Problemas de exámenes de Formas Bilineales y Determinantes

1. Sea $\mathbf{R}^3$ con el producto escalar ordinario. Sea f un endomorfismo de $\mathbf{R}^3$ definido por las condiciones:

a) La matriz de f respecto de la base canónica es simétrica.
b) Los vectores imagen de la base canónica tienen la misma norma, son ortogonales a sus antiimágenes y tienen componentes no negativas.

Se pide la matriz asociada a f en la base canónica, y estudiar su diagonalización, indicando la correspondiente matriz del cambio de base.

2. Dada la forma cuadrática $q_c = x^2+3y^2+2z^2+2xy+2xz+4yz$, probar que su forma bilineal simétrica asociada define un producto escalar en $\mathbf{R}^3$. Hallar una base ortonormal de $\mathbf{R}^3$ respecto de este producto escalar y el subespacio vectorial de los vectores ortogonales al (1,0,–1).

3.Sea la forma cuadrática sobre $\mathbf{R}^3$ definida por $f_c(x,y,z) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & x & y \\ 1 & x & 0 & z \\ 1 & y & z & 0 \end{pmatrix}$

a) Calcular la expresión matricial respecto de la base canónica de la forma polar asociada.
b) Es esta forma bilineal un producto escalar?
c) Estudiar la ortogonalización y normalización, respecto de la forma bilineal, de la base de $\mathbf{R}^3$ formada por ((1,1,1),(0,1,0),(0,0,1)).

4. Sea $(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3)$ una base del espacio euclídeo $\mathbf{R}^3$ que cumple:

$$\|\boldsymbol{e}_1\| = 3 \quad , \quad \|\boldsymbol{e}_2\| = 2 \quad , \quad \|\boldsymbol{e}_3\| = 1 \quad , \quad <\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2> = 2 \quad , \quad <\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3> = 0 \quad , \quad <\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_3> = 1$$

a) Calcular la norma del vector $\boldsymbol{v} = 2\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2-3\boldsymbol{e}_3$.
b) Calcula el ángulo que forman los vectores $\boldsymbol{u}_1 = \boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{e}_2$ y $\boldsymbol{u}_2 = 2\boldsymbol{e}_2-\boldsymbol{e}_3$.
c) Halla una base ortonormal del subespacio $[\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2]$.

5. En $\mathbf{R}^3$ definimos la siguiente forma bilineal

$$f((x_1,x_2,x_3),(y_1,y_2,y_3)) = x_1y_1+(x_2-x_3)(y_2-y_3)+(x_1+x_3)(y_1+y_3)$$

a) Indicar la expresión matricial de la forma bilineal. Demostrar que es un producto escalar.
b) Encontrar la proyección ortogonal del vector (1,1,1) sobre el subespacio [(0,1,2)].
c) Calcular $A^{\perp}$, subespacio ortogonal de $A = [(1,1,0),(0,1,-1)]$

6. En $\mathbf{R}^3$ definimos la siguiente forma bilineal

$$f((x_1,x_2,x_3),(y_1,y_2,y_3)) = 2x_1y_1+x_2y_1+x_1y_2+2x_2y_2+x_3y_2+x_2y_3+2x_3y_3$$

a) Indicar la expresión matricial de la forma bilineal. Demostrar que es un producto escalar.
b) Encontrar el ángulo que forman los vectores (1,1,1) y [(–3,1,0)].
c) Encontrar la proyección ortogonal del vector (1,1,1) sobre el subespacio $A = [(1,1,0),(0,1,-1)]$

7. En $\mathbf{R}_3(x)$ se considera la forma cuadrática

$$f(ax^3+bx^2+cx+d) = a^2+b^2+c^2+d^2-bc$$

a) Encontrar la expresión matricial respecto a la base $(x^3,x^2,x,1)$ y respecto a la base $(x^3+x^2+x+1,x^3+x^2+x,x^3+x^2,x^3)$ de la forma polar asociada y comprobar que es un producto escalar.
b) Calcular una base ortonormal de $\mathbf{R}_3(x)$.
c) Calcular $[x^3+x,x^2+1]^{\perp}$.

8. En $\mathbf{R}^3$ definimos la forma cuadrática:

$$f_q(x,y,z) = 2x^2+(y-z)^2+(x+z)^2$$

a) Expresar matricialmente la forma bilineal simétrica asociada, y demuestra que ésta es un producto escalar.
b) Calcula una base ortonormal de $\mathbf{R}^3$ respecto de este producto escalar.
c) Calcula el ángulo entre los vectores (1,0,1) y (1,2,1).
d) Si $F = \{(x,y,z)\in \mathbf{R}^3 \mid x = y+z \ , \ y = 2x-z\}$, hallar $F^{\perp}$.

9. Si $\boldsymbol{u}$ y $\boldsymbol{v}$ son vectores tales que $\|\boldsymbol{u}\| = \|\boldsymbol{v}\|$, entonces $<\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v},\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}> = 0$.

10. Se considera la forma bilineal simetrica f definida sobre $\mathbf{R}^3$ que tiene por forma cuadratica asociada:

$$f_q(x,y,z) = x^2+ay^2+3z^2+2xy+2xz+2ayz$$

a) ¿Para que valores de a es un producto escalar?
b) Para $a = 2$ calcula una base ortonormal de $\mathbf{R}^3$ respecto de este producto escalar y hallar el subespacio $[(1,1,0),(0,1,1)]^{\perp}$.

11. Consideramos los subespacios

$$V_1 = \{(x,y,z,t)\in \mathbf{R}^4 \mid -x+2y-3z = 0 \ , \ y-2z+t = 0\} \qquad V_2 = [(2,-1,0,1),(1,-1,3,7)]$$

a) Calcular una base y la dimensión de $V_1 \cap V_2$ y V_1+V_2.
b) Calcular la proyección de (1,–1,1,0) sobre V_1.
c) Calcular $V_2^{\perp}$.

12. En $\mathbf{R}^4$ se consideran los subespacios

$$F = [(1,2,0,1),(2,3,0,3),(3,2,1,2)] \qquad G = \{(x,y,z,t)\in \mathbf{R}^4 \mid x-y+z+t = 0\}$$

a) Dar una base de $F \cap G$.
b) Considerar el producto escalar ordinario, comprobar que $(F \cap G)^{\perp} = F^{\perp}+G^{\perp}$
c) Utilizar la igualdad anterior y que $(F^{\perp})^{\perp}$, demostrar que $(F+G)^{\perp} = F^{\perp} \cap G^{\perp}$.

13. En $\mathbf{R}^4$ consideremos los subespacios

$$A = [(1,0,0,1),(0,1,1,0)] \qquad B = \{(x,y,z,t)\in \mathbf{R}^4 \mid x = az \ , \ y = at\}$$

y el producto escalar

$$<(x_1,y_1,z_1,t_1),(x_2,y_2,z_2,t_2)> = 2x_1x_2+2y_1y_2+z_1z_2+t_1t_2+x_1y_2+x_2y_1$$

a) Calcular a para que $A \cap B$ tenga dimension 1.
b) Calcular $A^{\perp}$.
c) Hallar la matriz del producto escalar restringido a A respecto de la base ((1,0,0,1),(0,1,1,0)).

14. En $\mathbf{R}^3$ se considera el producto escalar que tiene por expresión matricial:

$$<(x_1,x_2,x_3),(y_1,y_2,y_3)> = (x_1 \ \ x_2 \ \ x_3)\begin{pmatrix} 1 & a & b \\ a & 2 & c \\ b & c & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

y el subespacio $V = [(1,1,0),(0,1,1)]$.

a) Determinar a,b y c, sabiendo que ((1,1,0),(0,1,1)) es una base ortonormal de V.
b) Calcular los vectores de $V^{\perp}$ de norma 4.

15. Sea la forma bilineal sobre $\mathbf{R}^3$ definida por:

$$f((x_1,x_2,x_3),(y_1,y_2,y_3)) = 9x_1y_1-2x_1y_3-2x_3y_1+3x_2y_2+6x_3y_3$$

a) Calcular la expresión matricial de f respecto de la base canónica y respecto de la base ((1,1,0),(0,1,1),(1,1,1))
b) Demostrar que f es un producto escalar.
c) Calcular una base ortonormal de $\mathbf{R}^3$ respecto al producto escalar definido por f

16. En $\mathbf{R}^3$ definimos la siguiente forma bilineal:

$$g((x_1,x_2,x_3),(y_1,y_2,y_3)) = x_1y_1+(x_2-x_3)(y_2-y_3)+(x_1+x_3)(y_1+y_3)$$

a) Calcular la expresión matricial de g respecto la base canónica.
b) Demostrar que g es un producto escalar.
c) Calcular el ángulo entre los vectores (1,1,1) y (0,1,2).
d) Calcular $[(1,1,1)]^{\perp}$.

17. Consideramos los subespacios de $\mathbf{R}^4$

$$A = [(1,2,1,0),(-1,1,1,1)] \quad \text{y} \quad B = [(2,-1,0,1),(1,-1,3,7)]$$

a) Encontrar la base y la dimensión de $A+B$ y $A \cap B$.
b) Calcular una base ortonormal de $A+B$ respecto al producto escalar ordinario.
c) Encontrar la proyección del vector $\boldsymbol{u}$ + (1,1,1,1) sobre el subespacio A.

18. Calcular el determinante de una matriz de orden 4 tal que sus elementos son:

$$a_{ij} = \begin{cases} \sqrt{2} & \text{si } i = 1 \\ j^{\,i-1} & \text{si } i \neq 1 \end{cases}$$

19. Resolver la ecuación

$$\begin{vmatrix} 1 & x & x & \dots & x \\ x & 1 & x & \dots & x \\ x & x & 1 & \dots & x \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x & x & x & \dots & 1 \end{vmatrix} = 0$$

20.- (11 p.) En $\mathbf{R}^2$ se define la forma bilineal

$$f((x_1,x_2),(y_1,y_2)) = 10x_1y_1-3x_1y_2-3x_2y_1+x_2y_2$$

a) Demostrar que es un producto escalar.
b) Hallar la proyección del vector (x_1,x_2) sobre el subespacio $A = \{(x,y)\in \mathbf{R}^2 \mid x = 0\}$.
c) Hallar el subespacio ortogonal de $B = \{(x,y)\in \mathbf{R}^2 \mid y = x\}$.

21. En $\mathbf{R}^3$ se considera el producto escalar que tiene por expresión matricial:

$$< (x_1,x_2,x_3),(x_1,x_2,x_3) > = (x_1 \quad x_2 \quad x_3)\begin{pmatrix} 1 & a & b \\ a & 2 & c \\ b & c & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

y el subespacio $V = [(1,1,0),(0,1,1)]$.

a) Determinar a, b, c, sabiendo que (1,1,0), (0,1,1) son una base ortonormal de V.
b) Calcular los vectores de $V^{\perp}$ de norma 4.

22. La aplicación f de $\mathbf{R}^3\times \mathbf{R}^3$ en $\mathbf{R}$ definida por

$$f((x_1,x_2,x_3),(y_1,y_2,y_3)) = (x_1-2x_2)(y_1-2y_2)+x_2y_2+(x_2+x_3)(y_2+y_3)$$

a) ¿Es un producto escalar?
b) En caso afirmativo, encontrar su matriz asociada en la base canónica y en la base $((1,2,0),(0,2,1),(1,0,2))$ de $\mathbf{R}^3$.
c) ¿Son ortogonales los vectores $\boldsymbol{u} = (1,1,3)$ y $\boldsymbol{v} = (2,1,-1)$?. Hallar la norma de $\boldsymbol{u}$ y el subespacio ortogonal de $A = [(-1,1,1),(1,1,-1)]$.