Extensiones de las funciones continuas

SIGLA/X Group[1]

Resumen

The geometrical semantics of $(n+1)$-dimensional real space $\mathbb{R}^{n+1}$, is basically defined by the continuous functions $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, which denotate the n-dimensional surfaces $\{(x_1, \cdots, x_n, z) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid z = f(x_1, \cdots, x_n)\}$. The semantic interval functions $F(f) : I^*(\mathbb{R}^n) \longrightarrow I^*(\mathbb{R})$ consistently referring to the continuous functions $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, are obtained by translating to modal terms the set-theoretical definition of the poorest interval computation of a real continuous function. When the continuous real function is a real rational function, it can also be extended to a rational interval function $fR : I^*(\mathbb{R}^n) \longrightarrow (\mathbb{R})$, by using the computing program implicitly defined by the syntax of the expression defining the function.

1. Introducción

La semántica geométrica de $\mathbb{R}^{n+1}$ la definen las funciones continuas f de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}$ que determinan superficies $\{(x_1, \cdots, x_n, z) \mid x_1 \in X_1, \cdots, x_n \in X_n,\ z = f(x_1, \cdots, x_n)\}$. En el contexto intervalar se trata de definir extensiones de f, es decir, funciones $F(f)$ de intervalos en intervalos que conserven, hasta donde sea posible, la semántica geométrica de f.

En la teoría intervalar clásica dada una función real f de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}$ continua, se define la *extensión unida*, R_f de f a los intervalos $X'_1, \cdots, X'_n$ como el rango de valores de la función

$$R_f(X'_1, \cdots, X'_n) = \{f(x_1, \cdots, x_n) \mid x_1 \in X'_1, \cdots, x_n \in X'_n\}$$

que será el intervalo

$$[\text{mín}\{f(x_1, .., x_n) \mid x_1 \in X'_1, .., x_n \in X'_n\}, \max\{f(x_1, .., x_n) \mid x_1 \in X'_1, .., x_n \in X'_n\}]$$

[1]SIGLA/X membership: Calm R., Estela M.R., Gardeñes E., Jorba L., Mielgo H., Sainz M.A., Trepat A.

Por otra parte, si f es una función racional se define su *extensión racional* como una función fR de $I(\mathbb{R}^n)$ en $I(\mathbb{R})$, obtenida reemplazando en el árbol sintáctico de f las variables $x_1, \cdots, x_n$ por sus intervalos de variación $X'_1, \cdots, X'_n$ y las operaciones racionales entre las variables por las correspondientes operaciones intervalares que, en el caso frecuente de cálculos truncados en una aritmética real deben ser dirigidas hacia fuera, ya que $X' \mathrm{w} Y' \subseteq \mathrm{Out}(X' \mathrm{w} Y')$.

La relación entre ambas extensiones es

$$R_f(X'_1, \cdots, X'_n) \subseteq fR(X'_1, \cdots, X'_n)$$

con lo que $fR(X'_1, \cdots, X'_n)$, que es calculable a partir de los extremos de $X_1, \cdots, X_n$, representa una sobreestimación de $R_f(X'_1, \cdots, X'_n)$ que, en general, no es calculable. Ambas extensiones exhiben la propiedad fundamental de ser inclusivas, es decir para $A'_1 \subseteq B'_1, \cdots, A'_n \subseteq B'_n$ se verifica

$$fR(A'_1, \cdots, A'_n) \subseteq fR(B'_1, \cdots, B'_n)$$
$$R_f(A'_1, \cdots, A'_n) \subseteq R_f(B'_1, \cdots, B'_n)$$

La extensión unida de f a los intervalos $X'_1, \cdots, X'_n$ tiene como única semántica

$$\mathrm{U}(x_1, X'_1) \cdots \mathrm{U}(x_n, X'_n)\ \mathrm{E}(z, R_f(X'_1, \cdots, X'_n)')\ z = f(x_1, \cdots, x_n)$$

y análogamente debido a la anterior inclusión

$$\mathrm{U}(x_1, X'_1) \cdots \mathrm{U}(x_n, X'_n)\ \mathrm{E}(z, fR(X'_1, \cdots, X'_n)')\ z = f(x_1, \cdots, x_n)$$

Sin embargo es de esperar que, del mismo modo que un predicado real $P(.)$ dé lugar a un predicado intervalar $\mathrm{Q}(x, X)P(x)$, la relación $z = f(x_1, \cdots, x_n)$ dé lugar a una relación intervalar del tipo $Z = F(f)(X_1, \cdots, X_n)$ compatible con alguna fórmula del tipo

$$\mathrm{Q}_1(x_1, X_1) \cdots \mathrm{Q}_n(x_n, X_n)\ \mathrm{Q}_z(z, Z)\ z = f(x_1, \cdots, x_n)$$

donde obviamente, aparecerá un problema de orden ya que los prefijos de cuantificación no son en general conmutativos.

2. Extensiones modales de una función continua

Las funciones reales continuas f de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}$, en general no son accesibles desde el punto de vista computacional, y tampoco lo son sus extensiones unidas f de $I(\mathbb{R}^n)$ en $I(\mathbb{R})$. El tipo más elemental de funciones calculables que extienden a las funciones reales continuas f de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}$ son las funciones F de DI^n en $I(\mathrm{DI})$ (donde DI es un subconjunto digital de $\mathbb{R}$) por lo que, dada una función continua f de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}$, la extensión intervalar más simple sería la función para la que dado un valor a retorne

dos valores, uno mayor y otro menor que $f(a)$. Por ello definimos en primer lugar la *extensión intervalar pobre* de f como una función

$$\begin{aligned} F : \mathbb{R}^n &\longrightarrow I(\mathbb{R}) \\ a &\longrightarrow F(a)' \end{aligned}$$

tal que $f(a) \in F(a)'$. Esta condición equivale a

$$\mathrm{U}(X', I(\mathbb{R}^n))\ (a \in X' \ \Rightarrow\ F(a)' \cap f(X') \neq \emptyset)$$

En efecto:

1. Si $f(a) \in F(a)'$ es

$$\mathrm{U}(X', I(\mathbb{R}^n))\ (a \in X' \ \Rightarrow\ f(a) \in f(X') \ \Rightarrow\ F(a)' \cap f(X') \neq \emptyset)$$

2. Recíprocamente si particularizamos a $X' = [a, a]'$ es

$$(a \in [a, a]' \ \Rightarrow\ F(a)' \cap f([a, a]') \neq \emptyset) \ \Rightarrow\ f(a) \in F(a)'$$

La condición demostrada puede escribirse en la forma

$$\mathrm{U}(X', I(\mathbb{R}^n))\ (a \in X' \ \Rightarrow\ \mathrm{E}(z, F(a)')\ (z \in f(X')))$$

o bien

$$\mathrm{U}(X', I(\mathbb{R}^n))\ ((. \in X') \in \mathrm{Pred}^*([a, a]) \ \Rightarrow\ (. \in f(X')) \in \mathrm{Pred}^*(F(a)'))$$

La utilidad de esta propiedad conjuntista es inducir una más general para extensiones del tipo $F : I^*(\mathbb{R}^n) \to I^*(\mathbb{R})$, substituyendo el elemento $[a, a]$ por un intervalo modal general A. Si f es una función continua de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}$, llamamos *extensión intervalar modal* de f sobre el intervalo A a cualquier función F de $I^*(\mathbb{R}^n)$ en $I^*(\mathbb{R})$ que verifique la propiedad

$$\mathrm{U}(X', I(\mathbb{R}^n))\ ((. \in X') \in \mathrm{Pred}^*(A) \ \Rightarrow\ (. \in f(X')) \in \mathrm{Pred}^*(F(A)))$$

(en esta definición, y en lo sucesivo, el dominio de f puede ser, en vez de $\mathbb{R}^n$, cualquier intervalo compacto $C \subseteq \mathbb{R}^n$, con lo que el dominio de F pasa a ser $I^*(C)$).

3. Funciones semánticas

Definiremos dos "funciones semánticas" que van a jugar un papel básico en la teoría debido a su estrecha relación con las extensiones intervalares y proveeran de significado a los cálculos con intervalos.

Sea el vector intervalar $X = (X_p, X_i) \in I^*(\mathbb{R}^n)$ separado en sus componentes propias e impropias. Definimos dos extensiones intervalares de una función continua f de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}$ mediante

$$\begin{aligned} f^*(X) &:= \vee(x_p, X_p') \wedge (x_i, X_i')[f(x), f(x)] = \\ &= [\min(x_p, X_p')\max(x_i, X_i')f(x_p, x_i),\ \max(x_p, X_p')\min(x_i, X_i')f(x_p, x_i)] \\ f^{**}(X) &:= \wedge(x_i, X_i') \vee (x_p, X_p')[f(x), f(x)] = \\ &= [\max(x_i, X_i')\min(x_p, X_p')f(x_p, x_i),\ \min(x_i, X_i')\max(x_p, X_p')f(x_p, x_i)] \end{aligned}$$

que llamaremos, respectivamente, funciones *-semántica y **-semántica.

Si todos los intervalos componentes son propios, es decir, $X_i = \emptyset$ y $X = X_p$ entonces

$$f^*(X) = f^{**}(X) = \vee(x_p, X_p')[f(x_p), f(x_p)] = [\min(x_p, X_p')f(x_p), \max(x_p, X_p')f(x_p)]$$

que coincide con la extensión unida R_f, del análisis intervalar clásico.

Análogamente si $X_p = \emptyset$ y $X = X_i$ es

$$f^*(X) = f^{**}(X) = \wedge(x_i, X_i')[f(x_i), f(x_i)] = [\max(x_i, X_i')f(x_i), \min(x_i, X_i')f(x_i)]$$

Ejemplo 3.1

Para la función f de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}$ definida por $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$ y el intervalo $X = ([-1, 1], [1, -1])$, tenemos

$$\begin{aligned} f^*([-1,1],[1,-1]) &= \vee(x_1, [-1,1]') \wedge (x_2, [-1,1]')[x_1^2 + x_2^2, x_1^2 + x_2^2] = \\ &= \vee(x_1, [-1,1]')[x_1^2 + 1, x_1^2] = [1,1] \\ f^{**}([-1,1],[1,-1]) &= \wedge(x_2, [-1,1]') \vee (x_1, [-1,1]')[x_1^2 + x_2^2, x_1^2 + x_2^2] = \\ &= \wedge(x_2, [-1,1]')[x_2^2, x_2^2 + 1] = [1,1] \end{aligned}$$

Para la función g de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}$ definida por $g(x_1, x_2) = (x_1 + x_2)^2$ y el mismo intervalo $X = ([-1, 1], [1, -1])$, tenemos

$$\begin{aligned} g^*([-1,1],[1,-1]) &= \vee(x_1, [-1,1]') \wedge (x_2, [-1,1]')[(x_1 + x_2)^2, (x_1 + x_2)^2] = \\ &= \vee(x_1, [-1,1]')[\underline{\text{if}}\ x_1 < 0\ \underline{\text{then}}\ (x_1 - 1)^2\ \underline{\text{else}}\ (x_1 + 1)^2, 0] = [1, 0] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g^{**}([-1,1],[1,-1]) &= \wedge(x_2, [-1,1]') \vee (x_1, [-1,1]')[(x_1 + x_2)^2, (x_1 + x_2)^2] = \\ &= \wedge(x_2, [-1,1]')[0, \underline{\text{if}}\ x_2 < 0\ \underline{\text{then}}\ (x_2 - 1)^2\ \underline{\text{else}}\ (x_2 + 1)^2] = [0, 1] \end{aligned}$$

Sin embargo, en general, las extensiones *- y **-semánticas no serán siempre calculables, excepto para funciones sencillas como las del ejemplo o los operadores aritméticos, para los cuales las extensiones *- y **-semánticas son iguales [5] y obtenibles mediante operaciones aritméticas con los extremos. Tal y como se demostrará en la Sección 7, los resultados son los mismos que los definidos para los intervalos generalizados de Kaucher y así el álgebra definida por las operaciones aritméticas con estos intervalos es un álgebra válida en el conjunto $I^*(\mathbb{R})$ de los intervalos modales.

Ejemplo 3.2 Para la función $f(x,y) = xy$, las extensiones * y **-semánticas para los intervalos $X = [-1,3]$ e $Y = [-2,-6]$ resultan ser

$$\begin{aligned} f^*([-1,3],[-2,6]) &= \vee(x,[-1,3]') \wedge (y,[-6,-2]')[xy,xy] = \\ &= \vee(x,[-1,3]')[\underline{\text{if}}\ x \leq 0\ \underline{\text{then}}\ -6x\ \underline{\text{else}}\ -2x, \\ &\qquad \underline{\text{if}}\ x \leq 0\ \underline{\text{then}}\ -2x\ \underline{\text{else}}\ -6x] = [-6,2] \\ f^{**}([-1,3],[-2,6]) &= \wedge(y,[-6,-2]') \vee (x,[-1,3]')[xy,xy] = \\ &= \wedge(y,[-6,-2]')[3y,-y] = [-6,2] \end{aligned}$$

que coinciden y son iguales al resultado del producto aritmético de intervalos de Kaucher

$$X * Y = [-1,3] * [-2,-6] = [-6,2]$$

Ambas extensiones semánticas son en general diferentes, excepto casos particulares como el ejemplo anterior. Existe entre ambas la siguiente relación importante utilizando el operador Dual:

$$\begin{aligned} \text{Dual}(f^*(X)) &= \text{Dual}(\vee(x_p,X_p') \wedge (x_i,X_i')[f(x),f(x)]) = \\ &= \wedge(x_p,X_p') \vee (x_i,X_i')[f(x),f(x)] = f^{**}(\text{Dual}(X)) \end{aligned}$$

4. Propiedades de las extensiones semánticas

Veamos tres importantes propiedades de f^* y f^{**}. La primera propiedad dice que si f definida de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}$ es una función continua y $X \in I^*(\mathbb{R})$, entonces

$$f^*(X) \subseteq f^{**}(X)$$

En efecto, basta recordar que si $X' = (X_1', X_2')$, al ser f continua tenemos

$$\left.\begin{array}{l} \text{U}(x_1,X_1')\ \ \text{mín}(x_2,X_2')f(x_1,x_2) \leq f(x_1,x_2) \\ \text{U}(x_2,X_2')\ \ \text{máx}(x_1,X_1')f(x_1,x_2) \geq f(x_1,x_2) \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ \text{U}(x_1,X_1')\ \text{U}(x_2,X_2')\,\text{mín}(x_2,X_2')f(x_1,x_2) \leq \text{máx}(x_1,X_1')f(x_1,x_2)$$

luego

$$\text{máx}(x_1,X_1')\text{min}(x_2,X_2')f(x_1,x_2) \leq \text{mín}(x_2,X_2')\text{max}(x_1,X_1')f(x_1,x_2)$$

Como

$$f^*(X) = \left[\text{min}(x_p,X_p')\text{max}(x_i,X_i')f(x_p,x_i),\ \text{max}(x_p,X_p')\text{min}(x_i,X_i')f(x_p,x_i)\right]$$

$$f^{**}(X) = [\text{max}(x_i,X_i')\text{min}(x_p,X_p')f(x_p,x_i),\ \text{min}(x_i,X_i')\text{max}(x_p,X_p')f(x_p,x_i)]$$

de acuerdo con la desigualdad anterior tenemos el resultado.

Utilizando el operador join-meet Ω, se verifica que si F_1 y F_2 son funciones de $\mathbb{R}$ en $I^*(\mathbb{R})$, entonces,

$$F_1(x) \subseteq F_2(x) \Rightarrow \Omega(x,X)F_1(x) \subseteq \Omega(x,X)F_2(x)$$

En efecto, al ser

$$\mathrm{Inf}(F_1(x)) \geq \mathrm{Inf}(F_2(x)) \;\text{ y }\; \mathrm{Sup}(F_1(x)) \leq \mathrm{Sup}(F_2(x))$$

i) si X es propio,

$$\begin{aligned}\Omega(x,X)F_1(x) &= \vee(x,X')F_1(x) = [\min(x,X')(\mathrm{Inf}(F_1(x))), \max(x,X')(\mathrm{Sup}(F_1(x)))] \subseteq \\ &\subseteq [\min(x,X')(\mathrm{Inf}(F_2(x))), \max(x,X')(\mathrm{Sup}(F_2(x)))] = \\ &= \vee(x,X')F_2(x) = \Omega(x,X)F_2(x)\end{aligned}$$

ii) si X es impropio,

$$\begin{aligned}\Omega(x,X)F_1(x) &= \wedge(x,X')F_1(x) = [\max(x,X')(\mathrm{Inf}(F_1(x))), \min(x,X')(\mathrm{Sup}(F_1(x)))] \subseteq \\ &\subseteq [\max(x,X')(\mathrm{Inf}(F_2(x))), \min(x,X')(\mathrm{Sup}(F_2(x)))] = \\ &= \wedge(x,X')F_2(x) = \Omega(x,X)F_2(x)\end{aligned}$$

Se verifica asímismo que si F es una función de $\mathbb{R}$ en $I^*(\mathbb{R})$ y $X_1, X_2 \in I^*(\mathbb{R})$, entonces

$$X_1 \subseteq X_2 \;\Rightarrow\; \Omega(x,X_1)F(x) \subseteq \Omega(x,X_2)F(x)$$

En efecto,

i) si X_1 es propio

$$\Omega(x,X_1)F(x) = \vee(x,X_1')F(x) = [\min(x,X_1')(\mathrm{Inf}(F(x))), \max(x,X_1')(\mathrm{Sup}(F(x)))]$$

i_1) si X_2 es propio entonces $X_1' \subseteq X_2'$ y

$$\begin{aligned}&[\min(x,X_1')(\mathrm{Inf}(F(x))), \max(x,X_1')(\mathrm{Sup}(F(x)))] \subseteq \\ &\subseteq [\min(x,X_2')(\mathrm{Inf}(F(x))), \max(x,X_2')(\mathrm{Sup}(F(x)))] = \vee(x,X_2')F(x) = \Omega(x,X_2)F(x)\end{aligned}$$

i_2) si X_2 es impropio entonces $X_1 = X_2 = \{a\}$ y

$$\begin{aligned}&[\min(x,X_1')(\mathrm{Inf}(F(x))), \max(x,X_1')(\mathrm{Sup}(F(x)))] = [\mathrm{Inf}(F(a)), \mathrm{Sup}(F(a))] = \\ &= [\max(x,X_2')(\mathrm{Inf}(F(x))), \min(x,X_2')(\mathrm{Sup}(F(x)))] = \wedge(x,X_2')F(x) = \Omega(x,X_2)F(x)\end{aligned}$$

ii) si X_1 es impropio

$$\Omega(x,X_1)F(x) = \wedge(x,X_1')F(x) = [\max(x,X_1')(\mathrm{Inf}(F(x))), \min(x,X_1')(\mathrm{Sup}(F(x)))]$$

ii$_1$) Si X_2 es propio entonces $X_1' \cap X_2' \neq \emptyset$ y

$$[\max(x, X_1')(\mathrm{Inf}(F(x))), \min(x, X_1')(\mathrm{Sup}(F(x)))] \subseteq$$
$$\subseteq [\min(x, X_2')(\mathrm{Inf}(F(x))), \max(x, X_2')(\mathrm{Sup}(F(x)))] = \vee(x, X_2')F(x) = \Omega(x, X_2)F(x)$$

ii$_2$) Si X_2 es impropio entonces $X_1' \supseteq X_2'$

$$[\max(x, X_1')(\mathrm{Inf}(F(x))), \min(x, X_1')(\mathrm{Sup}(F(x)))] \subseteq$$
$$\subseteq [\max(x, X_2')(\mathrm{Inf}(F(x))), \min(x, X_2')(\mathrm{Sup}(F(x)))] = \wedge(x, X_2')F(x) = \Omega(x, X_2)F(x)$$

También es cierto que si F_1 y F_2 son funciones de $\mathbb{R}$ en $I^*(\mathbb{R})$, entonces

$$(X_1 \subseteq X_2, F_1(x) \subseteq F_2(x)) \;\Rightarrow\; \Omega(x, X_1)F_1(x) \subseteq \Omega(x, X_2)F_2(x)$$

pues

$$\Omega(x, X_1)F_1(x) \subseteq \Omega(x, X_2)F_1(x) \subseteq \Omega(x, X_2)F_2(x)$$

Resumiendo estos resultados anteriores obtenemos la segunda propiedad

$$X \subseteq Y \;\Rightarrow\; (f^*(X) \subseteq f^*(Y),\; f^{**}(X) \subseteq f^{**}(Y))$$

ya que

$$\left.\begin{array}{l} f^*(X) \\ f^{**}(X) \end{array}\right\} = \Omega(x_1, X_1)\cdots\Omega(x_n, X_n)[f(x_1, \cdots, x_n), f(x_1, \cdots, x_n)] \subseteq$$
$$\subseteq \Omega(x_1, Y_1)\cdots\Omega(x_n, Y_n)[f(x_1, \cdots, x_n), f(x_1, \cdots, x_n)] = \left\{\begin{array}{l} f^*(Y) \\ f^{**}(Y) \end{array}\right.$$

La tercera propiedad va a caracterizar el caso $f^*(X) = f^{**}(X)$, aparte del caso trivial en que $X_p = \emptyset$ o $X_i = \emptyset$, utilizando el concepto de punto de silla de una función.

Dada una función continua f de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}$ y $X' = (X_1', X_2') \in I(\mathbb{R}^n)$ se define el conjunto de los puntos de silla de f en (X_1', X_2') como

$$\mathrm{SDP}(f, X_1', X_2') := \{(x_{1b}, x_{2t}) \mid \mathrm{U}(x_1, X_1')\,\mathrm{U}(x_2, X_2')\,(f(x_{1b}, x_2) \leq f(x_{1b}, x_{2t}) \leq f(x_1, x_{2t}))\}$$

y de f en (X_2', X_1') como

$$\mathrm{SDP}(f, X_2', X_1') := \{(x_{1b}, x_{2t}) \mid \mathrm{U}(x_1, X_1')\,\mathrm{U}(x_2, X_2')\,(f(x_1, x_{2t}) \leq f(x_{1b}, x_{2t}) \leq f(x_{1b}, x_2))\}$$

Tres propiedades de estos puntos de silla interesa destacar

1. Si (x_{1b}, x_{2t}) y (x_{1b}', x_{2t}') son dos puntos de silla de f en (X_1', X_2') entonces los puntos (x_{1b}, x_{2t}') y (x_{1b}', x_{2t}) son también puntos de silla y

$$f(x_{1b}, x_{2t}) = f(x_{1b}, x_{2t}') = f(x_{1b}', x_{2t}) = f(x_{1b}', x_{2t}')$$

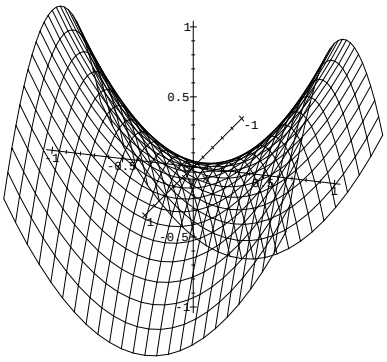


Figura 1: Punto de silla

En efecto, para cualesquiera $x_1 \in X_1'$ y $x_2 \in X_2'$ se verifican las desigualdades.

$$f(x_{1b}, x_2) \leq f(x_{1b}, x_{2t}) \leq f(x_1, x_{2t})$$
$$f(x'_{1b}, x_2) \leq f(x'_{1b}, x'_{2t}) \leq f(x_1, x'_{2t})$$

luego particularizando la primera para x'_{1b} y x'_{2t} y la segunda para x_{1b} y x_{2t}

$$f(x'_{1b}, x_{2t}) \leq f(x'_{1b}, x'_{2t}) \leq f(x_{1b}, x'_{2t}) \leq f(x_{1b}, x_{2t}) \leq f(x'_{1b}, x_{2t})$$

lo que significa la igualdad propuesta. Por otra parte

$$\left.\begin{array}{l} f(x'_{1b}, x_{2t}) = f(x_{1b}, x_{2t}) \leq f(x_1, x_{2t}) \\ f(x'_{1b}, x_2) \leq f(x'_{1b}, x'_{2t}) = f(x'_{1b}, x_{2t}) \end{array}\right\} \Rightarrow f(x'_{1b}, x_2) \leq f(x'_{1b}, x_{2t}) \leq f(x_1, x_{2t})$$

con lo que (x'_{1b}, x_{2t}) es punto de silla y mediante un razonamiento análogo se prueba que (x_{1b}, x'_{2t}) es tambien punto de silla.

2. Si consideramos el conjunto de valores que toma la función en los puntos de silla del recinto $X' = (X_1', X_2')$, definido por

$$\mathrm{SDV}(f, X_1', X_2') := \{f(x_{1b}, x_{2t}) \mid (x_{1b}, x_{2t}) \text{ es punto de silla en } (X_1', X_2')\}$$

este conjunto, o es vacío si no existen puntos de silla en X o, según la propiedad anterior, es unitario.

3. Si existe un punto de silla, se verifica

$$\begin{aligned} \mathrm{SDV}(f, X_1', X_2') &= f(x_{1b}, x_{2t}) = \min(x_1, X_1')\max(x_2, X_2')f(x_1, x_2) = \\ &= \max(x_2, X_2')\min(x_1, X_1')f(x_1, x_2) \end{aligned}$$

En efecto, si SDP no es vacío tendremos de la definición de punto de silla,

$$\min(x_1, X_1') \max(x_2, X_2') f(x_1, x_2) \leq \max(x_2, X_2') f(x_{1b}, x_2) \leq f(x_{1b}, x_{2t}) \leq$$
$$\leq \min(x_1, X_1') f(x_1, x_{2t}) \leq \max(x_2, X_2') \min(x_1, X_1') f(x_1, x_2)$$

y teniendo en cuenta la desigualdad enunciada al principio de la sección se obtiene el resultado.

Estos resultados permiten enunciar y probar el teorema que caracteriza el caso $f^*(X) = f^{**}(X)$:

Para todo $X = (X_p, X_i) \in I^*(\mathbb{R}^n)$ con $X_p \neq \emptyset$ y $X_i \neq \emptyset$, la igualdad $f^*(X) = f^{**}(X)$ equivale a que $\mathrm{SDP}(f, X_p', X_i') \neq \emptyset$ y $\mathrm{SDP}(f, X_i', X_p') \neq \emptyset$ y, en este caso

$$f^*(X) = f^{**}(X) = [\mathrm{SDV}(f, X_p', X_i'), \mathrm{SDV}(f, X_i', X_p')]$$

En efecto, como

$$\begin{aligned} \mathrm{SDV}(f, X_p', X_i') &= \min(x_p, X_p') \max(x_i, X_i') f(x_p, x_i) = \\ &= \max(x_i, X_i') \min(x_p, X_p') f(x_p, x_i) \\ \mathrm{SDV}(f, X_i', X_p') &= \min(x_i, X_i') \max(x_p, X_p') f(x_p, x_i) = \\ &= \max(x_p, X_p') \min(x_i, X_i') f(x_p, x_i) \end{aligned}$$

se verifica

$$\begin{aligned} f^*(X) &= \vee(x_p, X_p') \wedge (x_i, X_i')[f(x_p, x_i), f(x_p, x_i)] = \\ &= [\min(x_p, X_p') \max(x_i, X_i') f(x_p, x_i),\ \max(x_p, X_p') \min(x_i, X_i') f(x_p, x_i)] = \\ &= [\max(x_i, X_i') \min(x_p, X_p') f(x_p, x_i),\ \min(x_i, X_i') \max(x_p, X_p') f(x_p, x_i)] = \\ &= \wedge(x_i, X_i') \vee (x_p, X_p')[f(x_p, x_i), f(x_p, x_i)] = f^{**}(X) \end{aligned}$$

Cuando esto ocurre se dice que f es una función JM-*conmutativa* en $X \in I^*(\mathbb{R}^n)$ y el valor común de $f^*(X)$ y $f^{**}(X)$ lo denotaremos por $f(X)$.

Ejemplo 4.1

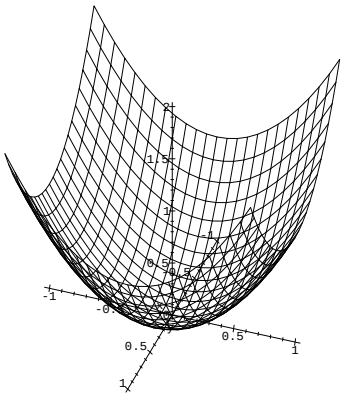
Para la función f de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}$ definida por $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$ tenemos:

Para $X = ([-1, 1], [1, -1])$

$$\begin{aligned} f^*(X) &= \vee(x_1, [-1, 1]') \wedge (x_2, [-1, 1]')[x_1^2 + x_2^2, x_1^2 + x_2^2] = \\ &= \vee(x_1, [-1, 1]')[x_1^2 + 1, x_1^2] = [1, 1] \\ f^{**}(X) &= \wedge(x_2, [-1, 1]') \vee (x_1, [-1, 1]')[x_1^2 + x_2^2, x_1^2 + x_2^2] = \\ &= \wedge(x_2, [-1, 1]')[x_2^2, x_2^2 + 1] = [1, 1] \end{aligned}$$

y efectivamente, en este caso

$$\mathrm{SDP}(f, X_1', X_2') = \{(0, 1), (0, -1)\} \quad \mathrm{SDV}(f, X_1', X_2') = 1$$
$$\mathrm{SDP}(f, X_2', X_1') = \{(-1, 0), (1, 0)\} \quad \mathrm{SDV}(f, X_2', X_1') = 1$$



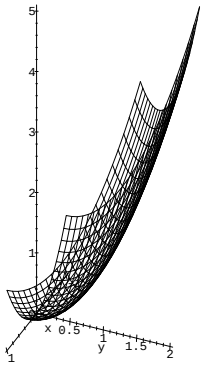
Para $X = ([-1,1],[2,0])$

$$\begin{aligned} f^*(X) &= \vee(x_1,[-1,1]') \wedge (x_2,[0,2]')[x_1^2+x_2^2, x_1^2+x_2^2] = \\ &= \vee(x_1,[-1,1]')[x_1^2+4, x_1^2] = [4,1] \\ f^{**}(X) &= \wedge(x_2,[0,2]') \vee (x_1,[-1,1]')[x_1^2+x_2^2, x_1^2+x_2^2] = \\ &= \wedge(x_2,[0,2]')[x_2^2, x_2^2+1] = [4,1] \end{aligned}$$

siendo en este caso

$$\begin{aligned} &\mathrm{SDP}(f,[-1,1]',[0,2]') = \{(0,2)\}, && \mathrm{SDV}(f,[-1,1]',[0,2]') = 4 \\ &\mathrm{SDP}(f,[0,2]',[-1,1]') = \{(1,0),(-1,0)\}, && \mathrm{SDV}(f,[0,2]',[-1,1]') = 1 \end{aligned}$$

y la función f es JM-conmutativa en X.



5. Teoremas semánticos

Como hemos comentado, el cálculo de f^* o f^{**} no siempre es posible, excepto para funciones simples, como la del ejemplo 3.1, o los operadores racionales. Por otra

parte, aunque sea posible, por ejemplo, para la función $f(x_1, x_2) = (x_1 + x_2)^2$ es

$$f^{**}([-1, 1], [1, -1]) = [0, 1]$$

este resultado, por el momento, no tiene ningún significado respecto a los posibles valores que pueda tener f en el intervalo $X = ([-1, 1], [1, -1])$. Veremos ahora dos importantes teoremas semánticos que dan pleno significado a f^* y a f^{**} y las caracterizan como funciones semánticas.

Teorema semántico para la función f^*:

Si $F(A) \in I^*(\mathbb{R})$ existe, las siguientes proposiciones son equivalentes:

a) $f^*(A) \subseteq F(A)$.

b) $\mathrm{U}(X', I(\mathbb{R}^n))\ ((. \in X') \in \mathrm{Pred}^*(A)\ \Rightarrow\ (. \in f(X')) \in \mathrm{Pred}^*(F(A)))$

c) $\mathrm{U}(a_p, A'_p)\ \mathrm{Q}(z, F(A))\ \mathrm{E}(a_i, A'_i)\ z = f(a_p, a_i)$

La demostración es como sigue:

b) $\Rightarrow$ a): Si $A_1, .., A_p$ son las componentes propias de A y $A_{p+1}, .., A_n$ las impropias

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Impr}(f(a_p, A'_i)) = \mathrm{Dual}(f^*(a_p, A'_i)) = \\
&= \mathrm{Dual}(\vee(a_{p+1}, A'_{p+1}) .. \vee (a_n, A'_n)[f(a_1, .., a_p, a_{p+1}, .., a_n), f(a_1, .., a_p, a_{p+1}, .., a_n)]) = \\
&= \wedge(a_{p+1}, A'_{p+1}) .. \wedge (a_n, A'_n)[f(a_1, .., a_p, a_{p+1}, .., a_n), f(a_1, .., a_p, a_{p+1}, .., a_n)] = \\
&= f^*(a_p, A_i)
\end{aligned}$$

Si X' es el intervalo (a_p, A'_i), entonces tendremos

$$\begin{aligned}
&\mathrm{U}(a_p, A'_p)(. \in (a_p, A'_i) \in \mathrm{Pred}^*(A))\ \Rightarrow \\
&\Rightarrow\ \mathrm{U}(a_p, A'_p)\ ((. \in f(a_p, A'_i)) \in \mathrm{Pred}^*(F(A)))\ \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow\ \mathrm{U}(a_p, A'_p)\ (\mathrm{Impr}(f(a_p, A'_i)) \subseteq F(A))\ \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow\ \mathrm{U}(a_p, A'_p)\ (f^*(a_p, A_i) \subseteq F(A)))\ \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow f^*(A) = f^*(A_p, A_i) \subseteq F(A)
\end{aligned}$$

a) $\Rightarrow$ b):

$$
\begin{aligned}
\mathrm{U}(X', I(\mathbb{R}^n))\ (. \in X') \in \mathrm{Pred}^*(A) \ &\Leftrightarrow\ \mathrm{Impr}(X') \subseteq A \ \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow\ ((X'_1, \mathrm{U})..(X'_p, \mathrm{U})(X'_{p+1}, \mathrm{U})..(X'_n, \mathrm{U})) \subseteq (A_1, .., A_p, A_{p+1}, .., A_n) \ \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow\ X'_1 \cap A'_1 \neq \emptyset, .., X'_p \cap A'_p \neq \emptyset, A'_{p+1} \subseteq X'_{p+1}, .., A'_n \subseteq X'_n \ \Leftrightarrow \\
&\qquad //\text{haciendo } X_1 = (X_1, .., X_p) \text{ y } X_2 = (X_{p+1}, .., X_n) \\
&\Leftrightarrow\ \mathrm{E}(a_p, A'_p)(a_p \in X'_1,\ A'_i \subseteq X'_2) \ \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow\ \mathrm{E}(a_p, A'_p) f(a_p, A'_i) \subseteq f(X'_1, X'_2) \ \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow\ \mathrm{E}(a_p, A'_p)(\mathrm{Impr}(f(X')) \subseteq \mathrm{Impr}(f(a_p, A'_i)) = f^*(a_p, A_i)) \Rightarrow \\
&\Rightarrow\ \mathrm{Impr}(f(X')) \subseteq f^*(A_p, A_i) = f^*(A) \subseteq F(A) \ \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow\ \left\{ \begin{array}{l} \underline{\text{if}}\ F(A) \text{ es propio, } \underline{\text{then}}\ f(X') \cap F(A) \neq \emptyset \\ \underline{\text{if}}\ F(A) \text{ es impropio, } \underline{\text{then}}\ \mathrm{ext}(F(A)) \subseteq f(X') \end{array} \right\} \ \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow\ (. \in f(X')) \in \mathrm{Pred}^*(F(A)))
\end{aligned}
$$

a) $\Leftrightarrow$ c): Puesto que

$$
\begin{aligned}
& f^*(A) \subseteq F(A) \ \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow\ \mathrm{U}(a_p, A'_p) f^*(a_p, A_i) \subseteq F(A) \ \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow\ \mathrm{U}(a_p, A'_p)\ \mathrm{Impr}(f(a_p, A'_i)) \subseteq F(A) \ \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow\ \mathrm{U}(a_p, A'_p) \left\{ \begin{array}{l} \underline{\text{if}}\ F(A) \text{ es propio, } \underline{\text{then}}\ f(a_p, A'_i) \cap F(A) \neq \emptyset \\ \underline{\text{if}}\ F(A) \text{ es impropio, } \underline{\text{then}}\ \mathrm{ext}(F(A)) \subseteq f(a_p, A'_i) \end{array} \right\} \ \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow\ \mathrm{U}(a_p, A'_p)\ \mathrm{Q}(z, F(A))\ z \in f(a_p, A'_i) \ \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow\ \mathrm{U}(a_p, A'_p)\ \mathrm{Q}(z, F(A))\ \mathrm{E}(a_i, A'_i)\ z = f(a_p, a_i)
\end{aligned}
$$

Este teorema muestra como $f^*(X)$ es optimal desde el punto de vista semántico, y cuál es el verdadero sentido de la inclusión para el redondeo cuando se aplica su semántica-*.

Ejemplo 5.1 Para la función real $f(x, y) = x + y$ resulta

$$[x_1, x_2] + [y_1, y_2] = [x_1 + y_1, x_2 + y_2]$$

Tenemos

Para $X = [1, 2]$ e $Y = [2, 3]$ es $[1, 2] + [2, 3] = [3, 5]$, con el significado
$\mathrm{U}(x, [1, 2]')\ \mathrm{U}(y, [2, 3]')\ \mathrm{E}(z, [3, 5]')\ x + y = z$.

Para $X = [1, 2]$ e $Y = [4, 1]$ es $[1, 2] + [4, 1] = [5, 3]$ que significa
$\mathrm{U}(x, [1, 2]')\ \mathrm{U}(z, [3, 5]')\ \mathrm{E}(y, [1, 4]')\ x + y = z$.

Para $X = [2, 1]$ e $Y = [1, 4]$ es $[2, 1] + [1, 4] = [3, 5]$ lo que significa
$\mathrm{U}(y, [1, 4]')\ \mathrm{E}(x, [1, 2]')\ \mathrm{E}(z, [3, 5]')\ x + y = z$.

Para $X = [2,1]$ e $Y = [3,2]$ es $[2,1] + [3,2] = [5,3]$ con la interpretación
$\mathrm{U}(z,[3,5]')\ \mathrm{E}(x,[1,2]')\ \mathrm{E}(y,[2,3]')\ x + y = z$.

Además, estas interpretaciones de la relación modal funcional $X + Y = Z$ son robustas frente al redondeo modal externo del resultado como demuestra, por ejemplo la substitución del valor $[3,5]$ para Z por [2,9, 5,1] $\supseteq$ $[3,5]$ o de $[5,3]$ por [4,9, 3,1] $\supseteq [5,3]$.

El teorema semántico para f^* permite asociar los intervalos universales como "reguladores o de control" y los intervalos existenciales como "rangos de fluctuación o tolerancia".

Ejemplo 5.2

Apliquemos estos resultados acerca de la función $f(x,y) = x + y$ a un contexto más experimental. Supongamos que tenemos dos bobinas de cable de longitudes $a = 10$ y $b = 20$ unidades; conectándolas se puede cubrir una longitud total de $c = 30$ unidades, situación elemental que puede expresarse computacionalmente mediante la igualdad algebraica $a + b = c$.

Consideremos una situación intervalar paralela, más realista, donde la primera bobina de cable tiene una longitud a de la que se sabe que está acotada por el intervalo $A' = [10,20]'$ y que de la segunda bobina se sabe que la longitud de cable es b perteneciente a $B' = [10,25]'$. Consideremos la conexión entre ambas bobinas y apliquemos el teorema *-semántico a la función $f(a,b) = a + b$.

Caso 1: $[10,20] + [25,10] = [35,30]$ significa

$$\mathrm{U}(a,[10,20]')\ \mathrm{U}(c,[30,35]')\ \mathrm{E}(b,[10,25]')\ c = a + b$$

es decir una determinada longitud del intervalo de regulación $[25,10]$ puede seleccionarse para conseguir alguna, en principio, desconocida pero determinable longitud c dentro del intervalo impropio $C = [35,30]$ cualquiera que sea la longitud a perteneciente al intervalo $A = [10,20]$.

Caso 2: $[10,20] + [10,10] = [20,30]$;

$[10,20] + [17,17] = [27,37]$;

$[10,20] + [25,25] = [35,45]$;

donde la variable b toma los valores fijos 10, 17 o 25, del conjunto $B' = [10,25]'$, la indeterminación de $A = [10,20]$ se translada al intervalo C mediante la relación $c = a + b$ de modo que el valor de c variará al azar, y de forma paralela con a, en uno de los intervalos $[20,30]$, $[27,37]$ o $[35,45]$. La expresión cuantificada, por ejemplo para la primera igualdad, es

$$\mathrm{U}(a,[10,20]')\ \mathrm{E}(c,[20,30]')\ c = a + 10$$

Caso 3: $[10,20]+[10,25]=[20,45]$ significa que

$$\mathrm{U}(a,[10,20]')\ \mathrm{U}(b,[10,25]')\ \mathrm{E}(c,[20,45]')\ c=a+b$$

y así c muestra toda la indeterminación procedente de a y b.

Caso 4: $[20,10]+[25,10]=[45,20]$ se interpreta mediante

$$\mathrm{U}(c,[20,45]')\ \mathrm{E}(a,[10,20]')\ \mathrm{E}(b,[10,25]')\ c=a+b$$

Caso 5: $[10,20]+[20,15]=[30,35]$ significa

$$\mathrm{U}(a,[10,20]')\ \mathrm{E}(c,[30,35]')\ \mathrm{E}(b,[15,20]')\ c=a+b$$

es decir, con el mismo intervalo de fluctuación $A=[10,20]$ y un intervalo de regulación más extrecho $B=[20,15]$, para conseguir una longitud c dentro del rango determinado por el intervalo propio $C=[30,35]'$ debe seleccionarse (operación de regulación) una determinada longitud b perteneciente a $B'=[15,20]'$

Ejemplo 5.3

Supongamos un depósito de gas donde la masa de gas y la temperatura son conocidos dentro de unos intervalos de variación. Se trata de determinar el volumen de forma que la presión se mantenga dentro de unos límites determinados. Supongamos que la ecuación

$$p=kt/v$$

es válida para dicha aplicación, con los intervalos de variación

$$k\in K=[0{,}00366,0{,}00367],\ t\in T=[263,283],\ p\in P=[0{,}99,1{,}01]$$

La solución para el volumen es

$$V=\mathrm{Dual}(K*T)/P=[1{,}0283...,0{,}9723...]\supseteq[1{,}03,0{,}97]$$

La semántica resultante es

$$\mathrm{U}(k,[0{,}00366,0{,}00367]')\ \mathrm{U}(t,[263,283]')\ \mathrm{E}(v,[0{,}97,1{,}03]')\ \mathrm{E}(p,[0{,}99,1{,}01]')\ p=kt/v$$

El resultado es un intervalo impropio, un intervalo de "regulación", ya que para cada valor de k y t existe un volumen v entre 0.97 y 1.03, que depende de los valores de k y t, que mantiene la presión entre los límites deseados. Esto significa que el depósito necesita una válvula para ajustar el volumen entre los límites calculados para mantener la presión dentro de su rango permitido (primer gráfico de la Figura 2).

Consideremos ahora una segunda alternativa donde admitimos un intervalo de mayor amplitud para rango de valores de la presión, por ejemplo $P=[0{,}9,1{,}1]$. En este caso el resultado para el volumen es

$$V=\mathrm{Dual}(K*T)/P=[0{,}9441...,1{,}0693...]\supseteq[0{,}95,1{,}06]$$

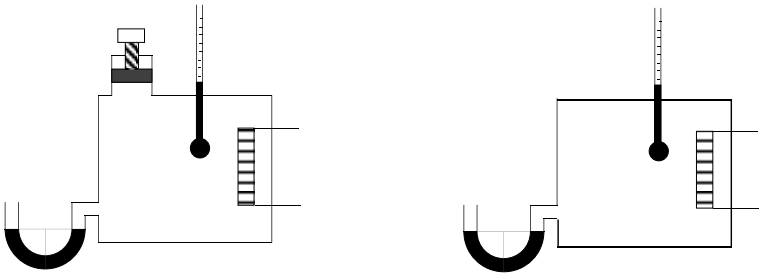


Figura 2: *Depósitos de gas*

y la semántica que se obtiene es

$$\mathrm{U}(k,[0{,}00366, 0{,}00367]')\ \mathrm{U}(t,[263,283]')\ \mathrm{U}(v,[0{,}95, 1{,}06]')\ \mathrm{E}(p,[0{,}9, 1{,}1]')\ p = kt/v$$

El resultado es un intervalo propio, de "fluctuación" para el volumen del depósito fijado ya que para todo k y t y para cualquier volumen v entre 0.95 y 1.06, la presión está dentro de los límites. Es decir, en este caso construimos un depósito con un volumen garantizado entre los límites calculados, sin necesidad de ningún mecanismo de regulación, para asegurar la presión dentro de sus límites (segundo gráfico de la Figura 2).

Ejemplo 5.4

Veamos como muchas veces, un problema ya nos impone un tipo de modalidad. Así, imaginando un par de paredes separadas 1 m (100 cm) entre sí y dos "salientes" de 5 cm cada uno sobre los que queremos sostener una estantería, su longitud deberá ser, cualquier valor entre 90 y 100, es decir, estará representada por el intervalo universal o impropio $[100, 90]$.

Otro caso podría ser el siguiente:

Para ir al trabajo, un individuo ha de recorrer, cada día 30 km. La hora de salida, que representaremos por t_A, puede ser cualquiera entre las 7h y las 8h de la mañana, variable según el día. Por el estado de la carretera, y las habituales situaciones de tránsito, se sabe que la velocidad media del vehículo, supuesta constante, estará comprendida entre 60 km/h y 90 km/h. Nos preguntamos cual es el intervalo de la hora de llegada y cual es su modalidad. Como

> el intervalo de tiempo de salida t_A es existencial [7,8],
> el espacio que ha de recorrer, considerado como intervalo es [30,30],
> la velocidad es un intervalo impropio $v = [90, 60]$,

si representamos por t_B el tiempo de llegada, será

$$t_B = t_A + \frac{s}{v}$$

Calculando la *-extensión,

$$t_B^*([7,8],[30,30],[90,60]) = [7{,}5,8{,}34]$$

que es un intervalo existencial. Por lo tanto, aplicando el teorema semántico

$$\mathrm{U}(t_A,[7,8]')\ \mathrm{E}(t_B,[7{,}5,8{,}34]')\ \mathrm{E}(v,[60,90]')\ t_B = t_A + \frac{s}{v}$$

Teorema semántico para la función f^{**}:

Si $F(A) \in I^*(\mathbb{R})$ existe, las siguientes proposiciones son equivalentes:

a) $F(A) \subseteq f^{**}(A)$.

b) $\mathrm{U}(X', I(\mathbb{R}^n)\ ((. \notin X') \in \mathrm{Copred}^*(A) \Rightarrow (. \notin f(X') \in \mathrm{Copred}^*(F(A)))$

c) $\mathrm{U}(a_i,\ A_i')\ \mathrm{Q}(z,\mathrm{Dual}(F(A)))\ \mathrm{E}(a_p,A_p')\ z = f(a_p,a_i)$

En efecto, dada la relación entre f^* y f^{**} tenemos

$$F(A) \subseteq f^{**}(A) \ \Leftrightarrow\ \mathrm{Dual}(f^{**}(A)) \subseteq \mathrm{Dual}(F(A)) \ \Leftrightarrow\ f^*(\mathrm{Dual}(A)) \subseteq \mathrm{Dual}(F(A))$$

con lo que basta aplicar el teorema semántico para la función f^* en el intervalo $\mathrm{Dual}(A)$.

Ejemplo 5.5

Volviendo al caso de la suma $f(x_1,x_2) = x_1 + x_2$ para $X = ([1,2],[2,3])$ tenemos

$$[1,2] + [2,3] = [3,5]$$

con lo que el teorema semántico para f^{**} dice que

$$\mathrm{U}(z,[3,5]')\ \mathrm{E}(x_1,[1,2]')\ \mathrm{E}(x_2,[2,3]')\ z = x_1 + x_2$$

Si consideramos el caso $X = ([1,2],[4,1])$ tendremos

$$[1,2] + [4,1] = [5,3]$$

con la semántica

$$\mathrm{U}(x_2,[1,4]')\ \mathrm{E}(z,[3,5]')\ \mathrm{E}(x_1,[1,2]')\ z = x_1 + x_2$$

Los dos teoremas semánticos proporcionan un completo significado a las extensiones algebraicas intervalares f^* y f^{**} de una función continua, demuestran que f^* y f^{**} son optimales desde un punto de vista semántico e indican el sentido correcto de redondeo a utilizar en la computación de funciones F de $I^*(\mathrm{DI}^n)$ en $I^*(\mathrm{DI})$, si se quieren resultados semánticamente interpretables, aunque no dicen como estas funciones deben ser computadas. Queda pues pendiente la calculabilidad de f^* y f^{**} que se tratará más adelante.

6. Funciones racionales modales

Las aplicaciones ordinarias de los dos operadores meet y join para una función real continua f de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}$, proporcionan extensiones semánticas, f^* y f^{**} que, a excepción de funciones muy simples, son bastante inaccesibles a los cálculos, en comparación con las mismas funciones reales continuas o a las funciones definidas sobre intervalos.

Atendiendo a la sintaxis de una función continua f definida de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}$, existe otra extensión intervalar resultante de sustituir las operaciones racionales de su árbol sintáctico por las correspondientes extensiones intervalares. Este nuevo tipo de extensión es calculable, a diferencia de f^* y f^{**}, pero no tiene, en principio, una semántica completa; sin embargo f^* y f^{**} si que poseen tal semántica. El problema de interpretación de estas funciones racionales intervalares, que son realmente el centro de los cálculos numéricos, consistirá en relacionarlas con las correspondientes funciones semánticas, para conocer qué características debe tener una función racional modal para ser una buena aproximación de las funciones semánticas y además, admitir para sus resultados intervalares la misma interpretación. Los conceptos fundamentales para esclarecer este problema serán los de uniincidencia y multiincidencia.

Dos extensiones racionales aparecen:

$fR^*(X)$ es la función de $I^*(\mathbb{R}^n)$ en $I^*(\mathbb{R})$ definida por el árbol sintáctico de f cuando los operadores reales se transforman en sus *-extensiones modales.

$fR^{**}(X)$ es la función de $I^*(\mathbb{R}^n)$ en $I^*(\mathbb{R})$ definida por el árbol sintáctico de f cuando los operadores reales se transforman en sus **-extensiones modales.

que denominaremos, respectivamente, *-extensión y **-extensión modal racional.

Si todas las componentes de X son de la misma modalidad, $fR^*(X)$ y $fR^{**}(X)$ coinciden.

Ejemplo 6.1

Para la función racional de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}$ definida por $f(x_1, x_2) = x_1x_2 + g(x_1, x_2)$, con el operador $g(x_1, x_2) = (x_1 + x_2)^2$, consideremos como árbol sintáctico el de la figura 3.

Las imágenes de $X = ([-1, 1], [1, -1])$ por fR^* y fR^{**} se calculan asi:

Para el operador $x_1 \cdot x_2$:

$* -$ extensión: $\vee(x_1, [-1, 1]') \wedge (x_2, [-1, 1]')[x_1x_2, x_1x_2] = [0, 0]$

$**-$extensión: $\wedge(x_2, [-1, 1]') \vee (x_1, [-1, 1]')[x_1x_2, x_1x_2] = [0, 0]$

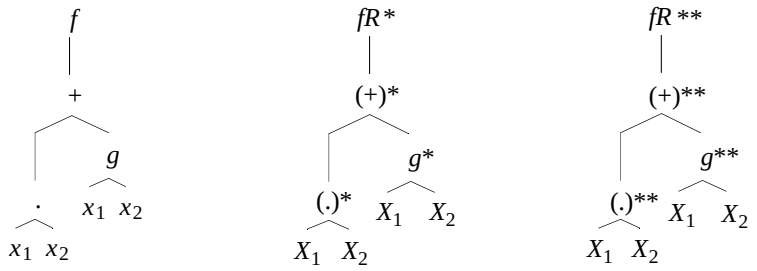


Figura 3: Árbol sintáctico

Para el operador $g(x_1, x_2)$:

$* -$ extensión: $\vee(x_1, [-1,1]') \wedge (x_2, [-1,1]')[(x_1+x_2)^2, (x_1+x_2)^2] = [1,0]$

$**-$extensión: $\wedge(x_2, [-1,1]') \vee (x_1, [-1,1]')[(x_1+x_2)^2, (x_1+x_2)^2] = [0,1]$

Por tanto

$$fR^*([-1,1],[1,-1]) = [0,0] + [1,0] = [1,0]$$
$$fR^{**}([-1,1],[1,-1]) = [0,0] + [0,1] = [0,1]$$

Los redondeos se aplican sobre las extensiones racionales de una función f de acuerdo con las definiciones

Ex$fR^*(X)$**:** Intervalo obtenido mediante el árbol sintáctico de f cuando cada componente de x se substituye por su redondeo externo modal, es decir, $\mathrm{Ex}(X_i) \supseteq X_i$ y los valores exactos de cada operador w del árbol de f se substituyen por los redondeos externos de los calculados, es decir, $\mathrm{Ex}(\mathrm{w}^*(X_i, \cdots)) \supseteq \mathrm{w}^*(X_i, \cdots)$.

En una hipotética aritmética ideal Ex se reduciría al operador identidad. Obviamente se tiene que $fR^*(X) \subseteq \mathrm{Ex}fR^*(X)$.

Respecto de la extensión $fR^{**}(X)$ definimos

In$fR^{**}(X)$**:** Intervalo obtenido mediante el árbol sintáctico de f cuando cada componente de X se substituye por su redondeo interno modal, es decir, $\mathrm{In}(X_i) \subseteq X_i$ y los valores exactos de cada operador w del árbol de f se substituyen por los redondeos internos de los calculados, es decir, $\mathrm{In}(\mathrm{w}^{**}(X_i..)) \subseteq \mathrm{w}^{**}(X_i...)$

En una hipotética aritmética real ideal, In se reduciría al operador identidad. Obviamente se tiene $\mathrm{In}fR^{**}(X) \subseteq fR^{**}(X)$

Se verifica que si f es una función continua definida de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}$, entonces

1. $\mathrm{Dual}(fR^*(X)) = fR^{**}(\mathrm{Dual}(X))$

2. $\mathrm{Dual}(\mathrm{Ex}fR^*(X)) = \mathrm{In}fR^{**}(\mathrm{Dual}(X))$

En efecto,

1. Si llamamos Ψ al árbol sintáctico de f, como $\mathrm{Dual}(f^*(X)) = f^{**}(\mathrm{Dual}(X))$, entonces

$$\mathrm{Dual}(fR^*(X)) = \mathrm{Dual}(\Psi(\mathrm{w}_i^*, X)) = \Psi(\mathrm{w}_i^{**}, \mathrm{Dual}(X)) = fR^{**}(\mathrm{Dual}(X))$$

2. $\mathrm{Dual}(\mathrm{Ex}fR^*(X)) = \mathrm{In}(\mathrm{Dual}(fR^*(X))) = \mathrm{In}fR^{**}(\mathrm{Dual}(X))$

Respecto de la isotonía tenemos que

1. $X \subseteq Y \;\Rightarrow\; fR^*(X) \subseteq fR^*(Y)$, $fR^{**}(X) \subseteq fR^{**}(Y)$
   pues si Ψ es el árbol sintáctico de f tenemos

$$fR^*(X) = \Psi(\mathrm{w}_i^*, X) \subseteq \Psi(\mathrm{w}_i^*, Y) = fR^*(Y)$$

   ya que para cualquier operador w_i del árbol de f se verifica

$$X \subseteq Y \;\Rightarrow\; \mathrm{w}_i^*(X) \subseteq \mathrm{w}_i^*(Y)$$

   Análogo razonamiento prueba la isotonía respecto de $\subseteq$ para fR^{**}.

2. $\mathrm{Ex}fR^*(X)$ y $\mathrm{In}fR^{**}(X)$ son asimismo isotónicos respecto de $\subseteq$, si los redondeos intervalares de los argumentos y de los operadores son también isotónicos respecto de $\subseteq$.

   En efecto, basta una inducción finita sobre los vértices del árbol sintáctico de la función f.

Estudiemos ahora cuando ambas extensiones racionales coinciden. Para ello, necesitamos el concepto de operador racional.

> *Operador racional* sobre un intervalo X es cualquier función real continua cuya extensión semántica sea JM-conmutativa.

Ejemplo 6.2

No es un operador racional la función f de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}$ dada por

$$f(x_1, x_2) = (x_1 + x_2)^2$$

para $X = ([-1, 1], [1, -1])$, pues

$$f^*([-1, 1], [1, -1]) = [1, 0] \neq [0, 1] = f^{**}([-1, 1], [1, -1])$$

aunque si en $X = ([1,2],[3,1])$ ya que

$$\begin{aligned} f^*([1,2],[3,1]) &= \vee(x_1,[1,2]') \wedge (x_2,[1,3]')[(x_1+x_2)^2,(x_1+x_2)^2] = \\ &= \vee(x_1,[1,2]')[(x_1+3)^2,(x_1+1)^2] = [16,9] \\ f^{**}([1,2],[3,1]) &= \wedge(x_2,[1,3]') \vee (x_1,[1,2]')[(x_1+x_2)^2,(x_1+x_2)^2] = \\ &= \wedge(x_2,[1,3]')[(x_2+1)^2,(x_2+2)^2] = [16,9] \end{aligned}$$

Los operadores definidos por las funciones

$$\begin{aligned} f_1(x_1,x_2) &= x_1 \cdot x_2 \\ f_2(x_1,x_2) &= |x_1 \cdot x_2| \\ f_3(x_1,x_2) &= x_1^2 + x_2^2 \end{aligned}$$

sobre $X = (X_1,X_2) = ([-1,1],[1,-1])$ son operadores racionales, puesto que como funciones son JM-conmutativas; sin embargo

$$f_4(x_1,x_2) = |x_1+x_2| \quad , \quad f_5(x_1,x_2) = (x_1+x_2)^2$$

no lo son. Por ejemplo para la función f_4 obtenemos $f_4^*(X) = [1,0]$ y $f_4^{**}(X) = [0,1]$.

La función

$$f(x_1,x_2,x_3,x_4) = x_1x_2 + x_3x_4$$

puede comprobarse que es JM-conmutativa en cualquier recinto, por lo que puede ser considerada como un operador racional.

Sin embargo, la función g de $\mathbb{R}^4$ en $\mathbb{R}$ dada por

$$g(x_1,x_2,x_3,x_4) = (x_1+x_2)(x_3+x_4)$$

no es JM-conmutativa pues, por ejemplo

$$g^*([-2,2],[1,-1],[-1,1],[2,-2]) = [1{,}5,-1{,}5]$$

$$g^{**}([-2,2],[1,-1],[-1,1],[2,-2]) = [-1{,}5,1{,}5]$$

a pesar de tener sus operadores racionales. Diremos así que f es globalmente JM-conmutativa y g no lo es.

En el caso de JM-conmutatividad de todos los operadores que intervienen en el árbol sintáctico de una función f racional continua, las dos extensiones sintácticas coinciden y asi definimos la *función racional modal* fR

fR es la función $I^*(\mathbb{R}^n)$ en $I^*(\mathbb{R})$ definida por el árbol sintáctico de f cuando los operadores reales son JM-conmutativos y se sustituyen por, en este caso, su única extensión modal.

Para una función racional modal se cumple que

$$\mathrm{In}fR(\mathrm{In}(X)) = \mathrm{Dual}(\mathrm{Ex}fR(\mathrm{Ex}(\mathrm{Dual}(X))))$$

Este resultado permite usar sólo la implementación del redondeo externo.

7. Operadores racionales

Averiguamos cuales son los principales operadores racionales.

a) Toda función continua de una variable es JM-conmutativa, y por lo tanto un operador racional.

En efecto pues no hay problema de conmutación entre $\wedge$ y $\vee$.

Los casos más interesantes son los operadores monótonos u otros fácilmente programables; para $X = [x_1, x_2]$

$$\ln X = \ln[x_1, x_2] = [\ln x_1, \ln x_2] \text{ si } X > 0$$

$$\exp(X) = e^X = \exp[x_1, x_2] = [\exp x_1, \exp x_2]$$

$$\text{abs}(X) = |X| = |[x_1, x_2]| = \begin{cases} [x_1, x_2] \text{ si } X \geq 0 \\ [-x_2, -x_1] \text{ si } X \leq 0 \\ [0, \text{máx}(|x_1|, |x_2|)] \text{ si } x_1 < 0 \text{ y } x_2 \geq 0 \\ [\text{máx}(|x_1|, |x_2|), 0] \text{ si } x_1 \geq 0 \text{ y } x_2 < 0 \end{cases}$$

$$\text{pow}(X) = X^n = [x_1, x_2]^n = \begin{cases} [x_1^n, x_2^n] & \text{si } n \text{ es impar} \\ \left.\begin{array}{l} [x_1^n, x_2^n] \text{ si } x_1 \geq 0 \text{ y } x_2 \geq 0 \\ [x_2^n, x_1^n] \text{ si } x_1 < 0 \text{ y } x_2 < 0 \\ [0, (\text{máx}(|x_1|, |x_2|))^n] \text{ si } x_1 < 0 \text{ y } x_2 \geq 0 \\ [(\text{máx}(|x_1|, |x_2|))^n, 0] \text{ si } x_1 \geq 0 \text{ y } x_2 < 0 \end{array}\right\} & \text{si } n \text{ es par} \end{cases}$$

$$\text{root}(X) = \sqrt[n]{X} = \sqrt[n]{[x_1, x_2]} = [\sqrt[n]{x_1}, \sqrt[n]{x_2}] \text{ si } x_1 \geq 0 \text{ y } x_2 \geq 0$$

Una función $f(x, y)$ es *uniformemente monótona* respecto de x si es creciente (o decreciente) respecto de x, independientemente del valor de y. Diremos que es *parcialmente monótona* respecto de x si es monótona respecto de x, independientemente del valor de y, pero para unos valores de y es creciente respecto de x y para otros es decreciente.

b) Cualquier función continua de dos variables $f(x, y)$ parcialmente monótona en un dominio (X', Y') es JM-conmutativa para los correspondientes argumentos intervalares (X, Y)

En efecto, si X e Y tienen la misma modalidad, entonces $f(x, y)$ está acotada por sus valores en los vértices del dominio (X', Y'). De otro modo, los casos posibles se caracterizan por el comportamiento de $f(x, y)$ en la frontera de un dominio intervalar bidimensional. A partir de la continuidad de f se demuestra fácilmente que en ella existen dos puntos de silla situados en el conjunto de vértices (X', Y') o en algún punto del dominio.

En esta situación están los operadores $x + y$, $x - y$, $x * y$, x/y, x^y.

Ejemplo 7.1

Comprobemos como para la suma de $X = [a,b]$ y $Y = [c,d]$ es

$$[a,b] + [c,d] = [a+c, b+d]$$

Consideremos los casos siguientes:

1. Supongamos que un intervalo es propio y el otro es impropio.
   [1,2] + [2,−1] = [SDV(+,[1,2],[2,−1]), SDV(+,[2,−1],[1,2])] =[3,1]
2. Si los dos son propios
   [1,2] + [−1,3] = [SDV(+,([1,2],[−1,3]),∅), SDV(+,∅,([1,2],[−1,3]))] =[0,5]
3. Si los dos son impropios
   [1,−1] + [1,−2] = [SDV(+,∅,([1,−1],[1,−2])), SDV(+,([1,−1],[1,−2]),∅)] = [2,−3]

Para el producto, el problema aparece al calcular el producto de dos intervalos, cuando el dominio corta algunos de los ejes. Por ejemplo, calculemos el valor de $[1,2] * [3,-1]$; haciendo $X = [1,2]$, $Y = [3,-1]$ tenemos

$$\begin{aligned}&[1,2] * [3,-1] = [\mathrm{SDV}(\cdot,[1,2],[3,-1]), \mathrm{SDV}(\cdot,[3,-1],[1,2])] = \\ &= [\mathrm{mín}(x,[1,2]')\,\mathrm{máx}(y,[-1,3]')xy, \mathrm{mín}(y,[-1,3]')\,\mathrm{máx}(x,[1,2]')xy] = \\ &= [3,-1]\end{aligned}$$

c) Toda función $f(x,y)$ continua en $(x,y) \in \mathbb{R}^n$ que sea uniformemente monótona, isotónica respecto de x y antitónica respecto de y en el dominio (X', Y'), es JM-conmutativa para (X,Y) y

$$fR(X,Y) = f^{**}(X,Y) = f^{*}(X,Y) = [f(\mathrm{Inf}(X), \mathrm{Sup}(Y)),\ f(\mathrm{Sup}(X), \mathrm{Inf}(Y))]$$

siendo Inf(X) := (Inf(X_1),...,Inf(X_m)) y Sup(X) := (Sup(X_1),...,Sup(X_m)).

En efecto, como f es uniformemente monótona, al ser

$$X-\text{isotónica:} \begin{cases} X_j \text{ propio} & \Rightarrow \text{ el mínimo de } f \text{ está en } \mathrm{Inf}(X_j) \\ X_j \text{ impropio} & \Rightarrow \text{ el máximo de } f \text{ está en } \mathrm{Inf}(X_j) \end{cases}$$

$$Y-\text{antitónica:} \begin{cases} Y_j \text{ propio} & \Rightarrow \text{ el mínimo de } f \text{ está en } \mathrm{Sup}(Y_j) \\ Y_j \text{ impropio} & \Rightarrow \text{ el máximo de } f \text{ está en } \mathrm{Sup}(Y_j) \end{cases}$$

con lo que

$$\begin{aligned}&\min((x_p,y_p),(X_p,Y_p)')\max((x_i,y_i),(X_i,Y_i)')f(x_p,x_i,y_p,y_i) = f(\mathrm{Inf}(X),\mathrm{Sup}(Y)) = \\ &= \max((x_i,y_i),(X_i,Y_i)')\min((x_p,y_p),(X_p,Y_p)')f(x_p,x_i,y_p,y_i)\end{aligned}$$

y análogamente

$$\min((x_i,y_i),(X_i,Y_i)')\max((x_p,y_p),(X_p,Y_p)')f(x_p,x_i,y_p,y_i) = f(\mathrm{Sup}(X),\mathrm{Inf}(Y)) =$$
$$= \max((x_p,y_p),(X_p,Y_p)')\min((x_i,y_i),(X_i,Y_i)')f(x_p,x_i,y_p,y_i)$$

por lo que $f^*(X,Y) = f^{**}(X,Y)$ y

$$f^*(X,Y) = [f(\mathrm{Inf}(X),\mathrm{Sup}(Y)), f(\mathrm{Sup}(X),\mathrm{Inf}(Y))]$$

Ejemplo 7.2

Consideremos la función

$$g(x,y,z,t) = \frac{x-y}{z-t}$$

para $X=[-1,1]$, $Y=[2,1]$, $Z=[-1,1]$, $T=[3,2]$. Como

$$\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{1}{z-t} < 0, \quad \text{es antitónica respecto de } x$$
$$\frac{\partial g}{\partial y} = \frac{-1}{z-t} > 0, \quad \text{es isotónica respecto de } y$$
$$\frac{\partial g}{\partial z} = \frac{y-x}{(z-t)^2} > 0, \quad \text{es isotónica respecto de } z$$
$$\frac{\partial g}{\partial t} = \frac{x-y}{(z-t)^2} < 0, \quad \text{es antitónica respecto de } t$$

Tendremos pues

$$\begin{aligned} g^*(X,Y,Z,T) &= [g(x_2,y_1,z_1,t_2), g(x_1,y_2,z_2,t_1)] = \left[\frac{1-2}{-1-2}, \frac{-1-1}{1-3}\right] = \\ &= \left[\frac{-1}{-3}, \frac{-2}{-2}\right] = \left[\frac{1}{3}, 1\right] \end{aligned}$$

Para la función

$$g(x,y,z,t) = \frac{(x+y)z}{t}$$

en $X=[-1,1]$, $Y=[2,1]$, $Z=[1,3]$, $T=[3,2]$, los signos de la derivadas parciales prueban que g es x-isotónica, y-isotónica, z-isotónica y t-antitónica. Por tanto

$$g^*(X,Y,Z,T) = [g(x_1,y_1,z_1,t_2), g(x_2,y_2,z_2,t_1)] = \left[\frac{(-1+2)1}{2}, \frac{(1+1)3}{3}\right] = \left[\frac{1}{2}, 2\right]$$

Un caso particular interesante es el operador *identidad limitada* definido por:

$$\begin{aligned} \mathrm{LID}: \quad \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (t,x,y) &\longrightarrow \mathrm{LID}(t,x,y) = \begin{cases} \min(x,y) & \text{si } t \le \min(x,y) \\ t & \text{si } \min(x,y) \le t \le \max(x,y) \\ \max(x,y) & \text{si } \max(x,y) \le t \end{cases} \end{aligned}$$

Este operador es JM-conmutativo por verificar las condiciones indicadas en el apartado c) anterior, con $X = (T, X, Y)$ por lo que

$$\begin{aligned}\mathrm{LID}^{**}(T,X,Y) &= \mathrm{LID}^{*}(T,X,Y) = \\ &= [\mathrm{LID}(\mathrm{Inf}(T),\mathrm{Inf}(X),\mathrm{Inf}(Y)), \mathrm{LID}(\mathrm{Sup}(T),\mathrm{Sup}(X),\mathrm{Sup}(Y))]\end{aligned}$$

Si T es el intervalo $[-\infty, +\infty]$, es decir, si $T = \vee(t, \mathbb{R})[t, t]$, entonces

$$\begin{aligned}\mathrm{LID}^{**}(T,X,Y) &= \mathrm{LID}^{*}(T,X,Y) = \\ &= [\min(\mathrm{Inf}(X),\mathrm{Inf}(Y)), \max(\mathrm{Sup}(X),\mathrm{Sup}(Y))] = X \vee Y\end{aligned}$$

Si T es el intervalo $[+\infty, -\infty]$, es decir, si $T = \wedge(t, \mathbb{R})[t, t]$, entonces

$$\begin{aligned}\mathrm{LID}^{**}(T,X,Y) &= \mathrm{LID}^{*}(T,X,Y) = \\ &= [\max(\mathrm{Inf}(X),\mathrm{Inf}(Y)), \min(\mathrm{Sup}(X),\mathrm{Sup}(Y))] = X \wedge Y\end{aligned}$$

luego los operadores $\wedge$ y $\vee$ son por tanto operadores JM-conmutativos, es decir, operadores racionales. Es importante este resultado, pues si en la evaluación de una función intervalo queremos disminuir la posible pérdida de información originada por la multiincidencia es necesario utilizar los operadores $\wedge$ y $\vee$.

d) Toda función continua $f(x, y)$, con $x \in \mathbb{R}$ e $y = (u, v) \in \mathbb{R}^m$, que sea uniformemente monótona para los argumentos y en un dominio (X', Y'), u-isotónica y v-antitónica, es un operador racional para los correspondientes argumentos intervalares (X, Y).

En efecto, la continuidad de $f(x, y_0)$ en X' para cualquier $y_0 \in \mathbb{R}^{n-1}$, implica la existencia en X' del mínimo y máximo de $f(x, y_0)$ respecto de x. Vamos a demostrar la existencia de puntos de silla, lo que significa la JM-conmutatividad.

Sea (x, u_m, v_M) las coordenadas donde $f(x, u, v)$ alcanza un mínimo respecto de u y un máximo respecto de v, independientemente del valor de x. Si $f(x_m, u_m, v_M) = \min\limits_{x \in X'} f(x, u_m, v_M)$, entonces $(x_m, u_m, v_M) \in \mathrm{SDP}((X', U'), V')$, ya que,
$\mathrm{U}(x, X')\ \mathrm{U}(u, U')\ \mathrm{U}(v, V')\ (f(x_m, u_m, v) \leq f(x_m, u_m, v_M) \leq f(x, u_m, v_M) \leq f(x, u, v_M))$

Sea (x, u_M, v_m) las coordenadas donde $f(x, u, v)$ alcanza un máximo respecto de u y un mínimo respecto de v, independientemente del valor de x. Si $f(x_M, u_M, v_m) = \max\limits_{x \in X'} f(x, u_M, v_m)$, entonces $(x_M, u_M, v_m) \in \mathrm{SDP}(V', (X', U'))$, ya que,
$\mathrm{U}(x, X')\ \mathrm{U}(u, U')\ \mathrm{U}(v, V')\ (f(x, u, v_m) \leq f(x, u_M, v_m) \leq f(x_M, u_M, v_m) \leq f(x_M, u_M, v))$

Por lo tanto en este caso, siguiendo la notación de la demostración del resultado obtenido en c),

$$\begin{aligned}fR(X,Y) = f^{**}(X,Y) &= f^{*}(X,Y) = \\ &[\min_{x \in X'} f(x, \mathrm{Inf}(U), \mathrm{Sup}(V)), \max_{x \in X'} f(x, \mathrm{Sup}(U), \mathrm{Inf}(V))] \ \text{ si } X \text{ es propio} \\ &[\max_{x \in X'} f(x, \mathrm{Inf}(U), \mathrm{Sup}(V)), \min_{x \in X'} f(x, \mathrm{Sup}(U), \mathrm{Inf}(V))] \ \text{ si } X \text{ es impropio}\end{aligned}$$

El teorema no se modifica esencialmente si x tiene más de una componente siempre y cuando se imponga la condición de unimodalidad para X.

Realmente, aquellas funciones del tipo $f(x, y)$, que sean uniformemente monótonas para $y \in \mathbb{R}^n$ y JM-conmutativas para $x \in \mathbb{R}^m$ en cualquier vértice del y-prisma definido por los y-argumentos intervalares, puede ser admitida en el repertorio de operadores racionales. De hecho si

$$f(x_m, y_M, u_m, v_M) = \text{mín}(x, X')\,\text{máx}(y, Y')f(x, y, u_m, v_M)$$

es un punto de silla de la (x, y)-función $f(x, y, u_m, v_M)$, ya que

$$\begin{aligned}&\mathrm{U}(x, X')\ \mathrm{U}(y, Y')\ \mathrm{U}(u, U')\ \mathrm{U}(v, V')\ (f(x_m, y, u_m, v) \leq f(x_m, y, u_m, v_M)\\ &\leq f(x_m, y_M, u_m, v_M) \leq f(x, y_M, u_m, v_M) \leq f(x, y_M, u, v_M))\end{aligned}$$

Otros operadores JM-conmutativos útiles se estudiarán en el capítulo siguiente cuando se trate de la optimalidad de cálculos racionales.

No obstante, en la práctica real, los operadores de los cálculos racionales deberán ser tan simples como sea posible, aunque constituyan una familia más grande que los operadores clásicos de las funciones reales racionales.

Referencias

[1] E. Gardeñes, H. Mielgo and A. Trepat, *Modal intervals: reason and ground semantics* in Interval Mathematics, Springer, Heidelberg 1985.

[2] E. Gardeñes and H. Mielgo, *Modal interval analysis: functions*, Polish Symposium on Interval and Fuzzy Mathematics, Poznan 1986.

[3] E. Gardeñes, H. Mielgo and M.A. Sainz, *Presentation of the research group SIGLA/X*, Report IMA 95-10, Dept. de Informática y Matemática Aplicada, Universidad de Gerona (Spain), 1995.

[4] SIGLA/X group, *Construcción de los intervalos modales*, Report IMA 96-07-RR, Dept. de Informática y Matemática Aplicada, Universidad de Girona (Spain), 1996.

[5] Trepat, A., *Completación reticular del espacio de intervalos*, Tesina Facultad de matemáticas, Universidad de Barcelona, 1982.

8. Problemas

1. Dada la función $f(x,y) = x^2 + y^2$, hallar la extensión unida y la extensión racional a los intervalos $X = [-1,1]$ e $Y = [-2,2]$. Escribir las semánticas de los resultados y compararlas por la relación de inclusión.

2. Para la función $f(x) = x^2 + x + 1$, definir la extensión pobre y comprobar que verifica la condición semántica para el intervalo $X = [-3,2]$.

3. Calcular $f^*(X)$ y $f^{**}(X)$ en los siguientes casos

   a) $f(x,y) = x + y$ para $X = [3,-1]$, $Y = [2,3]$

   b) $f(x,y) = xy$ para $X = [-1,2]$, $Y = [3,-5]$

   c) $f(x,y) = x/y$ para $X = [3,-6]$, $Y = [-1,-2]$

   d) $f(x,y) = x^2 + y^2$ para $X = [-3,4]$, $Y = [-2,6]$

   e) $f(x,y) = x^2 + y^2$ para $X = [-1,5]$, $Y = [5,-1]$

   f) $f(x_1,x_2,x_3) = x_1(x_2 + x_3)$ para $X = ([-1,3],[2,3],[-4,1])$

   g) $f(x_1,x_2,x_3) = x_1(x_2 + x_3)$ para $X = ([-1,3],[3,2],[1,-4])$

   h) $f(x_1,x_2,x_3) = x_1(x_2 + x_3)$ para $X = ([-1,3],[4,1],[-5,1])$

   i) $f(x_1,x_2,x_3) = x_1x_2 + x_1x_3$ para $X = ([-1,3],[2,3],[-4,1])$

   j) $f(x_1,x_2,x_3) = x_1x_2 + x_1x_3$ para $X = ([-1,3],[3,2],[1,-4])$

   k) $f(x_1,x_2,x_3) = x_1x_2 + x_1x_3$ para $X = ([-1,3],[4,1],[-5,1])$

   l) $f(x_1,x_2,x_3,x_4) = x_2x_1 + x_3x_1 + x_4x_1$ para $X = ([1,2],[1,-4],[-7,3],[9,8])$

4. Demostrar que si $X = [x_1,x_2]$ e $Y = [y_1,y_2]$ entonces

   a) Si $f(x,y) = x - y$, es $f^*(X,Y) = [x_1 - y_2, x_2 - y_1] = f^{**}(X,Y)$

   b) Si $f(x,y) = xy$, calcular $f^*(X,Y)$ y $f^{**}(X,Y)$ si $x_1 > 0$, $x_2 < 0$, $y_1 < 0$ e $y_2 > 0$

   c) Si $f(x,y) = x/y$, calcular $f^*(X,Y)$ y $f^{**}(X,Y)$ si $x_1 > 0$, $x_2 < 0$, $y_1 < 0$ e $y_2 < 0$

5. Interpretaciones semánticas de los resultados del ejercicio 3.

6. Para la función $f(x,y) = x^2 - 3y^2$, comprobar que si $(X_1,Y_1) = ([1,2],[3,1]) \subseteq ([-2,3],[1,6]) = (X_2,Y_2)$ es $f^*(X_1,Y_1) \subseteq f^*(X_2,Y_2)$ y $f^{**}(X_1,Y_1) \subseteq f^{**}(X_2,Y_2)$.

7. Hallar los puntos de silla de las siguientes funciones y decidir si son JM-conmutativas.

   a) $f(x,y) = x^2 + y^2 + 2xy - 20x - 20y$ en $X = [1,6]$, $Y = [8,2]$

   b) $f(x,y) = y^2 - x^2$ en $X = [1,-1]$, $Y = [-1,1]$

c) $f(x,y) = y^2 - x^2$ en $X = [1,3]$, $Y = [3,1]$

d) $f(x,y) = (x+y)^2$ en $X = [3,-3]$, $Y = [-3,3]$

e) $f(x,y) = (x+y)^2$ en $X = [2,0]$, $Y = [1,3]$

f) $f(x,y) = |x+y|$ en $X = [1,-1]$, $Y = [-1,1]$

g) $f(x,y) = |x+y|$ en $X = [1,-1]$, $Y = [0,4]$

h) $f(x,y) = |x+y|$ en $X = [1,-1]$, $Y = [0,3/2]$

i) $f(x,y) = x^2 + y^2$ en $X = [-1,1]$, $Y = [4,0]$

j) $f(x,y) = x^2 + y^2 - 2x - 2y + 2$ en $X = [0,2]$, $Y = [3,1]$

8. Construir un árbol sintáctico y hallar los redondeos internos y externos de $fR^*(X)$, $fR^{**}(X)$ y $fR(X)$, si existe, en los casos siguientes

a) $f(x,y) = (x-y)(x+y)$ con $X = [-1,1]$, $Y = [2,-1]$

b) $f(x,y) = (x-y)/(x+y)$ con $X = [-1,1]$, $Y = [10,6]$

c) $f(x,y) = (x^2 - y^2)(x^2 + y^2)$ con $X = [-1,1]$, $Y = [2,-1]$

d) $f(x,y) = (x^2 + y^2)/(x-y)^2$ con $X = [-1,1]$, $Y = [10,6]$

e) $f(x_1,x_2,x_3) = x_1x_2x_3/(x_1 + x_2/x_3)$ con $X = ([2,1],[-4,5],[8,4])$

f) $f(x_1,x_2,x_3,x_4) = x_1x_2 - x_3x_4$ con $X = ([-1,1],[1,-1],[2,-2],[3,4])$