)$ y corta perpendicularmente a r.
b) Dadas las rectas r_1: $(x,y,z) = (2,1,2)+\lambda(1,0,1)$ y r_2: $x+y+z = 3$, $x-y+z = 1$, demostrar que se cortan en un punto y determinar los planos que contienen a los puntos que equidistan de las dos rectas (planos bisectores).

24. Sean las rectas r: $2x-y-z = 1$, $3x-y-2z = 4$ y s: $x-y+z = -2$, $x-3y-z = -8$. Determinar su posición relativa, la distancia entre éllas, y los puntos de las rectas que determinan la mínima distancia.

25. Sean los planos π_1: $y+z= 2$, π_2: $x+y= 0$ y π_3: $-x+y+2z= 2$. Comprobar que se cortan dos a dos en rectas paralelas, y determinar el área del triángulo determinado por toda sección perpendicular a los tres planos.

26. Un plano corta a los tres ejes en tres puntos que están a la misma distancia a del origen. Hallar a para que el área del triángulo que definen valga 10 y, en este caso, hallar la distancia del origen al plano.

27.- (17 p.) Dadas las rectas del espacio afín real de dimensión 3

$$r: \begin{array}{l} 2x_1+ax_2+x_3 = 7 \\ x_1+ax_2+x_3 = b \end{array} \qquad s: \begin{array}{l} x_1+2ax_2 = -1 \\ bx_1+ax_2 = b \end{array}$$

estudiar su intersección para $a = 0$ y $a = 1$.

28.- (23 p.) Dado el poliedro de vértices $A(1,0,0)$, $B(0,1,0)$, $C(0,0,1)$, $D(-1,0,0)$, $E(0,-1,0)$ y $F(0,0,-1)$, hallar:

a) Ecuaciones y longitudes de las aristas AC y BF, ángulo que forman y distancia entre ellas.
b) Ecuación y área de la cara ACB y área total del poliedro.
c) Longitud del segmento CF y volumen del poliedro

29. Dadas las rectas r: $x = 1$ $y= 4$, s: $2x = y$ $y = 3z$, t: $x+z = 1$ $2y-z = 0$, demostrar que se cruzan dos a dos. Hallar la altura y el volumen del paralelepÌpedo que tiene sus aristas en r, s, y t y sus caras son los planos que pasando por cada arista son paralelos a las otras.

30. Sea E el espacio afÌn tridimensional y R_1 : (O; $\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2,\boldsymbol{u}_3$) y R_2 : (O; $\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\boldsymbol{v}_3$) dos sistemas de referencia. Las coordenadas de P en R_1 son $P(1,-1,1)$ y los vectores de las bases son

6

$\boldsymbol{u}_1 = (1,1,1)$, $\boldsymbol{u}_2 = (1,1,0)$, $\boldsymbol{u}_3 = (1,0,0)$, $\boldsymbol{v}_1 = (2,-1,0)$, $\boldsymbol{v}_2 = (0,1,2)$, $\boldsymbol{v}_3 = (0,0,-2)$

Si Q es el punto de coordenadas (2,2,0) en el sistema R_1, encontrar las coordenadas de Q en el sistema R_2. Encontrar la ecuación cartesiana en el sistema R_1 de un plano que pasa por $A(1,2,3)$ y es paralelo a la recta que pasa por P y tiene por vector director $\boldsymbol{u}_1$.