Problemas de exámenes de Espacios Vectoriales

1. Considerando $f \in \mathrm{End}(\mathbf{R}^n)$, ¿cuál de las siguientes afirmaciones es incorrecta?

a) Si $(f(\boldsymbol{v}_1),...,f(\boldsymbol{v}_n))$ es base de $\mathbf{R}^n$, entonces $(\boldsymbol{v}_1,...,\boldsymbol{v}_n)$ es base de $\mathbf{R}^n$
b) Si $\{f(\boldsymbol{v}_1),...,f(\boldsymbol{v}_n)\}$ son l.d., entonces $\{\boldsymbol{v}_1,...,\boldsymbol{v}_n\}$ son l.d..
c) Si $\{f(\boldsymbol{v}_1),f(\boldsymbol{v}_2)\}$ son l.i., entonces $\{\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2\}$ son también l.i..
d) Si $f(\boldsymbol{v}_1) = f(-\boldsymbol{v}_1)\}$, entonces $\boldsymbol{v}_1 \in \mathrm{Nuc}(f)$

2. En $\mathbf{R}^4$ consideramos los subespacios vectoriales:

$V = \{(x_1,x_2,x_3,x_4) \in \mathbf{R}^4 \mid x_1 = x_2 = x_3\}$

$W = \{(x_1,x_2,x_3,x_4) \in \mathbf{R}^4 \mid x_1 = \lambda+\varepsilon+\beta+\gamma,\ x_2 = \lambda+\varepsilon+2\gamma,\ x_3 = \lambda+\gamma,\ x_4 = \lambda+\beta\}$

a) Calcular una base y dimensión de V y de W.
b) Calcular una base y dimensión de $V \cap W$ y de $V+W$.
c) Determinar V_1 para que $V \oplus V_1 = \mathbf{R}^4$.

3. En $\mathbf{R}^4$ tenemos los subespacios vectoriales

$A = [(2,0,1,1),(1,1,1,1),(1,-3,-1,-1),(3,-7,-2,-2)]$

$B = \{(x_1,x_2,x_3,x_4) \in \mathbf{R}^4 \mid x_1+x_2+2x_3 = 0\ ,\ \ 2x_1-x_2+2x_3 = 0\}$

Encontrar la dimensión y una base de A, B, $A \cap B$ y $A+B$. Completar la base de $A+B$ hasta obtener una de $\mathbf{R}^4$.

4. Hallar la intersección de los subespacios

$A = [(2,3,-1),(0,4,2)]$

$B = \{(x_1,x_2,x_3) \in \mathbf{R}^3 \mid x_1+x_2+x_3 = 0\ ,\ \ x_2+x_3 = 0\}$

5. Dados los subespacios

$$A = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \mid x+y+z = 0\} \qquad B = \{(x,2x,3x) \in \mathbf{R}^3 \mid x \in \mathbf{R}\}$$

hallar base y dimensión de A, B, $A+B$ y $A \cap B$.

6. Se considera el conjunto $A = \{\begin{pmatrix} a & b+c \\ -b+c & a \end{pmatrix} \mid a,b,c \in \mathbf{R}\}$

a) Demostrar que A es un subespacio vectorial de $M_{(2,2)}(\mathbf{R})$.
b) Determinar su dimensión, una base, y completarla hasta a obtener una de $M_{(2,2)}(\mathbf{R})$.
c) Calcular base y dimensión de

$$A \cap [\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}]$$

7. Se consideran los subespacios

$$S = \{(x,y,z,t) \in \mathbf{R}^4 \mid -x+y = 0 \ , \ t = z\} \qquad T = \{(x,y,z,t) \in \mathbf{R}^4 \mid x = ay-at \ , \ z = -ay+at \ \}$$

a) Encontrar una base y la dimensión de S y de T.
b) Calcular a para que $S+T$ tenga dimensión 3.
c) Con la a calculada encuentra una base de $S \cap T$.

8. Sean

$$S = \{(x,y,z,t) \in \mathbf{R}^4 \mid -2x+3y+2z+t = 0\} \qquad T = [(3,1,2,0),(1,1,0,-1),(3,1,3,-2),(1,\lambda,-1,1)]$$

a) Calcula λ para que T tenga dimensión 3.
b) Con la λ determinada, ¿son S y $S \cup T$ subespacios vectoriales? En caso afirmativo hallar una base y su dimensión.
c) Con la λ determinada, hallar la dimensión y una base de $S \cap T$ y $S+T$.
d) Completa la base de $S \cap T$ a una base de $\mathbf{R}^4$.

9. Dados los subespacios $S = [(0,1,1),(1,0,2),(-2,3,-1)]$ y $T = [(1,1,3),,(-1,4,a)]$, hallar a para que $S = T$. Hallar un vector $\boldsymbol{u}$ que complete el conjunto generador de S hasta una base para $\mathbf{R}^3$. Averiguar si $S \cup [\boldsymbol{u}]$ es un subespacio. Hallar una base para $S \cap [(1,0,1),(0,1,1)]$.

10. En el espacio vectorial $\mathbf{R}_3(x)$ de los polinomios de grado menor o igual que 3, sean los subespacios

$$F = \{P(x) \mid P(0) = P(1) = P'(1/2) = P'''(0) = 0\} \quad \text{y} \quad G = [x+1,x,x-1]$$

a) Demostrar que F está formado por los polinomios $a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3$ que verifican $a_0 = a_3 = 0$ y $a_1 = -a_2$.
b) Hallar una base y dimensión de F y G.
c) ¿Son los polinomios x^2-5x+2 y $3x-4$ elementos de G?. En caso afirmativo expresarlos como combinación lineal de $x+1$, x y $x-1$.

d) Hallar base y dimensión de $F \cap G$ y $F+G$. ¿Es directa la suma $F+G$?