Interpretabilidad y optimalidad de las funciones racionales modales

SIGLA/X Group[1]

Resumen

Both modal extensions f^* and f^{**} are semantically interpretable but not computable, in general, and the rational extension fR is computable but not semantically interpretable. We will state some results relating both semantic and rational extensions in order to give interpretability to fR and computability to f^* and f^{**}. But, when f^* and f^{**} are computed through the rational extension fR a loss of information is generated. The point is to find out functions for which the program fR is optimal, that is, $fR(X)$ equals to $f^*(X)$ and $f^{**}(X)$

1. Uniincidencia y multiincidencia

Para resolver el problema de la falta de computabilidad de las extensiones semánticas f^* y f^{**} y la falta de significado del resultado de un cálculo racional, vamos a estudiar las relaciones entre ambos tipos de extensión para dar así posibilidad de calcular f^* y f^{**} e interpretabilidad al resultado de un cálculo racional fR.

Un papel importante en este tipo de relaciones lo juega el de uniincidencia y multiincidencia de una variable.

Un componente x_i de x es *uniincidente* en una función racional f de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}$ si ocupa una sola hoja del árbol sintáctico de f; en caso contrario se dice que x_i es *multiincidente*.

Ejemplo 1.1

En la función racional f de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}$ dada por

$$f(x_1, x_2) = x_2 + \frac{x_1^2}{x_2}$$

x_2 es multiincidente y x_1 uniincidente.

[1]SIGLA/X membership: Calm R., Estela M.R., Gardeñes E., Jorba L., Mielgo H., Sainz M.A., Trepat A.

Se ha de tener muy en cuenta que los conceptos de uniincidencia y multiincidencia tienen sentido únicamente cuando nos referimos a la definición sintáctica de una función racional, que apunta a un programa de cálculo definido. No obstante, una función racional definida sintácticamente puede ser considerada como una mera función (es decir la clásica correspondencia entre valores de los argumentos y valores de la función) o como un programa de cálculo; por ello puede distinguirse entre "*-variables", las variables de cualquier función racional cuando se la considera como una función pura (tal como se usa para calcular las extensiones semánticas f^* y f^{**}), y R-variables, cuando los diferentes lugares que ocupan en el árbol sintáctico del programa racional, significan diferentes lecturas para la evaluación de este programa. De acuerdo con este esquema conceptual, podemos decir que para cualquier función racional las *-variables son siempre uniincidentes, y que cada R-variable tiene un orden de incidencia igual al número de hojas que ocupa en el árbol sintáctico de la función racional. En este sentido un operador racional cuyos argumentos puedan ser ocupados por distintas variables o por la misma, considerado como función, es una función racional; esto justifica el escribir $g(X)$ en lugar de $g^*(X)$ para cualquier función g JM-conmutativa usada como operador.

2. Interpretabilidad y optimalidad

El problema de la extensión racional fR de una función continua f es, por ahora, la falta de interpretación semántica del resultado, calculable a través del árbol sintáctico de la función. De acuerdo con los teoremas semánticos, para dar significado a un cálculo racional, habrá que establecer relaciones de inclusión entre fR y las extensiones semánticas f^* y f^{**}, puesto que si para un intervalo n-dimensional X se verifica

$$f^*(X) \subseteq fR(X) \quad \text{o bien} \quad fR(X) \subseteq f^{**}(X)$$

entonces el cálculo $fR(X)$ es interpretable.

Por otra parte, la falta de computabilidad de f^* y f^{**} podrá ser resuelta mediante cálculos racionales que establezcan aproximaciones interiores y exteriores a ellas, que podrán suponer en muchos casos una gran pérdida de información. Para evitarla, será necesario hallar criterios que caractericen a las funciones tales que, en una aritmética ideal sin truncaciones, sea

$$f^*(X) = fR(X) = f^{**}(X)$$

Cuando esto ocurre para todo $X \in I^*(\mathbb{R}^n)$, tal que $fR(\mathrm{Prop}(X))$ esté definida, diremos que fR es *optimal*. Si la igualdad ocurre solamente para un $A \in I^*(\mathbb{R}^n)$ diremos que fR es un cálculo optimal sobre A, es decir, es $fR(A)$ optimal. En el caso de que únicamente se verifique la igualdad $fR(X) = f^*(X)$, sin ninguna presuposición acerca de la igualdad entre $f^*(X)$ y $f^{**}(X)$ hablaremos de *-optimalidad, y análogamente para la **-optimalidad en el caso de ser $fR(X) = f^{**}(X)$.

2.1. Interpretabilidad en el caso de uniincidencia

El primer resultado va a ser la relación entre la extensión modal f^* y el redondeo externo de la extensión racional $\mathrm{Ex}fR^*$. Vamos a particularizar el teorema *-semántico de una función continua cuando se considera como función compuesta de sus operadores.

"Sean G, X, Y vectores intervalares de modalidad propia, H, U, V vectores intervalares de modalidad impropia y F de modalidad indefinida. Sean las funciones continuas f, g y h tales que $f^*(G,H) \subseteq F$, $g^*(X,U) \subseteq G$, $h^*(Y,V) \subseteq H$ y supongamos que U y V no tienen componentes comunes en el conjunto de las listas g y h. En estas condiciones si $f \circ (g \circ h)(x,y,u,v) := f(g(x,u), h(y,v))$, entonces

$$(f \circ (g \circ h))^*(X,Y,U,V) \subseteq F \text{ "}$$

En efecto, según el teorema semántico, tendremos

a) $h^*(Y,V) \subseteq H \Leftrightarrow \mathrm{U}(y,Y')\ \mathrm{U}(h,H')\ \mathrm{E}(v,V')\ h = h(y,v)$

b) $g^*(X,U) \subseteq G \Leftrightarrow \mathrm{U}(x,X')\ \mathrm{E}(g,G')\ \mathrm{E}(u,U')\ g = g(x,u)$

c) $f^*(G,H) \subseteq F \Leftrightarrow \mathrm{U}(g,G')\ \mathrm{Q}(f,F)\ \mathrm{E}(h,H')\ f = f(g,h)$

De b) y de c)

$$\mathrm{U}(x,X')\ \mathrm{Q}(f,F)\ \mathrm{E}(h,H')\ \mathrm{E}(u,U')\ (f = f(g,h),\ g = g(x,u))$$

que con a) y dada la condición de no tener U y V componentes comunes se obtiene

$$\mathrm{U}(x,X')\ \mathrm{U}(y,Y')\ \mathrm{Q}(f,F)\ \mathrm{E}(v,V')\ \mathrm{E}(u,U')\ (f = f(g,h),\ g = g(x,u),\ h = h(y,v))$$

que es equivalente a

$$\mathrm{U}(y,Y')\ \mathrm{U}(x,X')\ \mathrm{Q}(f,F)\ \mathrm{E}(u,U')\ \mathrm{E}(v,V')\ f = f(g(x,u), h(y,v)$$

lo que según el teorema semántico equivale a

$$(f \circ (g \circ h))^*(X,Y,U,V) \subseteq F$$

(Hemos utilizado un principio de sustitución en fórmulas de predicados que tengan agrupados los cuantificadores universales a la izquierda y los existenciales a la derecha que puede enunciarse así: en una fórmula proposicional en la que figure $\mathrm{E}(x,X')$, puesto a la izquierda de todos los cuantificadores existenciales, puede sustituirse lo que en otra fórmula acompaña a $\mathrm{U}(x,X')$, puesto a la derecha de todos los cuantificadores universales; si en la demostración del lema U y V tienen componentes comunes, entonces de $\mathrm{E}(v,V')$ y $\mathrm{E}(u,U')$ en las fórmulas no puede deducirse nada).

Este resultado va a permitir la relación entre la extensión modal f^* y el redondeo externo de la extensión sintáctica $\mathrm{Ex}fR^*$ en la forma siguiente

"Si las componentes impropias de X son uniincidentes y existe $\mathrm{Ex}fR^*(X)$, entonces $f^*(X) \subseteq \mathrm{Ex}fR^*(X)$"

En efecto, como f es la función compuesta de todos sus operadores, según el resultado anterior, pueden establecerse condiciones de sustituciones siempre y cuando los intervalos impropios correspondan a variables uniincidentes, ya que es insensible a la multiincidencia de las componentes propias, para llegar a $f^*(X) \subseteq fR^*(X)$. Teniendo en cuenta la definición de redondeo externo, se obtiene el resultado.

Observaciones:

1. La condición de uniincidencia para las componentes impropias es necesaria pues, por ejemplo, para la función continua

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longrightarrow & x-x \end{array} \quad \text{es} \quad \begin{array}{rccc} fR^*: & I^*(\mathbb{R}) & \longrightarrow & I^*(\mathbb{R}) \\ & X & \longrightarrow & X-X \end{array}$$

   y si tomamos un intervalo propio, $X = [1,2]$, entonces es $f^*([1,2]) = [0,0]$ y

$$fR^*(X) = [1,2] - [1,2] = [-1,1] \supseteq [0,0] = f^*([1,2])$$

   Pero si tomamos un intervalo impropio, $X = [2,1]$, entonces

$$fR^*(X) = [2,1] - [2,1] = [1,-1] \not\supseteq [0,0] = f^*([1,2])$$

2. La condición de existencia de $\mathrm{Ex}fR^*(X)$ es simplemente necesaria pues, por ejemplo, para la función de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}$ dada por

$$f(x,y) = \frac{1}{1+x+y}$$

   tomando

$$\left.\begin{array}{l} X = [-100,100] \\ Y = [100,-100] \end{array}\right\} \Rightarrow \; fR^*(X,Y) = \frac{1}{1+X+Y} = [1,1]$$

   existe $\mathrm{Ex}fR^*(X)$ y sin embargo

$$f^*(X,Y) = (-\infty,+\infty) \not\subset [1,1]$$

   ya que f no es continua en el dominio $X' = ([-100,100],[-100,100])$

La propiedad dual es

"Si las componentes propias de X son uniincidentes y existe $\mathrm{In}fR^{**}(X)$, entonces $f^{**}(X) \supseteq \mathrm{In}fR^{**}(X)$"

En efecto, de acuerdo con igualdades ya obtenidas, es

$$\mathrm{In}fR^{**}(X) = \mathrm{Dual}(\mathrm{Ex}fR^{*}(\mathrm{Dual}(X))) \subseteq \mathrm{Dual}(f^{*}(\mathrm{Dual}(X))) = f^{**}(X)$$

De acuerdo con estas propiedades si f tiene todos sus operadores racionales con todas sus variables uniincidentes, entonces

$$f^{*}(X) \subseteq fR(X) \subseteq f^{**}(X)$$

en una aritmética ideal, o bien

$$f^{*}(X) \subseteq \mathrm{Ex}fR(X) \quad \text{y} \quad \mathrm{In}fR(X) \subseteq f^{**}(X)$$

Ejemplo 2.1

La función

$$f(a,b,c,d) = (a+b)(c+d)$$

tiene por árbol sintáctico

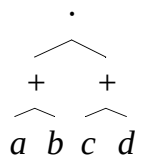


Figura 1: árbol sintáctico

y verifica $f^{*}(X) \subseteq fR(X) \subseteq f^{**}(X)$. Para los intervalos $A = [-2,2]$, $B = [1,-1]$, $C = [-1,1]$ y $D = [2,-2]$ es

$$\begin{aligned}
fR(A,B,C,D) &= ([-2,2] + [1,-1]) * ([-1,1] + [2,-2]) = [-1,1] * [1,-1] = [0,0] \\
f^{*}(A,B,C,D) &= [\mathrm{mín}(a,A')\,\mathrm{mín}(c,C')\ \ \mathrm{máx}(b,B')\,\mathrm{máx}(d,D')((a+b)(c+d)), \\
&\qquad \mathrm{máx}(a,A')\,\mathrm{máx}(c,C')\ \ \mathrm{mín}(b,B')\,\mathrm{mín}(d,D')((a+b)(c+d))] = \\
&\qquad = [3/2, -3/2] \\
f^{**}(A,B,C,D) &= [\mathrm{máx}(b,B')\,\mathrm{máx}(d,D')\ \ \mathrm{mín}(a,A')\,\mathrm{mín}(c,C')((a+b)(c+d)), \\
&\qquad \mathrm{mín}(b,B')\,\mathrm{mín}(d,D')\ \ \mathrm{máx}(a,A')\,\mathrm{máx}(c,C')((a+b)(c+d))] = \\
&\qquad = [-3/2, 3/2]
\end{aligned}$$

Entonces $[3/2,-3/2] \subseteq [0,0] \subseteq [-3/2,3/2]$.

Si una función continua es uniincidente en todas sus variables y todos sus operadores son JM-conmutativos en X y es globalmente JM-conmutativa en X, entonces es optimal, es decir,

$$f^{*}(X) = fR(X) = f^{**}(X)$$

En particular esto ocurrirá si todas las componentes de X son uniincidentes y de la misma modalidad en cuyo caso $fR(X) = f^{*}(X)$ o bien $fR(X) = f^{**}(X)$.

2.2. Optimalidad en el caso de uniincidencia

En lo que ahora sigue construiremos la clase fundamental de funciones uniincidentes racionales optimales. En los resultados de esta sección, supondremos la hipótesis de uniincidencia aunque no esté explícitamente declarada.

a) Si g es un operador de una variable racional y monótono y $fR(X)$ es optimal entonces $gR(fR(X))$ es también optimal (asociatividad monótona por la izquierda)

En efecto, al ser g monótono, por ejemplo decreciente,

$$\begin{aligned}&(g\circ f)^*(X) = \vee(x_p, X'_p)\wedge(x_i, X'_i)[g(f(x_p, x_i)),\ g(f(x_p, x_i))] = \\ &= [\min(x_p, X'_p)\max(x_i, X'_i)(g(f(x_p, x_i))), \max(x_p, X'_p)\min(x_i, X'_i)g(f(x_p, x_i))] = \\ &= [g(\max(x_p, X'_p)\min(x_i, X'_i)f(x_p, x_i)), g(\min(x_p, X'_p)\max(x_i, X'_i)f(x_p, x_i))] = \\ &= gR(f^*(X))\end{aligned}$$

y análogamente se obtiene $(g\circ f)^{**}(X) = gR(f^{**}(X))$; luego por ser f optimal

$$(g\circ f)^*(X) = gR(f^*(X)) = gR(f^{**}(X)) = (g\circ f)^{**}(X)$$

y

$$(g\circ f)R(X) = gR(fR(X)) = gR(f^*(X)) = (g\circ f)^*(X)$$

Ejemplo 2.2

Sea la función $h(x, y) = e^{x+y}$, como función compuesta de $f(x, y) = x + y$ y $g(z) = e^z$. Como fR es optimal y g es univariable y monótono, entonces $h^*(X, Y) = hR(X, Y) = e^{X+Y}$. Para $h(x, y) = (x + y)^2$, como función compuesta de $f(x, y) = x + y$ y $g(z) = z^2$, se tiene fR optimal pero g es univariable y no monótono, con lo que no se puede aplicar el resultado.

b) Si g_1,...,g_n son operadores continuos de una variable y $fR(X)$ es optimal, entonces $fR(g_1R(X_1)...g_nR(X_n))$ es también optimal (asociatividad monaria por la derecha)

En efecto,

$$(f(g_1, .., g_n))^*(X_p, X_i) = \vee(x_p, X'_p)\wedge(x_i, X'_i)[f(g_1(x_1), .., g_n(x_n)), f(g_1(x_1), .., g_n(x_n))]$$

y si llamamos $y_1 = g_1(x_1), \cdots, y_n = g_n(x_n)$, $Y_1 = g_1R(X_1), \cdots, Y_n = g_nR(X_n)$ entonces, teniendo en cuenta que si X_j es propio, es Y_j propio y si X_j es impropio, también lo es Y_j, la igualdad queda en la forma

$$\begin{aligned}(f(g_1, ..., g_n))^*(X_p, X_i) &= \vee(y_p, Y'_p)\wedge(y_i, Y'_i)[f(y_p, y_i), f(y_p, y_i)] = f^*(Y_p, Y_i) = \\ &= f^*(g_pR(X_p), g_iR(X_i))\end{aligned}$$

Análogamente obtenemos

$$(f(g_1,\cdots,g_n))^{**}(X_p,X_i)=f^{**}(g_pR(X_p),g_iR(X_i))$$

Resumiendo resultados,

$$(f(g_1,\cdots,g_n))^{*}(X_p,X_i)=f^{*}(g_pR(X_p),g_iR(X_i))=$$
$$=\begin{cases} f^{**}(g_pR(X_p),g_iR(X_i))=(f(g_1,\cdots,g_n))^{**}(X_p,X_i)\\ fR(g_pR(X_p),g_iR(X_i))=fR(g_1R(X_1),\cdots,g_nR(X_n))\end{cases}$$

y como

$$(f(g_1,\cdots,g_n))R(X_p,X_i)=fR(g_1R(X_1),\cdots,g_nR(X_n))$$

se deduce la optimalidad.

Ejemplo 2.3

En la asociatividad monótona por la derecha los operadores monarios, por la derecha no necesitan monotonía, por ejemplo

$h(x,y)=x^2+y^2$ es optimal: $g_1R(x)=x^2$, $g_2R(y)=y^2$, $fR(g_1R(x),g_2R(y))=g_1R(x)+g_2R(y)$

$$\left.\begin{array}{l} g_1R \text{ es optimal (monario y continuo)}\\ g_2R \text{ es optimal (monario y continuo)}\end{array}\right\} \Rightarrow \quad fR \text{ optimal} \quad \Rightarrow \quad x^2+y^2 \text{ optimal}$$

Si $X=[4,3]$, $Y=[-1,5]$, entonces

$$h^*([4,3],[-1,5])=hR([4,3],[-1,5])=[4,3]^2+[-1,5]^2=[16,9]+[0,25]=[16,34]$$

c) Si $g(x_1,\cdots,x_n)$ es un operador uniformemente monótono, y $f_1R(Y_1),\cdots,f_nR(Y_n)$ son funciones racionales optimales, entonces $gR(f_1R(Y_1),\cdots,f_nR(Y_n))$ es también optimal. Si g tiene la forma $g(z,x_1,\cdots,x_n)$, y es uniformemente monótona para $x_1,\cdots,x_n$, entonces $gR(Z,f_1R(Y_1),\cdots,f_nR(Y_n))$ es también optimal y lo mismo $gR(f_0R(Y_0),f_1R(Y_1),\cdots,f_nR(Y_n))$ siendo $f_0R(Y_0)$ cualquier cadena de operadores continuos de una variable.

En efecto, la variedad de puntos de silla de $f_1(y_1),\cdots,f_n(y_n)$ da, con estas hipótesis, un punto de silla de $g(f_1(y_1),\cdots,f_n(y_n))$. Por ejemplo en el caso $n=2$ y suponiendo que $g(x_1,x_2)$ es x_1-isotónica y x_2-antitónica,

$$g^*(X_1,X_2)=[g(\mathrm{Inf}(X_1),\mathrm{Sup}(X_2)),g(\mathrm{Sup}(X_1),\mathrm{Inf}(X_2))]$$

Supongamos $X_1=f_1^*(Y_{1p},Y_{1i})$ y $X_2=f_2^*(Y_{2p},Y_{2i})$; si

$$\begin{aligned}\mathrm{Inf}(X_1) &= \mathrm{m\acute{i}n}(y_{1p},Y'_{1p})\,\mathrm{m\acute{a}x}(y_{1i},Y'_{1i})f(y_{1p},y_{1i})\\ &= \mathrm{SDV}(f_1,Y'_{1p},Y'_{1i})=f_1(y_{1pm},y_{1iM})\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}\mathrm{Sup}(X_2) &= \mathrm{máx}(y_{2p}, Y'_{2p})\,\mathrm{mín}(y_{2i}, Y'_{2i}) f(y_{2p}, y_{2i}) \\ &= \mathrm{SDV}(f_2, Y'_{2i}, Y'_{2p}) = f_2(y_{2pM}, y_{2im})\end{aligned}$$

entonces

$$\mathrm{U}(y_{1p}, Y'_{1p})\ \mathrm{U}(y_{1i}, Y'_{1i})\ (f_1(y_{1pm}, y_{1i}) \leq f_1(y_{1pm}, y_{1iM}) \leq f_1(y_{1p}, y_{1iM}))$$

y

$$\mathrm{U}(y_{2p}, Y'_{2p})\ \mathrm{U}(y_{2i}, Y'_{2i})\ (f_2(y_{2p}, y_{2im}) \leq f_2(y_{2pM}, y_{2im}) \leq f_2(y_{2pM}, y_{2i}))$$

por tanto, al ser $g(x_1, x_2)$ uniformemente x_1-isotónica y x_2-antitónica

$$\begin{gathered}\mathrm{U}(y_{1p}, Y'_{1p})\ \mathrm{U}(y_{1i}, Y'_{1i})\ \mathrm{U}(y_{2p}, Y'_{2p})\ \mathrm{U}(y_{2i}, Y'_{2i}) \\ g(f_1(y_{1pm}, y_{1i}), f_2(y_{2pM}, y_{2i})) \leq g(f_1(y_{1pm}, y_{1iM}), f_2(y_{2pM}, y_{2im})) \leq \\ \leq g(f_1(y_{1p}, y_{1iM}), f_2(y_{2p}, y_{2im}))\end{gathered}$$

Así tenemos

$$\begin{aligned}&\mathrm{Inf}(g^*(X_1, X_2)) = g(\mathrm{Inf}(X_1), \mathrm{Sup}(X_2)) = g(f_1(y_{1pm}, y_{1iM}), f_2(y_{2pM}, y_{2im})) = \\ &= \mathrm{SDV}(g \circ (f_1, f_2), (Y'_{1p}, Y'_{2p}), (Y'_{1i}, Y'_{2i})) = \mathrm{Inf}(g \circ (f_1, f_2)^*(Y_{1p}, Y_{2p}, Y_{1i}, Y_{2i}))\end{aligned}$$

Y análogamente se prueba

$$\mathrm{Sup}(g^*(X_1, X_2)) = \mathrm{Sup}(g \circ (f_1, f_2)^*(Y_{1p}, Y_{2p}, Y_{1i}, Y_{2i}))$$

En consecuencia tenemos la igualdad.

$$g^*(f_1^*(Y_1), f_2^*(Y_2)) = (g \circ (f_1, f_2))^*(Y_1, Y_2)$$

y lo mismo para g^{**} y $g \circ (f_1, f_2)^{**}$.

La segunda parte se prueba teniendo en cuenta el apartado d) de la sección anterior y el b) de esta sección.

Ejemplo 2.4

Para la función $h(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1x_2 + x_3x_4$, compuesta del operador $g(z_1, z_2) = z_1 + z_2$ que es uniformemente monótono y $f_1(x_1, x_2) = x_1x_2$ y $f_2(x_3, x_4) = x_3x_4$. Como f_1R y f_2R son optimales, entonces hR es optimal. Si $X_1 = [-1, 5]$, $X_2 = [3, 2]$, $X_3 = [4, 5]$ y $X_4 = [-6, -7]$, entonces

$$hR([-1, 5], [3, 2], [4, 5], [-6, -7]) = [-1, 5] * [3, 2] + [4, 5] * [-6, -7] = [-32, -18]$$

2.3. Árbol-optimalidad

Diremos que la extensión sintáctica fR es *árbol-optimal* sobre X si cualquiera de sus ramas elementales no uniformemente monótonas está seguida en el árbol sintáctico solamente por operadores de una variable.

La idea de rama sigue la referencia intuitiva a la de árbol cuando significa la forma sintáctica de una función racional.

Averiguar la árbol-optimalidad de $fR(X)$ puede restringirse a la árbol-optimalidad de los subárboles definidos por sus variables no uniformemente monótonas.

Teorema de optimalidad

"Si $fR(X)$ es árbol-optimal y X es uniincidente en fR, entonces $fR(X)$ es optimal."

Es evidente de acuerdo con los apartados a), b), y c) de la sección anterior.

Observemos que si $fR(X)$ es uniincidente y unimodal la optimalidad en el sentido $f^*(X) = fR(X) = f^{**}(X)$ se mantiene independientemente de la estructura sintáctica del árbol de fR, siempre y cuando no aparezca el operador dual.

Ejemplo 2.5

La función f de $\mathbb{R}^4$ en $\mathbb{R}$ dada por

$$f(x, y, z, u) = xy + zu$$

tiene una extensión sintáctica racional fR de $I^*(\mathbb{R}^4)$ en $I^*(\mathbb{R})$ dada por

$$fR(X, Y, Z, U) = X * Y + Z * U$$

que es árbol-optimal y, por ello, optimal en cualquier $X = (X, Y, Z, U) \in I^*(\mathbb{R}^4)$. La función g de $\mathbb{R}^4$ en $\mathbb{R}$ dada por

$$g(x, y, z, u) = (x + y)(z + u)$$

tiene una extensión sintáctica racional gR de $I^*(\mathbb{R}^4)$ en $I^*(\mathbb{R})$ dada por

$$gR(X, Y, Z, U) = (X + Y) * (Z + U)$$

no es árbol-optimal en todo su dominio y no es optimal en todo su dominio ya que, por ejemplo,

$$g^*([-2, 2], [1, -1], [-1, 1], [2, -2]) = [1{,}5, -1{,}5]$$

$$g^{**}([-2, 2], [1, -1], [-1, 1], [2, -2]) = [-1{,}5, 1{,}5]$$

$$gR([-2, 2], [1, -1], [-1, 1], [2, -2]) = [0, 0]$$

aunque pueda serlo para algún X. Por ejemplo, si $X = ([1,3],[0,3],[4,2],[3,1])$ se verifican las condiciones de árbol-optimalidad y entonces

$$\begin{aligned} g^*([1,3],[0,3],[4,2],[3,1]) &= g^{**}([1,3],[0,3],[4,2],[3,1]) = \\ &= gR([1,3],[0,3],[4,2],[3,1]) = [7,18] \end{aligned}$$

Para la función h de $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}$ dada por

$$h(x,y,z) = x(y+z)$$

que tiene por extensión sintáctica racional hR de $I^*(\mathbb{R}^3)$ en $I^*(\mathbb{R})$ dada por

$$hR(X,Y,Z) = X * (Y+Z)$$

tenemos

$$h^*([1,-1],[-2,2],[1,-1]) = [1,-1]$$
$$h^{**}([1,-1],[-2,2],[1,-1]) = [0,0]$$
$$hR([1,-1],[-2,2],[1,-1]) = [0,0]$$

y sin embargo al ser árbol-optimal en el dominio ([1,3],[1,2],[0,2]) es

$$h^*([3,1],[1,2],[2,0]) = h^{**}([3,1],[1,2],[2,0]) = hR([3,1],[1,2],[2,0]) = [9,2]$$

2.4. Interpretabilidad en el caso de multiincidencia

Hasta ahora era necesaria la uniincidencia de las variables. Pero, ¿qué relación hay entre $f^*(X)$ y $fR(X)$ cuando existen componentes impropias multiincidentes o entre $f^{**}(X)$ y $fR(X)$ cuando existen componentes propias multiincidentes? Cuatro importantes resultados cubren este caso:

a) Si la función racional modal $fR(X)$ tiene componentes impropias multiincidentes, y si Xt^* se obtienen de X transformando todas las multiincidencias impropias en un intervalo puntual definido por cualquiera de los puntos de su dominio, entonces

$$f^*(X) \subseteq fR(Xt^*)$$

En efecto, sea $X = (X_p, X_{i1}, X_{i2})$ donde

- X_{i1} es el vector de componentes impropias uniincidentes en $fR(X)$,
- X_{i2} es el vector de componentes impropias multiincidentes en $fR(X)$,

Sea $x_{i2} \in X'_{i2}$, definimos $Xt^* = (X_p, X_{i1}, [x_{i2}, x_{i2}])$, entonces

$$f^*(X_p, X_i) \subseteq f^*(Xt^*) \subseteq fR(Xt^*)$$

Empleando desarrollos duales de los anteriores tenemos el resultado dual:

b) Si la función racional modal $fR(X)$ tiene componentes propias multiincidentes, y si Xt^{**} se obtienen de X transformando todas las multiincidencias propias en un intervalo puntual definido por cualquiera de los puntos de su dominio, entonces

$$fR(Xt^{**}) \subseteq f^{**}(X)$$

Ejemplo 2.6

Para la función f de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}$ dada por

$$f(x_1, x_2) = x_2 - x_1 x_2$$

y el intervalo X = ([2,3],[4,3]) podemos calcular, por ejemplo,

$$\begin{aligned} fR(Xt_1^*) &= fR([4,4],[2,3],[4,4]) = [4,4] - [2,3] * [4,4] = \\ &= [4,4] - [8,12] = [-8,-4] \\ fR(Xt_2^*) &= fR([3,3],[2,3],[3,3]) = [3,3] - [2,3] * [3,3] = \\ &= [3,3] - [6,9] = [-6,-3] \end{aligned}$$

y si calculamos f^* obtenemos $f^*([2,3],[4,3]) = [-6,-3]$

c) Si la función racional modal $fR(X)$ es árbol-optimal y contiene variables multiincidentes impropias y si XT^* es el vector que se obtiene de X transformando todas las multiincidencias en sus duales, excepto una de ellas. Entonces,

$$f^*(X) \subseteq fR(XT^*)$$

En efecto,

1. $f^*(X_p, X_i) \subseteq f^{**}(X_p, X_i)$
2. Definimos $XT^* = (X_{p1}, X_{im1}, X_{im2}, X_{iu})$, siendo
   - X_{p1} el agrandamiento del vector de componentes propias X_p considerando cada incidencia como independiente,
   - X_{iu}, las componentes impropias uniincidentes en $fR(X)$,
   - X_{im}, las componentes impropias multiincidentes en $fR(X)$,
   - X_{im1}, el subvector de las componentes impropias multiincidentes X_{im}, que mantienen su modalidad impropia original,

- X_{im2}, el subvector de las componentes impropias multiincidentes X_{im}, que han sido transformadas en sus duales.

entonces

$f^{**}(X_p, X_i) = \bigwedge_{x_i \in X_i'} \bigvee_{x_p \in X_p'} [f(x_p, x_i), f(x_p, x_i)]$

$\subseteq \bigwedge_{x_i \in X_i'} \bigvee_{x_{p1} \in X_{p1}'} [f(x_{p1}, x_i), f(x_{p1}, x_i)]$

$= \bigwedge_{x_{iu} \in X_{iu}'} \bigwedge_{x_{im} \in X_{im}'} \bigvee_{x_{p1} \in X_{p1}'} [f(x_{p1}, x_{iu}, x_{im}), f(x_{p1}, x_{iu}, x_{im})]$

$\subseteq \bigwedge_{x_{iu} \in X_{iu}'} \bigvee_{x_{p1} \in X_{p1}'} [f(x_{p1}, x_{iu}, x_{im}^0), f(x_{p1}, x_{iu}, x_{im}^0)]$ para todo $x_{im}^0 \in X_{im}'$

$\subseteq \bigwedge_{x_{iu} \in X_{iu}'} \bigvee_{x_{p1} \in X_{p1}'} \bigvee_{x_{im2} \in X_{im2}'} [f(x_{p1}, x_{iu}, x_{im1}^0, x_{im2}), f(x_{p1}, x_{iu}, x_{im1}^0, x_{im2})]$

para todo $x_{im1}^0 \in X_{im1}'$. Por lo tanto está contenido en el meet de todos ellos

$f^{**}(X_p, X_i) \subseteq \bigwedge_{x_{im1} \in X_{im1}'} \bigwedge_{x_{iu} \in X_{iu}'} \bigvee_{x_{p1} \in X_{p1}'} \bigvee_{x_{im2} \in X_{im2}'}$
$[f(x_{p1}, x_{iu}, x_{im1}, x_{im2}), f(x_{p1}, x_{iu}, x_{im1}, x_{im2})] = f^{**}(XT^*)$

3. Puesto que $fR(XT^*)$ es árbol-optimal y uniincidente,
   $f^*(XT^*) = fR(XT^*) = f^{**}(XT^*)$

De los puntos anteriores se deduce

$f^*(X_p, X_i) \subseteq f^{**}(X_p, X_i) \subseteq f^{**}(XT^*) = fR(XT^*)$

Empleando desarrollos duales de los anteriores tenemos el resultado dual:

b) Si la función racional modal $fR(X)$ es árbol-optimal y contiene variables multiincidentes propias y si XT^{**} se obtiene de X transformando todas las multiincidencias en sus duales, excepto una de ellas, entonces,

$$fR(XT^{**}) \subseteq f^{**}(X)$$

Ejemplo 2.7

Para la función f de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}$ dada por

$$f(x_1, x_2) = x_2 - x_1 x_2$$

tenemos

$$\begin{aligned} f^*([2,3],[4,3]) &= \vee(x_1, [2,3]') \wedge (x_2, [3,4]')[x_2 - x_1x_2, x_2 - x_1x_2] \\ &= \vee(x_1, [2,3]')[3 - 3x_1, 4 - 4x_1] = [-6, -4] \end{aligned}$$

y considerada como $f(x_1, x_{21}, x_{22}) = x_{21} - x_1 x_{22}$ es

$f^*([2,3],[3,4],[4,3]) =$
$= \vee(x_1, [2,3]') \vee (x_{21}, [3,4]') \wedge (x_{22}, [3,4]')[x_{22} - x_1x_{21}, x_{22} - x_1x_{21}] =$
$= \vee(x_1, [2,3]') \vee (x_{21}, [3,4]')[4 - x_1x_{21}, 3 - x_1x_{21}] =$
$= \vee(x_1, [2,3]')[4 - 4x_1, 3 - 3x_1] = [-8, -3]$

y

$$fR(XT^*) = fR([2,3],[3,4],[4,3]) = [4,3] - [2,3] * [3,4] = [4,3] - [6,12] = [-8,-3]$$

con lo que

$$f^*(X) = f^*([2,3],[4,3]) \subseteq f^*([2,3],[3,4],[4,3]) \subseteq fR(XT^*)$$

Sin embargo para $X = ([-1,3],[3,4])$, que es un intervalo propio, resulta

$$\begin{array}{rcl} f^{**}(X) & = & f^{**}([-1,3],[3,4]) = \vee(x_1,[-1,3]') \vee (x_2,[3,4]')[x_2 - x_1x_2, x_2 - x_1x_2] = \\ & = & \vee(x_1,[-1,3]')[\underline{\text{if}}\ x_1 < 1\ \underline{\text{then}}\ 3 - 3x_1\ \underline{\text{else}}\ 4 - 4x_1, \\ & & \qquad \underline{\text{if}}\ x_1 < 1\ \underline{\text{then}}\ 4 - 4x_1\ \underline{\text{else}}\ 3 - 3x_1] = [-8,8] \end{array}$$

siendo

$$\begin{array}{l} fR(X) = [3,4] - [-1,3] * [3,4] = [3,4] - [-4,12] = [-9,8] \\ fR(XT_1^{**}) = [4,3] - [-1,3] * [3,4] = [4,3] - [-4,12] = [-8,7] \\ fR(XT_2^{**}) = [3,4] - [-1,3] * [4,3] = [3,4] - [-3,9] = [-6,7] \end{array}$$

Las extensiones racionales $fR(.)$, aunque interpretables, según expresan los teoremas anteriores c) y d), pueden suponer una pérdida de información respecto de las extensiones semánticas, incluso en el caso de que todas las variables sean uniincidentes, (sería el caso en que $f^*(X) \subseteq fR(X)$ pero $f^*(X) \neq fR(X)$). Esta pérdida de información puede ser paliada, por ejemplo, si fR es arbol-optimal y existen componentes multiincidentes impropios y $fR(XT_1^*), \cdots, fR(XT_k^*)$ son los k resultados obtenidos al transformar de todas las maneras posibles todas las multiincidencias impropias, excepto una de ellas, en sus duales, entonces

$$\left.\begin{array}{c} f^*(X) \subseteq fR(XT_1^*) \\ \cdots \\ f^*(X) \subseteq fR(XT_k^*) \end{array}\right\} \Rightarrow \quad f^*(X) \subseteq fR(XT_1^*) \wedge \cdots \wedge fR(XT_k^*)$$

que es un intervalo contenido en $fR(XT_1^*), \cdots, fR(XT_k^*)$. Análogamente, si existen componentes multiincidentes propios y si $fR(XT_1^{**}), \cdots, fR(XT_l^{**})$ son los resultados obtenidos al transformar de todas las maneras posibles, todas las multiincidencias propias, excepto una de ellas, en sus duales, entonces

$$\left.\begin{array}{c} fR(XT_1^{**}) \subseteq f^{**}(X) \\ \cdots \\ fR(XT_l^{**}) \subseteq f^{**}(X) \end{array}\right\} \Rightarrow \quad fR(XT_1^{**}) \vee \cdots \vee fR(XT_l^{**}) \subseteq f^{**}(X)$$

que es un intervalo que contiene a $fR(XT_1^{**}), \cdots, fR(XT_l^{**})$.

Ejemplo 2.8

Para la función f de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}$ dada por

$$f(x_1, x_2) = x_1 + x_2 - x_1 x_2$$

y el intervalo $X = ([1,3],[5,2])$ es

$$\begin{aligned} f^*(X) &= \vee(x_1, [1,3]') \wedge (x_2, [2,5]')[x_1 + x_2 - x_1x_2, x_1 + x_2 - x_1x_2] = \\ &= \vee(x_1, [1,3]')[-x_1 + 2, -4x_1 + 5] = [-1, 1] \\ f^{**}(X) &= \wedge(x_2, [2,5]') \vee (x_1, [1,3]')[x_1 + x_2 - x_1x_2, x_1 + x_2 - x_1x_2] = \\ &= \wedge(x_2, [2,5]')[-2x_2 + 3, 1] = [-1, 1] \end{aligned}$$

Como

$$\begin{aligned} fR(XT_1^*) &= fR([1,3],[2,5],[5,2]) = [1,3] + [2,5] - [1,3] * [5,2] = \\ &= [3,8] - [5,6] = [-3,3] \\ fR(XT_2^*) &= fR([1,3],[5,2],[2,5]) = [1,3] + [5,2] - [1,3] * [2,5] = \\ &= [6,5] - [2,15] = [-9,3] \\ fR(XT_1^{**}) &= fR([1,3],[3,1],[5,2]) = [1,3] + [5,2] - [3,1] * [5,2] = \\ &= [6,5] - [15,2] = [4,-10] \\ fR(XT_2^{**}) &= fR([3,1],[1,3],[5,2]) = [3,1] + [5,2] - [1,3] * [5,2] = \\ &= [8,3] - [5,6] = [2,-2] \end{aligned}$$

es

$$f^*(X) = [-1,1] \subseteq \left\{ \begin{array}{l} fR(XT_1^*) = [-3,3] \\ fR(XT_2^*) = [-9,3] \end{array} \right\} \subseteq [-3,3] \wedge [-9,3] = [-3,3]$$

$$f^{**}(X) = [-1,1] \supseteq \left\{ \begin{array}{l} fR(XT_1^{**}) = [4,-10] \\ fR(XT_2^{**}) = [2,-2] \end{array} \right\} \supseteq [4,-10] \vee [2,-2] = [2,-2]$$

Cuando en el árbol sintáctico existen variables multiincidentes, interviene el concepto de monotonía total.

Una función $f(x)$ es *totalmente monótona* respecto de $x \in \mathbb{R}^n$, si es uniformemente monótona respecto de x y uniformemente monótona para cada incidencia de cada componente multiincidente de x.

Importantes resultados por su aplicabilidad que abarcan el caso de multiincidencias, bajo determinadas condiciones, son los que veremos a continuación

a) Sea $X = (Y, Z)$ un vector intervalar y sea f, totalmente monótona para el subconjunto Z de componentes multiincidentes. Sea (Y, ZD) el vector obtenido por

ampliación de X, tomando cada incidencia de las componentes de Z como independiente, transformada en su dual si para dicha incidencia f es monótona con sentido de monotonía contrario al global del correspondiente componente de Z. Entonces

$$f^*(Y,Z) = f^*(Y,ZD)$$

En efecto, supongamos que Z tiene solamente un componente propio multiincidente y que f es, por ejemplo, z-isotónica; entonces

$f^*(Y,Z) =$
$= \vee(y_p, Y'_p) \vee (z, Z') \wedge (y_i, Y'_i)\ [f(y_p, y_i, z), f(y_p, y_i, z)]$
$= \vee(y_p, Y'_p) \wedge (y_i, Y'_i) \vee (z, Z')\ [f(y_p, y_i, z), f(y_p, y_i, z)]$
$\quad //$De la z-monotonía total
$= \vee(y_p, Y'_p) \wedge (y_i, Y'_i) \vee (zd_+, ZD'_+) \wedge (zd_-, ZD'_-)[f(y_p, y_i, zd_+, zd_-), f(y_p, y_i, zd_+, zd_-)]$
$= \vee(y_p, Y'_p) \vee (zd_+, ZD'_+) \wedge (y_i, Y'_i) \wedge (zd_-, ZD'_-)[f(y_p, y_i, zd_+, zd_-), f(y_p, y_i, zd_+, zd_-)]$
$= f^*(Y,ZD)$

Si Z tiene más de un componente propio la demostración es esencialmente igual. Lo mismo si Z tiene uno o más de un componente impropio.

b) Sea $X = (Y,Z)$ un vector intervalar y sea f totalmente monótona para el subconjunto Z de componentes multiincidentes. Sea (Y,ZD) el vector obtenido por ampliación de X, tomando cada incidencia de las componentes de Z como independiente, transformada en su dual si para dicha incidencia f es monótona con sentido de monotonía contrario al global del correspondiente componente de Z. Entonces

$$f^{**}(Y,Z) = f^{**}(Y,ZD)$$

En efecto, es el dual del resultado anterior.

c) (Teorema de coerción a la *-optimalidad parcial)

Sea X un vector intervalar y sea fR definida en el dominio Prop(X) totalmente monótona para un subconjunto Z de componentes multiincidentes. Sea XDt^* el vector obtenido por ampliación de X, tomando cada incidencia de las componentes de Z como independiente, transformada en su dual si para dicha incidencia f es monótona con sentido de monotonía contrario al global del correspondiente componente de Z; el resto de las componentes multiincidentes impropias se transforman en cualquier punto de su dominio en todas sus incidencias. Entonces

$$f^*(X) \subseteq fR(XDt^*)$$

En efecto, sea $X = (Y,Z)$ de modo que f sea totalmente monótona para las componentes de Z y $XDt^* := (Yt^*, ZD)$. De acuerdo con el resultado anterior y el teorema de coerción a la interpretabilidad

$$f^*(X) = f^*(Y,Z) = f^*(Y,ZD) \subseteq fR(Yt^*, ZD)$$

d) (Teorema de coerción a la **-optimalidad parcial)

Sea X un vector intervalar y sea fR definida en el dominio Prop(X) totalmente monótona para un subconjunto Z de componentes multiincidentes. Sea XDt^{**} el vector obtenido por ampliación de X, tomando cada incidencia de las componentes de Z como independiente, transformada en su dual si para dicha incidencia f es monótona con sentido de monotonía contrario al global del correspondiente componente de Z; el resto de las componentes multiincidentes propias se transforman en cualquier punto de su dominio en todas sus incidencias. Entonces

$$fR(XDt^{**}) \subseteq f^{**}(X)$$

En efecto, es el dual del teorema c).

e) Sea X un vector intervalar y sea fR definida en el dominio Prop(X) totalmente monótona para todas sus componentes multiincidentes. Sea XD el vector obtenido por ampliación de X, tomando cada incidencia de las componentes como independiente, transformada en su dual si para dicha incidencia f es monótona con sentido de monotonía contrario al global del correspondiente componente de X. Entonces

$$f^{*}(X) \subseteq fR(XD) \subseteq f^{**}(X)$$

En efecto, en estas condiciones todas las componentes multiincidentes son totalmente monótonas por lo que $XDt^{*} = XD = XDt^{**}$. De los dos teoremas anteriores se deduce el resultado.

f) (Teorema de coerción a la *-optimalidad parcial en el caso de árbol-optimalidad)

Sea X un vector intervalar y sea fR definida en el dominio Prop(X) árbol-optimal en X y totalmente monótona para un subconjunto Z de componentes multiincidentes. Sea XDT^{*} el vector obtenido por ampliación de X, tomando cada incidencia de las componentes de Z como independiente, transformada en su dual si para dicha incidencia f es monótona con sentido de monotonía contrario al global del correspondiente componente de Z; el resto de las componentes multiincidentes impropias se transforman en su dual en cada incidencia excepto una. Entonces

$$f^{*}(X) \subseteq fR(XDT^{*}) \subseteq fR(XT^{*})$$

En efecto, sea $X = (Y, Z)$ de modo que f sea totalmente monótona para las componentes de Z y $XDT^{*} := (YT^{*}, ZD)$. De acuerdo con el resultado anterior y el teorema de coerción a la interpretabilidad

$$f^{*}(X) = f^{*}(Y, Z) = f^{*}(Y, ZD) \subseteq fR(YT^{*}, ZD)$$

Dada la independencia de las componentes de sus argumentos,

$$fR(YT^{*}, ZD) = f^{*}(YT^{*}, ZD) = f^{*}(YT^{*}, Z) \subseteq fR(YT^{*}, ZT^{*})$$

si las componentes multiincidentes que no pertenecen a Z sufren en XT^* la misma transformación que en XDT^*.

Es interesante notar que en la transformación de ZD a ZT^*, todas las componentes que eran propias en Z o mantienen su propia modalidad o proceden de componentes impropias después del cambio. Las componentes impropias de Z pasan en ZT^* a modalidad propia para cada incidencia excepto una. Si ésta tiene el mismo sentido de monotonía que el global, mantiene su modalidad en la transformación de ZD en ZT^*; si no es así, la monotonía total evita "el efecto contractivo" derivado de la inclusión.

Ejemplo 2.9

Consideremos la función continua f de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}$ definida por $f(x,y) = xy + \dfrac{1}{x+y}$ con $X = [10, 5]$ y $Y = [2, -1]$. Según el Teorema de coerción a la *-interpretabilidad, tendremos 4 posibilidades para el cálculo de la función racional $fR(XT^*)$

$$\begin{aligned}
fR(XT_1^*)(X,Y) &= X * Y + \frac{1}{\text{Dual}(X) + \text{Dual}(Y)} \subseteq [20{,}0833, -9{,}75] \\
fR(XT_2^*)(X,Y) &= \text{Dual}(X) * Y + \frac{1}{X + \text{Dual}(Y)} \subseteq [10{,}1428, -4{,}8889] \\
fR(XT_3^*)(X,Y) &= \text{Dual}(X) * \text{Dual}(Y) + \frac{1}{X + Y} \subseteq [-9{,}75, 20{,}0834] \\
fR(XT_4^*)(X,Y) &= X * \text{Dual}(Y) + \frac{1}{\text{Dual}(X) + Y} \subseteq [-4{,}8888, 10{,}1429]
\end{aligned}$$

Los signos de las derivadas prueban que la función es y-uniformemente monótona, isotónica para la primera incidencia y antitónica para la segunda. Como el intervalo X es impropio tenemos dos posibilidades para el cálculo de $fR(XDT^*)$

$$\begin{aligned}
fR(XDT_1^*)(X,Y) &= X * Y + \frac{1}{\text{Dual}(X) + \text{Dual}(Y)} \subseteq [20{,}0833, -9{,}75] \\
fR(XDT_2^*)(X,Y) &= \text{Dual}(X) * Y + \frac{1}{X + \text{Dual}(Y)} \subseteq [10{,}1428, -4{,}8889]
\end{aligned}$$

Además, la función racional fR es árbol-optimal por lo que se obtiene

$$fR(XDT_1^*) \subseteq fR(XT_4^*) \quad \text{y} \quad fR(XDT_2^*) \subseteq fR(XT_3^*)$$

g) (Teorema de coerción a la **-optimalidad parcial en el caso de árbol-optimalidad)

Sea X un vector intervalar y sea fR definida en el dominio $\text{Prop}(X)$ árbol-optimal en X y totalmente monótona para un subconjunto Z de componentes multiincidentes. Sea XDT^{**} el vector obtenido por ampliación de X, tomando cada incidencia de las componentes de Z como independiente, transformada en su dual si para dicha

incidencia f es monótona con sentido de monotonía contrario al global del correspondiente componente de Z; el resto de las componentes multiincidentes propias se transforman en su dual en cada incidencia excepto una. Entonces

$$fR(XT^{**}) \subseteq fR(XDT^{**}) \subseteq f^{**}(X)$$

h) Sea X un vector intervalar y sea fR definida en el dominio Prop(X) árbol-optimal en X y totalmente monótona para todas sus componentes multiincidentes. Sea XD el vector obtenido por ampliación de X, tomando cada incidencia de las componentes como independiente, transformada en su dual si para dicha incidencia f es monótona con sentido de monotonía contrario al global del correspondiente componente de X. Entonces

$$f^{*}(X) \subseteq fR(XD) \subseteq f^{**}(X)$$

En efecto, en estas condiciones todas las componentes multiincidentes son totalmente monótonas por lo que $XDT^{*} = XD = XDT^{**}$. De los dos teoremas anteriores se deduce el resultado.

2.5. Optimalidad en el caso de multiincidencia

Teorema de coerción a la optimalidad

Sea X un vector intervalar y sea fR definida y árbol-optima en el dominio Prop(X), totalmente monótona para todas sus componentes multiincidentes. Sea XD el vector obtenido por ampliación de X, tomando cada incidencia de las componentes como independiente, transformada en su dual si para dicha incidencia f es monótona con sentido de monotonía contrario al global del correspondiente componente de X. Entonces

$$f^{*}(X) = fR(XD) = f^{**}(X)$$

En efecto, de los resultados anteriores se deduce

$$f^{*}(XD) = f^{*}(X) \subseteq fR(XD) \subseteq f^{**}(X) = f^{**}(XD)$$

Debido a la árbol-optimalidad de la función y la independencia de los componentes de XD, $f^{*}(XD) = f^{**}(XD)$, por lo tanto

$$f^{*}(X) = fR(XD) = f^{**}(X)$$

Ejemplo 2.10

1. La función $f(x) = x+3(-x+5)$ es globalmente decreciente en todo $\mathbb{R}$, multiincidente en x, monótona creciente respecto la primera x y monótona decreciente

para la segunda x. Al pasar al cálculo intervalar para un X cualquiera debemos poner Dual(X) en la primera multiincidencia y X en la segunda, de modo que

$$fR(XD) = \text{Dual}(X) + [3,3] * (-X + [5,5])$$

Análogamente se obtiene:

2. Para $f(x) = x - x$ el cálculo optimal es $fR(XD) = X - \text{Dual}(X)$.
3. Para $f(x) = x/x$ el cálculo optimal es $fR(XD) = X/\text{Dual}(X)$ si $0 \notin X'$.
4. Para $f(x) = \dfrac{1}{1+x} + \dfrac{1}{1-x}$ y $X = [1/4, 1/2]$ el cálculo optimal es

$$fR(X\text{D}) = \frac{1}{1 + [1/2, 1/4]} + \frac{1}{1 - [1/4, 1/2]}$$

pues f es árbol-optimal y verifica en X las condiciones de monotonía

5. La función

$$f(x,y) = xy + \frac{1}{x+y}$$

para $(X,Y) = ([5,10],[2,1])$ es x-isotónica, x-antitónica, y-isotónica e y-antitónica. Por lo tanto

$$XD = (X, Y, \text{Dual}(X), \text{Dual}(Y)) \;\Rightarrow\; fR(XD) = X * Y + \frac{1}{\text{Dual}(X) + \text{Dual}(Y)}$$

$$fR(XD) = [5,10]*[2,1] + \frac{1}{[10,5] + [1,2]} = [10,10] + \frac{1}{[11,7]} = [10{+}1/7, 10{+}1/11]$$

$$\begin{aligned}
f^*(X,Y) &= [\text{mín}(x,[5,10]')\,\text{máx}(y,[1,2]')(xy + \frac{1}{x+y}),\\
&\quad\ \text{máx}(x,[5,10]')\,\text{mín}(y,[1,2]')(xy + \frac{1}{x+y})] =\\
&= [\text{mín}(x,[5,10]')(2x + \frac{1}{x+2}), \text{máx}(x,[5,10]')(x + \frac{1}{x+1})] =\\
&= [71/7, 111/11]\\
f^{**}(X,Y) &= [\text{máx}(y,[1,2]')\,\text{mín}(x,[5,10]')(xy + \frac{1}{x+y}),\\
&\quad\ \text{mín}(y,[1,2]')\,\text{máx}(x,[5,10]')(xy + \frac{1}{x+y})] =\\
&= [\text{máx}(y,[1,2]')(5y + \frac{1}{5+y}),\ \text{mín}(y,[1,2]')(10y + \frac{1}{10+y})] =\\
&= [71/7, 111/11]
\end{aligned}$$

Obsérvese que el árbol de f es optimal para $x, y \in I^*([1, +\infty))$

Ejemplo 2.11

Consideremos el circuito eléctrico de la Figura 2 donde la diferencia de potencial v en los extremos de la resistencia r viene dada por la ecuación $v = \dfrac{er}{\rho + r + s}$

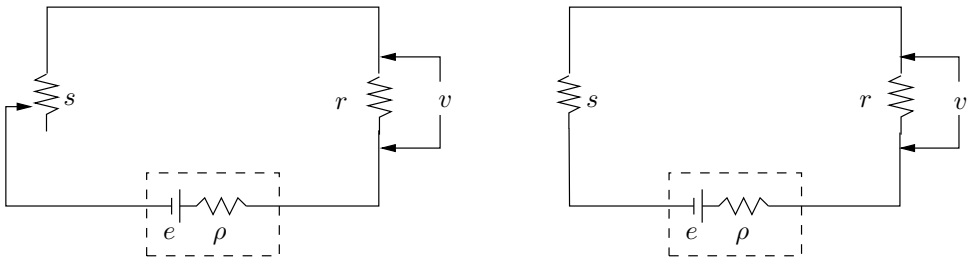


Figura 2: *Circuitos eléctricos*

La derivada de v respecto a la variable multiincidente r es

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r} = \frac{e(\rho + s)}{(\rho + r + s)^2}$$

que es positiva para cualquier dominio de variación positivo de las variables. La derivada respecto la primera incidencia de r también es positiva y la derivada respecto la segunda incidencia de r es negativa. El teorema de coerción a la optimalidad demuestra que para cualesquiera intervalos positivos de E, R, R_0 y S la extensión racional intervalar

$$V = \frac{E * R}{R_0 + \mathrm{Dual}(R) + S} \tag{1}$$

es optimal, es decir, $v^*(E, R, R_0, S) = V$.

Supondremos que la fuerza electromotriz e, la resistencia interna del generador ρ y la resistencia r están dentro de los intervalos $E' = [9, 11]'$, $R_0' = [1{,}5, 2{,}5]'$ y $R' = [1, 3]'$ respectivamente. El problema de regulación es hallar un intervalo S tal que si la resistencia s toma valores del intervalo S', el voltage v tome valores en el intervalo dado V'.

Si suponemos el voltage v se mantiene en el rango $V' = [2, 4]'$, de la ecuación 1, se obtiene que el intervalo S es

$$S = \frac{\mathrm{Dual}(E * R)}{V} - \mathrm{Dual}(R_0) - R = \left[\frac{33}{4} - 4{,}5, \frac{9}{2} - 3{,}5\right] \supseteq [3{,}7, 1]$$

considerando el redondeo interno a una cifra decimal. Aplicando el teorema *-semántico a la inclusión

$$v^*([9, 11], [1, 3], [1{,}5, 2{,}5], [3{,}7, 1]) = [9, 11] * [1, 3]/([1{,}5, 2{,}5] + [3, 1] + [3{,}7, 1]) \subseteq [2, 4]$$

con S un intervalo impropio, es decir, un intervalo de regulación, el resultado semántico es

$$\mathrm{U}(e,[9,11]')\ \mathrm{U}(r,[1,3]')\ \mathrm{U}(\rho,[1{,}5,2{,}5]')\ \mathrm{E}(s,[1,3{,}7]')\ \mathrm{E}(v,[2,4]')\ v = er/(\rho + r + s)$$

que significa que es necesario un reostato de resistencia variable entre 1 y 3.7 para controlar que el voltage de salida esté dentro del intervalo dado $[2,4]'$ (primer gráfico de la Figura 2).

Si suponemos que el voltage v puede variar dentro de un intervalo de mayor amplitud, por ejemplo, $V' = [2,7]'$, procediendo de manera análoga al caso anterior se obtiene $S \supseteq [0{,}2,1]$. Aplicando el teorema *-semántico a la inclusión

$$v^*([9,11],[1,3],[1{,}5,2{,}5],[0{,}2,1]) = [9,11] * [1,3]/([1{,}5,2{,}5] + [3,1] + [0{,}2,1]) \subseteq [2,7]$$

con S intervalo propio, es decir, un intervalo de fluctuación, el resultado semántico es

$$\mathrm{U}(e,[9,11]')\ \mathrm{U}(r,[1,3]')\ \mathrm{U}(\rho,[1{,}5,2{,}5]')\ \mathrm{U}(s,[0{,}2,1]')\ \mathrm{E}(v,[2,7]')\ v = er/(\rho + r + s)$$

que significa que para cualquier resistencia entre 0.2 y 1, el voltage de salida está dentro del rango dado $[2,7]'$ y el control no es necesario en este caso (segundo gráfico de la Figura 2).

Optimalidad significa que

$$f^*(X) = fR(X) = f^{**}(X)$$

Cuando no podemos hacer cálculos exactos, solo podemos calcular $\mathrm{Ex}fR(X)$ e $\mathrm{In}fR(X)$ controlando las truncaciones, en cuyo caso se tiene

$$\mathrm{Ex}fR(X) \supseteq f^*(X) = fR(X) = f^{**}(X) \subseteq \mathrm{In}fR(X)$$

y podemos aplicar los dos teoremas semánticos. Ahora fR lo entendemos como un programa de cálculo.

Dos funciones racionales modales fR y gR se dicen *equivalentes* cuando f y g coinciden como funciones, independientemente de la forma de su expresión racional.

Respecto de esta equivalencia tenemos el siguiente resultado

g) Cualquier función racional modal uniincidente $fR(X)$ que tenga una función equivalente gR optimal en X, es optimal.

En efecto, de la hipótesis $f^*(X) \subseteq fR(X) \subseteq f^{**}(X)$, $f^*(X) = g^*(X)$, $f^{**}(X) = g^{**}(X)$. Si $gR(X)$ es optimal $g^*(X) = gR(X) = g^{**}(X)$ y en consecuencia $f^*(X) = fR(X) = f^{**}(X)$ y $gR(X) = fR(X)$

Ejemplo 2.12 Las funciones racionales de $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}$ dadas por $f(a,b,c) = a(b+c)$ y $g(a,b,c) = ab + ac$ son equivalentes y gR es sintácticamente optimal.

1. Para $A = [-1,1]$, $B = [1,2]$ y $C = [3,1]$, g es uniformemente monótona para la variable a e isotónica para las dos incidencias de a. El cálculo $gR(A,B,C) = A*B+A*C = [-1,1]*[1,2]+[-1,1]*[3,1] = [-3,3]$ es optimal. El resultado anterior asegura la optimalidad del cálculo $fR(A,B,C) = A*(B+C) = [-1,1]*([1,2]+[3,1]) = [-1,1]*[4,3] = [-3,3]$.

2. Para $A = [-1,1]$, $B = [3,4]$ y $C = [-1,-3]$, g es uniformemente monótona para la variable a y para sus dos incidencias. El cálculo $gR(A,B,C) = A*B+A*C = [-1,1]*[3,4]+[-1,1]*[-1,-3] = [-5,5]$ no es ni optimal ni interpretable pero $gR(A,B,C) = A*B+\text{Dual}(A)*C = [-1,1]*[3,4]+\text{Dual}([-1,1])*[-1,-3] = [-1,1]$ es optimal. El resultado anterior asegura la optimalidad de $fR(A,B,C) = A*(B+C) = [-1,1]*([3,4]+[-1,-3]) = [-1,1]*[2,1] = [-1,1]$.

3. Para $A = [-1,1]$, $B = [1,2]$ y $C = [0,-4]$, g es solamente parcialmente monótona para la variable a por lo tanto el cálculo $fR(A,B,C) = A*(B+C) = [-1,1]*([1,2]+[0,-4]) = [-1,1]*[1,-2] = [0,0]$ puede ser diferente de f^*, de f^{**}, o de ambas.

2.6. Optimalidad condicionada

Introduciremos ahora nuevas condiciones para estudiar la optimalidad sintáctica de funciones racionales que dependeran de las modalidades de sus argumentos.

Teorema de coerción a la optimalidad en el caso de unimodalidad

Sea X un vector intervalar unimodal y sea fR definida en el dominio $\text{Prop}(X)$ totalmente monótona para todas sus componentes multiincidentes. Sea XD el vector obtenido por ampliación de X, tomando cada incidencia de las componentes como independiente, transformada en su dual si para dicha incidencia f es monótona con sentido de monotonía contrario al global del correspondiente componente de X. Entonces

$$f^*(X) = fR(XD) = f^{**}(X)$$

Se deduce del resultado e) de la sección anterior y de la igualdad $f^*(X) = f^{**}(X)$ dada la unimodalidad.

El caso más simple es el de funciones racionales con argumentos unimodales cuya computación racional es optimal cuando sus argumentos son uniincidentes.

Ejemplo 2.13

La función real continua f de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}$ dada por $f(x_1, x_2) = x_1(x_2 + x_1)$ para $X_1 = [-2, -1]$, $X_2 = [4, 8]$ el vector $X = (X_1, X_2)$ es unimodal y f es x_1-totalmente monótona dado que su derivada parcial respecto a x_1 es positiva en X, la derivada parcial respecto a la primera incidencia de x_1 es positiva y la derivada parcial respecto a la segunda incidencia de x_1 es negativa. Por ello

$$f^*(X) = f^{**}(X) = X_1 * (X_2 + \text{Dual}(X_1)) = [-2, -1] * ([4, 8] + [-1, -2]) = [-12, -3]$$

Mediante $f^*(g_1(X_1), \cdots, g_n(X_n))$ designaremos $f^*(X_1, \cdots, X_n)$, donde f es la función $f_0 \circ (g_1, \cdots, g_n)$, y f_0 el operador principal del árbol sintáctico de f que en lo que sigue se supone siempre que es una función de dos variables parcialmente monótona (las excepciones a este caso general se indicaran cuando sea necesario).

a) Teorema de la *-optimalidad modalmente condicionada para operadores de dos variables parcialmente monótonos

Si X e Y son vectores intervalares propios, V impropio, $f(g(x), h(y, v))$ es una función continua y h-parcialmente monótona, y X, Y no tienen componentes comunes, entonces

$$f^*(g(X), h(Y, V)) = f_0^*(g^*(X), h^*(Y, V))$$

En efecto, si definimos

$$\begin{aligned} G' &= \{g(x) \mid x \in X'\} \\ G'_+ &= \{g \in G' \mid f(g, h) \text{ es } h\text{-isotónico}\} \\ G'_- &= \{g \in G' \mid f(g, h) \text{ es } h\text{-antitónico}\} \end{aligned}$$

tenemos

$$\begin{aligned} & f^*(g(X), h(Y, V)) = \\ & = \vee(x, X') \vee (y, Y') \wedge (v, V') \, [f_0(g(x), h(y, v)), f_0(g(x), h(y, v))] \\ & = \vee(g, G') \vee (y, Y') \wedge (v, V') \, [f_0(g, h(y, v)), f_0(g, h(y, v))] \\ & = (\vee(g, G'_+) \vee (y, Y') \wedge (v, V') \, [f_0(g, h(y, v)), f_0(g, h(y, v))]) \vee \\ & \quad (\vee(g, G'_-) \vee (y, Y') \wedge (v, V') \, [f_0(g, h(y, v)), f_0(g, h(y, v))]) \\ & \quad //\text{de la asociatividad de los operadores reticulares} \\ & = (\vee(g, G'_+)[f_0(g, \text{mín}(y, Y') \, \text{máx}(v, V') h(y, v)), f_0(g, \text{máx}(y, Y') \, \text{mín}(v, V') h(y, v))]) \vee \\ & \quad (\vee(g, G'_-)[f_0(g, \text{máx}(y, Y') \, \text{mín}(v, V') h(y, v)), f_0(g, \text{mín}(y, Y') \, \text{máx}(v, V') h(y, v))]) \\ & \quad //f_0(g, .) \text{ es } h\text{-uniformemente monótona para } g \in G'_+ \text{ y } g \in G'_- \\ & = \vee(g, G') f_0^*(g, h^*(Y, V)) \\ & = f_0^*(g^*(X), h^*(Y, V)) = \vee(g, g^*) \Omega(h, h^*)[f_0(g, h), f_0(g, h)] = \vee(g, G') f_0^*(g, h^*) \end{aligned}$$

Si $g^*(X)$ y $h^*(Y, V)$ tienen cálculos *-optimales, denotados por $gR^*(X)$ y $hR^*(Y, V)$, entonces $f_0^*(g(X), h(Y, V)) = f_0^*(gR^*(X), hR^*(Y, V))$, denotado por $fR^*(X, Y, V)$ o $fR^*(g(X), h(Y, V))$.

Veamos unos ejemplos que muestran la importancia de las hipótesis de este resultado.

Ejemplo 2.14 La función continua de $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}$ definida por $f(x,y,v) = x(y+v)$ puede expresarse como $f_0(g,h) = gh$ con $g(x) = x$ y $h(y,v) = y+v$. Para $X = [-1,1]$, $Y = [1,2]$, $V = [0,-4]$ f_0 es h-parcialmente monótona. Entonces es cierto que

$$f^*(X,Y,V) = f_0^*(g^*(X), h^*(Y,V)) = f_0^*([-1,1],[1,-2]) = [0,0]$$

Ejemplo 2.15 La condición de unimodalidad propia para X, es necesaria ya que, con la misma estructura funcional del ejemplo anterior, para $X = [1,-1]$, $Y = [0,4]$, $V = [-2,-3]$, se obtiene $f^*(g(X), h(Y,V)) = [0{,}5, -0{,}5]$ diferente de

$$f_0^*(g^*(X), h^*(Y,V)) = f_0^*([1,-1],[-2,1]) = [0,0]$$

Ejemplo 2.16 La modalidad de $h^*(Y,V)$ no tiene influencia en una hipotética *-optimalidad de f; con la misma estructura funcional y para $X = [-3,1]$, $Y = [-1,2]$, $V = [1,-1]$, tenemos $h^*(Y,V) = h^*([-1,2],[1,-1]) = [0,1]$ que es un intervalo propio, pero f no es optimal ya que $f^*(g(X), h(Y,V)) = [-3,1]$ diferente de $f^{**}(g(X), h(Y,V)) = [-3, 2{,}25]$. Sin embargo como f_0 es h-parcialmente monótono y X es propio, el resultado anterior garantiza que

$$f_0^*(g^*(X), h^*(Y,V)) = f_0^*([-3,1],[0,1]) = [-3,1] = f^*(g(X), h(Y,V))$$

Ejemplo 2.17 La g-monotonía de f_0 no es necesaria para la *-optimalidad; para la función continua de $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}$ definida por $f(x,y,v) = x^2(y+v)$, y para $X = [-3,1]$, $Y = [-1,2]$, $V = [1,-1]$ puede obtenerse

$$f^*(X,Y,V) = f^*([-3,1],[-1,2],[1,-1]) = [0,9]$$

Expresada la función en la forma $f_0(g,h) = g^2h$ con $g(x) = x$ y $h(y,v) = y+v$ (f no es g-parcialmente monótona) tenemos $f_0^*(g^*(X), h^*(Y,V)) = f_0^*([-3,1],[0,1]) = [0,9]$. Expresada en la forma $f_0(g,h) = gh$ con $g(x) = x^2$ y $h(y,v) = y+v$ (f es g-partialmente monótona) tenemos $f_0^*(g^*(X), h^*(Y,V)) = f_0^*([0,9],[0,1]) = [0,9]$.

Ejemplo 2.18 No obstante, la h-monotonía de f_0 es necesaria para la *-optimalidad; para la función continua de $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}$ definida por $f(x,y,v) = x^2(y+v)^2$, y para $X = [-1,1]$, $Y = [1,2]$, $V = [0,-4]$ puede obtenerse

$$f^*(X,Y,V) = f^*([-1,1],[1,2],[0,-4]) = [0,4]$$

Expresada en la forma $f_0(g,h) = g^2h^2$ con $g(x) = x$ y $h(y,v) = y+v$ (f no es g-parcialmente monótona ni h-parcialmente monótona) tenemos $f_0^*(g^*(X), h^*(Y,V)) = f_0^*([-1,1],[1,-2]) = [0,0]$ diferente de $f^*(X,Y,V)$.

b) Teorema de la **-optimalidad modalmente condicionada para operadores de dos variables parcialmente monótonos

Si U y V son vectores impropios, Y propio, $f(g(u), h(y, v))$ es una función continua y h-parcialmente monótona y U y V no tienen componentes comunes, entonces

$$f^{**}(g(U), h(Y, V)) = f_0^{**}(g^{**}(U), h^{**}(Y, V))$$

En efecto, es el dual del resultado anterior.

Si $g^{**}(U)$ y $h^{**}(Y, V)$ tienen cálculos **-optimales, denotados por $gR^{**}(U)$ y $hR^{**}(Y, V)$, entonces $f_0^{**}(g(U), h(Y, V)) = f_0^{**}(gR^{**}(U), hR^{**}(Y, V))$, denotado por $fR^{**}(U, Y, V)$ o $fR^{**}(g(U), h(Y, V))$.

Ejemplo 2.19 Como vimos en el ejemplo 2.10 la función continua de $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}$ definida por $f(x, y, z) = x(y + z)$, y expresada como $f_0(g, h) = gh$ con $g(x) = x$ y $h(y, v) = y + v$ para $X = [1, -1]$, $Y = [0, 4]$, $V = [-2, -3]$ no es *-optimal; sin embargo si es **-optimal, ya que $f^{**}(g(X), h(Y, V)) = [0, 0]$ y $f_0^{**}(g^{**}(X), h^{**}(Y, V)) = f_0^{*}([1, -1], [-2, 1]) = [0, 0]$.

Diremos que la función $f(g_1(x_1), \cdots, g_n(x_n))$ cumple la condición de *modalidad partida* cuando f es JM-conmutativa y $X_1, \cdots, X_n$ son vectores unimodales.

c) Teorema de la modalidad partida

Dada una función continua $f(g_1(x_1), \cdots, g_n(x_n))$ que verifica la condición de modalidad partida, entonces

$$\begin{aligned} f^{*}(g_1(X_1), \cdots, g_n(X_n)) = f_0^{*}(g_1^{*}(X_1), \cdots, g_n^{*}(X_n)) = \\ = f_0^{**}(g_1^{**}(X_1), \cdots, g_n^{**}(X_n)) = f^{**}(g_1(X_1), \cdots, g_n(X_n)) \end{aligned}$$

Si llamamos $y_1 = g_1(x_1), \cdots, y_n = g_n(x_n)$, $Y_1 = g_1(X_1), \cdots, Y_n = g_n(X_n)$ y teniendo en cuenta que X_j e Y_j tienen la misma modalidad, entonces

$$(f(g_1, ..., g_n))^{*}(X_p, X_i) \;\; = \;\; \vee(y_p, Y_p') \wedge (y_i, Y_i')[f(y_p, y_i), f(y_p, y_i)] = f^{*}(Y_p, Y_i)$$

y análogamente

$$(f(g_1, ..., g_n))^{**}(X_p, X_i) = f^{**}(Y_p, Y_i)$$

De la JM-conmutatividad de f se deduce la igualdad requerida.

En particular, la función definida por $f(g(x), h(v))$ cumple la condición de modalidad partida cuando f_0 es (g, h)-parcialmente monótona, X es un vector unimodal propio y V es un vector unimodal impropio, lo que se deduce inmediatamente de los Lemas de *-optimalidad y **-optimalidad condicionadas para operadores de dos variables parcialmente monótonos.

Ejemplo 2.20 Sea la función definida por $f(x,y,z,t) = xyzt$. Si $g(x,y) = xy$ y $h(z,t) = zt$, para $X = [-1,1]$, $Y = [-4,2]$, $Z = [1,-2]$ y $T = [4,-6]$, se cumple la condición de modalidad partida. Por el Teorema anterior tenemos

$$f^*(g([-1,1],[-4,2]),h([1,-2],[4,-6])) = f_0^*([-2,4],[12,-8]) = [0,0] = \\ = f^{**}(g([-1,1],[-4,2]),h([1,-2],[4,-6]))$$

Ejemplo 2.21 Si $A_1,\cdots,A_n \in I^*(\mathbb{R})$, entonces el producto n-dimensional $A_1 * \cdots * A_n$ es optimal, ya que si suponemos $A = (A_1,\cdots,A_p,A_{p+1},\cdots,A_n)$ con $A_1,\cdots,A_p$ propio y $A_{p+1},\cdots,A_n$ impropio, entonces

$$f^*(A) = f_0^*(g^*(A_1,\cdots,A_p),h^*(A_{p+1},\cdots,A_n)) = (A_1 * \cdots * A_p) * (A_{p+1} * \cdots * A_n)$$

ya que se verifica la condición de modalidad partida y g y h son JM-conmutativas por ser unimodales.

d) Primer lema de optimalidad lateral

Sea $f(g(u),h(y,v))$ una función continua que sea h-uniformemente monótona y con h una función JM-conmutativa para (Y,V). Si U es un vector impropio, e Y y V son las componentes propias e impropias de los argumentos de h, y U y V no tienen componentes en común, entonces

$$f^*(g(U),h(Y,V)) = f_0^*(g^*(U),h^*(Y,V))$$

En efecto, desarrollando el segundo miembro de la igualdad obtenemos:

$$f_0^*(g^*(U),h^*(Y,V)) = f_0^{**}(g^*(U),h^*(Y,V)) = \wedge_{g\in G'} f^*(g,h^*(Y,V))$$

Observemos que la primera igualdad es cierta debido a que f es una función h-uniformemente monótona (y por lo tanto JM-conmutativa), y la segunda debido a la modalidad del vector U.

Desarrollemos a continuación el primer miembro de la igualdad a demostrar:

$$f^*(g(U),h(Y,V)) = \vee_{y\in Y'} \wedge_{u\in U'} \wedge_{v\in V'} [f(g(u),h(y,v)),f(g(u),h(y,v))]$$

Dado que $f(g,h)$ es h-uniformemente monótona, podemos suponer que $f(g,h)$ es h-uniformemente isotónica; de la expresión anterior se obtiene

$$\vee_{y\in Y'} \wedge_{g\in G'} \left[f(g, \max_{v\in V'} h(y,v)), f(g, \min_{v\in V'} h(y,v)) \right]$$

Las funciones $f(g(u),h_1(y))$ y $f(g(u),h_2(y))$ con

$$h_1(y) = \max_{v\in V'} h(y,v)$$
$$h_2(y) = \min_{v\in V'} h(y,v)$$

son de modalidad partida en (G, Y), y por lo tanto son JM-conmutativas. En consecuencia se obtiene

$$= \wedge_{g\in G'} \vee_{y\in Y'} \left[f(g, \max_{v\in V'} h(y,v)), f(g, \min_{v\in V'} h(y,v)) \right] =$$
$$= \wedge_{g\in G'} \left[f(g, \min_{y\in Y'} \max_{v\in V'} h(y,v)), f(g, \max_{y\in Y'} \min_{v\in V'} h(y,v)) \right] = \wedge_{g\in G'} f^*(g, h^*(Y,V))$$

Obtenemos, como se puede comprobar, el mismo resultado que al transformar el segundo miembro $f_0^*(g^*(U), h^*(Y,V))$ de la igualdad inicial.

Si $f(g,h)$ es h-uniformemente antitónica, se obtiene el mismo resultado, puesto que

$$f^*(g(U), h(Y,V)) = \vee_{y\in Y'} \wedge_{u\in U'} \wedge_{v\in V'} [f(g(u), h(y,v)), f(g(u), h(y,v))] =$$
$$= \vee_{y\in Y'} \wedge_{g\in G'} \left[f(g, \min_{v\in V'} h(y,v)), f(g, \max_{v\in V'} h(y,v)) \right] =$$
$$= \wedge_{g\in G'} \vee_{y\in Y'} \left[f(g, \min_{v\in V'} h(y,v)), f(g, \max_{v\in V'} h(y,v)) \right] =$$
$$= \wedge_{g\in G'} \left[f(g, \max_{y\in Y'} \min_{v\in V'} h(y,v)), f(g, \min_{y\in Y'} \max_{v\in V'} h(y,v)) \right] = \wedge_{g\in G'} f^*(g, h^*(Y,V))$$

por ser h una función JM-conmutativa.

e) Segundo lema de optimalidad lateral

Sea $f(g(x), h(y,v))$ una función continua que sea h-uniformemente monótona y con h una función JM-conmutativa para (Y,V). Si X es un vector propio, e Y y V son las componentes propias e impropias de los argumentos de h, y X e Y no tienen componentes en común, entonces

$$f^{**}(g(X), h(Y,V)) = f_0^{**}(g^{**}(X), h^{**}(Y,V))$$

f) Teorema de la optimalidad lateral

Dada $f(g(x), h(y,v))$ una función continua que sea h-uniformemente monótona y con h JM-conmutativa para (Y,V), si X es un vector unimodal, e Y y V son las componentes propias e impropias de los argumentos de h y X, Y y V no tienen componentes en común, entonces

$$f^*(g(X), h(Y,V)) = f_0^*(g^*(X), h^*(Y,V)) =$$
$$= f_0^{**}(g^{**}(X), h^{**}(Y,V)) = f^{**}(g(X), h(Y,V))$$

En efecto, las igualdades primera y tercera se deducen del resultado de los lemas correspondientes a la *-optimalidad y **-optimalidad modalmente condicionada para operadores de dos variables parcialmente monótonos y de los lemas correspondientes al primer y segundo lemas de optimalidad lateral. La segunda igualdad es

inmediata teniendo en cuenta que X es unimodal, por lo que $g^*(X) = g^{**}(X)$, que h es JM-conmutativa, por lo que $h^*(Y,V) = h^{**}(Y,V)$ y que f es h-uniformemente monótona.

Observemos que si $g^*(X)$ y $h^*(Y,V)$ tienen cálculos racionales optimales $gR(X)$ y $hR(Y,V)$, entonces $fR(g(X), h(Y,V)) = f_0^*(gR(X), hR(X,V))$.

También g y h pueden ser vectores siempre y cuando todos los argumentos de $g_1(X_1), g_2(X_2), \cdots$ sean de la misma modalidad, y f sea uniformemente monótona para cada h_i, y la independencia de componentes.

Ejemplo 2.22 Sea la función definida por $f(x,y,z) = x(y+z)$. Para $X = [1,0]$, $Y = [-4,0]$, $Z = [2,1]$, cumple la condición de optimalidad lateral con $g(x) = x$ y $h(y,z) = y + z$ ya que f es uniformemente monótona respecto de h con h JM-conmutativa, entonces

$$f^*(g([1,0]), h([-4,0],[2,1])) = f_0^*([1,0],[-2,1]) = [0,0] = \\ = f^{**}(g([1,0]), h([-4,0],[2,1]))$$

Una función racional modal f es *condicionalmente optimal* (c-optimal) si f verifica una de las siguientes condiciones

a) modalidad partida (en particular unimodal)

b) optimalidad lateral

Una función racional $fR(X)$ es *condicionalmente árbol optimal* (c-árbol-optimal) si cualquiera de sus sub-árboles no uniformemente monótonos es optimal ó c-optimal.

g) Teorema de la optimalidad condicional

Si $fR(X)$ es uniincidente y c-árbol-optimal, entonces $fR(X)$ es optimal, es decir

$$f^*(X) = fR(X) = f^{**}(X)$$

Se deduce de la definición y resultados anteriores

Ejemplo 2.23 Consideremos la función continua definida por $f(u,y,v) = u(y+v)$, expresada como $f_0(g,h) = gh$ con $g(u) = u$ y $h(y,v) = y + v$; para $U = [1,0]$, $Y = [-4,0]$, $V = [2,1]$, esta función no es árbol-optimal. Sin embargo si es c-árbol-optimal y el resultado anterior permite obtener

$$f^*(U,Y,V) = f^{**}(U,Y,V) = fR(U,Y,V) = fR([1,0],[-4,0],[2,1]) = [0,0]$$

h) Teorema de coerción a la optimalidad condicional

Sea X un vector intervalar y sea $fR(XD)$ definida y c-árbol-optimal en el dominio $\mathrm{Prop}(X)$, totalmente monótona para todas sus componentes multiincidentes, siendo XD el vector obtenido por ampliación de X, tomando cada incidencia de las componentes como independiente, transformada en su dual si para dicha incidencia f es monótona con sentido de monotonía contrario al global del correspondiente componente de X. Entonces

$$f^*(X) = fR(XD) = f^{**}(X)$$

En efecto, se basa en el teorema de coerción a la optimalidad aplicado a la optimalidad condicionada.

Ejemplo 2.24 La función $f(u, y, z) = u(y + z) - y$ para $U = [1, 0]$, $Y = [2, 3]$ y $Z = [-3, -1]$ no es árbol-optimal. Sin embargo la función racional modal asociada a f es c-árbol-optimal por lo que, según el resultado anterior

$$\begin{aligned} f^*(X) &= fR(XD) = U * (\mathrm{Dual}(Y) + Z) - Y = \\ &= [1, 0] * ([3, 2] + [-3, -1]) - [2, 3] = [-3, -2] \end{aligned}$$

Observemos que la c-árbol-optimalidad en este ejemplo no se rompe por la transformación de X a XD ya que la rama condicionada por la unimodalidad contiene únicamente la variable U

La función equivalente $g(u, y, z) = uy + uz - y$ no tiene un cálculo optimal puesto que no es uniformemente monótona de forma global para la variable multiincidente u. La diferencia fundamental es que u no es multiincidente en f pero si lo es en g.

Una propiedad se llama *propiedad intervalar* si siendo cierta sobre un dominio intervalar $(X'_1, \cdots, X'_n)$, también lo es sobre cualquier subdominio, $(Y'_1, \cdots, Y'_n) \subseteq (X'_1, \cdots, X'_n)$.

Las clases de funciones racionales árbol-optimales y c-árbol-optimales no agotan todos los casos de optimalidad ya que la árbol-optimalidad y c-árbol-optimalidad son propiedades intervalares, mientras que la JM-conmutatividad y la optimalidad no lo son como muestra el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2.25 Sea la función racional $f(x, y) := |x + y|$. Para los valores $(X, Y) = ([1, -1], [0, 2])$ es optimal ya que $f^*(X, Y) = f^{**}(X, Y) = fR(X, Y) = [1, 1]$; sin embargo reduciendo el dominio intervalar $([-1, 1]', [0, 2]')$ a un subdominio $([-1, 1]', [0, 1]')$, para $(X, Y) = ([1, -1], [0, 1])$, entonces $f^*(X, Y) = [1, 0]$ y $f^{**}(X, Y) = [1, 0{,}5]$.

Si el dominio se aumenta a $([-1, 1]', [-1, 2]')$, la JM-conmutatividad también se pierde, ya que para $([1, -1], [-1, 2])$ $f^*(X, Y) = [1, 1]$ y $f^{**}(X, Y) = [0, 1{,}5]$.

La relación $f^*(X) \subseteq fR(X) \subseteq f^{**}(X)$ para funciones racionales uniincidentes hace de la optimalidad una propiedad subsidiaria de la JM-conmutatividad.

3. Caso n-dimensional

Es posible extender los resultados sobre interpretabilidad de una función racional al caso de funciones multicomponentes de acuerdo con las dos propiedades siguientes:

"Sea $X \in I^*(\mathbb{R}^m)$ y f una función de $\mathbb{R}^m$ en $\mathbb{R}^n$ definida por $f(x) := (f_1(x), \cdots, f_n(x))$ continua en X'. Sea $(f_1R(A_1), \cdots, f_nR(A_n)) \subseteq B$ un sistema de cálculos con redondeo externo interpretables, de $f_1^*(X_1)$, $\cdots$, $f_n^*(X_n)$, donde $(A_1, \cdots, A_n)$ se definen a partir de X de modo que tengan las mismas componentes propias de X y con cada componente impropia de X transformada en su dual en todo X_j excepto en uno. En este caso

$$\mathrm{U}(x_p, X_p')\ \mathrm{Q}^*(z, B)\ \mathrm{E}(x_i, X_i')\ z = f(x_p, x_i)$$

con $X = (X_p, X_i)$".

Con $\mathrm{Q}^*(z, B)$ representamos la sucesión de prefijos $\mathrm{Q}(z_i, B_i)$, $(i = 1, \cdots, n)$, poniendo delante los correspondientes a los cuantificadores universales.

Los argumentos $(A_1, \cdots, A_n)$ pueden modificarse de acuerdo con anteriores teoremas de coerción.

Este resultado se obtiene aplicando el principio de sustitución de las fórmulas del cálculo de predicados, utilizado anteriormente, dada a la compatibilidad de las semánticas de los resultados interpretables $f_1R(A_1), \cdots, f_nR(A_n)$, dada la construcción de $A_1, \cdots, A_n$. Dualmente para la **-semántica

"Sea $X \in I^*(\mathbb{R}^m)$ y f una función de $\mathbb{R}^m$ en $\mathbb{R}^n$ definida por $f(x) := (f_1(x), \cdots, f_n(x))$ continua en X'. Sea $(f_1R(A_1), \cdots, f_nR(A_n)) \supseteq B$ un sistema de cálculos con redondeo interno interpretables, de $f_1^{**}(X_1)$, $\cdots$, $f_n^{**}(X_n)$, donde $(A_1, \cdots, A_n)$ se definen a partir de X de modo que tengan las mismas componentes impropias de X y con cada componente propia de X transformada en su dual en todo X_j excepto en uno. En este caso

$$\mathrm{U}(x_i, X_i')\ \mathrm{Q}^*(z, \mathrm{Dual}(B))\ \mathrm{E}(x_p, X_p')\ z = f(x_p, x_i)''$$

Ejemplo 3.1

Sea la función f de $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}^2$ definida por

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2 + x_3,\ x_1x_2 - x_1)$$

con $X = ([6, 1], [6, 2], [-3, 2])$. Para la extensión *-semántica tenemos

$$\begin{array}{lll} f_1(x_1, x_2, x_3) = x_1 + x_2 + x_3 & , & f_2(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 - x_1 \\ X_1 = ([1, 6], [6, 2], [-3, 2]) & , & X_2 = ([6, 1], [2, 6]) \end{array}$$

con lo que

$$\begin{array}{l} fR(A_1) = [1, 6] + [6, 2] + [-3, 2] = [4, 10] \\ fR(A_2) = [6, 1] * [2, 6] - [1, 6] = [6, 5] \\ B = ([4, 10], [6, 5]) \end{array}$$

y la semántica se obtiene combinando las semánticas de los cálculos racionales interpretables de $fR(A_1)$

$$\mathrm{U}(x_1,[1,6]')\ \mathrm{U}(x_3,[-3,2]')\ \mathrm{E}(z_1,[4,10]')\ \mathrm{E}(x_2,[2,6]')\ z_1 = x_1 + x_2 + x_3$$

y de $fR(A_2)$

$$\mathrm{U}(x_2,[2,6]')\ \mathrm{U}(z_2,[5,6]')\ \mathrm{E}(x_1,[1,6]')\ z_2 = x_1x_2 - x_1$$

dada la compatibilidad de ambas, como consecuencia de las definiciones de A_1 y A_2, resultando

$$\mathrm{U}(x_3,[-3,2]')\ \mathrm{U}(z_2,[5,6]')\ \mathrm{E}(z_1,[4,10]')\ \mathrm{E}(x_1,[1,6]')\ \mathrm{E}(x_2,[2,6]')$$
$$(z_1 = x_1 + x_2 + x_3,\ z_2 = x_1x_2 - x_1)$$

Suponiendo que las propiedades previas se cumplen, las funciones deberán ser optimalizadas individualmente (dando lugar a los cálculos $f_1R(X), \cdots, f_nR(X)$) para obtener un resultado optimal componente a componente.

Ejemplo 3.2 Sea la función continua f de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^2$ definida por $f(x_1,x_2) = (x_1 + x_2, x_1x_2 - x_2)$. Para $X = (X_1,X_2) = ([1,3],[2,-1])$ tenemos componentes impropias multiincidentes. Para obtener un cálculo interpretable, de acuerdo con el teorema semántico n-dimensional, debemos transformar algunas incidencias impropias en sus duales. Por ejemplo para

$$(X_1 + X_2, X_1 * \mathrm{Dual}(X_2) - \mathrm{Dual}(X_2)) = ([3,2],[-5,7])$$

el resultado lógico de los teoremas semánticos para cada componente da la semántica total

$$\mathrm{U}(x_1,[1,3]')\ \mathrm{U}(z_1,[2,3]')\ \mathrm{E}(z_2,[-5,7]')\ \mathrm{E}(x_2,[-1,2]')\ (z_1 = x_1 + x_2, z_2 = x_1x_2 - x_2)$$

Para construir un cálculo efectivo optimal para cada componente, el sistema $(fR_i(X))$ debiera ser

$$(X_1 + X_2, X_1 * X_2 - \mathrm{Dual}(X_2)) = ([3,2],[-2,4])$$

ya que la segunda incidencia de X_2 en la segunda ecuación tiene un sentido de monotonía contrario al del total de X_2.

4. Reflexiones generales

La característica más sobresaliente del sistema de intervalos modales $I^*(\mathbb{R})$ es que, al igual que los números reales se asocian en pares que tienen el mismo valor absoluto pero signos opuestos, en el sistema $I^*(\mathbb{R})$, los intervalos modales también se asocian en parejas (por ejemplo [1,2] y [2,1]) correspondiendo al mismo intervalo cerrado en la recta real $\mathbb{R}$, pero teniendo modalidades opuestas, "propia o existencial" (como [1,2]) o bien "impropia o universal" (como [2,1]).

El conjunto de los intervalos modales, $I^*(\mathbb{R})$, es una gran ampliación sobre $I(\mathbb{R})$: si $0 \notin A'$, las ecuaciones $A + X = B$ y $A * X = B$ tienen solución única, las funciones racionales son también inclusivas, y el redondeo intervalar puede ser externo o interno usando sólo una aritmética externa y las propiedades del operador dual.

Asimismo, el sistema $I^*(\mathbb{R})$ proporciona una cantidad de propiedades que se deducen inmediatamente y consistentemente con un método informacional de datos numéricos que aparecen en distintos procedimientos de cálculo digital o medición. No se construye usando un modelo impuesto adicional, como modelos de probabilidad, sino que aparece mediante la lógica inherente a las posibilidades prácticas del uso numérico. En realidad, $I^*(\mathbb{R})$ no es un modelo para información numérica, sino la lógica indispensable y marco operacional para cualquier modelo que use información numérica.

Desde el punto de vista de desarrollo técnico del sistema $I^*(\mathbb{R})$, los pasos sucesivos son:

1. Asociación de cada intervalo modal $A \in I^*(\mathbb{R})$ con el conjunto Pred(A) de predicados $P(.)$ aceptados por A en la recta real, es decir, tal que la sentencia cuantificador modal Q(x,A)$P(x)$ sea cierta. Este paso conduce al carácter conjuntista teórico de la inclusión de los intervalos modales y al importante teorema sobre la mutua transferencia de información entre el resultado ideal exacto de un cálculo y los resultados intervalares de redondeo interior y exterior.

2. La interpretación lógica de las "extensiones intervalares pobres" de funciones reales continuas, permite definir las "extensiones intervalares modales" de dichas funciones con su tan importante teorema *-semántico que da la aplicación de los intervalos modales a los interesantes lazos de intuición de las nociones de "regularidad" y "fluctuación libre", e indicando la dependencia entre la semántica y el sentido del redondeo intervalar.

3. La teoría sobre las funciones racionales intervalares deja clara la compleja relación existente entre la estructura sintáctica de una función racional intervalar y su semántica, definiendo las funciones *-semánticas correspondientes . Esta es la llave que abre la cuestión crítica sobre la dependencia entre el proceso computacional y el significado de los cálculos obtenidos.

5. Resumen de algunos conceptos y resultados

Sea f definida de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}$ continua

Def 1) Si $f^*(X) = f^{**}(X)$ se dice que f es JM-*commutable* en X.

Def 2) Si $fR^*(X) = fR^{**}(X)$ se dice que f es *función racional modal* en X y el valor común se representa por $fR(X)$.

Def 3) Si $f^*(X) = fR(X) = f^{**}(X)$ se dice que fR es *optimal* en X.

Def 4) Si en el árbol sintáctico de f cualquiera de sus operadores que no son uniformemente monótomos está seguido hacia abajo por operadores en una variable y hacia arriba por operadores uniformemente monótonos, se dice que fR es *árbol-optimal*.

Def 5) Una función racional modal $fR(X)$ es *condicionalmente optimal* (c-optimal) si verifica una de las siguientes condiciones

a) modalidad partida (en particular unimodal)

b) optimalidad lateral

Def 6) Una función racional $fR(X)$ es *condicionalmente árbol optimal* (c-árbol-optimal) si cualquiera de sus sub-árboles no uniformemente monótonos es optimal ó c-optimal.

Propiedades:

P1) Para toda función f continua existen f^* y f^{**} son interpretables y

$$\mathrm{U}(X, \mathbb{R}^n)\ (f^*(X) \subseteq f^{**}(X)).$$

P2) Si f tiene árbol sintáctico, existen fR^* y fR^{**} que verifican

$$\mathrm{U}(X, \mathbb{R}^n)\ (fR^*(X) \subseteq fR^{**}(X)).$$

P3) Si para $X = (X_p, X_i)$, con X_p componentes propias y X_i componentes impropias, son no vacíos los conjuntos de puntos de silla.

$$\mathrm{SDP}(f, X'_p, X'_i) =$$
$$= \{(x_{1b}, x_{2t}) \mid \mathrm{U}(x_1, X'_p)\ \mathrm{U}(x_2, X'_i)(f(x_{1b}, x_2) \leq f(x_{1b}, x_{2t}) \leq f(x_1, x_{2t}))\}$$

$$\mathrm{SDP}(f, X'_i, X'_p) =$$
$$= \{(x_{1b}, x_{2t}) \mid \mathrm{U}(x_1, X'_p)\ \mathrm{U}(x_2, X'_i)(f(x_{1b}, x_2) \geq f(x_{1b}, x_{2t}) \geq f(x_1, x_{2t}))\}$$

entonces f es JM-commutable en X y

$$f^*(X) = f^{**}(X) = [\mathrm{SDV}(f, X'_p, X'_i),\ \mathrm{SDV}(f, X'_i, X'_p)]$$

P4) Si todos los operadores del árbol sintáctico son JM-commutables en X, entonces f es función racional en X, es decir, existe

$$fR(X) = fR^*(X) = fR^{**}(X)$$

P5) (Teorema de la *-interpretabilidad) Cuando las componentes impropias de X son uniincidentes en el árbol sintáctico de f, entonces

$$f^*(X) \subseteq fR^*(X)$$

P6) (Teorema de coerción a la *-interpretabilidad) Si f es función racional en X, con componentes impropios multiincidentes en el árbol sintáctico y XT^* es el resultado de convertir todas las multiincidencias impropias en sus duales, excepto una de ellas, entonces

$$f^*(X) \subseteq fR(XT^*)$$

P7) (Teorema de la **-interpretabilidad) Si las componentes propias de X son uniincidentes en el árbol sintáctico de f, entonces

$$fR^{**}(X) \subseteq f^{**}(X)$$

P8) (Teorema de coerción a la **-interpretabilidad) Si f es función racional modal en X, con componentes propios multiincidentes en el árbol sintáctico y XT^{**} es el resultado de convertir todas las multiincidencias propias en sus duales, excepto una de ellas, entonces

$$fR(XT^{**}) \subseteq f^{**}(X)$$

P9) Si f es función racional modal en X y todas las componentes de X son uniincidentes en el árbol sintáctico, entonces

$$f^*(X) \subseteq fR(X) \subseteq f^{**}(X)$$

P10) (Teorema de optimalidad) Si f es función racional modal en X, todas las componentes de X son uniincidentes en el árbol sintáctico y f es JM-commutativo en X, entonces

$$f^*(X) = fR(X) = f^{**}(X)$$

P11) (Teorema de la optimalidad para las funciones racionales árbol-optimales) Si fR es árbol-optimal entonces es optimal en cualquier X con componentes uniincidentes en el que exista $fR(X)$.

P12) (Teorema de coerción a la *-optimalidad parcial) Sea $fR(X)$ totalmente monótona para un subconjunto de las componentes multiincidentes de X. Sea XDT^* obtenido de X tomando cada incidencia de las componentes multiincidentes para las que existe monotonía total transformada en su dual si para dicha incidencia f es monótona con sentido de monotonía contrario al global del correspondiente componente de X, y para las variables impropias que no se cumplan la condición de monotonía total, se transforman todas excepto una de ellas por su dual. Entonces

$$f^*(X) \subseteq fR(XDT^*) \subseteq fR(XT^*)$$

P13) (Teorema de coerción a la **-optimalidad parcial) Sea $fR(X)$ totalmente monótona para un subconjunto de las componentes multiincidentes de X. Sea XDT^* obtenido de X tomando cada incidencia de las componentes multiincidentes para las que existe monotonía total transformada en su dual si para dicha incidencia f es monótona con sentido de monotonía contrario al global del correspondiente componente de X, y para las variables propias que no se cumplan la condición de monotonía total, se transforman todas excepto una de ellas por su dual. Entonces

$$fR(XT^{**}) \subseteq fR(XDT^{**}) \subseteq f^{**}(X)$$

P14) (Teorema de coerción a la optimalidad) Sea fR definida en Prop(X), árbol-optimal y totalmente monótona respecto de X. Sea XD es el vector obtenido por ampliación de X considerando cada componente multiincidente como componente independiente, transformada en su dual si en la incidencia f es monótona con sentido de monotonía contrario al global del correspondiente componente de X. Entonces

$$f^*(X) = fR(XD) = f^{**}(X)$$

P15) (Teorema de la optimalidad equivalente) Cualquier función racional modal uniincidente $fR(X)$ que tenga una función equivalente gR optimal en X, es optimal.

P16) (Teorema de coerción a la optimalidad para argumentos unimodales) Sea X un vector unimodal y sea fR definida en Prop(X) y totalmente monótona respecto X. Sea XD en las condiciones del teorema anterior. Entonces

$$f^*(X) = fR(XD) = f^{**}(X)$$

P17) (Teorema de la modalidad partida) Si $f(g(x), h(v))$ es una función continua que verifica la condición de modalidad partida, entonces

$$f^*(g(X), h(V)) = f_0^*(g^*(X), h^*(V)) = f_0^{**}(g^{**}(X), h^{**}(V)) = f^{**}(g(X), h(V))$$

P18) (Teorema de la optimalidad lateral) Dada $f(g(x), h(y, v))$ una función continua que sea h-uniformemente monótona y con h JM-conmutativa para (Y, V), si X es un vector unimodal, e Y y V son las componentes propias e impropias de los argumentos de h y X, Y y V no tienen componente en común, entonces

$$f^*(g(X), h(Y, V)) = f_0^*(g^*(X), h^*(Y, V)) =$$
$$= f^{**}(g^{**}(X), h^{**}(Y, V)) = f^{**}(g(X), h(Y, V))$$

P19) (Teorema de la optimalidad condicional) Si $fR(X)$ es uniincidente y c-árbol-optimal, entonces $fR(X)$ es optimal, es decir

$$f^*(X) = fR(X) = f^{**}(X)$$

P20) (Teorema de coerción a la optimalidad condicional) Sea X un vector intervalar y sea $fR(XD)$ definida y c-árbol-optimal en el dominio $\text{Prop}(X)$, totalmente monótona para todas sus componentes multiincidentes, siendo XD el vector obtenido por ampliación de X, tomando cada incidencia de las componentes como independiente, transformada en su dual si para dicha incidencia f es monótona con sentido de monotonía contrario al global del correspondiente componente de X. Entonces

$$f^*(X) = fR(XD) = f^{**}(X)$$

Referencias

[AH74] G. Alefeld and J. Herzberger. *Introduction to Interval Computations*. Academic Press, 1974.

[Alb77] R. Albrecht. Grundlagen einer theorie gerundeter algebraischer verknüpfungen in topologischen vereinen. *Computing Supplementum*, (1), 1977.

[GnMS95] E. Gardeñes, H. Mielgo, and M.A. Sainz. Presentation of the research group sigla/x. Technical report, Universitat de Girona, 1995.

[GnMT86] E. Gardeñes, H. Mielgo, and A. Trepat. Modal intervals: reason and ground semantics. *Lecture Notes in Computer Science 212. Springer*, 1986.

[GnT79] E. Gardeñes and A. Trepat. *The interval computing system Sigla-PL/I(0)*. Freiburg Intervall-Berichte 79/8. Freiburg, 1979.

[Kau80] E. Kaucher. Interval analysis in the extended interval space ir. *Computing Supplementum*, (2):33–49, 1980.

[Kul71] U. Kulisch. An axiomatic approach to rounded computations. (18):1–17, 1971.

[Mie82] H. Mielgo. *Sigladef: a generator for problem-oriented dialects of programming languages*. 22nd. Science Week. Damascus, 1982.

[Nic77] K.Ñickel. *Interval analysis in the state of the art in numerical analysis*. Ed. Academic Press, 1977.

[SG96a] SIGLA/X-Group. Construcción de los intervalos modales. Technical report, Universitat de Girona, 1996.

[SG96b] SIGLA/X-Group. Ground construction of modal intervals. Technical report, Universitat de Girona, 1996.

[Sun58] T. Sunaga. Theory of an interval algebra and its applications to numerical analysis. *RAAG Memoirs*, (2):547–564, 1958.

[Tre82] A. Trepat. *Completación reticular del espacio de intervalos*. PhD thesis, Tesina Facultad de matemáticas. Universidad de Barcelona, 1982.

6. Problemas

1. Hallar $f^*(X)$ y $f^{**}(X)$, cuando ello sea posible, y compararlas con los redondeos de $fR^*(X)$ y $fR^{**}(X)$ para las funciones del ejercicio 3 del capítulo de Extensiones de las funciones continuas.

2. Hallar $fR(XT^*)$ y $fR(XT^{**})$, redondeándolas convenientemente, y compararlas con $f^*(X)$ y $f^{**}(X)$ para las funciones del ejercicio 3. Una vez obtenidas las inclusiones utilizar los teoremas semánticos para dar interpretación a los resultados racionales intervalares.

3. Obtener cálculos racionales interpretables y aplicar los teoremas semánticos para dar la interpretación en los casos siguientes

   a) $f(x) = (x, x)$ con $X = [1, 10]$
   b) $f(x_1, x_2) = (x_1 + x_2, x_1x_2 - x_2)$ con $X = ([1, 3], [2, -1])$
   c) $f(x_1, x_2) = (x_1x_2/(x_1 + x_2), x_1x_2 - x_2)$ con $X = ([8, 1], [9, 2])$
   d) $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1x_2x_3, x_1x_2 - x_1)$ con $X = ([1, 5], [1, 6], [-2, 1])$
   e) $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1x_2x_3, x_1x_2 - x_1)$ con $X = ([5, 1], [6, 1], [-2, 1])$
   f) $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1x_2x_3, x_1x_2 - x_1)$ con $X = ([5, 1], [6, 1], [1, -2])$

4. Aplicar los teoremas de coerción a la interpretabilidad de todas de las formas posibles y encontrar las mejores aproximaciones a $f^*(X)$ y $f^{**}(X)$ en los casos siguientes

   a) $f(x_1, x_2) = x_1 + x_2 + x_1x_2$ con $X = ([2, 6], [8, 3])$
   b) $f(x_1, x_2) = x_1 + x_2 + x_1x_2$ con $X = ([6, 2], [8, 3])$
   c) $f(x_1, x_2) = x_1 + x_2 + x_1x_2$ con $X = ([2, 6], [3, 8])$
   d) $f(x_1, x_2) = (x_1 + x_2^2)/(x_1^3 - x_2)$ con $X = ([6, 5], [-3, -1])$
   e) $f(x_1, x_2, x_3) = x_1(x_2 + x_3) + x_1(x_2^2 + x_3^2)$ con $X = ([-1, 2], [0, -4], [3, 2])$

5. Calcular $fR(X)$, $f^*(X)$ y $f^{**}(X)$, con aritmética exacta y con redondeos con punto fijo y tres cifras decimales, para los siguientes operadores

   a) $f(x) = \ln x$ para $X = [8, 3]$
   b) $f(x) = x^6$ para $X = [-1, 3]$
   c) $f(x) = x^{-5}$ para $X = [3, 1]$
   d) $f(x) = \exp \sqrt[3]{x}$ para $X = [2, -5]$
   e) $f(x) = \ln |x|$ para $X = [-4, 3]$
   f) $f(x_1, x_2) = x_1^{x_2}$ para $X = ([1, 6], [2, -3])$
   g) $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2/(x_2 - x_3)$ para $X = ([4, 6], [6, 1], [-3, -2])$

h) $f(x_1, x_2, x_3) = x_1 x_2 x_3$ para $X = ([3, 1], [-2, -5], [4, 6])$

6. Averiguar si son árbol-optimales las siguientes extensiones racionales $fR(X)$, en los casos siguientes

   a) $f(x_1, x_2) = x_1 + x_2$ con $X = ([3, -1], [4, 2])$
   b) $f(x_1, x_2) = x_1 x_2$ con $X = ([3, -1], [4, 2])$
   c) $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1 x_2/(x_3 - x_4)$ con $X = ([3, 1], [4, 2], [3, 4], [8, 4])$
   d) $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1^2 + x_2)(x_3 - x_4^2)$ con $X = ([-2, 4], [4, 6], [2, 3], [-4, 1])$

   Si no lo son, construir un subdominio donde se verifique la árbol-optimalidad

7. Aplicar los teoremas de coerción a la *-optimalidad parcial, a la **-optimalidad parcial, a la optimalidad y a la optimalidad condicional, cuando sea posible, en los casos siguientes

   a) $f(x) = 3x - 5(-3x - 6)$ con $X = [3, -1]$
   b) $f(x_1, x_2) = x_1 x_2/(x_1 + x_2)$ con $X = ([-3, 1], [8, 6])$
   c) $f(x_1, x_2) = |x_1^2 + x_2^2|$ con $X = ([-4, 2], [3, 1])$
   d) $f(x_1, x_2, x_3) = x_1 x_2 + x_1 x_3 - x_2$ con $X = ([1, -1], [2, 3], [4, 6])$
   e) $f(x_1, x_2, x_3) = x_1 x_3 (x_2 + x_3 - x_1)$ con $X = ([1, 4], [-6, 0], [-2, -5])$

7. Actividades

1. Consideremos un modelo intervalar en diferencias para simular la evolución de la masa de sal x existente en un depósito, de volumen l, conteniendo solución salina, que entra con un caudal q y una carga constante u y sale con el mismo caudal y con una concentración y, a partir de un estado inicial $x(0)$.

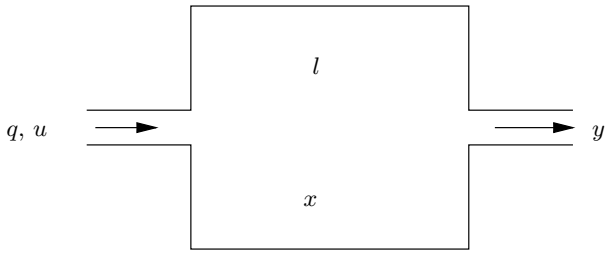


Figura 3: Modelo de un depósito

   Las variables que intervienen son:

   - Variable de estado: x positiva.
   - Variable de salida: y positiva.

- Variable de entrada: u positiva.
- Parámetros: q, l positivos.

Las ecuaciones en tiempo discreto, que estudian la evolución del sistema con el paso del tiempo son la ecuación de estado, que da la masa de sal existente en el depósito en cada instante, y la ecuación de salida. Dichas ecuaciones vienen dadas por las expresiones siguientes:

Ecuación puntual para el estado:

$$x(i+1) = x(i) + \Delta t \left(-\frac{q}{l}x(i) + u(i)\right)$$

Ecuación puntual para la salida:

$$y(i) = \frac{q}{l}x(i)$$

Estudiar

a) Simulación puntual del modelo para $x(0) = 0$ g, $u(i) = 0{,}9^i$ g, $l = 45$ l, $q = 3$ l/m.

b) Simulación intervalar clásica (con la extensión intervalar natural) para $X(0) = [0, 0]$ g, $U(i) = [0{,}8^i, 0{,}9^i]$ g, $L = [45, 45{,}5]$ l, $Q = [3, 3{,}1]$ l/m.

c) Simulación intervalar modal aplicando los teoremas de coerción para los mismos datos anteriores.

d) Simulación intervalar modal aplicando los teoremas de coerción para los mismos datos anteriores considerando las entradas como intervalos impropios. Interpretación de los resultados.

2. Consideremos el modelo de un circuito eléctrico simple formado por una resistencia r, un condensador de capacidad c y carga q y una fuerza electromotriz, tomando como variable de estado la carga del condensador, como salida el voltaje a través de la resistencia y entrada e_i la fuerza electromotriz. Se pide

a) Construir un modelo en diferencias finitas.

b) Simulación puntual del modelo con $q(0) = 0$, $c = 0{,}5E-6$ farad, $r = 100$ ohm y $e_i = \sin i$ V.

c) Simulación intervalar clásica (con la extensión intervalar natural) para $Q(0) = [0, 0]$, $C = [0{,}5E-6, 0{,}6E-6]$ farad, $R = [100, 101]$ ohm, $E_i = \sin i \pm 0{,}1$ V.

d) Simulación intervalar modal aplicando los teoremas de coerción para los mismos datos anteriores.

e) Simulación intervalar modal aplicando los teoremas de coerción para los mismos datos anteriores considerando las entradas como intervalos impropios. Interpretación de los resultados.

3. Consideremos un modelo intervalar en diferencias para simular la evolución de las masas de sal x_1 y x_2 existentes en dos depósitos conectados conteniendo una solución salina, que entra en el primer depósito con un caudal $q_1 - q_2$ y una carga constante u y sale del segundo depósito con el mismo caudal y con una concentración y, a partir de un estado inicial $x_1(0)$ y $x_2(0)$. Los depósitos estan connectados de manera que la solución del primer depósito se bombea al segundo a flujo constante q_1, y la solución del segundo depósito se bombea al primero a flujo constante q_2 ($q_1 > q_2$).

   Las variables que intervienen son:

   - Variables de estado: x_1, x_2 positivas.
   - Variable de salida: y positiva.
   - Variable de entrada: u positiva.
   - Parámetros: q_1, q_2, l_1 y l_2 positivos.

   Las ecuaciones en tiempo discreto, que estudian la evolución del sistema con el paso del tiempo son la ecuación de estado, que da la masa de sal existente en el depósito en cada instante, y la ecuación de salida. Se pide

   a) Construir el modelo en diferencias finitas.

   b) Simulación puntual del modelo para $x_1(0) = 0$ g, $x_2(0) = 0$ g, $u(i) = 0{,}9^i$ g, $l_1 = 45$ l, $l_2 = 65$ l, $q_1 = 3$ l/m y $q_2 = 2$ l/m.

   c) Simulación intervalar clásica (con la extensión intervalar natural) para $X_1(0) = [0, 0]$ g, $X_2(0) = [0, 0]$, $U(i) = [0{,}8^i, 0{,}9^i]$ g, $L_1 = [45, 45{,}5]$ l, $L_1 = [65, 65{,}5]$ l, $Q_1 = [3, 3{,}1]$ l/m y $Q_2 = [2, 2{,}1]$ l/m

   d) Simulación intervalar modal aplicando los teoremas de coerción para los mismos datos anteriores.

   e) Simulación intervalar modal aplicando los teoremas de coerción para los mismos datos anteriores considerando las entradas como intervalos impropios. Interpretación de los resultados.

4. La temperatura T dentro de un edificio se considera uniforme, así como la temperatura T_a del aire exterior, considerada como constante. Una caldera calienta el edificio suministrando una cantidad constante de calor q, de manera que el cambio en la cantidad de calor dado por $mC_P(dT/dt)$, donde m es la masa de aire y C_p la capacidad calorífica, es igual a la cantidad de calor q suministrado por la caldera mas la cantidad de calor transferida al aire exterior. Esta se supone proporcional a la diferencia de temperaturas entre el edificio y el aire exterior, es decir, $K_a(T - T_a)$, con K_a constante. Elegiendo como variable de estado la diferencia $x = T - T_a$, como entrada $u = q$ y como salida $y = T$. Se pide

   a) Construir el modelo en diferencias finitas.

b) Simulación puntual del modelo para $mC_p/K_a = 5$ horas, $T_a = 0°\text{C}$, $1/(mC_p) = 0{,}05°\text{C/BTU}$ y la caldera está encendida media hora suministrando 52 BTU/h y media hora apagada y así sucesivamente cada hora.

c) Simulación intervalar clásica (con la extensión intervalar natural) suponiendo unos intervalos definidos por unos errores relativos de un 10 % para cada magnitud.

d) Simulación intervalar modal aplicando los teoremas de coerción para los mismos datos anteriores.

e) Simulación intervalar modal aplicando los teoremas de coerción para los mismos datos anteriores considerando las entradas como intervalos impropios. Interpretación de los resultados.

5. Consideremos el ascenso vertical de un cohete de masa constante m desde un punto de la superficie de la tierra a una distancia R del centro con un empuje T. Sea r la distancia del cohete al centro de la tierra, suponiendo que las únicas fuerzas que actuan sobre el cohete son la gravedad y el empuje, su movimiento vertical viene descrito por

$$m\frac{d^2r}{dt^2} = -mg\left(\frac{R}{r}\right)^2 + T$$

Se pide

a) Construir el modelo en diferencias finitas.

b) Simulación puntual del modelo para $g = 9{,}8$ m/s^2, $R = 6600$ Km, $T = mg$, $r(0) = R$.

c) Simulación intervalar clásica (con la extensión intervalar natural) suponiendo unos intervalos definidos por unos errores relativos de un 10 % para cada magnitud.

d) Simulación intervalar modal aplicando los teoremas de coerción para los mismos datos anteriores.

e) Simulación intervalar modal aplicando los teoremas de coerción para los mismos datos anteriores considerando las entradas como intervalos impropios. Interpretación de los resultados.