Construcción de los intervalos modales

SIGLA/X Group[1]

Resumen

The ground idea of interval mathematics is that ordinary set-theoretical intervals are the consistent context for numerical computing. However, this interval context presents basic structural and semantical rigidities arising from its set-theoretical foundation.To correct this situation, modal interval analysis defines intervals starting from the identification of real numbers with the sets of predicates they accept (or reject). This report gives an account of te ground definitions and structures which support the semantically oriented system of modal intervals.

1. Introducción

Si a y b son dos números reales, el intervalo clásico $[a, b]'$ (la marca $'$ distinguirá los intervalos clásicos de los intervalos modales) viene definido de modo conjuntista por

$$[a, b]' := \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$$

que extiende la interpretación de un numero real x al conjunto unitario $\{x\}$. Dado que en la matemática aplicada un valor real x no tiene interés por sí mismo sino por los predicados que satisface, parece natural sustituir la identificación anterior $x \leftrightarrow \{x\}$, que subyace en la teoría intervalar clásica, por la que identifica a un número real con el conjunto de propiedades que verifica.

En una operación de cálculo con información digital numérica, un resultado intervalar X' señala y acota algún número real x (o números) que verifica un determinado predicado $P(x)$ y este hecho de señalar requiere necesariamente una elección entre los cuantificadores existencial y universal para construir una de las dos expresiones lógicas:

$$\begin{aligned} (\exists x \in X')\ P(x): &\quad \text{existe un elemento } x \text{ de } X' \text{ que verifica } P(x) \\ (\forall x \in X')\ P(x): &\quad \text{todo elemento } x \text{ del conjunto } X' \text{ verifica } P(x) \end{aligned}$$

[1]SIGLA/X membership: Calm R., Estela M.R., Gardeñes E., Jorba L., Mielgo H., Sainz M.A., Trepat A.

Dentro del contexto de los intervalos clásicos no existe ninguna indicación sobre cual de estas dos alternativas semánticas corresponde a cada valor intervalar, puesto que su definición conjuntista agota la información que poseen. El efecto de este fallo de los intervalos clásicos puede ser ilustrado mediante las siguientes cuatro proposiciones referidas a la relación $a+x = b$ entre números reales, con $a\in[1,2]'$ y $b\in[3,7]'$:

$$1)\ (\forall \in [1,2]')\ (\forall x \in [2,5]')\ (\exists b \in [3,7]') \quad a+x = b$$

$$2)\ (\forall a \in [1,2]')\ (\forall b \in [3,7]')\ (\exists x \in [1,6]') \quad a+x = b$$

$$3)\ (\forall x \in [1,6]')\ (\exists a \in [1,2]')\ (\exists b \in [3,7]') \quad a+x = b$$

$$4)\ (\forall b \in [3,7]')\ (\exists a \in [1,2]')\ (\exists x \in [2,5]') \quad a+x = b$$

Tenemos que 1) y 4) son verdaderas para la solución $X'=[2,5]'$ de la ecuación intervalar $[1,2]'+X'= [3,7]'$, mientras que 2) y 3), a pesar de que son correctas, están fuera del alcance de esta ecuación. Por otra parte, cuando la suma hay que hacerla de forma digital el único redondeo posible para los intervalos clásicos es el redondeo externo y la ecuación debe ser, por ejemplo, $[1,2]'+X' \subseteq [2.9,7.1]'$; en este caso 1) pasaría a ser

$$1')\ (\forall a \in [1,2]')\ (\forall x \in [2,5]')\ (\exists b \in [2{,}9,7{,}1]') \quad a+x = b$$

pero 4) dejaría de ser cierta, ya que el redondeo externo de $[3,7]'$ sería incompatible con el cuantificador universal $\forall$. Más aún, en el caso de la proposición 1), su solución no puede obtenerse mediante las operaciones propias de la teoría de los intervalos clásicos.

2. Construcción de los intervalos modales

Para reducir las deficiencias provenientes de la ambigüedad semántica y la falta de completitud estructural de los intervalos conjuntistas clásicos, los intervalos modales van a ser definidos como pares formados por un intervalo conjuntista junto con un cuantificador, universal o existencial, que proporcionará un modo de selección.

Consideremos el contexto formado por:

a) el conjunto $\mathbb{R}$ de los números reales

b) el conjunto $I(\mathbb{R})$ de los intervalos clásicos en $\mathbb{R}$

$$I(\mathbb{R}) = \{[a,b]' \mid a,b \in \mathbb{R},\ a \leq b\}$$

cuyos elementos representaremos por A', X',..., etc.

c) el conjunto Pred($\mathbb{R}$) de las funciones proposicionales en una variable sobre el referencial $\mathbb{R}$:

$$\text{Pred}(\mathbb{R}) = \{P(.) \mid P(.) : \mathbb{R} \to \{0,1\}\}$$

d) los cuantificadores, universal y existencial.

Los cuantificadores existencial y universal se representarán por U y E usando una notación más natural que la representación clásica mediante $\forall$ y $\exists$. Como los cuantificadores son operadores que transforman predicados reales en predicados intervalares al igual que actúa, por ejemplo, el operador integral

$$\int_{(x,A')} f(x) = F(A')$$

escribiremos

$$\text{E}(x, A')\ P(x)$$
$$\text{U}(x, A')\ P(x)$$

indicando ambos argumentos, el índice real x y el argumento intervalar A'.

Definimos un intervalo modal A como un elemento del producto cartesiano ($I(\mathbb{R})$, {E,U})

$$A := (A', \text{Q}A)$$

donde QA es uno de los cuantificadores E o U. Así un intervalo modal es un par formado por un intervalo conjuntista clásico y un cuantificador. Al intervalo cerrado A' le llamamos *extensión* y al cuantificador QA *modalidad*

$$\text{ext}(A',\text{Q}A) := A' \qquad\qquad \text{mod}(A',\text{Q}A) := \text{Q}A$$

Los conjuntos básicos de intervalos modales son:

$$I^*(\mathbb{R}) := \{(A', \text{Q}A) \mid A' \in I(\mathbb{R}),\ \text{Q}A \in \{\text{U}, \text{E}\}\}$$
$$I_e(\mathbb{R}) := \{(A', \text{E}) \mid A' \in I(\mathbb{R})\}$$
$$I_u(\mathbb{R}) := \{(A', \text{U}) \mid A' \in I(\mathbb{R})\}$$
$$I_p(\mathbb{R}) := \{(A', \text{Q}A) \in I^*(\mathbb{R}) \mid \text{E}(x, \mathbb{R})\ (A' = [x, x]')\}$$

que verifican $I^*(\mathbb{R}) = I_e(\mathbb{R}) \cup I_u(\mathbb{R})$. Y así, los intervalos modales constituyen otra extensión de la recta real, distinta de la extensión que representan los intervalos clásicos.

Definimos como *coordenadas* de un intervalo modal $A = (A',\text{Q}A)$

$$\text{Inf}(A) := \begin{cases} \text{mín}(A') & \text{si Q}A = \text{E} \\ \text{máx}(A') & \text{si Q}A = \text{U} \end{cases} \qquad \text{Sup}(A) := \begin{cases} \text{máx}(A') & \text{si Q}A = \text{E} \\ \text{mín}(A') & \text{si Q}A = \text{U} \end{cases}$$

Introducimos la siguiente notación canónica para los intervalos modales:

$$[a,b] := \begin{cases} ([a,b]', \mathrm{E}) & \text{si } a \leq b \\ ([b,a]', \mathrm{U}) & \text{si } a \geq b \end{cases}$$

De aquí en adelante la notación [a,b], incluso cuando $a \leq b$, no indicará un intervalo cerrado clásico, es decir, un conjunto de puntos, sino un intervalo modal. Así [1,3] no es el conjunto de valores reales entre 1 y 3, que representaremos por [1,3]′, sino el intervalo modal, es decir, el par ([1,3]′,E); asimismo [3,1] es el par ([1,3]′,U).

Se verifican las propiedades siguientes

1. $\mathrm{Inf}([a,b]) = a$ y $\mathrm{Sup}([a,b]) = b$
2. $\mathrm{ext}([a,b]) = [\text{mín}\{a,b\}, \text{máx}\{a,b\}]'$ y $\mathrm{mod}([a,b]) = \begin{cases} \mathrm{E} & \text{si } a \leq b \\ \mathrm{U} & \text{si } a \geq b \end{cases}$

En efecto,

1. $\mathrm{Inf}([a,b]) = \begin{cases} \text{mín}([a,b]') = a & \text{si } a \leq b \\ \text{máx}([b,a]') = a & \text{si } a \geq b \end{cases}$

   $\mathrm{Sup}([a,b]) = \begin{cases} \text{máx}([a,b]') = b & \text{si } a \leq b \\ \text{mín}([b,a]') = b & \text{si } a \geq b \end{cases}$
2. Por definición del intervalo [a,b].

Por estas propiedades anteriores podemos escribir

$$I^*(\mathbb{R}) = \{[a,b] \mid a,b \in \mathbb{R}\}$$
$$I_e(\mathbb{R}) = \{[a,b] \mid a,b \in \mathbb{R},\ a \leq b\}$$
$$I_u(\mathbb{R}) = \{[a,b] \mid a,b \in \mathbb{R},\ a \geq b\}$$
$$I_p(\mathbb{R}) = \{[a,a] \mid a \in \mathbb{R}\}$$

Un intervalo $[a,b] \in I_e(\mathbb{R})$ se le denomina *intervalo propio* y, si es el resultado de un cálculo, señala ciertos valores desconocidos x situados entre a y b; un intervalo $[a,b] \in I_u(\mathbb{R})$ se denomina *intervalo impropio* y, si es el resultado de un cálculo, señala cualquier valor real entre a y b. En particular, un intervalo como $[a,a]$ se denomina *intervalo puntual*; su extensión es el conjunto unitario $\{a\}$ y su modalidad es E o U pudiendo ser considerado indistintamente como intervalo propio o como impropio. En el diagrama de Moore tenemos el gráfico correspondiente a la Figura 1.

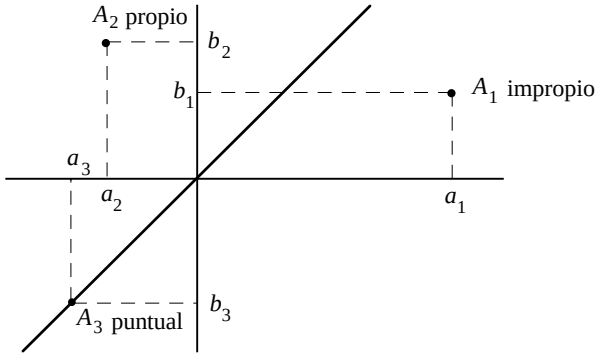


Figura 1: Diagrama de Moore

El cuantificador modal Q, que va a ser la principal herramienta del análisis intervalar modal, asocia a cada predicado real un predicado intervalar según la definición siguiente: para una variable $x \in \mathbb{R}$, un predicado $P(.) \in \text{Pred}(\mathbb{R})$ y un intervalo modal $(A', \text{Q}A) \in I^*(\mathbb{R})$

$$\text{Q}(x, (A', \text{Q}A))P(x) := \begin{cases} \text{E}(x, A')P(x) & \text{si mod}(A)\text{=E} \\ \text{U}(x, A')P(x) & \text{si mod}(A)\text{=U} \end{cases}$$

Por ejemplo,

$$\text{Q}(x, ([-3, 1]', \text{E}))\ x \geq 0 := \text{E}(x, [-3, 1]')\ x \geq 0$$
$$\text{Q}(x, ([1, 2]', \text{U}))\ x \geq 0 := \text{U}(x, [1, 2]')\ x \geq 0$$

Se verifica que $\text{Q}(x, [a, b]) = \begin{cases} \text{E}(x, [a, b]') & \text{si } a \leq b \\ \text{U}(x, [b, a]') & \text{si } a \geq b \end{cases}$ como se deduce de la definición de cuantificador modal.

3. Igualdad e inclusión

Así como un intervalo clásico es identificable con un predicado: $X' \leftrightarrow x \in X'$, vamos a establecer la identificación de un intervalo modal con un conjunto de predicados: $A = (A',\ \text{Q}A) \leftrightarrow \text{Pred}(A)$, lo que permite extender las relaciones de igualdad e inclusión de los intervalos clásicos a los intervalos modales.

Dado un intervalo modal $A = (A'$,Q$A)$ denominamos *conjunto de predicados* de A al conjunto de las funciones proposicionales aceptadas por A, es decir

$$\text{Pred}(A) := \{P(.) \in \text{Pred}(\mathbb{R}) \mid \text{Q}(x, A)\ P(x)\}$$

de modo que un intervalo modal es un "aceptador" de predicados, a diferencia del intervalo clásico que es en sí un predicado.

Se verifican las propiedades

1. Si $A = (A'$,E), entonces $\mathrm{Pred}(A) = \cup(x, A')\{P(.) \in \mathrm{Pred}(\mathbb{R}) \mid P(x) = 1\}$
2. Si $A = (A'$,U), entonces $\mathrm{Pred}(A) = \cap(x, A')\{P(.) \in \mathrm{Pred}(\mathbb{R}) \mid P(x) = 1\}$

donde $\cup(x, X')$ es el operador unión de una familia de conjuntos indexada por x perteneciente al conjunto X' y $\cap(x, X')$ el correspondiente operador intersección.

En efecto,

1. $P(.)\in\mathrm{Pred}(A) \Leftrightarrow \mathrm{E}(x,A')\ P(x) \Leftrightarrow \mathrm{E}(x,A')\ (P(.)\in\{P(.)\in\mathrm{Pred}(\mathbb{R}) \mid P(x)=1\ \})$

$$\Leftrightarrow \quad P(.) \in \cup(x, A')\{P(.) \in \mathrm{Pred}(\mathbb{R}) \mid P(x) = 1\}$$

2. $P(.)\in\mathrm{Pred}(A) \Leftrightarrow \mathrm{U}(x,A')\ P(x) \Leftrightarrow \mathrm{U}(x,A')\ (P(.)\in\{P(.)\in\mathrm{Pred}(\mathbb{R}) \mid P(x)=1\ \}$

$$\Leftrightarrow \quad P(.) \in \cap(x, A')\{P(.) \in \mathrm{Pred}(\mathbb{R}) \mid P(x) = 1\}$$

Para cualquier intervalo modal $A = (A'$,Q$A)$ podemos también considerar el conjunto de las funciones proposicionales rechazadas por A

$$\mathrm{Copred}(A) := \{P(.) \in \mathrm{Pred}(\mathbb{R}) \mid \neg\mathrm{Q}(x, A)P(x)\}$$

y diremos que $P(.)$ es "covalidado" o "rechazado" por A.

Por ejemplo, $(. \geq 0)\in\mathrm{Copred}([7, -1])$ es equivalente a

$$\neg\mathrm{Q}(x, [7, -1])\ x \geq 0 \Leftrightarrow \neg\mathrm{U}(x, [-1, 7]')\ x \geq 0 \Leftrightarrow \mathrm{E}(x, [-1, 7]')x < 0$$

Se verifican las propiedades

1. $\mathrm{Copred}(A) = \mathrm{Pred}(\mathbb{R}) - \mathrm{Pred}(A)$
2. $\mathrm{Copred}(A) \neq \emptyset$

En efecto,

1. $P(.)\in\mathrm{Copred}(A) \Leftrightarrow \neg\mathrm{Q}(x,A)\ P(x) \Leftrightarrow P(.)\notin\mathrm{Pred}(A)$
2. Si $A = (A', \mathrm{Q}A)$, como $. < \mathrm{mín}(A') \notin \mathrm{Pred}(A)$ es $\mathrm{Pred}(A) \neq \mathrm{Pred}(\mathbb{R}) \Leftrightarrow$
   $\Leftrightarrow \mathrm{Copred}(A) \neq \emptyset$

Definimos

$$\textit{Igualdad} : A = B \text{ si y sólo si } \mathrm{Pred}(A) = \mathrm{Pred}(B)$$

$$\textit{Inclusión} : A \subseteq B \text{ si y sólo si } \mathrm{Pred}(A) \subseteq \mathrm{Pred}(B)$$

Estas definiciones de $\subseteq$ e $=$ entre intervalos modales mediante $\subseteq$ e $=$ conjuntistas permiten identificar los intervalos modales con el conjunto de predicados reales que aceptan y constituyen el fundamento estructural semántico de la teoría de intervalos modales. Todo lo que se diga a partir de ahora es deductivo.

Obviamente $A = B$ equivale a $A \subseteq B$ y $B \subseteq A$.

La igualdad y la inclusión pueden caracterizarse mediante el conjunto de copredicados según los resultados:

1. $A \subseteq B$ equivale a $\mathrm{Copred}(A) \supseteq \mathrm{Copred}(B)$
2. $A = B$ equivale a $\mathrm{Copred}(A) = \mathrm{Copred}(B)$

En efecto,

1. $A \subseteq B \Leftrightarrow \mathrm{Pred}(A) \subseteq \mathrm{Pred}(B) \Leftrightarrow \mathrm{Pred}(\mathbb{R}) - \mathrm{Pred}(A) \supseteq \mathrm{Pred}(\mathbb{R}) - \mathrm{Pred}(B) \Leftrightarrow$
   $\Leftrightarrow \mathrm{Copred}(A) \supseteq \mathrm{Copred}(B)$
2. $A = B \Leftrightarrow (A \subseteq B\ ,\ B \subseteq A) \Leftrightarrow$
   $\Leftrightarrow \mathrm{Copred}(A) \supseteq \mathrm{Copred}(B)\ ,\ \mathrm{Copred}(B) \supseteq \mathrm{Copred}(A) \Leftrightarrow$
   $\Leftrightarrow \mathrm{Copred}(A) = \mathrm{Copred}(B)$

Las principales propiedades de la igualdad y la inclusión son las siguientes

1. $A \subseteq B$ equivale a
   a) $\mathrm{ext}(A) \subseteq \mathrm{ext}(B)$ si $\mathrm{mod}(A) = \mathrm{mod}(B) = \mathrm{E}$
   b) $\mathrm{ext}(A) \supseteq \mathrm{ext}(B)$ si $\mathrm{mod}(A) = \mathrm{mod}(B) = \mathrm{U}$
   c) $\mathrm{ext}(A) \cap \mathrm{ext}(B) \neq \emptyset$ si $\mathrm{mod}(A) = \mathrm{U}$ y $\mathrm{mod}(B) = \mathrm{E}$
   d) $\mathrm{ext}(A) = \mathrm{ext}(B) = [a,a]$ si $\mathrm{mod}(A) = \mathrm{E}$ y $\mathrm{mod}(B) = \mathrm{U}$
2. $[a_1, a_2] \subseteq [b_1, b_2]$ equivale a $(a_1 \geq b_1,\ a_2 \leq b_2)$
3. $[a_1, a_2] = [b_1, b_2]$ equivale a $(a_1 = b_1,\ a_2 = b_2)$

En efecto,

1. Sean $A = (A', \mathrm{Q}A)$ y $B = (B', \mathrm{Q}B)$. Como $A \subseteq B$ equivale a $\mathrm{Pred}(A', \mathrm{Q}A) \subseteq \mathrm{Pred}(B', \mathrm{Q}B)$ según las modalidades de A y B tendremos los siguientes casos:

a) Pred(A',E) $\subseteq$ Pred(B',E) equivale a $A' \subseteq B'$ pues

Directo: $A' \not\subset B' \Rightarrow \mathrm{E}(a, A')\ a \notin B' \Rightarrow$
$\Rightarrow \ ((. = a) \in \mathrm{Pred}(A', \mathrm{E}),\ (. = a) \notin \mathrm{Pred}(B', \mathrm{E})) \Rightarrow$
$\Rightarrow \ \mathrm{Pred}(A', \mathrm{E}) \not\subset \mathrm{Pred}(B', \mathrm{E})$

Recíproco: Si $A' \subseteq B'$, $P(.) \in$Pred(A',E) $\Leftrightarrow$ E(x,A') $P(x) \Rightarrow$
$\Rightarrow$ E(x,B') $P(x) \Leftrightarrow P(.) \in$Pred($B'$,E)

b) Pred(A',U) $\subseteq$ Pred(B',U) equivale a $B' \subseteq A'$ pues

Directo: $B' \not\subset A' \Rightarrow$ E(b,B') $b \notin A' \Rightarrow$
$\Rightarrow ((. \in A') \in$Pred($A'$,U) , $(. \in A') \notin$Pred(B',U)) $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ Pred(A',U) $\not\subset$ Pred(B',U)

Recíproco: Si $B' \subseteq A'$, $P(.) \in$Pred(A',U) $\Rightarrow$ U(x,A') $P(x) \Rightarrow$
$\Rightarrow$ U(x,B') $P(x) \Rightarrow P(.) \in$Pred($B'$,U)

c) Pred(A',U) $\subseteq$ Pred(B',E) equivale a $A' \cap B' \neq \emptyset$ pues

Directo: $A' \cap B' = \emptyset \Rightarrow ((. \in A') \in$Pred($A'$,U) , $(. \in A') \notin$Pred(B',E)) $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ Pred(A',U) $\not\subset$ Pred(B',E)

Recíproco: Si $A' \cap B' \neq \emptyset$, $P(.) \in$Pred(A',U) $\Rightarrow$ U(x,A') $P(x) \Rightarrow$
$\Rightarrow$ E(x,B') $P(x) \Rightarrow P(.) \in$Pred($B'$,E)

d) Pred(A',E) $\subseteq$ Pred(B',U) equivale a $A' = B' = \{a\}$ pues

Directo: $a \in A' \Rightarrow (. = a) \in$Pred($A'$,E) $\Rightarrow (. = a) \in$Pred(B',U) $\Rightarrow B' = \{a\}$
y si existiera otro $b \in A'$, entonces
$((. = b) \in$Pred(A',E), $(. = a) \in$Pred(B',U)) $\Rightarrow$ Pred(A',E) $\not\subset$ Pred(B',U)

Recíproco: Si $A' = B' = \{a\}$, $P(.) \in$Pred(A',E) $\Leftrightarrow P(a) \Leftrightarrow$ U(x,B')$P(x) \Rightarrow$
$\Rightarrow P(.) \in$Pred(B',U)

2. Si $[a_1, a_2] \subseteq [b_1, b_2]$ equivale a

- si $a_1 \leq a_2$ y $b_1 \leq b_2$, entonces mod($[a_1,a_2]$) = E , mod($[b_1,b_2]$) = E por lo que
$$[a_1, a_2]' = \mathrm{ext}([a_1, a_2]) \subseteq \mathrm{ext}([b_1, b_2]) = [b_1, b_2]' \ \Leftrightarrow$$
$a_1 = \mathrm{mín}(a_1, a_2) \geq \mathrm{mín}(b_1, b_2) = b_1,\ a_2 = \mathrm{máx}(a_1, a_2) \leq \mathrm{máx}(b_1, b_2) = b_2$
- si $a_1 \geq a_2$ y $b_1 \geq b_2$, entonces mod($[a_1,a_2]$) = U , mod($[b_1,b_2]$) = U por lo que
$$[a_2, a_1]' = \mathrm{ext}([a_1, a_2]) \supseteq \mathrm{ext}([b_1, b_2]) = [b_2, b_1]' \ \Leftrightarrow$$
$a_1 = \mathrm{máx}(a_1, a_2) \geq \mathrm{máx}(b_1, b_2) = b_1,\ a_2 = \mathrm{mín}(a_1, a_2) \leq \mathrm{mín}(b_1, b_2) = b_2$
- si $a_1 \geq a_2$ y $b_1 \leq b_2$, entonces mod($[a_1,a_2]$) = U , mod($[b_1,b_2]$) = E por lo que
$$[a_2, a_1]' \cap [b_1, b_2]' \neq \emptyset \ \Leftrightarrow$$
$a_1 = \max(a_1,a_2) \geq \min(b_1,b_2) = b_1$, $a_2 = \min(a_1,a_2) \leq \max(b_1,b_2) = b_2$

- si $a_1 \leq a_2$ y $b_1 \geq b_2$, entonces $\mathrm{mod}([a_1,a_2]) = \mathrm{E}$, $\mathrm{mod}([b_1,b_2]) = \mathrm{U}$ por lo que

$$[a_1, a_2]' = [b_2, b_1]' = \{a\} \Leftrightarrow$$

$$a_1 = \min(a_1,a_2) \geq \max(b_1,b_2) = b_1 \ , \ a_2 = \max(a_1,a_2) \leq \min(b_1,b_2) = b_2$$

3. $[a_1, a_2] = [b_1, b_2] \Leftrightarrow ([a_1, a_2] \subseteq [b_1, b_2],\ [b_1, b_2] \subseteq [a_1, a_2]) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (a_1 \geq b_1,\ a_2 \leq b_2),\ (b_1 \geq a_1,\ b_2 \leq a_2)) \Leftrightarrow (a_1 = b_1 \ , \ a_2 = b_2)$

   Es interesante notar la identidad formal de las relaciones de igualdad e inclusión en $I^*(\mathbb{R})$ e $I(\mathbb{R})$.

Ejemplo 3.1

Para $A = [2, 4]$ y $B = [1, 5]$ tenemos que

$$\mathrm{mod}(A) = \mathrm{mod}(B) = \mathrm{E},\ \mathrm{ext}(A) = [2, 4]' \subseteq [1, 5]' = \mathrm{ext}(B),\ a_1 \geq b_1,\ a_2 \leq b_2$$

lo que equivale a que $A \subseteq B$.

Para $A = [5, 1]$ y $B = [4, 2]$ tenemos que

$$\mathrm{mod}(A) = \mathrm{mod}(B) = \mathrm{U},\ \mathrm{ext}(A) = [1, 5]' \supseteq [2, 4]' = \mathrm{ext}(B),\ a_1 \geq b_1,\ a_2 \leq b_2$$

lo que equivale a que $A \subseteq B$.

Para $A = [5, 1]$ y $B = [2, 6]$ tenemos que

$$\mathrm{mod}(A) = \mathrm{U}\ \ \mathrm{mod}(B) = \mathrm{E},\ \mathrm{ext}(A) \cap \mathrm{ext}(B) = [1, 5]' \cap [2, 6]' \neq \emptyset,\ a_1 \geq b_1,\ a_2 \leq b_2$$

lo que equivale a que $A \subseteq B$.

Si $A = [a_1,a_2]$ y $B = [b_1,b_2]$ son tales que $a_1 \leq b_1$ y $a_2 \leq b_2$ diremos que A *es menor o igual* que B, denotándose por $A \leq B$.

En el plano de Moore un diagrama para la inclusión y la relación menor o igual es

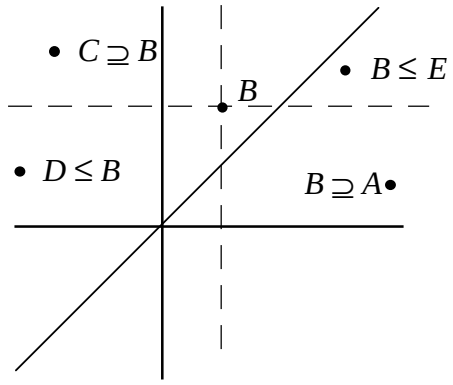


Figura 2: Inclusión y menor o igual

Fácilmente se observa que en $I^*(\mathbb{R})$ las relaciones $\leq$ y $\subseteq$ son de orden parcial y entre dos intervalos A y B se verifica una de las siguientes situaciones (no excluyentes)

$$A \subseteq B \text{ o } B \subseteq A \text{ o } A \leq B \text{ o } B \leq A$$

lo que hace que los algoritmos intervalares sean esencialmente más complejos que los algoritmos numéricos ya que entre números la alternativa es simplemente $a \leq b$ o $b \leq a$

4. Operadores intervalares

Introducimos los operadores que denominaremos *dualidad*, *propio* e *impropio*

$$\begin{aligned} \text{dualidad:} \quad & \text{Dual}(A', \text{Q}A) := (A', \text{Dual}(\text{Q}A)) \\ \text{propio:} \quad & \text{Prop}(A', \text{Q}A) := (A', \text{E}) \\ \text{impropio:} \quad & \text{Impr}(A', \text{Q}A) := (A', \text{U}) \end{aligned}$$

que, en función de los extremos, son

$$\begin{aligned} &\text{Dual}([a,b]) = [b,a] \\ &\text{Prop}([a,b]) = [\text{mín}\{a,b\}, \text{máx}\{a,b\}] \in I_e(\mathbb{R}) \\ &\text{Impr}([a,b]) = [\text{máx}\{a,b\}, \text{mín}\{a,b\}] \in I_u(\mathbb{R}) \end{aligned}$$

y verifican los siguientes resultados

1. $\neg\text{Q}(x,A)\ P(x)$ equivale a $\text{Q}(x,\text{Dual}(A))\ \neg P(x)$
2. $P(.) \in \text{Copred}(A)$ equivale a $\neg P(.) \in \text{Pred}(\text{Dual}(A))$
3. $P(.) \in \text{Pred}(\text{Prop}(A))$ equivale a $\neg P(.) \in \text{Copred}(\text{Impr}(A))$
4. Si $P(.) \in \text{Pred}(\text{Impr}(A))$, entonces
   $P(.) \in \text{Pred}(\text{Prop}(A))$, $\neg P(.) \in \text{Copred}(\text{Prop}(A))$, $\neg P(.) \in \text{Copred}(\text{Impr}(A))$
5. $A \subseteq B$ equivale a $\text{Dual}(A) \supseteq \text{Dual}(B)$
6. $\text{Impr}(A) \subseteq \text{Prop}(A)$

En efecto,

1. *a)* Si $A = (A', \text{E})$
   $\neg\text{Q}(x,A)P(x) = \neg\text{E}(x,A')P(x) \Leftrightarrow \text{U}(x,A')\neg P(x) \Leftrightarrow \text{Q}(x,\text{Dual}(A))\neg P(x)$

b) Si $A = (A', \mathrm{U})$
$\neg \mathrm{Q}(x, A)P(x) = \neg \mathrm{U}(x, A')P(x) \Leftrightarrow \mathrm{E}(x, A')\neg P(x) \Leftrightarrow \mathrm{Q}(x, \mathrm{Dual}(A))\neg P(x)$

2. $P(.) \in \mathrm{Copred}(A) \Leftrightarrow \neg \mathrm{Q}(x, A)P(x) \Leftrightarrow \mathrm{Q}(x, \mathrm{Dual}(A))\neg P(x) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \neg P(x) \in \mathrm{Pred}(\mathrm{Dual}(A))$

3. Por la propiedad 2).

4. Por la propiedad 2) y 3) y porque
$P(.) \in \mathrm{Pred}(\mathrm{Impr}(A)) \Leftrightarrow \mathrm{U}(x,A')P(x) \Rightarrow \mathrm{E}(x,A')\ P(x) \Leftrightarrow P(.) \in \mathrm{Pred}(\mathrm{Prop}(A))$

5. Si $A = [a_1,a_2]$ y $B = [b_1,b_2]$, entonces
$A \subseteq B \Leftrightarrow (a_1 \geq b_1\ ,\ a_2 \leq b_2) \Leftrightarrow [b_2,b_1] \subseteq [a_2,a_1] \Leftrightarrow \mathrm{Dual}(A) \supseteq \mathrm{Dual}(B)$

6. $\mathrm{Impr}(A) \subseteq \mathrm{Prop}(A)$ ya que $\min\{a,b\} \leq \max\{a,b\}$

5. El retículo de los intervalos modales

Introduciremos ahora las operaciones ínfimo y supremo para los retículos definidos por las relaciones de orden parcial $\subseteq$ y $\leq$ sobre $I^*(\mathbb{R})$.

Definimos en $I^*(\mathbb{R})$ dos operaciones reticulares sobre una familia de intervalos definida por $\{A(i) \mid i \in I,\ A(i) \in I^*(\mathbb{R})\}$, con la relación de orden $\subseteq$, denominadas *meet* y *join*

$$\text{meet} : \wedge(i, I)A(i) = A \in I^*(\mathbb{R}) \ \text{ tal que } \ \mathrm{U}(i, I)(X \subseteq A(i)) \Leftrightarrow X \subseteq A$$

$$\text{join} : \vee(i, I)A(i) = B \in I^*(\mathbb{R}) \ \text{ tal que } \ \mathrm{U}(i, I)(X \supseteq A(i)) \Leftrightarrow X \supseteq B$$

hacen que $(I^*(\mathbb{R}), \subseteq)$ sea un retículo.

Otras dos operaciones reticulares, que llamaremos "Bottom" y "Top" vienen definidas por la relación $\leq$ sobre $I^*(\mathbb{R})$:

$$\mathrm{B}(i, I)A(i) = C \in I^*(\mathbb{R}) \ \text{ tal que } \ \mathrm{U}(i, I)(X \leq A(i)) \Leftrightarrow X \leq C$$

$$\mathrm{T}(i, I)A(i) = D \in I^*(\mathbb{R}) \ \text{ tal que } \ \mathrm{U}(i, I)(X \geq A(i)) \Leftrightarrow X \geq D$$

hacen que $(I^*(\mathbb{R}), \leq)$ sea un retículo.

El cálculo es fácil pues se obtienen en función de los extremos. Si $A(i) = [a_1(i), a_2(i)]$

$$\vee(i, I)A(i) = [\text{mín}(i, I)a_1(i),\ \text{máx}(i, I)a_2(i)]$$

$$\wedge(i, I)A(i) = [\text{máx}(i, I)a_1(i),\ \text{mín}(i, I)a_2(i)]$$

$$\mathrm{B}(i, I)A(i) = [\text{mín}(i, I)a_1(i),\ \text{mín}(i, I)a_2(i)]$$

$$\mathrm{T}(i, I)A(i) = [\text{máx}(i, I)a_1(i),\ \text{máx}(i, I)a_2(i)]$$

Estas operaciones vienen representadas en un diagrama de Moore tal como indica la figura

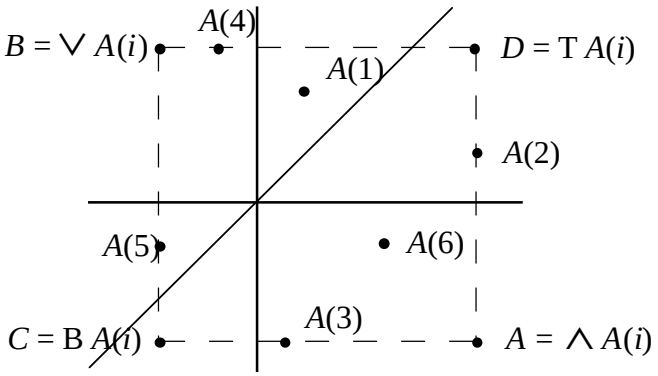


Figura 3: Join, Meet, Top y Bottom

Se comprueba de forma inmediata que también

$$\text{Dual}(\vee(i,I)A(i)) = \wedge(i,I)\text{Dual}(A(i))$$
$$\text{Dual}(\wedge(i,I)A(i)) = \vee(i,I)\text{Dual}(A(i))$$

Ejemplo 5.1

Para los intervalos $A(1) = [1,2]$, $A(2) = [3,-1]$, $A(3) = [4,2]$, $A(4) = [1,-1]$ y $A(5) = [2,1]$ tenemos

$$\wedge(i,I)A(i) = [\text{máx}\{1,3,4,1\},\ \text{mín}\{2,-1,2,-1,2\}] = [4,-1]$$
$$\vee(i,I)A(i) = [\text{mín}\{1,3,4,1\},\ \text{máx}\{2,-1,2,-1,1\}] = [1,2]$$

Estos operadores permiten dar una caracterización de los intervalos de $I^*(\mathbb{R})$, ya que si $A \in I^*(\mathbb{R})$, entonces

$$A = \begin{cases} \vee(a,A')[a,a] & \text{si } A \text{ es propio} \\ \wedge(a,A')[a,a] & \text{si } A \text{ es impropio} \end{cases}$$

como fácilmente se obtiene del cálculo anterior. Si definimos el operador join-meet

$$\Omega(a,A) := \begin{cases} \vee(a,A') & \text{si } A \text{ es propio} \\ \wedge(a,A') & \text{si } A \text{ es impropio} \end{cases}$$

podemos interpretar un intervalo $A \in I^*(\mathbb{R})$ mediante

$$A = \Omega(a,A)[a,a]$$

6. Predicados intervalares

Una clase especialmente simple e interesante de predicados está constituida por predicados del tipo $P_1(x) =$"$x \in [1,2]'$" o bien $P_2(x) =$ "$x \notin [1,2]'$", tales que los puntos de $\mathbb{R}$ están en un intervalo clásico ($[1,2]'$ para $P_1(x)$) o fuera de él ($[1,2]'$ para $P_2(x)$). Consideremos el conjunto de funciones proposicionales del tipo $x \in X'$ y $x \notin X'$

$$\text{Pred}^*(\mathbb{R}) := \{P(.) \mid \text{E}(X', I(\mathbb{R}))\ P(.) = (. \in X')\}$$
$$\text{Copred}^*(\mathbb{R}) := \{P(.) \mid \text{E}(X', I(\mathbb{R}))\ P(.) = (. \notin X')\}$$

Para cualquier intervalo $A = (A', \text{Q}A)$ podemos definir los siguientes subconjuntos de Pred(A) y Copred(A)

$$\text{Pred}^*(A) := \{(. \in X') \in \text{Pred}^*(\mathbb{R}) \mid \text{Q}(x, A)x \in X'\}$$
$$\text{Copred}^*(A) := \{(. \notin X') \in \text{Copred}^*(\mathbb{R}) \mid \neg\text{Q}(x, A)x \notin X'\}$$

Los elementos de $\text{Pred}^*(\mathbb{R})$ y $\text{Copred}^*(\mathbb{R})$ se denominan predicados y copredicados intervalares, respectivamente, por lo que $\text{Pred}^*(A)$ es el conjunto de los predicados intervalares aceptados por A y $\text{Copred}^*(A)$ es el conjunto de los copredicados intervalares rechazados por A. Las principales propiedades que verifican son las siguientes

1. $(. \notin X') \in \text{Copred}^*(A)$ equivale a $(. \in X') \in \text{Pred}^*(\text{Dual}(A))$
2. $(. \in X') \in \text{Pred}^*(A)$ equivale a $\text{Impr}(X') \subseteq A$
3. $(. \notin X') \in \text{Copred}^*(A)$ equivale a $A \subseteq \text{Prop}(X')$

En efecto,

1. Sale directamente de la propiedad 2) de la sección 4.
2. Si $A = (A', \text{E})$ es
   $(. \in X') \in \text{Pred}^*(A) \Leftrightarrow \text{E}(x, A')\ x \in X' \Leftrightarrow X' \cap A' \neq \emptyset \Leftrightarrow \text{Impr}(X') \subseteq A$
   Si $A = (A', \text{U})$ es
   $(. \in X') \in \text{Pred}^*(A) \Leftrightarrow \text{U}(x, A')\ x \in X' \Leftrightarrow A' \subseteq X' \Leftrightarrow \text{Impr}(X') \subseteq A$
3. $(. \notin X') \in \text{Copred}^*(A) \Leftrightarrow (. \in X') \in \text{Pred}^*(\text{Dual}(A)) \Leftrightarrow \text{Impr}(X') \subseteq \text{Dual}(A) \Leftrightarrow$
   $\Leftrightarrow A \subseteq \text{Prop}(X') = X'$

Las equivalencias 2) y 3) permiten las identificaciones

$$\text{Pred}^*(A) \leftrightarrow \{\text{Impr}(X') \mid \text{Impr}(X') \subseteq A\}$$
$$\text{Copred}^*(A) \leftrightarrow \{\text{Prop}(X') \mid \text{Prop}(X') \supseteq A\}$$

Sería deseable que Pred($A \wedge B$) fuera igual a Pred(A) $\cap$ Pred(B) y que Pred($A \vee B$) fuera igual a Pred(A) $\cup$ Pred(B) lo que no es cierto. Por ejemplo,

$$\text{Pred}([1,2] \wedge [3,4]) = \text{Pred}([3,2])$$

pero el predicado $x \in \{1.5, 3.5\}$ pertenece a Pred([1,2]) y a Pred([3,4]) y, por lo tanto, a la intersección de ambos pero no a Pred([3,2]). Asímismo, el predicado $x = 2.5$ pertenece a Pred([1,4]), que es igual a Pred([1,2]$\vee$[3,4]), pero no Pred([1,2]) ni a Pred([3,4]). Sin embargo esto no va a impedir una buena estructura semántica para el retículo de los intervalos modales.

Las relaciones entre las operaciones reticulares $\vee$ y $\wedge$ entre intervalos modales y la unión e intersección de sus predicados intervalares vienen establecidas por las siguientes propiedades

1. Pred($A \wedge B$) $\subseteq$ Pred(A) $\cap$ Pred(B)
2. Pred($A \vee B$) $\supseteq$ Pred(A) $\cup$ Pred(B)
3. Copred($A \wedge B$) $\supseteq$ Copred(A) $\cup$ Copred(B)
4. Copred($A \vee B$) $\subseteq$ Copred(A) $\cap$ Copred(B)
5. Pred*($A \wedge B$) = Pred*(A) $\cap$ Pred*(B)
6. Pred*($A \vee B$) $\supseteq$ Pred*(A) $\cup$ Pred*(B)
7. Copred*($A \wedge B$) $\supseteq$ Copred*(A) $\cup$ Copred*(B)
8. Copred*($A \vee B$) = Copred*(A) $\cap$ Copred*(B)

En efecto,

1. Como

$$\left.\begin{array}{c} A \wedge B \subseteq A \\ \text{y} \\ A \wedge B \subseteq B \end{array}\right| \Leftrightarrow \left.\begin{array}{c} \text{Pred}(A \wedge B) \subseteq \text{Pred}(A) \\ \text{y} \\ \text{Pred}(A \wedge B) \subseteq \text{Pred}(B) \end{array}\right| \Leftrightarrow \text{Pred}(A \wedge B) \subseteq \text{Pred}(A) \cap \text{Pred}(B)$$

2. Como

$$\left.\begin{array}{c} A \vee B \supseteq A \\ \text{y} \\ A \vee B \supseteq B \end{array}\right| \Leftrightarrow \left.\begin{array}{c} \text{Pred}(A \vee B) \supseteq \text{Pred}(A) \\ \text{y} \\ \text{Pred}(A \vee B) \supseteq \text{Pred}(B) \end{array}\right| \Leftrightarrow \text{Pred}(A \vee B) \supseteq \text{Pred}(A) \cup \text{Pred}(B)$$

3. La demostración es análoga a la 1)

4. La demostración es análoga a la 2)

Desde un punto de vista estructural, el fracaso que representa el hecho de que en 1) y 2) no se verifique la igualdad viene del hecho de que el sistema $(I^*(\mathbb{R}), \subseteq)$ es un subretículo del $(\mathrm{Pred}(\mathbb{R}), \subseteq)$ y las operaciones reticulares $\vee$ y $\wedge$ corresponden al subsistema más restringido $(\mathrm{Pred}(I^*(\mathbb{R})), \subseteq) \equiv (I^*(\mathbb{R}), \subseteq)$ e impide la existencia de una asociación más fuerte entre el retículo de intervalos y el retículo de los intervalos como conjuntos de predicados.

Consideremos en lugar del conjunto de predicados $\mathrm{Pred}(X)$ el conjunto más restringido $\mathrm{Pred}^*(X)$ que va a permitir obtener algunas relaciones de igualdad, no todas, expresadas en las demás propiedades.

5.

$$(. \in X') \in \mathrm{Pred}^*(A \wedge B) \Leftrightarrow \mathrm{Impr}(X') \subseteq A \wedge B \Leftrightarrow \left| \begin{array}{c} \mathrm{Impr}(X') \subseteq A \\ \text{y} \\ \mathrm{Impr}(X') \subseteq B \end{array} \right| \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left| \begin{array}{c} (. \in X') \in \mathrm{Pred}^*(A) \\ \text{y} \\ (. \in X') \in \mathrm{Pred}^*(B) \end{array} \right| \Leftrightarrow (. \in X') \in \mathrm{Pred}^*(A) \cap \mathrm{Pred}^*(B)$$

6.

$$(. \in X') \in \mathrm{Pred}^*(A) \cup \mathrm{Pred}^*(B) \Leftrightarrow \left| \begin{array}{c} (. \in X') \in \mathrm{Pred}^*(A) \\ \text{o} \\ (. \in X') \in \mathrm{Pred}^*(B) \end{array} \right| \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left| \begin{array}{c} \mathrm{Impr}(X') \subseteq A \\ \text{o} \\ \mathrm{Impr}(X') \subseteq B \end{array} \right| \Rightarrow \mathrm{Impr}(X') \subseteq A \vee B \Rightarrow (. \in X') \in \mathrm{Pred}^*(A \vee B)$$

7.

$$(. \notin X') \in \mathrm{Copred}^*(A) \cup \mathrm{Copred}^*(B) \Leftrightarrow \left| \begin{array}{c} (. \notin X') \in \mathrm{Copred}^*(A) \\ \text{o} \\ (. \notin X') \in \mathrm{Copred}^*(B) \end{array} \right| \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left| \begin{array}{c} \mathrm{Prop}(X') \supseteq A \\ \text{o} \\ \mathrm{Prop}(X') \supseteq B \end{array} \right| \Rightarrow \mathrm{Prop}(X') \supseteq A \wedge B \Rightarrow (. \notin X') \in \mathrm{Copred}^*(A \wedge B)$$

8. $(. \notin X') \in \mathrm{Copred}^*(A \vee B) \Leftrightarrow (. \in X') \in \mathrm{Pred}^*(\mathrm{Dual}(A) \wedge \mathrm{Dual}(B))$
$\Leftrightarrow (. \in X') \in (\mathrm{Pred}^*(\mathrm{Dual}(A)) \cap \mathrm{Pred}^*(\mathrm{Dual}(B))) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow ((. \in X') \in \mathrm{Pred}^*(\mathrm{Dual}(A)), (. \in X') \in \mathrm{Pred}^*(\mathrm{Dual}(B))) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow ((. \notin X') \in \mathrm{Copred}^*(A), (. \notin X') \in \mathrm{Copred}^*(B)) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (. \notin X') \in (\mathrm{Copred}^*(A) \cap \mathrm{Copred}^*(B))$

La inclusión e igualdad en el conjunto de los intervalos modales son conceptos de naturaleza intervalar puesto que ligan los intervalos modales a los conjuntos de predicados que aceptan o rechazan. Pero sus propiedades demuestran que la estructura intrínseca del conjunto de intervalos modales con sus operaciones $\subseteq$-meet y $\subseteq$-join no permite una total asociación ni con el conjunto total de los predicados que aceptan o rechazan ni con los conjuntos más especializados de predicados o copredicados intervalares. Los intervalos modales son intrínsecamente unilaterales, desde el punto de vista de su asociación con conjuntos de predicados, puesto que pueden identificarse con el conjunto de predicados del intervalo que validan, $A \leftrightarrow$ Pred*(A), únicamente cuando se consideran los predicados intervalares comunes a alguna familia de intervalos modales $\{A(i) \mid i \in I\}$, en cuyo caso $\cap\{\text{Pred}^*(A(i)) \mid i \in I\}$ es igual a $\text{Pred}^*(\wedge\{A(i) \mid i \in I\})$. Asímismo pueden ser identificados con el conjunto de copredicados que rechazan $A \leftrightarrow$ Copred*(A) únicamente cuando se consideran los copredicados intervalares comunes a una familia de intervalos modales $\{A(i) \mid i \in I\}$, en cuyo caso $\cap\{\text{Copred}^*(A(i)) \mid i \in I\}$ es igual a $\text{Pred}^*(\vee\{\ A(i) \mid i \in I\})$. Por otra parte es interesante notar que todas las inclusiones de las propiedades anteriores se convierten en igualdades cuando entre A y B existe la relación $A \subseteq B$.

Definimos la implicación de predicados para presentar los conjuntos mínimos de predicados que determinan Pred(A) y Pred*(A). Para $R(.)$, $S(.) \in \text{Pred}(\mathbb{R})$

$$(R(.) \ \Rightarrow \ S(.)) := \text{U}(x, \mathbb{R})\ (R(x) \ \Rightarrow \ S(x))$$

Definimos ahora el conjunto mínimo de predicados de un intervalo modal $A \in I^*(\mathbb{R})$ como

$$\text{Pred}^{**}(A) := \begin{cases} \{(. = x_0) \mid x_0 \in A'\} & \text{si } A \text{ es propio} \\ \{(. \in A')\} & \text{si } A \text{ es impropio} \end{cases}$$

de forma que Pred(A) es el subconjunto de predicados de Pred($\mathbb{R}$) que son extensión de los elementos de Pred**(A) y Pred*(A) es el subconjunto de Pred(A) formado por los elementos del tipo $(. \in X')$, para $X' \in I(\mathbb{R})$.

Se define el conjunto mínimo de copredicados de un intervalo modal $A \in I^*(\mathbb{R})$ como

$$\text{Copred}^{**}(A) := \begin{cases} \{\neg(. \in A')\} & \text{si } A \text{ es propio} \\ \{\neg(. = x_0) \mid x_0 \in A'\} & \text{si } A \text{ es propio} \end{cases}$$

de forma que Copred(A) es el subconjunto de predicados de Pred($\mathbb{R}$) que son restricción de los elementos de Copred**(A) y Copred*(A) es el subconjunto de Copred(A) formado por los elementos del tipo $\neg\ (. \in X')$, para $X' \in I(\mathbb{R})$

7. Caso n-dimensional

La teoría completa n-dimensional conduciría a un desarrollo demasiado largo antes de entrar en la teoría de las extensiones modales intervalares de funciones que es el

principal objetivo del curso. Por ello introduciremos solamente algunas definiciones básicas y resultados, de la extensión n-dimensional.

Definimos el conjunto de intervalos modales n-dimensionales $I^*(\mathbb{R}^n)$ como una generalización natural de $I^*(\mathbb{R})$

$$I^*(\mathbb{R}^n) := (I^*(\mathbb{R}))^n = \{A = (A_1,...,A_n) \mid A_1 \in I^*(\mathbb{R}),..., A_n \in I^*(\mathbb{R})\}$$

A veces es útil separar los intervalos componentes de A en propios e impropios y expresar

$$A := (A_p, A_i) \text{ con } A_p \in I_e(\mathbb{R}^{n_p}),\ A_i \in I_u(\mathbb{R}^{n_i}),\ n_p + n_i = n$$

Si $A = (A_1,...,A_n)$ y $B = (B_1,...,B_n)$ son intervalos modales n-dimensionales se define,

$$A = B \text{ si y sólo si } (A_1 = B_1, ..., A_n = B_n)$$
$$A \subseteq B \text{ si y sólo si } (A_1 \subseteq B_1, ..., A_n \subseteq B_n)$$

Para $A = (A_1,...,A_n) \in I^*(\mathbb{R}^n)$, $X' = (X'_1,...,X'_n) \in I(\mathbb{R}^n)$ y $x = (x_1,...,x_n) \in \mathbb{R}^n$ se definen

$$x \in X' \text{ si y sólo si } (x_1 \in X'_1, ..., x_n \in X'_n)$$
$$\text{Pred}^*(A) := \{(. \in X') \mid (. \in X'_1) \in \text{Pred}^*(A_1), ..., (. \in X'_n) \in \text{Pred}^*(A_n)\} =$$
$$= \{(. \in X') \mid \text{Q}(x_1,A_1)...\text{Q}(x_n,A_n)\ (x_1 \in X'_1, ..., x_n \in X'_n)\}$$

(obsérvese la conmutatividad de $\text{Q}(x_1,A_1)...\text{Q}(x_n,A_n)$ $(x_1 \in X'_1,..., x_n \in X'_n)$ por constar de componentes de variables resueltas)

$$\text{Copred}^*(A) := \{(. \notin X') \mid (. \notin X'_1) \in \text{Copred}^*(A_1),..., (. \notin X'_n) \in \text{Copred}^*(A_n)\} =$$
$$= \{(. \notin X') \mid \neg(\text{Q}(x_1,A_1)...\text{Q}(x_n,A_n)\ (x_1 \notin X'_1 \ \underline{\text{or}}...\underline{\text{or}}\ x_n \notin X'_n))\}$$

Si $X = (X_1,...,X_n) \in I^*(\mathbb{R}^n)$ y $X' = (X'_1,...,X'_n) \in I(\mathbb{R}^n)$ se definen

$$\text{Dual}(X) = (\text{Dual}(X_1), \cdots, \text{Dual}(X_n))$$
$$\text{Prop}(X) = \text{Prop}(X') := ((X'_1,\text{E}),...,(X'_n,\text{E}))$$
$$\text{Impr}(X) = \text{Impr}(X') := ((X'_1,\text{U}),...,(X'_n,\text{U}))$$

y, analogamente al caso 1-dimensional, se verifica que

$$(. \in X') \in \text{Pred}^*(A) \text{ equivale a } \text{Impr}(X') \subseteq A$$
$$(. \notin X') \in \text{Copred}^*(A) \text{ equivale a } \text{Prop}(X') \supseteq A$$

Se definen las operaciones reticulares join y meet para familias indexadas de intervalos con n componentes $\{A(i) \mid i{\in}I,\ A(i){\in}\ I^*(\mathbb{R}^n)\}$ del siguiente modo: si $A(i) = (A_1(i), \ldots, A_n(i))$, entonces

$$\wedge(i,I)A(i) := (\wedge(i,I)A_1(i), \ldots, \wedge(i,I)A_n(i))$$
$$\vee(i,I)A(i) := (\vee(i,I)A_1(i), \ldots, \vee(i,I)A_n(i))$$

8. Norma semántica para el cálculo digital

Veamos ahora una aplicación de la teoría previa a la interpretación de resultados intervalares con redondeo, desde el punto de vista de la información que contienen.

Si DI $\subseteq \mathbb{R}$ es una escala digital para los números reales. Sea el conjunto de los intervalos modales digitales

$$I^*(\mathrm{DI}) := \{[a,b] \in I^*(\mathbb{R}) \mid a \in \mathrm{DI},\ b \in \mathrm{DI}\}$$

Se definen los redondeos externo e interno de un intervalo $A = [a,b] \in I^*(\mathbb{R})$ como los intervalos de $I^*(\mathrm{DI})$ definidos por

$$\mathrm{Ex}([a,b]) := [l(a), r(b)]$$
$$\mathrm{In}([a,b]) := [r(a), l(b)]$$

Se verifica que $\mathrm{In}(A) = \mathrm{Dual}(\mathrm{Ex}(\mathrm{Dual}(A)))$ ya que

$$\mathrm{In}(A) = [r(a), l(b)] = \mathrm{Dual}([l(b), r(a)]) = \mathrm{Dual}(\mathrm{Ex}([b,a])) = \mathrm{Dual}(\mathrm{Ex}(\mathrm{Dual}(A)))$$

De los resultados de la identificación de intervalos modales con los conjuntos de predicados que aceptan o rechazan, concluimos que $\mathrm{Ex}(F) \supseteq F$ para el cálculo del redondeo exterior de un intervalo exacto F, $\mathrm{In}(F) \subseteq F$ para el cálculo de su redondeo interno y que

$$\mathrm{In}(F) \subseteq F \subseteq \mathrm{Ex}(F)$$

lo cual es equivalente a la relación

$$\mathrm{Pred}(\mathrm{In}(F)) \ \subseteq\ \mathrm{Pred}(F) \ \subseteq\ \mathrm{Pred}(\mathrm{Ex}(F))$$

y a la

$$\mathrm{Copred}(\mathrm{In}(F)) \ \supseteq\ \mathrm{Copred}(F) \ \supseteq\ \mathrm{Copred}(\mathrm{Ex}(F)).$$

Este resultado significa que la información positiva "a priori" (predicados que son analíticamente aceptados por el cálculo desconocido de F) se induce de F a $\mathrm{Ex}(F)$, y la información negativa "a priori" (predicados reales que por razones analíticas son rechazados por F) se induce del mismo modo a $\mathrm{In}(F)$. Contrariamente, la información "a posteriori", aceptada o rechazada por los intervalos calculados $\mathrm{Ex}(F)$ e $\mathrm{In}(F)$, se induce de $\mathrm{Ex}(F)$ a F (los predicados negativos "a posteriori"), y de $\mathrm{In}(F)$

a F (los predicados positivos "a posteriori"). Los predicados que no son ni aceptados por $\mathrm{In}(F)$ ni rechazados por $\mathrm{Ex}(F)$ no se pueden decidir "a posteriori" para F.

En particular, en el caso de intervalos clásicos, con el redondeo externo, si $A_1' \subseteq A_2'$, solamente están disponibles la información a priori $\mathrm{Pred}(\mathrm{A}_1)$

$$\mathrm{E}(x, A_1')P(x) \quad \Rightarrow \quad \mathrm{E}(x, A_2')P(x)$$

y la información a posteriori $\mathrm{Copred}(\mathrm{A}_2)$

$$\mathrm{U}(x, A_2')\neg P(x) \quad \Rightarrow \quad \mathrm{U}(x, A_1')\neg P(x)$$

Referencias

[AH74] G. Alefeld and J. Herzberger. *Introduction to Interval Computations*. Academic Press, 1974.

[Alb77] R. Albrecht. Grundlagen einer theorie gerundeter algebraischer verknüpfungen in topologischen vereinen. *Computing Supplementum*, (1), 1977.

[GnMS95] E. Gardeñes, H. Mielgo, and M.A. Sainz. Presentation of the research group sigla/x. Technical report, Universitat de Girona, 1995.

[GnMT86] E. Gardeñes, H. Mielgo, and A. Trepat. Modal intervals: reason and ground semantics. *Lecture Notes in Computer Science 212. Springer*, 1986.

[GnT79] E. Gardeñes and A. Trepat. *The interval computing system Sigla-PL/I(0)*. Freiburg Intervall-Berichte 79/8. Freiburg, 1979.

[Kau80] E. Kaucher. Interval analysis in the extended interval space ir. *Computing Supplementum*, (2):33–49, 1980.

[Kul71] U. Kulisch. An axiomatic approach to rounded computations. (18):1–17, 1971.

[Mie82] H. Mielgo. *Sigladef: a generator for problem-oriented dialects of programming languages*. 22nd. Science Week. Damascus, 1982.

[Nic77] K.Ñickel. *Interval analysis in the state of the art in numerical analysis*. Ed. Academic Press, 1977.

[SG96a] SIGLA/X-Group. Construcción de los intervalos modales. Technical report, Universitat de Girona, 1996.

[SG96b] SIGLA/X-Group. Ground construction of modal intervals. Technical report, Universitat de Girona, 1996.

[Sun58] T. Sunaga. Theory of an interval algebra and its applications to numerical analysis. *RAAG Memoirs*, (2):547–564, 1958.

[Tre82] A. Trepat. *Completación reticular del espacio de intervalos*. PhD thesis, Tesina Facultad de matemáticas. Universidad de Barcelona, 1982.

[War56] M. Warmus. Theory of an interval algebra and its applications to numerical analysis. *Bull. Acad. Pol. Sci.*, pages 253–259, 1956.

[War61] M. Warmus. Approximations and inequalities in the calculus of approximations. classification of approximate numbers. *Bull. Acad. Pol. Sci. Ser. Sci Math. Astr. Phys*, (9):241–245, 1961.

9. Problemas

1. A partir de la igualdad $ax = b$, averiguar cuales de las siguientes proposiciones son ciertas

   a) $(\forall a \in [3,8]')\ (\forall x \in [-1,2]')\ (\forall b \in [-8,16]')\ ax = b$

   b) $(\forall a \in [3,8]')\ (\forall x \in [-1,2]')\ (\exists b \in [-8,16]')\ ax = b$

   c) $(\forall a \in [3,8]')\ (\exists x \in [-1,2]')\ (\exists b \in [-8,16]')\ ax = b$

   d) $(\forall b \in [-8,16]')\ (\exists x \in [-1,2]')\ (\exists a \in [3,8]')\ ax = b$

   e) $(\forall b \in [-8,16]')\ (\forall x \in [-1,2]')\ (\exists a \in [3,8]')\ ax = b$

2. Para los intervalos modales $([3,4]', \mathrm{E})$, $([-5,0]', \mathrm{U})$, $([3,3]', \mathrm{E})$ y $([3,3]', \mathrm{U})$, hallar extensión, modalidad, ínfimo, supremo y expresarlos en notación canónica.

3. Para los intervalos modales $[3,-1]$, $[4,6]$, $[-5,-10]$ y $[4,4]$, expresarlos como pares (conjunto, cuantificador) y hallar ínfimo, supremo, extensión y modalidad.

4. Representar gráficamente los intervalos modales $([-3,-3]', \mathrm{U})$, $([-1,2]', \mathrm{U})$ y $([3,4]', \mathrm{E})$.

5. Averiguar si son ciertas o no las proposiciones

   a) $\mathrm{Q}(x, ([3,4]', \mathrm{E}))\ x < 0$

   b) $\mathrm{Q}(x, ([-1,2]', \mathrm{U}))\ x + 16 < 4$

   c) $\mathrm{Q}(x, [1,3])\ x^2 + x + 1 < 2$

   d) $\mathrm{Q}(x, [4,-2])\ |x+3| < |x+1|$

6. Decidir si

   a) $(1 + x^2 \leq 0) \in \mathrm{Pred}([4,1])$

   b) $(1 + x^2 < 3) \in \mathrm{Pred}([-4,2])$

   c) $(x + 5 \in [4,5]') \in \mathrm{Pred}([-1,-3])$

   d) $(3x - 4 > x^2) \in \mathrm{Copred}([0,3])$

   e) $(x < 7) \in \mathrm{Copred}([2,2])$

   f) $(x + 5 \in [4,5]') \in \mathrm{Copred}([-1,-3])$

7. Comprobar que

   a) $\mathrm{Pred}([3,5]) = \cup(x, [3,5]')\{P(.) \mid P(x)\}$

   b) $\mathrm{Pred}([-1,-4]) = \cap(x, [-4,-1]')\{P(.) \mid P(x)\}$

8. Averiguar si son ciertas las siguientes inclusiones

a) $[4,5] \subseteq [-1,-3]$
b) $[6,1] \subseteq [4,15]$
c) $([3,4]', \mathrm{U}) \subseteq ([-1,10]', \mathrm{U})$
d) $([0,0]', \mathrm{E}) \subseteq ([-5,6]', \mathrm{U})$
e) $([1,2]', \mathrm{E}) \subseteq [1,1]$

9. Comprobar que $[4,1] \subseteq [2,3]$ y que
$\mathrm{Pred}([4,1]) \subseteq \mathrm{Pred}([2,3])$
$\mathrm{Copred}([4,1]) \supseteq \mathrm{Copred}([2,3])$

10. Averiguar si $[6,2] \leq [1,10]$ y $([4,5]', \mathrm{E}) \leq ([6,8]', \mathrm{U})$.

11. Comprobar si

a) $\mathrm{Dual}([3,6]) \subseteq \mathrm{Prop}([4,5])$
b) $\mathrm{Impr}([4,8]) \leq \mathrm{Dual}([3,4]', \mathrm{U})$
c) $\neg \mathrm{Q}(x,[3,1])P(x) \Leftrightarrow \mathrm{Q}(x,[1,3])\neg P(x)$
d) $P(.) \in \mathrm{Copred}([3,1]) \Leftrightarrow \neg P(.) \in \mathrm{Pred}([1,3])$

12. Calcular

a) $[3,-1] \vee [4,5]$
b) $\vee([3,2],[5,6],[-1,-3])$
c) $\wedge([8,6],[1,2],[-1,5],[0,3],[2,2])$
d) $(\vee([3,-4],[-1,3],[5,-8])) \wedge (\wedge(i,[1,6]')[i,i+3])$
e) $(\mathrm{B}(i,\{1,6,8\})[i-1,i-5]) \vee (\mathrm{T}(i,[1,2]')[i^2+1,1])$

13. Verificar si

a) $(. \in [1,4]') \in \mathrm{Pred}^*([1,2]', \mathrm{U})$
b) $(. \in [-3,-1]') \in \mathrm{Pred}^*([-7,0])$
c) $(. \notin [0,0]') \in \mathrm{Copred}^*([-1,1]', \mathrm{E})$
d) $(. \notin [1,3]') \in \mathrm{Copred}^*([4,-3])$

14. Para los intervalos $A = [3,2]$ y $B = [-1,6]$ comprobar que
$\mathrm{Pred}(A \wedge B) \subseteq \mathrm{Pred}(A) \cap \mathrm{Pred}(B)$
$\mathrm{Pred}^*(A \vee B) \supseteq \mathrm{Pred}^*(A) \cup \mathrm{Pred}^*(B)$
y averiguar si
$\mathrm{Pred}(A \vee B) \subseteq \mathrm{Pred}(A) \cup \mathrm{Pred}(B)$

15. Comprobar si
$([3,4],[2,-1],[1,2]) \subseteq ([1,8],[-3,-5],[0,3])$ y
$\mathrm{Prop}([3,-4],[2,2]) \supseteq \mathrm{Impr}([3,2],[-1,6])$