Análisis intervalar clásico

SIGLA/X Group[1]

Resumen

The reason from which Interval Analysis arises, is the lack of operational homogeneity between the Real and the Digital lines. We show that an interval of "real" numbers can be thought of as a new kind of number, represented by a pair of "real" numbers, namely its endpoints. We introduce an arithmetic -interval arithmetic- for such numbers and we discuss algebraic properties of interval arithmetic. A variety of techniques is available for refining upper and lower bounds on ranges of values of functions. We introduce the defectiveness of the set-theorical interval system.

1. Los números reales y la codificación digital

A nivel teórico, los números reales poseen dos cualidades: por una parte generalizan el concepto de fracciones exactas al de números exactos y, en segundo lugar, nos permiten trabajar con el modelo geométrico continuo de la recta real, al identificar el conjunto $\mathbb{R}$ de los números reales con el conjunto de puntos de la recta. Sin embargo, la práctica nos va a impedir que los números reales se comporten como su nombre parece indicar.

Es bien conocido que los resultados numéricos, excepto en el caso de números enteros no grandes son, en general, resultados estimados procedentes de alguna medida o computación. Cuando se pasa de estudiar un problema a nivel teórico a su ejecución práctica, el sistema de los números reales pierde gran parte del atractivo que teóricamente poseía. Al tratar un problema teórico podemos admitir cualquier número real, tenga o no una cantidad ilimitada de cifras; pero al descender al terreno práctico, dicho valor deberá plasmarse en alguna cantidad concreta. Podemos pensar que la tecnología nos permite trabajar con un número suficientemente elevado de cifras para no preocuparnos de este problema, pero esto sería ignorar la realidad y estaríamos aplicando las propiedades del conjunto de números reales a un conjunto de números, los digitales, que de hecho no las posee.

Por lo tanto al ser imposible trabajar con números con infinitas cifras decimales, consideraremos números codificados con un número finito de ellas. Los sistemas de

[1]SIGLA/X membership: Calm R., Estela M.R., Gardeñes E., Jorba L., Mielgo H., Sainz M.A., Trepat A.

números codificados que se utilizan en la práctica constituyen la "escala digital" y sus valores correspondientes son los "números digitales". Por ejemplo,

$$\mathrm{DI}(1,1) = \{-9{,}9,\ -9{,}8,\ \cdots,\ -0{,}1,\ 0,\ 0{,}1,\ \cdots,\ 9{,}8,\ 9{,}9\}$$

corresponde a la escala digital con un único dígito entero y un único dígito decimal.

Podemos plantearnos el problema de que marca digital de la escala DI(1,1) sería la más adecuada para representar el valor 1/3. Sea cual sea el valor que escojamos, el valor representado no es exactamente el de 1/3. No hay un criterio biyectivo para la correspondencia entre $\mathbb{R}$ y DI(1,1), y no se soluciona este problema si consideramos una escala digital con más dígitos enteros y fraccionarios tales como DI(3,2) o DI(100,100) sustituyendo a DI(1,1). La parte crucial del problema es la limitación de cualquier escala digital posible DI usada como un conjunto de códigos o puntos de la recta real $\mathbb{R}$.

No debemos suponer además que el problema de codificar los números reales aparece únicamente cuando los valores que queremos codificar estén determinados a través de definiciones independientes de la escala digital. El problema se mantiene cuando buscamos números reales resultado de aplicar algunas operaciones aritméticas a valores numéricos de la misma escala digital. Por ejemplo el resultado del producto de 0.3 por sí mismo en la escala digital DI(1,1) está entre 0.0 y 0.1. Este hecho significa la falta de estabilidad aritmética para escalas númericas finitas, y deja al resultado de largas operaciones fuera de lugar. [SG96]

1.1. Redondeos

Un modo de resolver el problema de la representación de un número real mediante números de una escala digital es acotarlo entre dos números digitales consecutivos, verificando ciertas condiciones.

Sean α y β el primer y último elementos de una escala digital DI. Por ejemplo, la escala digital en notación binaria de punto flotante normalizado, con dos dígitos de mantisa, y exponente entero comprendido entre -1 y 1, está formado por los elementos

$$\begin{aligned}\mathrm{DI} \;=\; & \{\pm 0{,}10\cdot 2^{-1},\ \pm 0{,}11\cdot 2^{-1},\ \pm 0{,}10\cdot 2^{0},\ \pm 0{,}11\cdot 2^{0},\ \pm 0{,}10\cdot 2^{+1},\\ & \pm 0{,}11\cdot 2^{+1},\ 0\} = \{\pm 1/4,\ \pm 3/8,\ \pm 1/2,\ \pm 3/4,\ \pm 1,\ \pm 3/2,\ 0\}\end{aligned}$$

que tiene $\alpha = -3/2$ y $\beta = 3/2$. Si consideramos el conjunto de números reales entre α y β

$$A := \{x \in \mathbb{R} \mid \alpha \leq x \leq \beta\}$$

los conjuntos A y DI son conjuntos totalmente ordenados por la relación $\leq$ y además

DI $\subseteq A$. Si a es un elemento cualquiera de A, definimos

$$L_{\mathrm{DI}}(a) := \{x \in \mathrm{DI} \mid x \leq a\} \neq \varnothing$$
$$U_{\mathrm{DI}}(a) := \{x \in \mathrm{DI} \mid x \geq a\} \neq \varnothing$$

Sean $i(L_{\mathrm{DI}}(a))$ el último elemento de $L_{\mathrm{DI}}(a)$ y $o(L_{\mathrm{DI}}(a))$ el primer elemento de $U_{\mathrm{DI}}(a)$, entonces la aplicación l de A en DI dada por

$$l(a) = i(L_{\mathrm{DI}}(a))$$

verifica

1. $(\forall (x, y) \in A) \;\; (x \leq y \;\; \Leftrightarrow \;\; l(x) \leq l(y))$ por lo que l recibe el nombre de redondeo.
2. $x \in \mathrm{DI}$ implica $l(x) = x$ por lo que el redondeo es optimal.
3. $(\forall x \in A) \;\; (l(x) \leq x)$ por lo que el redondeo se denomina dirigido a la izquierda.

La aplicación r de A en DI dada por

$$r(a) = o(L_{\mathrm{DI}}(a))$$

verifica

1. $(\forall (x, y) \in A) \;\; (x \leq y \;\; \Leftrightarrow \;\; r(x) \leq r(y)))$.
2. $x \in \mathrm{DI} \;\; \Leftrightarrow \;\; r(x) = x$.
3. $(\forall x \in A) \;\; (r(x) \geq x)$

que hace que r sea un redondeo optimal dirigido hacia la derecha.

Entre ambos redondeos se verifican las propiedades

1. $(\forall x \in A) \; (\nexists n \in \mathrm{DI}) \; (l(x) < n < r(x))$
2. $(\forall x \in A) \; (l(x) \leq r(x))$
3. $(\forall x \in A) \; (r(x) = -l(-x))$

El intervalo determinado por ambos redondeos resolverá el problema de acotar a mediante números digitales. Así cada valor $x \in A$ vendrá representado por el intervalo $[l(x), r(x)]$ que es el mínimo intervalo con extremos en DI que contiene a x.

2. Necesidad de los intervalos

Lo que sí ofrece el conjunto $\mathbb{R}$ de los números reales es un soporte lógico a los modelos sobre fenómenos reales que tratan con medidas supuestamente objetivas de magnitudes supuestamente continuas. Sin embargo, las operaciones prácticas de medida o cálculo de magnitudes de $\mathbb{R}$ sólo pueden acotar un intervalo, que da la máxima identificación operacional posible del valor medido o calculado.

La utilización del conjunto de intervalos sobre la recta real, $I(\mathbb{R})$, permitirá manejar los sistemas físicos con modelos numéricos sin necesidad de hacer abstracción del hecho inevitable de la indeterminación asociada a los procesos de medida y cálculo.

Los intervalos permitirán:

1. la manipulación de errores de truncamiento.

   Por ejemplo el número $\pi = 3{,}14159265\cdots \in [3{,}14, 3{,}15]$

2. el control automático de errores operacionales en el cálculo digital.

3. el manejo de errores de datos físicos que provienen de medidas experimentales.

   Por ejemplo la constante gravitatoria $g = 9{,}807 \pm 0{,}027\mathrm{m/s}^2 \in [9{,}780, 9{,}834]$.

4. la utilización de variables de indeterminación o de variación.

   Por ejemplo la temperatura de una habitación durante las 24 horas del dia varía entre 18 y 25 grados, entonces $T = [18, 25]$

En la construcción de $I(\mathbb{R})$, propiedades esenciales se perderán (por ejemplo, distributividad del producto respecto la suma) y ganarán (relación de inclusión), de modo que la estructura numérica de $I(\mathbb{R})$ no será en absoluto una simple completación de un conjunto numérico con conservación de propiedades. [Tre82]

Si tenemos en cuenta, tal como hemos dicho en el apartado anterior, que en la matemática práctica se utiliza como soporte numérico subconjuntos finitos de $\mathbb{R}$ (conjuntos de números representables en un ordenador digital) que designaremos con la notación genérica DI (recta máquina o red digital), entonces el conjunto de los intervalos con extremos en DI, $I(\mathrm{DI})$, va a ser el conjunto operativo base para las operaciones calculables que tengan en cuenta el control automático de la inevitable indeterminación de los valores numéricos calculados o medidos.

El conjunto de los intervalos clásicos $I(\mathbb{R})$ no permitirá un tratamiento algorítmico, pero si establecer el modelo analítico formal de las operaciones y relaciones intervalo. El conjunto $I(\mathrm{DI})$, en cambio, no asegura cálculos ni relaciones exactas, pero permite una realización algorítmica soportada por la red digital DI. El conjunto $I(\mathrm{DI})$ aproximará operativamente $I(\mathbb{R})$ y controlará los errores de cálculo de los algoritmos definidos en $\mathbb{R}$ y realizados en DI.

3. Definición e interpretación de $I(\mathbb{R})$

Sea $\mathbb{R}$ el conjunto de los números reales y sea $\leq$ la relación de orden usual en $\mathbb{R}$. Si $\underline{a}, \overline{a} \in \mathbb{R}$, se define un intervalo A:

$$A = [\underline{a}, \overline{a}] := \{x \in \mathbb{R} \mid \underline{a} \leq x \leq \overline{a}\}$$

Los elementos $\underline{a}, \overline{a}$ se denominan ínfimo y supremo, respectivamente, del intervalo. El conjunto de los intervalos se denota por $I(\mathbb{R})$. Es habitual representar gráficamente los intervalos en coordenadas ínfimo-supremo en el llamado diagrama de Moore.

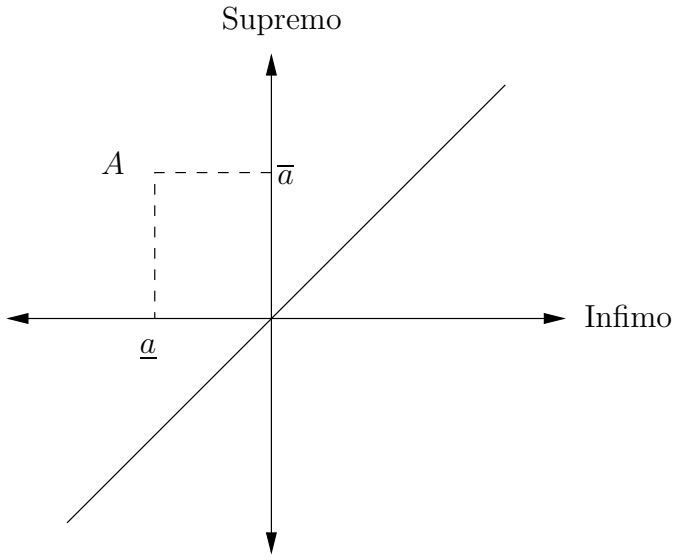


Figura 1: Plano de Moore

De esta manera $I(\mathbb{R})$ puede identificarse con el conjunto de puntos de $\mathbb{R}^2$ situados a la izquierda de la diagonal principal. En particular los elementos de la diagonal cumplen $\underline{a} = \overline{a}$ y se llaman intervalos puntuales o degenerados, denotándose mediante $\dot{A} = [a, a]$. Puede considerarse $\mathbb{R}$ incluido de manera natural en $I(\mathbb{R})$ mediante la inyección trivial

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & I(\mathbb{R}) \\ x & \longrightarrow & [x, x] = \dot{X} \end{array}$$

Es importante resaltar, sin embargo, que un intervalo representa un subconjunto de $\mathbb{R}$ y no un elemento de $\mathbb{R}^2$.

3.1. Relaciones en $I(\mathbb{R})$

Las relaciones entre intervalos expresan, desde el punto de vista conjuntista, relaciones análogas entre sus elementos. Por ejemplo la relación $A < B$ entre intervalos (o

subconjuntos de $\mathbb{R}$) expresa de alguna manera que "los elementos de A son menores que los de B". Esta relación puede concretarse de varias maneras, en general no equivalentes entre sí. Por ejemplo podríamos tener como definición

$$A < B \ :=^{?} \ (\forall a \in A)\ (\forall b \in B)\ \ (a < b)$$
$$A < B \ :=^{?} \ (\forall a \in A)\ (\exists b \in B)\ \ (a < b)\ ,\ (\forall b \in B)\ (\exists a \in A)\ \ (a < b)$$

o en el caso de la igualdad

$$A = B \ :=^{?} \ (\forall a \in A)\ (\forall b \in B)\ \ (a = b)$$
$$A = B \ :=^{?} \ (\forall a \in A)\ (\exists b \in B)\ \ (a = b)\ ,\ (\forall b \in B)\ (\exists a \in A)\ \ (a = b)$$
$$A = B \ :=^{?} \ \text{ni}\ \ A < B\ \ \text{ni}\ \ B < A$$

La elección de una definición adecuada no es evidente "a priori", aunque hoy día existe ya prácticamente un acuerdo general sobre cual es la definición útil en cada caso. Estas definiciones las daremos a continuación. De todas formas, independientemente de las definiciones elegidas, la tricotomía clásica ($x < y$ $\underline{\text{or}}$ $x > y$ $\underline{\text{or}}$ $x = y$) utilizada en la definición de funciones racionales a trozos, o en algoritmos de cálculo, no puede conservarse para los intervalos.

Definición 3.1 (Igual)

$$A = B \ := \ (\forall a \in A)\ (\exists b \in B)\ (a = b)\ ,\ (\forall b \in B)\ (\exists a \in A)\ (b = a)$$

El cálculo en función de los extremos de los intervalos es:

$$A = B \ \Leftrightarrow \ \underline{a} = \underline{b}\ ,\ \overline{a} = \overline{b}$$

Propiedades:

1. Reflexiva: $A = A$
2. Simétrica: $A = B \ \Rightarrow \ B = A$
3. Transitiva: $(A = B\ ,\ B = C) \ \Rightarrow \ A = C$

Definición 3.2 (Menor o igual)

$$A \leq B \ := \ (\forall a \in A)\ (\exists b \in B)\ (a \leq b)\ ,\ (\forall b \in B)\ (\exists a \in A)\ (a \leq b)$$

El cálculo en función de los extremos de los intervalos es:

$$A \leq B \ \Leftrightarrow \ \underline{a} \leq \underline{b}\ ,\ \overline{a} \leq \overline{b}$$

Propiedades:

1. Reflexiva: $A \leq A$
2. Antisimétrica débil: $(A \leq B \ , \ B \leq A) \ \Rightarrow \ A = B$
3. Transitiva: $(A \leq B \ , \ B \leq C) \ \Rightarrow \ A \leq C$

En el plano de Moore tenemos

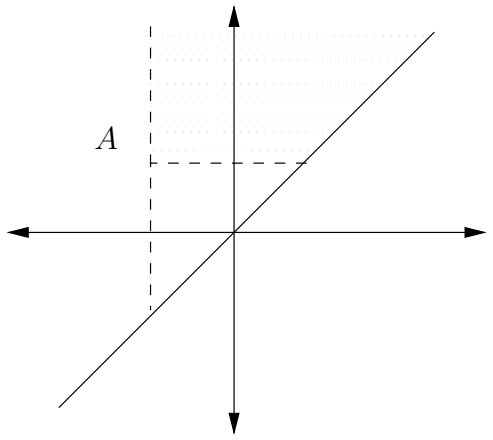


Figura 2: $\{X \in I(\mathbb{R}) \mid X \geq A\}$

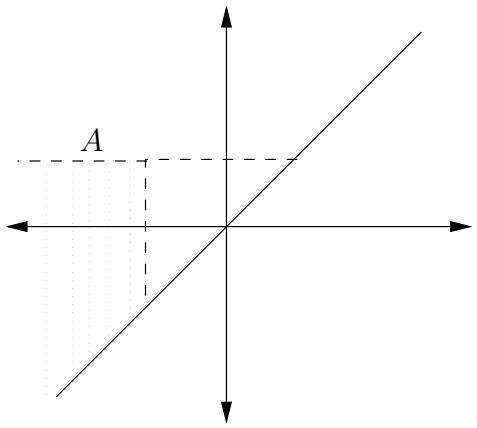
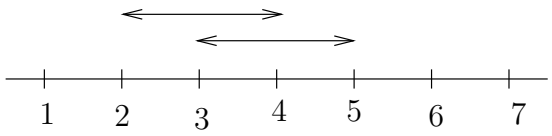


Figura 3: $\{X \in I(\mathbb{R}) \mid X \leq A\}$

Ejemplo 3.1

Para $A = [2, 4]$ y $B = [3, 5]$, tenemos que $A \leq B$ ya que $\underline{a} = 2 \leq \underline{b} = 3$ y $\overline{a} = 4 \leq \overline{b} = 5$. Gráficamente



Definición 3.3 (Menor)

$$A < B \quad := \quad (\forall a \in A) \ (\forall b \in B) \ (a < b)$$

El cálculo en función de los extremos de los intervalos es:

$$A < B \quad \Leftrightarrow \quad \overline{a} < \underline{b}$$

Propiedades:

1. Antireflexiva: $\neg(A < A)$

2. Antisimétrica fuerte: $\neg(A < B \ \underline{\text{or}} \ B < A)$

3. Transitiva: $(A < B \ , \ B < C) \ \Rightarrow \ A < C$

En el plano de Moore las relaciones "mayor que" y "menor que" corresponden a las regiones sombreadas.

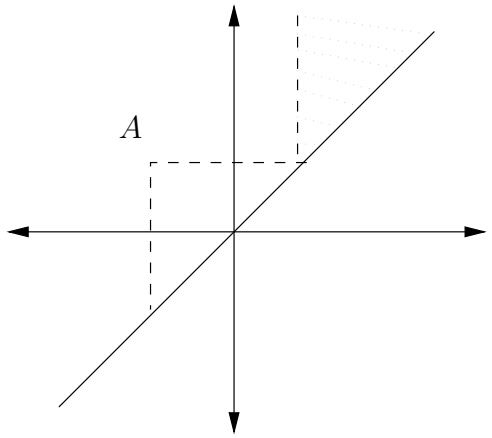


Figura 4: $\{X \in I(\mathbb{R}) \mid X > A\}$

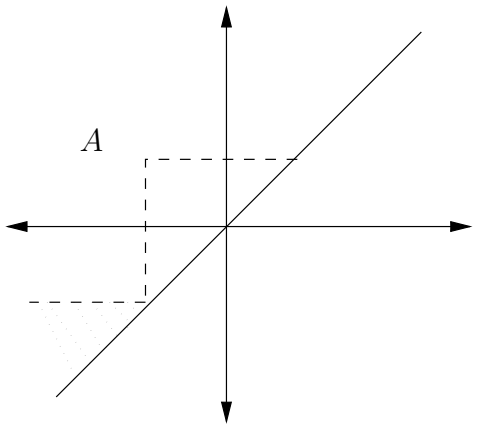
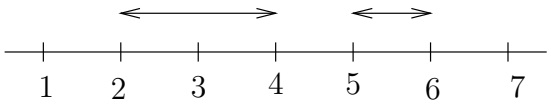


Figura 5: $\{X \in I(\mathbb{R}) \mid X < A\}$

Ejemplo 3.2

Gráficamente, representaremos los intervalos sobre la recta real de la forma

Observemos que $[2,4] < [5,6]$ ya que $\overline{a} = 4 < \underline{b} = 5$ y gráficamente



Definición 3.4 (Incluido)

$$A \subseteq B \quad := \quad (\forall a \in A) \ (a \in B)$$

El cálculo en función de los extremos de los intervalos es:

$$A \subseteq B \quad \Leftrightarrow \quad \underline{a} \geq \underline{b} \ , \ \overline{a} \leq \overline{b}$$

Propiedades:

1. Reflexiva: $A \subseteq A$

2. Antisimétrica débil: $(A \subseteq B,\ B \subseteq A) \quad \Rightarrow \quad A = B$

3. Transitiva: $(A \subseteq B\ ,\ B \subseteq C) \quad \Rightarrow \quad A \subseteq C$

Gráficamente en el plano de Moore

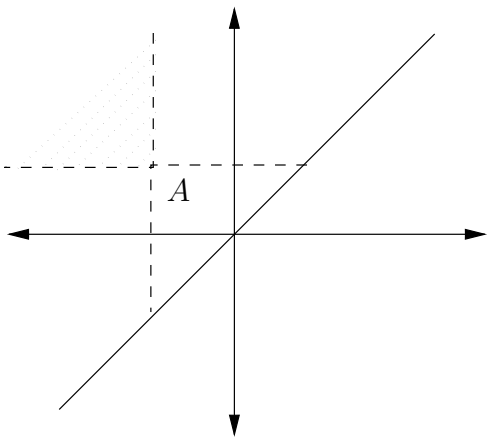


Figura 6: $\{X \in I(\mathbb{R}) \mid X \supseteq A\}$

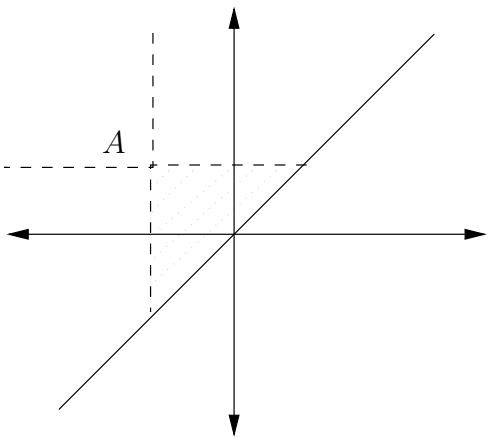
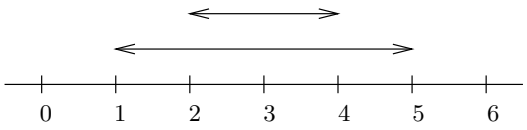


Figura 7: $\{X \in I(\mathbb{R}) \mid X \subseteq A\}$

Ejemplo 3.3

Para $A = [2, 4]$ y $B = [1, 5]$, tenemos que $A \subseteq B$ ya que $\underline{a} = 2 \geq \underline{b} = 1$ y $\overline{a} = 4 \leq \overline{b} = 5$. Gráficamente



A continuación introduciremos dos nuevas definiciones, incidente $=_{\text{и}}$ y menor o incidente $\leq_{\text{и}}$, que nos permitiran dotar a $I(\mathbb{R})$ de estructura de cuerpo ordenado.

Definición 3.5 (Incidente)

$$A =_{\text{и}} B \quad := \quad (\exists a \in A)\ (\exists b \in B)\ (a = b)$$

que equivale a $A \cap B \neq \emptyset$

El cálculo en función de los extremos de los intervalos es:

$$A =_{\text{и}} B \quad \Leftrightarrow \quad \text{máx}(\underline{a}, \underline{b}) \leq \text{mín}(\overline{a}, \overline{b})$$

Propiedades:

1. Reflexiva: $A =_и A$
2. Simétrica: $A =_и B \quad \Rightarrow \quad B =_и A$
3. No transitiva: $(A =_и B \ , \ B =_и C) \quad \not\Rightarrow \quad A =_и C$

Gráficamente la relación de incidente en el plano de Moore es:

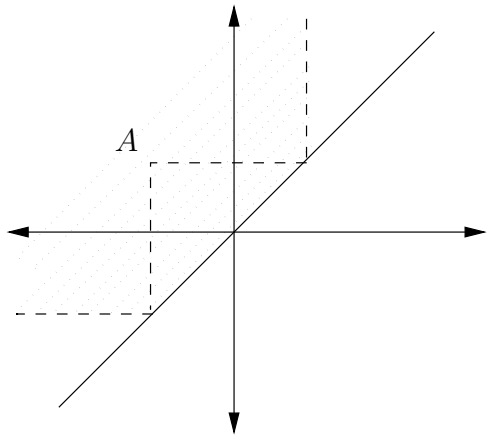


Figura 8: $\{X \in I(\mathbb{R}) \mid X =_и A\}$

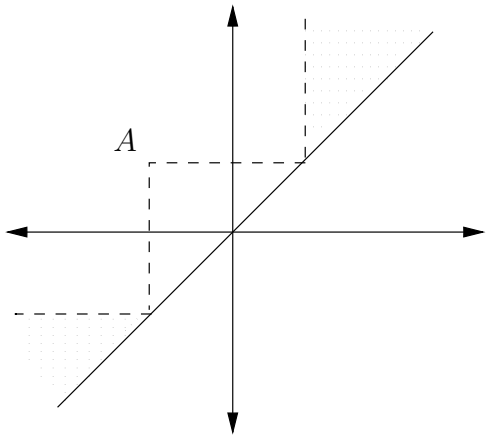


Figura 9: $\{X \in I(\mathbb{R}) \mid X \neq_и A\}$

Definición 3.6 (Menor o incidente)

$$A \leq_и B \quad := \quad (A < B \ \ \underline{or} \ \ A =_и B)$$

El cálculo en función de los extremos de los intervalos es:

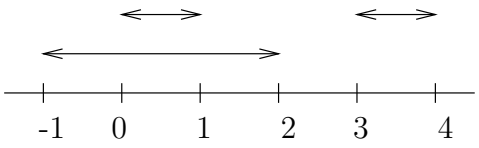
$$A \leq_и B \quad \Leftrightarrow \quad \underline{a} \leq \overline{b}$$

Observemos que se verifica la propiedad

$$A \leq_и B \quad \Leftrightarrow \quad \neg(A > B)$$

Ejemplo 3.4

$[-1, 2] \leq_и [3, 4]$ y $[-1, 2] \leq_и [0, 1]$. Gráficamente



Propiedades:

1. Reflexiva: $A \leq_{\text{и}} A$
2. Antisimétrica débil: $(A \leq_{\text{и}} B,\ B \leq_{\text{и}} A) \quad \Rightarrow \quad A =_{\text{и}} B$
3. No transitiva: $(A \leq_{\text{и}} B\ ,\ B \leq_{\text{и}} C) \quad \not\Rightarrow \quad A \leq_{\text{и}} C$

Gráficamente la relación de menor o incidente en el plano de Moore es:

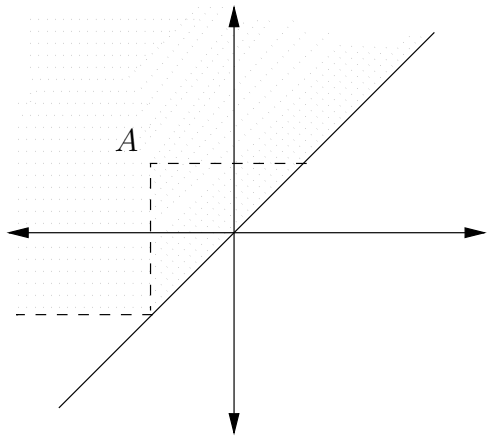


Figura 10: $\{X \in I(\mathbb{R}) \mid X \geq_{\text{и}} A\}$

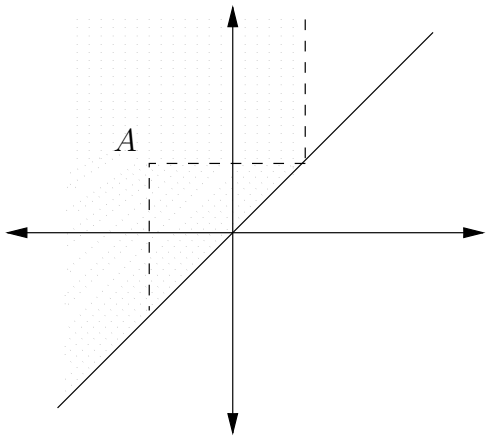


Figura 11: $\{X \in I(\mathbb{R}) \mid X \leq_{\text{и}} A\}$

3.2. Propiedades reticulares

Sea M un conjunto y sea $\leq$ una relación de orden parcial o total en M. El sistema $(M, \leq)$ se llama un conjunto parcial o totalmente ordenado. Un conjunto parcialmente ordenado se llama retículo si para cada par de elementos $a, b \in M$, entonces $\sup(a, b)$ e $\text{ínf}(a, b)$ existen.

La definición de intervalo es válida en M. Si $\underline{a}, \overline{a} \in M$, un intervalo A es

$$A = [\underline{a}, \overline{a}] := \{x \in M \mid \underline{a} \leq x \leq \overline{a}\}$$

y designamos $I(M)$ el conjunto de intervalos en M.

Lema 3.1

Si $(M, \leq)$ es un retículo, entonces $(I(M), \leq)$ es un retículo.

Demostración:

Basta considerar las expresiones

$$\begin{aligned} \sup_{\leq}(A, B) &= [\sup(\underline{a}, \underline{b}), \sup(\overline{a}, \overline{b})] \\ \text{ínf}_{\leq}(A, B) &= [\text{ínf}(\underline{a}, \underline{b}), \text{ínf}(\overline{a}, \overline{b})] \end{aligned}$$

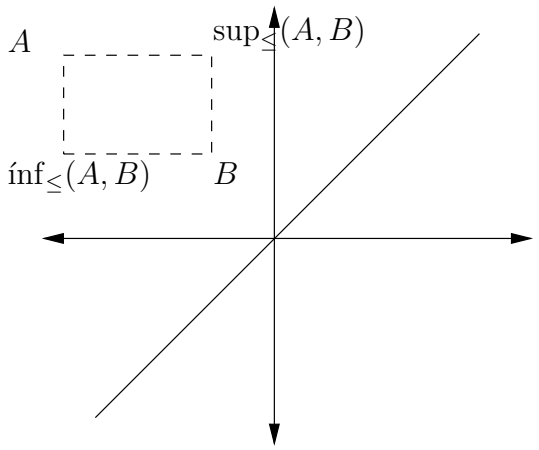


Figura 12: $\inf_{\leq}(A,B)$ y $\sup_{\leq}(A,B)$

Así, la relación $\leq$ en $I(M)$ es una extensión de la relación $\leq$ en M.

Lema 3.2

Si $(M,\leq)$ es un retículo, entonces $(I(M)\cup\varnothing,\subseteq)$ es un retículo y $(I(M),\subseteq)$ es un semirretículo superior. Las expresiones para inf y sup son:

$$A\vee B \;:=\; \sup_{\subseteq}(A,B)=[\text{ínf}(\underline{a},\underline{b}),\sup(\overline{a},\overline{b})]$$

$$A\wedge B \;:=\; \inf_{\subseteq}(A,B)=\begin{cases}[\sup(\underline{a},\underline{b}),\text{ínf}(\overline{a},\overline{b})] & \text{si}\quad \sup(\underline{a},\underline{b})\leq\text{ínf}(\overline{a},\overline{b})\\ \varnothing & \text{en otro caso}\end{cases}$$

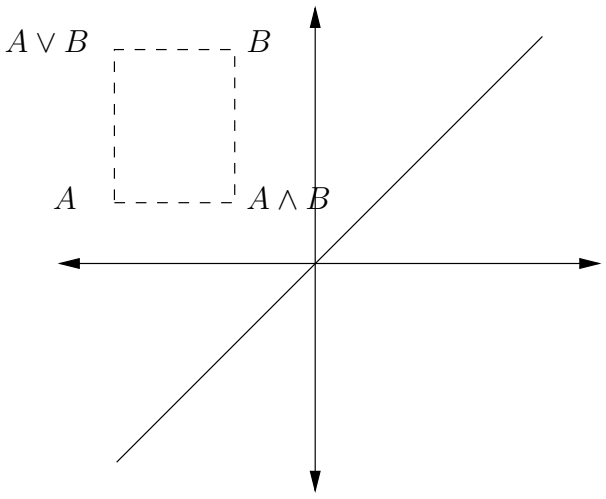


Figura 13: $A\vee B$ y $A\wedge B$

Obsérvese que $(I(M),\subseteq)$ necesita de la incorporación del elemento vacío o de la incorporación de los intervalos "impropios" ($[\underline{a},\overline{a}]$ cuando $\underline{a}>\overline{a}$) para ser un retículo.

Ejemplo 3.5

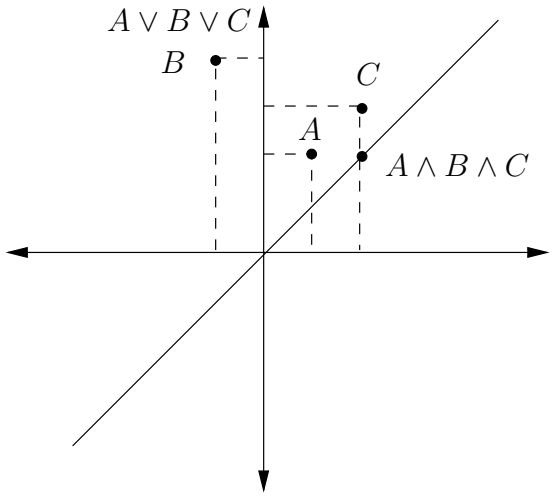
Dados los intervalos $A = [1, 2]$, $B = [-1, 4]$, $C = [2, 3]$, tenemos

$$A \vee B \vee C = [-1, 4]$$
$$A \wedge B \wedge C = [2, 2]$$

Además

$$\sup(A, B, C) = [2, 4]$$
$$\leq$$
$$\text{ínf}(A, B, C) = [-1, 2]$$
$$\leq$$

Gráficamente



Observemos que si $B = [-1, 1]$, entonces según la definición anterior $A \wedge B \wedge C = \varnothing$ pues de otra forma tendríamos $A \wedge B \wedge C = [2, 1] \notin I(\mathbb{R})$

4. Operaciones aritméticas en $I(\mathbb{R})$

Con las operaciones aritméticas $(+, -, *, /)$ entre intervalos, pretendemos que el resultado refleje el conjunto de resultados individuales obtenidos operando todos los elementos puntuales de un operando con todos los del otro, con las mínimas condiciones siguientes:

1. El resultado de la operación debe ser un intervalo.
2. Todos los resultados de operaciones con elementos puntuales de ambos operandos deben estar representados en el resultado.

3. La restricción de la operación a intervalos puntuales debe coincidir con la misma operación en $\mathbb{R}$.

Con esta extensión vamos a obtener unas definiciones de las operaciones intervalo.

La manera natural de extender las cuatro operaciones aritméticas básicas de $\mathbb{R}$ a $I(\mathbb{R})$ es la conjuntista: si $w \in \{+, -, *, /\}$ y $A, B \in I(\mathbb{R})$ entonces

$$AwB := \{x = awb \mid a \in A \ , \ b \in B\}$$

En el caso de la división, si $0 \in B$ se considera la operación como no definida.

Observemos que AwB es un intervalo. En efecto, las funciones

$$f_w(x, y) := xwy \ , \ w \in \{+, -, *, /\}$$

son continuas en $\mathbb{R}$. Por tanto, cuando son aplicadas sobre intervalos $A \times B$, tienen valores máximo y mínimo. Además, la imagen continua de un intervalo es un intervalo, así $AwB = f_w(A, B)$ es un elemento de $I(\mathbb{R})$.

La semántica que se obtiene es evidentemente

$$(\forall x \in A)\ (\forall y \in B)\ (\exists z \in AwB)\ z = xwy$$

Los extremos del intervalo AwB pueden calcularse a partir solamente de los extremos de los intervalos A y B. En efecto, en el rectángulo $A \times B$ tenemos:

$$\begin{array}{ll}
\dfrac{\partial f_+(x,y)}{\partial x} = 1 & \dfrac{\partial f_+(x,y)}{\partial y} = 1 \\
\dfrac{\partial f_-(x,y)}{\partial x} = 1 & \dfrac{\partial f_-(x,y)}{\partial y} = -1 \\
\dfrac{\partial f_*(x,y)}{\partial x} = y & \dfrac{\partial f_*(x,y)}{\partial y} = x \\
\dfrac{\partial f_/(x,y)}{\partial x} = \dfrac{1}{y} & \dfrac{\partial f_/(x,y)}{\partial y} = \dfrac{-x}{y^2} \quad (y \neq 0)
\end{array}$$

Así $\dfrac{\partial f_w(x,y)}{\partial x}$ es de signo constante sobre las rectas $y =$cte, y $\dfrac{\partial f_w(x,y)}{\partial y}$ es de signo constante sobre las rectas $x =$cte, lo que demuestra que el máximo y mínimo de f en los rectángulos $A \times B$ (los admisibles en el caso de la división), se alcanzan en sus vértices.

Así la fórmula general de cálculo es

$$AwB = [\text{mín}(\underline{a}w\underline{b}, \underline{a}w\overline{b}, \overline{a}w\underline{b}, \overline{a}w\overline{b}) \ , \text{máx}(\underline{a}w\underline{b}, \underline{a}w\overline{b}, \overline{a}w\underline{b}, \overline{a}w\overline{b})]$$

lo que demuestra que el intervalo AwB es calculable.

Particularizando los resultados anteriores, se obtienen las fórmulas de cálculo en función de los extremos. Sean $A, B \in I(\mathbb{R})$, definimos:

$$A + B = [\underline{a} + \underline{b}, \overline{a} + \overline{b}]$$

$$A - B = [\underline{a} - \overline{b}, \overline{a} - \underline{b}]$$

$$\begin{aligned}
A * B \;=\; & \left[\underline{a}\,\underline{b},\ \overline{a}\,\overline{b}\right] \quad \text{si} \;\; \underline{a} \geq 0,\ \overline{a} \geq 0,\ \underline{b} \geq 0,\ \overline{b} \geq 0 \\
& \left[\overline{a}\,\underline{b},\ \overline{a}\,\overline{b}\right] \quad \text{si} \;\; \underline{a} \geq 0,\ \overline{a} \geq 0,\ \underline{b} < 0,\ \overline{b} \geq 0 \\
& \left[\overline{a}\,\underline{b},\ \underline{a}\,\overline{b}\right] \quad \text{si} \;\; \underline{a} \geq 0,\ \overline{a} \geq 0,\ \underline{b} < 0,\ \overline{b} < 0 \\
& \left[\underline{a}\,\overline{b},\ \overline{a}\,\overline{b}\right] \quad \text{si} \;\; \underline{a} < 0,\ \overline{a} \geq 0,\ \underline{b} \geq 0,\ \overline{b} \geq 0 \\
& \left[\text{mín}(\underline{a}\,\overline{b},\ \overline{a}\,\underline{b}),\ \text{máx}(\underline{a}\,\underline{b},\ \overline{a}\,\overline{b})\right] \quad \text{si} \;\; \underline{a} < 0,\ \overline{a} \geq 0,\ \underline{b} < 0,\ \overline{b} \geq 0 \\
& \left[\overline{a}\,\underline{b},\ \underline{a}\,\underline{b}\right] \quad \text{si} \;\; \underline{a} < 0,\ \overline{a} \geq 0,\ \underline{b} < 0,\ \overline{b} < 0 \\
& \left[\underline{a}\,\overline{b},\ \overline{a}\,\underline{b}\right] \quad \text{si} \;\; \underline{a} < 0,\ \overline{a} < 0,\ \underline{b} \geq 0,\ \overline{b} \geq 0 \\
& \left[\underline{a}\,\overline{b},\ \underline{a}\,\underline{b}\right] \quad \text{si} \;\; \underline{a} < 0,\ \overline{a} < 0,\ \underline{b} < 0,\ \overline{b} \geq 0 \\
& \left[\overline{a}\,\overline{b},\ \underline{a}\,\underline{b}\right] \quad \text{si} \;\; \underline{a} < 0,\ \overline{a} < 0,\ \underline{b} < 0,\ \overline{b} < 0
\end{aligned}$$

y si $0 \notin B$,

$$\begin{aligned}
A/B \;=\; & \left[\underline{a}/\overline{b},\ \overline{a}/\underline{b}\right] \quad \text{si} \;\; \underline{a} \geq 0,\ \overline{a} \geq 0,\ \underline{b} > 0,\ \overline{b} > 0 \\
& \left[\overline{a}/\overline{b},\ \underline{a}/\underline{b}\right] \quad \text{si} \;\; \underline{a} \geq 0,\ \overline{a} \geq 0,\ \underline{b} < 0,\ \overline{b} < 0 \\
& \left[\underline{a}/\underline{b},\ \overline{a}/\underline{b}\right] \quad \text{si} \;\; \underline{a} < 0,\ \overline{a} \geq 0,\ \underline{b} > 0,\ \overline{b} > 0 \\
& \left[\overline{a}/\overline{b},\ \underline{a}/\overline{b}\right] \quad \text{si} \;\; \underline{a} < 0,\ \overline{a} \geq 0,\ \underline{b} < 0,\ \overline{b} < 0 \\
& \left[\underline{a}/\underline{b},\ \overline{a}/\overline{b}\right] \quad \text{si} \;\; \underline{a} < 0,\ \overline{a} < 0,\ \underline{b} > 0,\ \overline{b} > 0 \\
& \left[\overline{a}/\underline{b},\ \underline{a}/\overline{b}\right] \quad \text{si} \;\; \underline{a} < 0,\ \overline{a} < 0,\ \underline{b} < 0,\ \overline{b} < 0
\end{aligned}$$

Para la división se puede utilizar también la fórmula

$$\begin{aligned}
\frac{1}{B} &= \left[\frac{1}{\overline{b}}, \frac{1}{\underline{b}}\right] \quad \text{si} \;\; 0 \notin B \\
\frac{A}{B} &= A * \frac{1}{B}
\end{aligned}$$

y análogamente para la diferencia

$$\begin{aligned}
-B &= [-\overline{b}, -\underline{b}] \\
A - B &= A + (-B)
\end{aligned}$$

Sin embargo la operación intervalo diferencia, no es la operación inversa de la operación intervalo suma (análogamente con las operaciones * y /), es decir si A, B, C son

intervalos las expresiones $A + B = C$, $A = C - B$ y $B = C - A$ no son equivalentes. Por ejemplo

$$[3, 5] + [2, 3] = [5, 8]$$
$$[5, 8] - [2, 3] = [2, 6]$$
$$[5, 8] - [3, 5] = [0, 5]$$

5. Propiedades algebraicas de la aritmética intervalar

Las siguientes propiedades algebraicas, son consecuencia inmediata de las definiciones de las operaciones aritméticas con intervalos.

1. Conmutatividad.

   $A + B = B + A$

   $A * B = B * A$

   Se deducen trivialmente de la conmutatividad de las operaciones + y * en $\mathbb{R}$.

2. Asociatividad.

   $(A + B) + C = A + (B + C)$

   $(A * B) * C = A * (B * C)$

   Se deducen trivialmente de la asociatividad de las operaciones + y * en $\mathbb{R}$.

3. Elemento neutro.

   $A = X + A = A + X \quad \Leftrightarrow \quad X = \dot{0}$

   $A = X * A = A * X \quad \Leftrightarrow \quad X = \dot{1}$

   Se deducen de la conmutatividad y de la definición de las operaciones + y * en $I(\mathbb{R})$.

4. Ley de simplificación para la suma.

   $A + X = B + X \quad \Leftrightarrow \quad A = B$

   Se deduce de la fórmula de la suma en coordenadas ínfimo-supremo.

5. $I(\mathbb{R})$ no tiene divisores de cero.

   $A * B = \dot{0} \quad \Leftrightarrow \quad (A = \dot{0} \ \underline{\text{or}} \ B = \dot{0})$

   Es consecuencia inmediata de la misma propiedad en $\mathbb{R}$.

6. No existen en general elementos inversos para las operaciones + y * ya que

$$[\underline{a},\overline{a}]+[\underline{x},\overline{x}]=[0,0] \quad \Leftrightarrow \quad \underline{x}=-\underline{a}\ ,\ \overline{x}=-\overline{a}$$

y si $\underline{a}<\overline{a}$ entonces $-\underline{a}>-\overline{a}$ y $[-\underline{a},-\overline{a}]\notin I(\mathbb{R})$.

Por ejemplo

$$[2,3]+[\underline{x},\overline{x}]=[0,0] \quad \Leftrightarrow \quad [\underline{x},\overline{x}]=[-2,-3]\notin I(\mathbb{R})$$

Se cumple

$A+B=0 \quad \Rightarrow \quad A,B$ son puntuales.

$A*B=1 \quad \Rightarrow \quad A,B$ son puntuales y distintos de 0.

Se deducen directamente de la definición de + y * en $I(\mathbb{R})$.

7. $0\in A-A$

Si $0\notin A\ ,\ 1\in A/A$

8. Isotonía respecto a la inclusión.

Si $w\in\{+,-,*,/\}$, entonces

$(A\subseteq B\ ,\ C\subseteq D) \quad \Rightarrow \quad AwC\subseteq BwD$

en particular, $(a\in A\ ,\ b\in B) \quad \Rightarrow \quad awb\in AwB$

9. Subdistributividad.

La propiedad distributiva no siempre es cierta, como muestra el ejemplo

$$[-1,1]*([1,1]+[-1,-1])=[-1,1]*[0,0]=[0,0]$$
$$[-1,1]*[1,1]+[-1,1]*[-1,-1]=[-1,1]+[-1,1]=[-2,2]$$

Sin embargo, se cumple una subdistributividad:

$$A*(B+C)\subseteq A*B+A*C$$

En efecto,

$$\begin{aligned} A*(B+C) &= \{a(b+c)\mid a\in A\ ,\ b\in B\ ,\ c\in C\}\subseteq \\ &\subseteq \{a_1b+a_2c\mid a_1,a_2\in A\ ,\ b\in B\ ,\ c\in C\}=A*B+A*C \end{aligned}$$

En general no se cumple la igualdad, pero en algunos casos particulares si:

a) $a*(B+C)=a*B+a*C$ donde $a\in\mathbb{R}$ y $B,C\in I(\mathbb{R})$

b) $B * C \geq 0 \quad \Rightarrow \quad A * (B + C) = A * B + A * C$

En efecto, basta demostrar que $A * B + A * C \subseteq A * (B + C)$.

Sea $x \in A * B + A * C \quad \Rightarrow \quad x = a_1 b + a_2 c \;\; (a_1, a_2 \in A \;,\; b \in B \;,\; c \in C)$;

si $b = c = 0$ entonces $x = 0 \in A * (B + C)$;

en cualquier otro caso $b + c \neq 0$, ya que por hipótesis $bc \geq 0$; entonces tenemos que $a_1 b/(b+c) + a_2 c/(b+c) \in A$ por ser A un intervalo. Entonces

$$x = a_1 b + a_2 c = \left(a_1 \frac{b}{b+c} + a_2 \frac{c}{b+c} \right) (b + c) \in A * (B + C)$$

c) $(A \neq_{\text{и}} 0,\, B =_{\text{и}} 0,\, C =_{\text{и}} 0) \Rightarrow A * (B + C) = A * B + A * C$

En efecto, en este caso

$$A * (B + C) = \begin{cases} \overline{a} * (B + C) & \text{si} \;\; A > 0 \\ \underline{a} * (B + C) & \text{si} \;\; A < 0 \end{cases}$$

10. Propiedades de la relación de incidencia.

a) $A = B \quad \Rightarrow \quad A =_{\text{и}} B$

b) $A - A =_{\text{и}} 0$

c) $A + X =_{\text{и}} B \quad \Leftrightarrow \quad X =_{\text{и}} B - A$

d) $A * X =_{\text{и}} B \quad \Leftrightarrow \quad X =_{\text{и}} B/A$

e) $A * (B + C) =_{\text{и}} A * B + A * C$

f) $A * B =_{\text{и}} 0 \quad \Leftrightarrow \quad (A =_{\text{и}} 0 \mid B =_{\text{и}} 0)$

g) $(A \leq_{\text{и}} B \;,\; C \geq_{\text{и}} 0) \quad \Rightarrow \quad A * C \leq_{\text{и}} B * C$

5.1. Estructura algebraica de $I(\mathbb{R})$

El sistema $(I(\mathbb{R}), +)$ es un semigrupo conmutativo con regla de simplificación. No todos sus elementos poseen elemento inverso.

El sistema $(I(\mathbb{R}), *)$ es un semigrupo conmutativo sin regla de simplificación. Sus elementos tampoco poseen en general elemento inverso.

El sistema $(I(\mathbb{R}), +, *)$ carece de la propiedad distributiva.

La no existencia en general de la propiedad distributiva en $I(\mathbb{R})$ provoca una falta importante de homogeneidad algebraica que se convierte en un problema grave para el manejo práctico de las ecuaciones intervalo. A título de ejemplo, considérese el problema de resolución de un sistema de ecuaciones lineales algebraicas representado por una matriz intervalo. En la resolución de este problema se recurre frecuentemente a la multiplicación de una fila por un coeficiente, realizándose en el caso puntual,

mediante la multiplicación de cada elemento de la fila por el coeficiente. En el caso intervalo, este método tendrá como consecuencia la amplificación sistemática de los resultados.

Para regularizar la estructura de $I(\mathbb{R})$ se puede recurrir a substituir las relaciones $=$ y $\leq$ de $I(\mathbb{R})$, por sus correspondientes $=_и$ y $\leq_и$. De esta manera $(I(\mathbb{R}), +, *, =_и, \leq_и)$ aparece como un "$=_и$-cuerpo ordenado por la relación $\leq_и$". En realidad ni $=_и$ es una relación de equivalencia ni $\leq_и$ es una relación de orden, pero las propiedades resultantes son muy parecidas a las $(\mathbb{R}, +, *, \leq, =)$.

6. Representación reducida

Para obtener la representación reducida de un intervalo, definimos los operadores σ y ς de la manera siguiente

$$\begin{array}{ll} \sigma = \varsigma = \underline{a} & \text{si} \quad \underline{a} = \overline{a} \\ (\sigma = \underline{a}\ ,\ \varsigma = \overline{a}) & \text{si} \quad \underline{a} = -\overline{a} \\ (\sigma = \overline{a}\ ,\ \varsigma = \underline{a}) & \text{si} \quad |\underline{a}| < |\overline{a}| \\ (\sigma = \underline{a}\ ,\ \varsigma = \overline{a}) & \text{si} \quad |\underline{a}| > |\overline{a}| \end{array}$$

y el operador $\chi :\ I(\mathbb{R}) \longrightarrow [-1, 1]$ definido de la manera siguiente:

$$\begin{array}{l} \chi = \dfrac{\varsigma}{\sigma} \quad \text{si} \ \ \sigma \neq 0 \\ \chi \in [-1, 1] \quad \text{si} \ \ \sigma = 0 \end{array}$$

Ejemplo 6.1

1. La representación reducida del intervalo [2,2] es $\chi = 1$ ya que $\sigma = \varsigma = 2$.
2. La representación reducida del intervalo $[-2, 2]$ es $\chi = -1$ ya que $\sigma = -2$ y $\varsigma = 2$.
3. La representación reducida del intervalo $[2, 3]$ es $\chi = \frac{2}{3}$ ya que $|2| < |3|$ y por lo tanto $\sigma = 3$ y $\varsigma = 2$.
4. La representación reducida del intervalo $[-3, 2]$ es $\chi = \frac{2}{-3}$ ya que $|-3| > |2|$ y por lo tanto $\sigma = -3$ y $\varsigma = 2$.

Propiedades de la representación reducida.

1. $A = [a, a] \quad \Leftrightarrow \quad \chi(A) = 1$

2. $A \neq_{\text{и}} 0 \quad \Leftrightarrow \quad 0 < \chi(A) < 1$

3. $A =_{\text{и}} 0 \quad \Leftrightarrow \quad -1 < \chi(A) \leq 0$

4. $(\underline{a} = 0 \mid \overline{a} = 0)$ y $A \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \chi(A) = 0$

5. $-\underline{a} = \overline{a} \quad \Leftrightarrow \quad \varsigma(A) = -\sigma(A) \quad \Leftrightarrow \quad \chi(A) = -1$

6. $A = \varsigma(A) \vee \sigma(A) = \sigma(A)(1 \vee \chi(A))$

7. $\sigma(A * B) = \sigma(A) \cdot \sigma(B)$

$$\chi(A * B) = \begin{cases} \chi(A) \cdot \chi(B) & \text{si} \quad \chi(A), \chi(B) > 0 \\ \text{mín}(\chi(A), \chi(B)) & \text{si} \quad \chi(A), \chi(B) < 0 \end{cases}$$

8. $\chi(A + B) \in [\text{mín}(\chi(A), \chi(B)),\ \text{máx}(\chi(A), \chi(B))]$ si $\sigma(A)\sigma(B) \geq 0$
   $\chi(A + B) \leq \text{máx}(\chi(A), \chi(B))$ si $\sigma(A)\sigma(B) < 0$

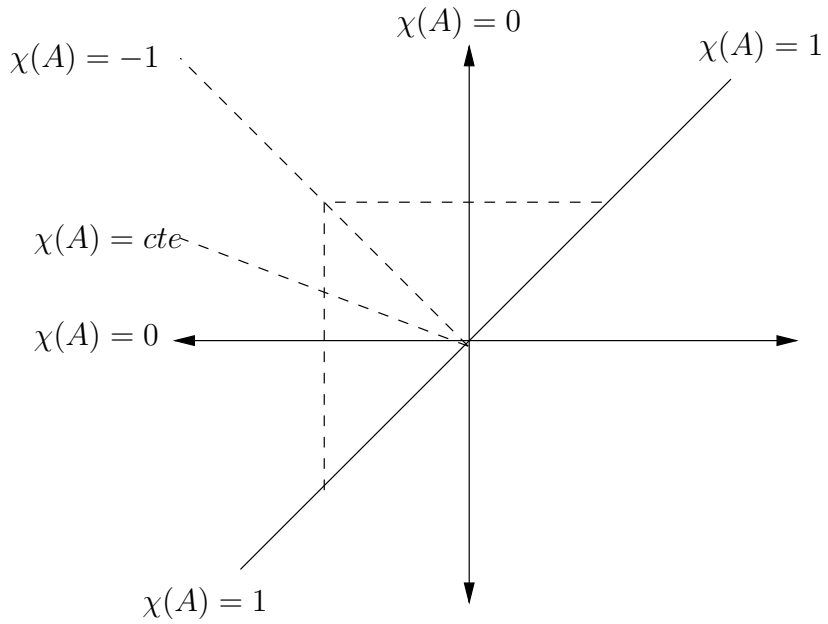


Figura 14: Distribución de valores de χ

6.1. Zonas de distributividad

Hemos visto que en general se verifica

$$A * (B + C) \subseteq A * B + A * C$$

Sin embargo, solo en algunos casos particulares es cierta la propiedad distributiva. Vamos a determinar cuando es cierta la igualdad de las expresiones

$$A * (B_1 + \cdots + B_n) \quad \text{y} \quad A * B_1 + \cdots + A * B_n$$

La conclusión es que cada intervalo A divide al plano de Moore en zonas, llamadas zonas de distributividad asociadas a A, de tal manera que si todos los B_i pertenecen a la misma zona, la propiedad distributiva se cumple. [Tre82]

A continuación representaremos las zonas de distributividad en $I(\mathbb{R})$ según los valores del parámetro χ

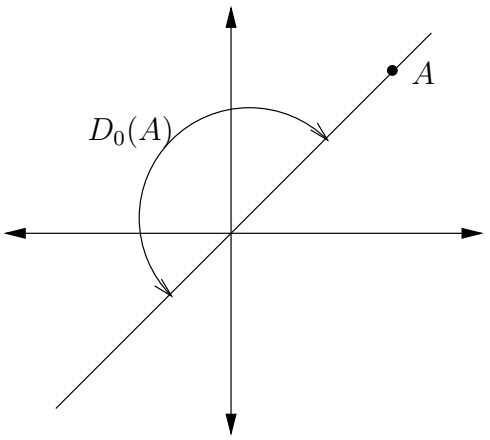


Figura 15: $\chi(A) = 1$

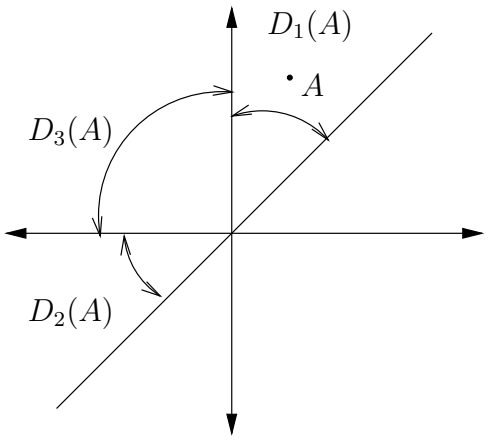


Figura 16: $0 \leq \chi(A) < 1$

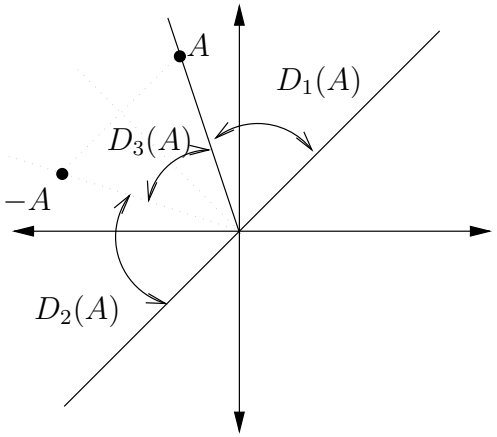


Figura 17: $-1 < \chi(A) < 0$

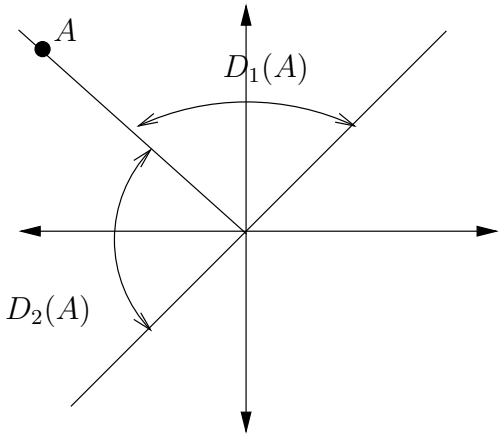


Figura 18: $\chi(A) = -1$

Ejemplo 6.2

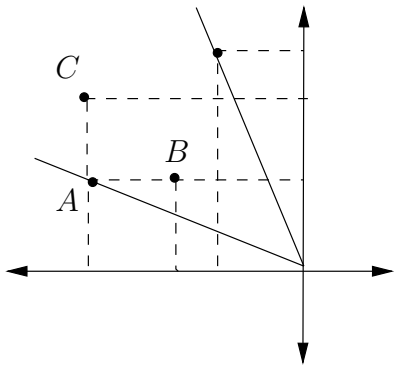
Consideremos el intervalo $A = [-5, 2]$, entonces $-1 < \chi(A) < 0$ ya que $\chi(A) = \frac{2}{-5}$, y estamos en la situación de la figura 17.

1. Si $B = [-3, 2]$ y $C = [-4, 4]$, podemos asegurar que $A*(B+C) = A*B+A*C$ ya que B y C pertenecen a la zona de distributividad $D_3(A)$ determinada por A.

2. Si $B = [2, 3]$ y $C = [1, 4]$, entonces B y C pertenecen a la zona de distributividad $D_1(A)$ determinada por A y por lo tanto también se verifica la propiedad distributiva.

3. Si $B = [-2, -3]$ y $C = [-1, -4]$, entonces B y C pertenecen a la zona de distributividad $D_2(A)$ determinada por A, y se verifica la propiedad distributiva.

Gráficamente el primer caso ($A = [-5, 2]$, $B = [-3, 2]$ y $C = [-4, 4]$):



7. Redondeo en la aritmética intervalar

La digitalización de un intervalo $A = [\underline{a}, \overline{a}] \in I(\mathbb{R})$, se realiza redondeando el ínfimo a la izquierda y el supremo a la derecha, de acuerdo con la definición

$$\mathrm{Ex}([\underline{a}, \overline{a}]) = [l(\underline{a}), r(\overline{a})]$$

y le llamaremos *redondeo externo* del intervalo A, y verifica $A \subseteq \mathrm{Ex}(A)$.

Es posible realizar un programa de cálculo para implementar las operaciones de la aritmética intervalar con redondeo externo, de manera que el resultado intervalar calculado por la máquina siempre contenga el resultado intervalar exacto, siendo por tanto compatible con la semántica de las operaciones, es decir

$$(\forall x \in A)\ (\forall y \in B)\ (\exists z \in \mathrm{Ex}(AwB)))\ (z = xwy)$$

Ilustraremos con un ejemplo numérico la distinción entre la aritmética intervalar exacta y la aritmética intervalar con redondeo. [Moo95]

Ejemplo 7.1

Sea

$$\begin{aligned} X &= [-,613 \cdot 10^{-2}, -,610 \cdot 10^{-2}] \\ Y &= [+,100 \cdot 10^{+1}, +,300 \cdot 10^{+1}] \\ Z &= X(1 + 1/Y) \end{aligned}$$

Si calculamos Z con aritmética intervalar exacta tendremos

$$\begin{aligned} Z &= X * \left(1 + \frac{1}{[1,3]}\right) = X * (1 + [1/3, 1]) = \\ &= X * [4/3, 2] = [-,1226 \cdot 10^{-1}, -,81333... \cdot 10^{-2}] \end{aligned}$$

Calculemos ahora Z utilizando aritmética intervalar con redondeo basada en el signo, tres dígitos decimales para la mantisa y representación en punto flotante, tenemos

$$\begin{aligned} &1 = [+,100 \cdot 10^{+1}, +,100 \cdot 10^{+1}] \\ &\frac{1}{Y} \subseteq [+,333 \cdot 10^{+0}, +,100 \cdot 10^{+1}] \\ &1 + \frac{1}{Y} \subseteq [+,133 \cdot 10^{+1}, +,200 \cdot 10^{+1}] \\ &X * [+,133 \cdot 10^{+1}, +,200 \cdot 10^{+1}] \subseteq [-,123 \cdot 10^{-1}, -,811 \cdot 10^{-2}] \end{aligned}$$

Cada uno de los intervalos numéricos de la derecha es el intervalo más estrecho representable en la forma escogida, que contiene el valor de la izquierda. El resultado final, contiene el intervalo exacto de valores de Z.

7.1. Ecuaciones $A + X = B$, $A * X = B$

Definición 7.1 (Amplitud de un intervalo)

$$\text{span}(A) := \overline{a} - \underline{a}$$

Amplitud de la suma y de la diferencia.

$\text{span}(A + B) = \text{span}(A) + \text{span}(B)$

$\text{span}(A - B) = \text{span}(A) + \text{span}(B)$

Se deduce directamente de la definición de amplitud.

La ecuación $A + X = B$ solo tiene solución para X cuando $\text{span}(B) \geq \text{span}(A)$. En efecto, span() es una función positiva y aditiva, y por tanto

$$\text{span}(A) + \text{span}(X) = \text{span}(B) \quad \Rightarrow \quad \text{span}(B) \geq \text{span}(A)$$

Por ejemplo

$$[2,5] + X = [3,4] \quad \Rightarrow \quad X = [1,-1] \notin I(\mathbb{R})$$

La solución de la ecuación $A + X = B$, caso de existir, es $X = [\underline{b} - \underline{a}, \overline{b} - \overline{a}]$, evidentemente distinta del intervalo $B - A = [\underline{b} - \overline{a}, \overline{b} - \underline{a}]$. En este sentido se habla del operador "$-$" como "resta conjuntista", y se utiliza el operador "$\dot{-}$" para expresar el resultado de la ecuación $A + X = B$, cuando exista, al que se llama "resta algebraica". Si $A \dot{-} B$ existe, se verifica que $A \dot{-} B \subseteq A - B$.

Un fenómeno parecido ocurre con la ecuación $A * X = B$. Si tiene solución se dice que $B/.A$ es la "división algebraica", en tanto que B/A es la división conjuntista.

Si además consideramos el redondeo para estas ecuaciones, resulta que el redondeo externo de los datos no siempre permite obtener el redondeo externo del resultado en un cálculo. Por ejemplo la solución redondeo externo de la ecuación $A + X = B$ no se obtendrá de $\text{Ex}(A) + X = B$ como puede observarse en el ejemplo siguiente.

Si consideramos la ecuación en aritmética exacta

$$[1{,}333\cdots, 3{,}555\cdots] + [x,y] = [2,7] \quad \Leftrightarrow \quad [x,y] = [0{,}666\cdots, 3{,}444\cdots]$$

y si consideramos la ecuación tomando el redondeo externo a una cifra decimal

$$[1{,}3, 3{,}6] + [x,y] = [2,7] \quad \Leftrightarrow \quad [x,y] = [0{,}7, 3{,}4]$$

que no corresponde al redondeo externo de $[0{,}666\cdots, 3{,}444\cdots]$. Para obtener el redondeo externo de la solución es necesario el redondeo interno de los datos y así

$$[1{,}4, 3{,}5] + [x,y] = [2,7] \quad \Leftrightarrow \quad [x,y] = [0{,}6, 3{,}5]$$

que es el redondeo externo de la solución.

Para la ecuación $A * X = B$ obtenemos un resultado análogo. Por ejemplo si consideramos la ecuación exacta

$$\left[\frac{11}{9}, \frac{37}{7}\right] * X = [4,27] \quad \Leftrightarrow \quad X = \left[\frac{36}{11}, \frac{189}{37}\right] = [3{,}2727\ldots, 5{,}1081\ldots]$$

El redondeo externo de la solución se obtendrá redondeando interiormente A, es decir,

$$[1{,}23, 5{,}28] * X = [4,27] \;\Leftrightarrow\; X = \frac{[4,27]}{[5{,}28, 1{,}23]} = [3{,}252\ldots, 5{,}113\ldots] \subseteq [3{,}25, 5{,}12]$$

8. Funciones métricas

Además de las relaciones y operaciones básicas, existen unas funciones que permiten dotar a $I(\mathbb{R})$ de una estructura métrica y dar sentido a los conceptos de límite y convergencia.

Definición 8.1 (Magnitud)

$$\text{mag}(A) := \text{máx}\{|a| \ \mid \ a \in A\} = \text{máx}\{|\underline{a}|, |\overline{a}|\}$$

Definición 8.2 (Mignitud)

$$\text{mig}(A) := \text{mín}\{|a| \ \mid \ a \in A\} = \text{mín}\{|\underline{a}|, |\overline{a}|\}$$

Definición 8.3 (Punto medio)

$$\text{mp}(A) := \frac{\underline{a} + \overline{a}}{2}$$

Propiedades de las funciones mag() y mig():

La función mag() es una norma en $(I(\mathbb{R}), +, *)$, ya que verifica las propiedades:

1. $\text{mag}(A) \geq 0$
   $\text{mag} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad A = 0$
2. $\text{mag}(A + B) \leq \text{mag}(A) + \text{mag}(B)$. Vale la igualdad si $\sigma(A)\sigma(B) \geq 0$.
3. $\text{mag}(\lambda A) = |\lambda|\text{mag}(A)$
4. $\text{mag}(A * B) = \text{mag}(A)\text{mag}(B)$

La función mig() es una casinorma en $(I(\mathbb{R}), +, *)$ ya que cumple las propiedades

1. $\text{mig}A \geq 0$. Además $\text{mig}(A) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad A =_{\text{и}} 0$
2. $\text{mig}(A + B) \leq \text{mig}(A) + \text{mig}(B)$
3. $\text{mig}(\lambda A) = |\lambda|\text{mig}(A)$
4. $\text{mig}(A * B) = \text{mig}(A)\text{mig}(B)$

Sea ρ la distancia en $\mathbb{R}$ definida por $\rho(a,b) = |b-a|$. Se define la distancia de Hausdorff entre conjuntos compactos como

$$\rho(A,B) := \text{máx}\left\{ \max_{x\in A} \min_{y\in B} \rho(x,y) \ , \ \max_{y\in B} \min_{x\in A} \rho(x,y) \right\}$$

que para intervalos se traduce en

Definición 8.4 (Distancia de Hausdorff)

$$\rho(A,B) := \text{máx}\left\{ |\underline{a} - \underline{b}| \ , \ |\overline{a} - \overline{b}| \right\}$$

Observemos que si aplicamos esta definición a intervalos puntuales, reproducimos la distancia en $\mathbb{R}$.

Propiedades de la distancia.

1. Invariancia de la distancia respecto a traslaciones.
   $\rho(A+C, B+C) = \rho(A,B)$
2. Caracter supermétrico de la distancia.
   $\rho(A+C, B+D) \leq \rho(A,B) + \rho(C,D)$
3. $\rho(A,0) = \text{mag}(A)$
4. $\rho(A,B) = \text{mag}(B \dot{-} A)$ si $\text{span}(A) \leq \text{span}(B)$ sino $\rho(A,B) = \text{mag}(A \dot{-} B)$
5. $\rho(aB, aC) = |a| \cdot \rho(B,C)$
6. $\rho(A*B, A*C) \leq \text{mag}(A) \cdot \rho(B,C)$
7. $\rho(A*B, A*C) \geq \text{mig}(A) \cdot \rho(B,C)$
8. $\rho(A,B) \leq d \ \Leftrightarrow \ (\forall x \in A, \ \exists y \in B \mid \rho(x,y) \leq d)$ y
   $(\forall y \in B \ , \ \exists x \in A \mid \rho(x,y) \leq d)$

Definición 8.5 (Convergencia)

$$\lim_{k\to\infty} A_k = A \quad := \quad \lim_{k\to\infty} \rho(A_k, A) = 0$$

Propiedades

1. $\lim_{k\to\infty} A_k = A \ \Leftrightarrow \ (\lim_{k\to\infty} \underline{a}_k = \underline{a}$ y $\lim_{k\to\infty} \overline{a}_k = \overline{a})$
2. $(I(\mathbb{R}), \rho)$ es un espacio métrico completo.
3. Las operaciones $+, -, *, /$ y las funciones inf, sup, mag, mig, span, mp son continuas en $(I(\mathbb{R}), \rho)$.

9. Funciones racionales intervalo

9.1. Expresiones racionales

Sea f una función continua en un intervalo X. Al rango de valores de la función f sobre el intervalo X,

$$\overline{F}(X) = \{f(x) \mid x \in X\}$$

se le llama *extensión unida* de f [Tre82], [Moo95]. Tal función no es en general calculable.

En $\mathbb{R}$ podemos definir una función racional como

$$f(x) = \text{rat}(x, K, +, -, \cdot, /)$$

significando que la expresión de la función f se hace a partir de una "tira algebraica" de variables, constantes y signos algebraicos, que tengan sentido.

Dada una expresión racional en $\mathbb{R}$, podemos extenderla de manera natural a $I(\mathbb{R})$ sin más que substituir en la expresión inicial las variables reales por variables intervalo y las operaciones reales por operaciones intervalo, obteniéndose

$$F(X) = \text{rat}(X, K, +, -, *, /)$$

que se denomina *extensión intervalar natural* [Moo95].

La extensión intervalar natural puede presentar una serie de problemas que presentaremos a continuación con una serie de ejemplos.

1. Amplificación del resultado.

   Ejemplo 9.1 Si consideramos la función real definida por $f(x) = \frac{x}{1+x}$, obtenemos que para $X = [1, 2]$

   $$\overline{F}([1, 2]) = [1/2, 2/3] \subseteq [0{,}5, 0{,}67]$$
   $$F([1, 2]) = [1/3, 1] \subseteq [0{,}3, 1]$$

   Al fenómeno por el cual las extensiones racionales intervalo producen resultados intervalo más amplios que el de la extensión unida, se le conoce como *amplificación de dependencia*. Esta amplificación se debe al hecho de que cuando una variable aparece más de una vez en la expresión racional intervalo, actúa efectivamente como un conjunto de variables intervalo del mismo valor pero independientes entre sí.

2. La existencia de la extensión intervalar natural, no está relacionada de una manera trivial con la de sus correspondientes funciones reales

Ejemplo 9.2 Consideremos la función

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{1+x\cdot x} \quad \text{definida para } \forall x \in \mathbb{R} \\ F(X) &= \frac{1}{1+X*X} \end{aligned}$$

donde $F(X)$ no está definida, por ejemplo, para $X = [-1, 2]$

3. Expresiones racionales equivalentes en $\mathbb{R}$ pueden no producir extensiones intervalares equivalentes en $I(\mathbb{R})$, es decir, no existe una única extensión intervalar natural.

   Ejemplo 9.3 Consideremos las funciones reales definidas por

   $$f_1(x) = x^2 - x \quad \text{y} \quad f_2(x) = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}$$

   son funciones racionales equivalentes, que tienen como extensión racional natural las funciones

   $$F_1(X) = X^2 - X \quad \text{y} \quad F_2(X) = \left(X - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}$$

   y no dan el mismo resultado cuando las evaluamos

   $$\begin{aligned} F_1([0,2]) &= [-2, 4] \\ F_2([0,2]) &= [-1/4, 2] \end{aligned}$$

Una extensión intervalar natural, si existe, tiene las propiedades siguientes:

1. **Extensión intervalar**: $F(x_1, \cdots, x_n) = f(x_1, \cdots, x_n)$

   Observemos que esta igualdad presupone la utilización de una aritmética intervalar exacta. En la práctica, debido a los redondeos, tendremos

   $$f(x_1, \cdots, x_n) \in F(x_1, \cdots, x_n)$$

2. **Inclusión monótona**: $X_i \subseteq Y_i \quad \Rightarrow \quad F(X_1, \cdots, X_n) \subseteq F(Y_1, \cdots, Y_n)$.

   De la definición de la extensión unida tenemos que cumple la propiedad de inclusión monótona. Como las funciones correspondientes a la aritmética de intervalos son extensiones unidas de las funciones aritméticas reales $(+, -, \cdot, /)$, tenemos que la aritmética intervalar es inclusión monótona. Es decir, $X_1 \subseteq Y_1$ y $X_2 \subseteq Y_2$ entonces

   $$\begin{aligned} &X_1 + X_2 \subseteq Y_1 + Y_2 \\ &X_1 - X_2 \subseteq Y_1 - Y_2 \\ &X_1 * X_2 \subseteq Y_1 * Y_2 \\ &X_1 / X_2 \subseteq Y_1 / Y_2 \end{aligned}$$

De la propiedad transitiva de la relación de inclusión, $\subseteq$, podemos deducir por inducción que toda función racional intervalo cumple la propiedad de inclusión monótona.

La propiedad de inclusividad monótona es una de las más importantes en el contexto del análisis intervalar clásico. Si se utiliza el redondeo externo, la aritmética intervalar cumple igualmente la propiedad de inclusión monótona. Sin embargo no toda función intervalar, cumple esta propiedad, por ejemplo, consideremos la función intervalar F definida por

$$F(X) = \text{mp}(X) + \frac{1}{2}\left(X - \text{mp}(X)\right)$$

evaluando esta función en los intervalos $[0,2]$ y $[0,1]$ que cumplen $[0,1] \subseteq [0,2]$, y sin embargo

$$\begin{aligned} F([0,2]) &= 1 + \frac{1}{2} * [-1,1] = \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right] \\ F([0,1]) &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} * \left[\frac{-1}{2}, \frac{1}{2}\right] = \left[\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right] \not\subseteq F([0,2]) \end{aligned}$$

Observemos que esta función intervalar no corresponde a una extensión intervalar natural de una función real.

El siguiente teorema es sin duda uno de los más importantes del análisis intervalar clásico, y nos da la relación entre el rango de valores de una función y su extensión intervalar.

Teorema 9.1

Si $F(X_1, \cdots, X_n)$ es una extensión intervalar natural de una función real $f(x_1, \cdots, x_n)$, entonces $F(X_1, \cdots, X_n)$ contiene el rango de valores de $f(x_1, \cdots, x_n)$. Es decir

$$\{f(x_1, \cdots, x_n) \mid x_i \in X_i \;\; i = 1, \cdots, n\} \subseteq F(X_1, \cdots, X_n)$$

Demostración:

Por ser F una extensión intervalar de f se cumple que

$$f(x_1, \cdots, x_n) = F(x_1, \cdots, x_n)$$

Como F cumple la condición de inclusión monótona, el valor f está contenido en el intervalo $F(X_1, \cdots, X_n)$ para todo $(x_1, \cdots, x_n) \in (X_1, \cdots, X_n)$. Por lo tanto

$$\{f(x_1, \cdots, x_n) \mid x_i \in X_i \;\; i = 1, \cdots, n\} \subseteq F(X_1, \cdots, X_n)$$

La igualdad no se puede asegurar en general como ilustra el siguiente ejemplo.

Ejemplo 9.4

Consideremos la función definida por $f(x) = x^3 - 6x$, cuyo rango de valores para $x \in [-2, 2]$ es

$$\{f(x) \mid x \in [-2, 2]\} = [-4\sqrt{2}, 4\sqrt{2}]$$

La extensión intervalar natural de la función f, es $F(X) = X^3 - 6 * X$, que evaluada en el intervalo $[-2, 2]$ se obtiene

$$F([-2, 2]) = [-2, 2] * [-2, 2] * [-2, 2] - 6 * [-2, 2] = [-20, 20]$$

Ejemplo 9.5

Consideremos la función polinómica

$$p(x) = 1 - 5x + \frac{1}{3}x^3$$

y supongamos que queremos hallar el rango de valores de $p(x)$ cuando x varía en el intervalo $[2, 3]$.

Una extensión intervalar natural de $p(x)$ es el polinomio intervalar

$$P(X) = 1 - 5X + \frac{1}{3} * X * X * X$$

Calculando $P[2, 3]$ obtenemos

$$P([2, 3]) = 1 - 5 * [2, 3] + \frac{1}{3} * [8, 27] = \left[\frac{-34}{3}, 0\right]$$

De esta forma, hemos encontrado, mediante una secuencia finita de operaciones aritméticas, que el rango de valores de $p(x)$ cuando $x \in [2, 3]$ está contenido en el intervalo $\left[\frac{-34}{3}, 0\right]$.

Otra extensión intervalar natural que podemos utilizar es la que corresponde al escribir el polinomio $p(x)$ en la forma anidada

$$p(x) = 1 - x\left(5 - \frac{x^2}{3}\right)$$

que en la aritmética real es equivalente a la forma original. Una extensión intervalar natural de $p(x)$ se puede escribir de la forma

$$Q(X) = 1 - X * \left(5 - X * \frac{X}{3}\right)$$

Calculando $Q[2, 3]$ obtenemos

$$\begin{aligned} Q[2,3] &= 1 - [2,3] * \left(5 - [2,3] * \frac{[2,3]}{3}\right) = 1 - [2,3] * \left(5 - \left[\frac{4}{3}, 3\right]\right) = \\ &= 1 - [2,3] * \left[2, \frac{11}{3}\right] = 1 - [4, 11] = [-10, -3] \end{aligned}$$

De esta forma, hemos hallado un intervalo más estrecho que el primero, que también contiene el rango de valores de $p(x)$ para $x \in [2,3]$. El rango exacto de valores es el intervalo $\left[\frac{-10}{3}\sqrt{5}+1, -5\right]$ y no puede encontrarse de manera exacta mediante cualquier secuencia finita de operaciones aritméticas de números reales ya que $\sqrt{5}$ es un número irracional.

En general, para expresiones polinómicas, la forma anidada (llamada a veces forma de Horner), $A_0 + X * (A_1 + X * (A_2 + \cdots + X * (A_n) \cdots)$ es mejor que la suma de potencias $A_0 + A_1 * X + A_2 * X * X + \cdots + A_n * X * \cdots * X$, debido a la subdistributividad.

Para otro tipo de funciones que no sean racionales, puede definirse la extensión intervalar natural para que verifique la propiedad de contener al rango de la función. Así por ejemplo, para valores enteros positivos de n, podemos definir la potencia de intervalos como

$$X^n = \begin{cases} [\underline{x}^n, \overline{x}^n] & \text{si } \underline{x} > 0 \text{ o } n \text{ es impar} \\ [\overline{x}^n, \underline{x}^n] & \text{si } \overline{x} < 0 \text{ y } n \text{ es par} \\ [0, (\text{máx}(|\underline{x}|, |\overline{x}|))^n] & \text{si } 0 \in X \text{ y } n \text{ es par} \end{cases}$$

Tenemos que $X^n = \{x^n \mid x \in X\}$.

Si f no es racional pero es creciente se puede definir $\overline{F}(X) = [f(\underline{x}), f(\overline{x})]$, y si f es decreciente $\overline{F}(X) = [f(\overline{x}), f(\underline{x})]$. El mismo método vale si f es creciente o decreciente a trozos, lo que permite definir funciones intervalo tales como sin, cos, log, exp, ...

Para funciones reales definidas a trozos, podemos construir una extensión intervalar que cumpla la condición de inclusión monótona. Supongamos f definida por

$$f(x) = \begin{cases} p_1(x) & \text{para } x_1 \leq x \leq x_2 \\ p_2(x) & \text{para } x_2 \leq x \leq x_3 \\ p_3(x) & \text{para } x_3 \leq x \leq x_4 \end{cases}$$

y supongamos que tenemos extensiones intervalares P_1, P_2, P_3 para p_1, p_2, p_3. Podemos construir una extensión intervalar inclusión monótona F para f de la manera siguiente:

$$F(X) = P_1(X \cap [x_1, x_2]) \cup P_2(X \cap [x_2, x_3]) \cup P_3(X \cap [x_3, x_4])$$

9.2. Formas de funciones intervalares

Hasta ahora hemos visto dos tipos de funciones intervalares, la extensión unida, $\overline{F}(X)$, que corresponde al rango de valores de la función f, y la extensión intervalar natural $F(X)$ obtenida de $f(x)$ sustituyendo las variables reales por variables intervalares y las operaciones aritméticas por sus equivalentes operaciones intervalares. Se verifica, como ya hemos dicho que

$$\overline{F}(X) \subseteq F(X)$$

A continuación definiremos otra función intervalar natural que nos proporcionará un resultado más próximo a la extensión unida que otras extensiones.

9.2.1. Forma centrada

La forma centrada es una forma particular de extensión intervalar, $F_c(X_1, \cdots, X_n)$ de una función racional $f(x_1, \cdots, x_n)$. Para obtener F_c reescribimos $f(x_1, \cdots, x_n)$

$$f(x_1, \cdots, x_n) = f(c_1, \cdots, c_n) + g(y_1, \cdots, y_n)$$

con $y_i = x_i - c_i$, $\forall i = 1, \cdots n$ y g definida por

$$g(y_1, \cdots, y_n) = f(y_1 + c_1, \cdots, y_n + c_n) - f(c_1, \cdots, c_n)$$

Llamamos forma centrada de la función f a la función F_c definida por

$$F_c(X_1, \cdots, X_n) = f(c_1, \cdots, c_n) + g(Y_1, \cdots, Y_n)$$

donde $c_i = \text{mp}(X_i)$ y $Y_i = X_i - c_i$, $\forall i = 1, \cdots n$. [Han92], [Moo95].

Teorema 9.2

Sea $F_c(X_1, \cdots, X_n)$ una función racional en forma centrada. Existe $k \in \mathbb{R}^+$ tal que

$$F_c(X_1, \cdots, X_n) = \overline{F}(X_1, \cdots, X_n) + E$$

donde $\text{span}(E) \leq k \cdot \text{máx}(\text{span}(X_i))^2$ $i = 1, \cdots, n$ y $0 \in E$.

Por lo tanto la forma centrada tiene un exceso de amplitud que es de segundo orden en la amplitud de los argumentos $x_1, \cdots, x_n$.

Utilizando extensiones de órdenes apropiados, es posible obtener formas centradas F_c tales que

$$\text{span}(E) \leq k \cdot \text{máx}(\text{span}(X_i))^r \quad r = 2, 3, \cdots$$

Ejemplo 9.6

Consideremos la función racional definida por

$$f(x_1, x_2) = \frac{x_1 + x_2}{x_1 - x_2}$$

La forma centrada viene dada por

$$F_c(X_1, X_2) = \frac{c_1 + c_2}{c_1 - c_2} + \frac{2(c_1 Y_2 - c_2 Y_1)}{(c_1 - c_2 + Y_1 - Y_2)(c_1 - c_2)}$$

donde $c_1 = \text{mp}(X_1)$, $c_2 = \text{mp}(X_2)$, $Y_1 = X_1 - c_1$ y $Y_2 = X_2 - c_2$. Haciendo los cálculos para $X_1 = [1, 2]$ y $X_2 = [5, 10]$, se obtiene

$$F_c([1, 2], [5, 10]) = \left[\frac{-42}{18}, \frac{-12}{18}\right] = [-2{,}333, -0{,}666]$$

Mientras que la extensión unida es

$$\overline{F}([1, 2], [5, 10]) = \left[\frac{-7}{3}, \frac{-11}{9}\right] = [-2{,}333, -1{,}2]$$

y la extensión natural de la correspondiente función racional

$$F([1, 2], [5, 10]) = \left[\frac{-7}{3}, \frac{-11}{9}\right] = [-4, -0{,}6]$$

Comparando los resultados observamos que

$$\overline{F}([1, 2], [5, 10]) \subseteq F_c([1, 2], [5, 10]) \subseteq F([1, 2], [5, 10])$$

Por lo tanto con la forma centrada se obtiene un resultado mejor que la extensión intervalar natural.

Existen otras extensiones intervalares, por ejemplo, la forma del valor medio o la del test monótono que se definen mediante clases de funciones expresables en forma recurrente [Moo95].

10. Deficiencias de los intervalos clásicos

En la utilización de los intervalos clásicos han aparecido algunos problemas que no son resolubles en este contexto. A continuación expondremos un resumen de las deficiencias más significativas del conjunto $I(\mathbb{R})$ [GnMS95].

1. **Estructura algebraica de $I(\mathbb{R})$**

   El conjunto de intervalos clásicos no posee, como ya hemos visto, la propiedad de grupo para la suma y el producto de intervalos que no contengan el cero; pensemos por un momento en que el elemento opuesto de intervalo [1,2] sería $[-1, -2]$ que por definición no es un intervalo ya que $-1 > -2$. Tampoco se verifica la propiedad distributiva de la suma respecto al producto.

2. **Inaccesibilidad del sistema en la resolución de ecuaciones fundamentales.**

La simple ecuación intervalar $A+X=B$ solo tiene solución cuando $\text{span}(B) \geq \text{span}(A)$. Además, en el caso de que tenga solución intervalar, no es alcanzable mediante operaciones intervalares, por ejemplo

$$[2,5]+[x_1,x_2]=[3,7] \quad \Leftrightarrow \quad [x_1,x_2]=[1,2]$$

que tiene solución en $I(\mathbb{R})$, no podemos obtenerla mediante operaciones intervalares pues

$$[x_1,x_2]=[3,7]-[2,5]=[-2,5] \neq [1,2]$$

3. **Deficiencia en la utilización del redondeo externo.**

   El redondeo que se considera en los intervalos clásicos, como ya hemos dicho, es el externo, sin embargo, el redondeo externo de los datos no siempre permite obtener el redondeo externo del resultado en un cálculo. Por ejemplo la solución redondeo externo de la ecuación $A+X=B$ se obtiene de $\text{In}(A)+X=\text{Ex}(B)$ y no de $\text{Ex}(A)+X=\text{Ex}(B)$ donde $\text{In}(A)=[\text{right}(\underline{a}),\text{left}(\overline{a})]$.

   Pero, el redondeo interno en el contexto de los intervalos clásicos, puede no existir en una escala digital dada, por ejemplo en $DI(1,1)$

$$\text{In}([2{,}47,2{,}49])=[2{,}5,2{,}4]$$

   que no es un intervalo en $I(\mathbb{R})$.

4. **Modos de selección de valores de intervalos en problemas prácticos**

   El conjunto de los intervalos clásicos es deficiente cuando se intentan resolver problemas que, aunque en principio son intervalares, llevan asociados cuantificadores o modos de selección. Veamos un ejemplo:

   Supongamos que tenemos dos carretes de cable, el primero de longitud entre $A=[10,20]$m y el segundo entre $B=[20,30]$m. Si juntamos los dos cables podremos cubrir una longitud $A+B=[10,20]+[20,30]=[30,50]$m. ¿Es posible cubrir cualquier longitud comprendida entre 30 y 50?. Evidentemente la respuesta es negativa, dado que sería imposible si la distancia que pretendiéramos cubrir fuera de 50 m y las longitudes reales de cada uno de los cables fueran de 10 m y 20 m respectivamente. La razón es que el sistema de los intervalos clásicos no permite expresar la diferencia entre

$$\begin{array}{c}\text{Existe un elemento de } [30,50] \\ \text{Para todo elemento de } [30,50]\end{array}$$

5. **Deficiencia del redondeo externo respecto a los cuantificadores**

   El redondeo externo no es compatible con los cuantificadores $\exists$ y $\forall$, ya que si por ejemplo tenemos $\exists x, \in [1{,}25,1{,}45]\ x=5/4$, naturalmente implica $\exists x \in [1{,}2,1{,}5]\ x=5/4$ siendo adecuado en este caso el redondeo intervalar externo.

Sin embargo, si tenemos la propiedad $x \geq 5/4$ y queremos que sea válida para todo x del intervalo $[1{,}25, 1{,}45]$, es decir

$$\forall x \in [1{,}25, 1{,}45]\ x \geq 5/4$$

entonces considerando el redondeo externo $\forall x \in [1{,}2, 1{,}5]\ x \geq 5/4$ no se cumple la propiedad ya que $1{,}2 \in [1{,}2, 1{,}5]$ y $1{,}2 < 5/4$. Pero la propiedad continua siendo cierta tomando el redondeo interno del intervalo, es decir, se verifica $\forall x \in [1{,}3, 1{,}4]\ x \geq 5/4$

11. Aritmética de Kaucher

Intentos posteriores de la teoría básica de los intervalos clásicos, han intentado salvar algunas de las deficiencias anteriormente senyaladas. Veremos en esta sección una introducción a los intervalos generalizados [Kau80], [Kau77] que salvan la defictividad algebraica expresada en las deficiencias 1, 2 y 3. Sobre estos intervalos generalizados pueden definirse operaciones que conservan la isotonicidad, completan las estructuras algebraicas de los intervalos con la suma y el producto, pudiendose así resolver ecuaciones y además se resuelve el problema del redondeo interno.

Se define el conjunto de los intervalos generalizados

$$\mathbb{IR} = \{[a, b] \mid a, b \in \mathbb{R}\}$$

La representación gráfica de este conjunto son todos los puntos del plano de Moore. En la diagonal del primer cuadrante vienen representados los intervalos con sus dos extremos iguales, que llamaremos puntuales. En el semiplano superior están representados los intervalos con el extremo inferior menor o igual que el superior, que llamaremos intervalos propios, y en el semiplano inferior los intervalos con el extremo inferior mayor o igual que el superior, que llamaremos intervalos impropios. El operador Dual relaciona ambos tipos de intervalos definiéndolo como

$$\text{Dual}[a, b] := [b, a]$$

Las relaciones de igualdad e inclusión son una generalización de las correspondientes relaciones entre los intervalos clásicos, y así si $A = [a_1, a_2]$ y $B = [b_1, b_2]$, se definen

$$A = B \ \leftrightarrow\ a_1 = b_1,\ a_2 = b_2$$
$$A \subseteq B \ \leftrightarrow\ a_1 \geq b_1,\ a_2 \leq b_2$$

Las operaciones aritméticas entre intervalos generalizados se definen

$$A + B := [a_1 + b_1, a_2 + b_2]$$

$$A - B := [a_1 - b_2, a_2 - b_1]$$

$$\begin{aligned}
A * B \;:=\; & \underline{\text{if}}\ a_1 \geq 0,\ a_2 \geq 0,\ b_1 \geq 0,\ b_2 \geq 0\ \underline{\text{then}}\ [a_1b_1, a_2b_2] \\
& \underline{\text{if}}\ a_1 \geq 0,\ a_2 \geq 0,\ b_1 \geq 0,\ b_2 < 0\ \underline{\text{then}}\ [a_1b_1, a_1b_2] \\
& \underline{\text{if}}\ a_1 \geq 0,\ a_2 \geq 0,\ b_1 < 0,\ b_2 \geq 0\ \underline{\text{then}}\ [a_2b_1, a_2b_2] \\
& \underline{\text{if}}\ a_1 \geq 0,\ a_2 \geq 0,\ b_1 < 0,\ b_2 < 0\ \underline{\text{then}}\ [a_2b_1, a_1b_2] \\
& \underline{\text{if}}\ a_1 \geq 0,\ a_2 < 0,\ b_1 \geq 0,\ b_2 \geq 0\ \underline{\text{then}}\ [a_1b_1, a_2b_1] \\
& \underline{\text{if}}\ a_1 \geq 0,\ a_2 < 0,\ b_1 \geq 0,\ b_2 < 0\ \underline{\text{then}}\ [\max(a_1b_1, a_2b_2), \min(a_2b_1, a_1b_2)] \\
& \underline{\text{if}}\ a_1 \geq 0,\ a_2 < 0,\ b_1 < 0,\ b_2 \geq 0\ \underline{\text{then}}\ [0, 0] \\
& \underline{\text{if}}\ a_1 \geq 0,\ a_2 < 0,\ b_1 < 0,\ b_2 < 0\ \underline{\text{then}}\ [a_2b_2, a_1b_2] \\
& \underline{\text{if}}\ a_1 < 0,\ a_2 \geq 0,\ b_1 \geq 0,\ b_2 \geq 0\ \underline{\text{then}}\ [a_1b_2, a_2b_2] \\
& \underline{\text{if}}\ a_1 < 0,\ a_2 \geq 0,\ b_1 \geq 0,\ b_2 < 0\ \underline{\text{then}}\ [0, 0] \\
& \underline{\text{if}}\ a_1 < 0,\ a_2 \geq 0,\ b_1 < 0,\ b_2 \geq 0\ \underline{\text{then}}\ [\min(a_1b_2, a_2b_1), \max(a_1b_1, a_2b_2)] \\
& \underline{\text{if}}\ a_1 < 0,\ a_2 \geq 0,\ b_1 < 0,\ b_2 < 0\ \underline{\text{then}}\ [a_2b_1, a_1b_1] \\
& \underline{\text{if}}\ a_1 < 0,\ a_2 < 0,\ b_1 \geq 0,\ b_2 \geq 0\ \underline{\text{then}}\ [a_1b_2, a_2b_1] \\
& \underline{\text{if}}\ a_1 < 0,\ a_2 < 0,\ b_1 \geq 0,\ b_2 < 0\ \underline{\text{then}}\ [a_2b_2, a_2b_1] \\
& \underline{\text{if}}\ a_1 < 0,\ a_2 < 0,\ b_1 < 0,\ b_2 \geq 0\ \underline{\text{then}}\ [a_1b_2, a_1b_1] \\
& \underline{\text{if}}\ a_1 < 0,\ a_2 < 0,\ b_1 < 0,\ b_2 < 0\ \underline{\text{then}}\ [a_2b_2, a_1b_1]
\end{aligned}$$

Caso particular del producto de intervalos es el producto por un escalar

$$rA = [r, r] * [a_1, a_2] = \underline{\text{if}}\ r \geq 0\ \underline{\text{then}}\ [ra_1, ra_2]\ \underline{\text{else}}\ [ra_2, ra_1]$$

$$\begin{aligned}
A/B \;:=\; & \underline{\text{if}}\ a_1 \geq 0,\ a_2 \geq 0,\ b_1 > 0,\ b_2 > 0\ \underline{\text{then}}\ [a_1/b_2, a_2/b_1] \\
& \underline{\text{if}}\ a_1 \geq 0,\ a_2 \geq 0,\ b_1 < 0,\ b_2 < 0\ \underline{\text{then}}\ [a_2/b_2, a_1/b_1] \\
& \underline{\text{if}}\ a_1 \geq 0,\ a_2 < 0,\ b_1 > 0,\ b_2 > 0\ \underline{\text{then}}\ [a_1/b_2, a_2/b_2] \\
& \underline{\text{if}}\ a_1 \geq 0,\ a_2 < 0,\ b_1 < 0,\ b_2 < 0\ \underline{\text{then}}\ [a_2/b_1, a_1/b_1] \\
& \underline{\text{if}}\ a_1 < 0,\ a_2 \geq 0,\ b_1 > 0,\ b_2 > 0\ \underline{\text{then}}\ [a_1/b_1, a_2/b_1] \\
& \underline{\text{if}}\ a_1 < 0,\ a_2 \geq 0,\ b_1 < 0,\ b_2 < 0\ \underline{\text{then}}\ [a_2/b_2, a_1/b_2] \\
& \underline{\text{if}}\ a_1 < 0,\ a_2 < 0,\ b_1 > 0,\ b_2 > 0\ \underline{\text{then}}\ [a_1/b_1, a_2/b_2] \\
& \underline{\text{if}}\ a_1 < 0,\ a_2 < 0,\ b_1 < 0,\ b_2 < 0\ \underline{\text{then}}\ [a_2/b_1, a_1/b_2]
\end{aligned}$$

Dada su importancia estudiaremos sus principales propiedades.

Propiedades de la suma:

1. $A+B = B+A$
2. $(A+B)+C = A+(B+C)$

3. $A + \vee(i, I)B(i) = \vee(i, I)(A + B(i))$
   $A + \wedge(i, I)B(i) = \wedge(i, I)(A + B(i))$
4. $A \subseteq B,\ C \subseteq D$ implican $A + C \subseteq B + D$
5. $A \leq B,\ C \leq D$ implican $A + C \leq B + D$
6. $\mathrm{Dual}(A + B) = \mathrm{Dual}(A) + \mathrm{Dual}(B)$
7. $A + [0, 0] = A$
8. existe el opuesto de $A = [a_1, a_2]$ y es $\mathrm{Opp}(A) = [-a_1, -a_2]$

Propiedades de la diferencia:

1. $A \subseteq B,\ C \subseteq D \ \Rightarrow\ A - C \subseteq B - D$
2. $A - \mathrm{Dual}(B) = A + \mathrm{Opp}(B)$
3. La ecuación $A + X = B$ tiene por única solución

$$X = B - \mathrm{Dual}(A) = B + \mathrm{Opp}(A)$$

Propiedades del producto por un escalar:

1. Si $\phi \in \{\mathrm{Dual}, -, \mathrm{Opp}, \mathrm{Prop}\}$, entonces $\phi(rA) = r\phi(A)$
2. $r \vee (i, I)A(i) = \vee(i, I)rA(i) \quad$ y $\quad r \wedge (i, I)A(i) = \wedge(i, I)rA(i)$
3. $A \subseteq B$ implica $rA \subseteq rB$
4. $A \leq B$ implica $\left| \begin{array}{l} rA \leq rB \quad \text{si } r \geq 0 \\ rA \geq rB \quad \text{si } r < 0 \end{array} \right.$
5. $r(A+B) = rA+rB$
6. $r(sA) = (rs)A$
7. Si $rs \geq 0$ entonces $(r + s)A = rA + sA$

Propiedades del producto:

1. $A * B = B * A$
2. $A * (B * C) = (A * B) * C$
3. $r(A * B) = (rA) * B = A * (rB)$
4. $(-A) * (-B) = A * B$
5. $\mathrm{Opp}(A)*\mathrm{Opp}(B) = \mathrm{Dual}(A * B)$
6. $\mathrm{Dual}(A)*\mathrm{Dual}(B) = \mathrm{Dual}(A * B)$
7. $rA = [r, r] * A$
8. $rs \geq 0$ implica $\left| \begin{array}{l} rA \vee sA = [\min\{r, s\}, \max\{r, s\}] * A \\ rA \wedge sA = [\max\{r, s\}, \min\{r, s\}] * A \end{array} \right.$

9. $[1,1] * A = A$
10. ($A \subseteq B$, $C \subseteq D$) implican $A * C \subseteq B * D$
11. ([0,0] $\leq A \leq B$, [0,0] $\leq C \leq D$) implican $A * C \leq B * D$
12. A propio implica $A * (B + C) \subseteq A * B + A * C$
    A impropio implica $A * (B + C) \supseteq A * B + A * C$
13. Existen condiciones de distributividad, es decir, zonas del plano de Moore donde
$$A * (B_1 + \cdots + B_n) = A * B_1 + \cdots + A * B_n$$
14. Si $0 \notin A'$ existe inverso y es $\frac{1}{A} = \left[\frac{1}{a_2}, \frac{1}{a_1}\right]$
15. Si existen inversos, entonces
$$A \subseteq B \text{ implica } \frac{1}{A} \subseteq \frac{1}{B}$$
$$A \leq B \text{ implica } \frac{1}{A} \geq \frac{1}{B}$$
$$\text{Dual}\left(\frac{1}{A}\right) = \frac{1}{\text{Dual}(A)}$$

Propiedades del cociente:

1. $\frac{A}{B} = A * \frac{1}{B}$
2. ($A \subseteq B$, $C \subseteq D$) implican $A/C \subseteq B/D$
3. $\text{Dual}\left(\frac{A}{B}\right) = \frac{\text{Dual}(A)}{\text{Dual}(B)}$
4. La ecuación $A * X = B$ tiene solución única si $0 \notin \text{Prop}(A)$ y es
$$X = \frac{B}{\text{Dual}(A)}$$

Las demostraciones de estas propiedades es, en general, inmediata excepto para las zonas de distributividad del producto que dan resultados análogos que en el caso del Análisis Intervalar Clásico (ver Trepat [17]).

Las deficiencias semánticas apuntadas en la sección anterior, no son resolubles con los intervalos generalizados debido a su falta de significado. Para ello será necesario introducir un nuevo tipo de intervalos que llamaremos intervalos modales y será el objeto de estudio de los capítulos siguientes.

Referencias

[GnMS95] E. Gardeñes, H. Mielgo, and M.A. Sainz. Presentation of the research group sigla/x. Technical report, Universitat de Girona, 1995.

[Han92] E. Hansen. *Global optimization using Interval Analysis*. Marcel Dekker, Inc., 1992.

[Kau77] E. Kaucher. Algebraische erweiterung intervallrechnung unter erhaltung der ordnungs- und verbandsstrukturen. *Computing Supplementum*, 2:68–69, 1977.

[Kau80] E. Kaucher. Interval analysis in the extended interval space ir. *Computing Supplementum*, 2:33–49, 1980.

[Moo95] R.E. Moore. *Methods and Applications of Interval Analysis*. Siam, 2 edition, 1995.

[SG96] SIGLA/X-Group. Información numérica e intervalos modales. Technical report, Universitat de Girona, 1996.

[Tre82] A. Trepat. *Completación reticular del espacio de intervalos*. PhD thesis, Tesina Facultad de matemáticas. Universidad de Barcelona, 1982.

12. Problemas

1. Definir una escala digital en notación decimal de punto flotante con dos dígitos de mantisa y exponente entre -1 y 1.

2. En la escala del problema 1 hallar los redondeos por defecto y por exceso de los números reales 3,1, -4, $2/3$, $-5/7$, $\sqrt{2}$ y $-\pi$.

3. Demostrar la equivalencia entre las definiciones de $A = B$, $A \leq B$, $A \subseteq B$, $A =_{\text{и}} B$ y $A \leq_{\text{и}} B$. Poner ejemplos.

4. Demostrar las propiedades de la igualdad e inclusión de intervalos.

5. Hallar $\sup_{\leq}$, $\text{ínf}_{\leq}$, $\sup_{\subseteq}$ y $\text{ínf}_{\subseteq}$ para los siguientes intervalos

   a) $[-3, 5]$ y $[4, 6]$

   b) $[-1, 2]$, $[3, 4]$, $[6, 8]$ y $[-8, -2]$

   c) $\{[x, x] \mid 1 \leq x \leq 2\}$

6. Calcular

   a) $\dfrac{[3, 5] - [8, 10]}{[3, 6]}$

   b) $\dfrac{[4, 5]}{[3, 6] - [2, 7]}$

   c) $[-3, 4] * ([5, 8] + [-6, 10])$

   d) $[-3, 4] * [5, 8] + [-3, 4] * [-6, 10]$

   e) $[-3, 2] * \left([-4, 8] - \dfrac{[3, 5]}{[5, 6] - [3, 4]} \right)$

7. Ilustrar con ejemplos y demostrar

   a) Propiedad asociativa de la suma y producto de intervalos.

   b) Elementos neutros de suma y producto.

   c) Ley de simplificación de la suma.

   d) No existencia de divisores de cero.

   e) Isotonía de suma y producto.

   f) $(I(\mathbb{R}), *)$ semigrupo conmutativo sin simplificación.

8. Hallar la representación reducida de los intervalos $[-8, 6]$, $[3, 3]$, $[-5, -3]$, $[4, 16]$, $[0, 4]$ y $[0, 0]$.

9. Estudiar la distributividad $A * (B + C) = A * B + A * C$ en los casos siguientes

   a) $A = [-4, 5]$, $B = [-6, -1]$ y $C = [3, 8]$

b) $A = [-3, -3]$, $B = [4, 10]$ y $C = [-3, 6]$

c) $A = [4, 6]$, $B = [-4, 2]$ y $C = [-1, 0]$

10. En una escala digital decimal en punto flotante con dos cifras de mantisa, hallar los redondeos interno y externo de los siguientes intervalos

    a) [3,1, 4,586], [−5,352, 1/3], $[-3, -1/2]$, $[\sqrt{2}, \pi]$ y $[-\pi, -\sqrt{2}]$.

    b) $\dfrac{[3,6] - [\sqrt{2}, 5]}{[7, 11]}$, $\dfrac{[-8{,}3895, 4]}{[\pi, \pi]} + \dfrac{1}{[\sqrt{2}, 3\sqrt{2}]}$ y $\dfrac{[3,3] - [4,6]}{[8, 11] + [\pi, 2\pi]} * [\sqrt{2}, 2\sqrt{2}]$

11. Resolver las siguientes ecuaciones en $I(\mathbb{R})$, cuando sea posible

    a) $[-3, 4] + X = [4, 8]$

    b) $[-3, 4] * X = [4, 8]$

    c) $[-2, -1] * X + [3, 6] = [4, 10]$

    d) $[-3, -2] * X - [8, 15] = [3, 6]$

    e) $[2, 4] * X + [5, 8] * X = [30, 60]$

    f) $\dfrac{[-3, 6] + [4, 8]}{[2, 6] * X} = [3, 5]$

    g) $\dfrac{[4, 6]}{[1, 3] * X - [2, 4]} = [3, 17]$

12. Hallar magnitud, mignitud y punto medio de los intervalos $[4, 8]$, $[-6, -1]$ y $[-8, 10]$, y demostrar las propiedades 3. y 4. de la mignitud y la magnitud.

13. Hallar la distancia entre los siguientes pares de intervalos

    a) $[4, 6]$ y $[0, 0]$

    b) $[-3, 4]$ y $[2, 8]$

    c) $[-3, -1]$ y $[0, 5]$

    d) $[-3, -2]$ y $[-6, 10]$

14. Hallar los límites de las siguientes sucesiones de intervalos

    a) $([-1, 1], [-1/2, 1/2], [-1/3, 1/3], \cdots)$

    b) $([-1, 2], [1, 3/2], [-1, 4/3], \cdots)$

    c) $a_n = [2/n, (n + 1)/3n]$

15. Dada la función racional intervalar

$$f(x_1, x_2, x_3) = \frac{x_1 + x_2}{x_1 - x_2} x_3$$

    hallar las extensiones intervalares para los intervalos $X_1 = [1, 2]$, $X_2 = [5, 10]$ y $X_3 = [2, 3]$. Comparar los resultados obtenidos.

16. Evaluar la función polinómica $f(X) = X^4 - 10X^3 + 35X^2 - 50X + 24$ para $X = [0, 4]$, mediante la extensión natural, la forma de Horner, forma centrada y calcular el rango de valores de la función.

17. Dada la función
$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{si } 0 \leq x \leq 3 \\ x - 2 & \text{si } 3 < x \leq 5 \end{cases}$$
Calcular la extensión intervalar $F([2, 4])$.

18. Resolver, cuando sea posible, las siguientes ecuaciones en $\mathbb{IR}$

    a) $[-4, -6] + X = [3, 1]$
    b) $[-4, -6] - X = [3, 1]$
    c) $[-5, 8] * X = [3, -2]$
    d) $[-3, -4] * X + [-5, 1] = [8, 3]$
    e) $[-5, -1] * X - [4, -8] = [2, 3]$
    f) $([-3, 4] + [8, 4])/([2, 3] * X) = [4, 2]$
    g) $[4, 6]/([2, 4] * X - [4, 1]) = [6, 3]$

19. Estudiar la distributividad en los siguientes casos

    a) $[4, -5] * ([-6, 1] + [7, 4])$
    b) $[3, 6] * ([-4, 2] + [7, 1])$
    c) $[3, 3] * ([-4, 2] + [7, 1])$
    d) $[2, -1] * ([5, 6] - [8, 6])$

20. Demostrar que si w es un operador aritmético, entonces,
$$\text{Dual}(A \text{w} B) = \text{Dual}(A) \text{w} \text{Dual}(B)$$

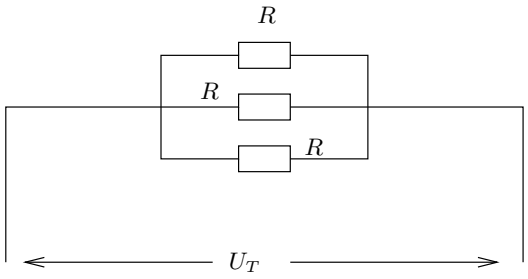
21. Demostrar que

    a) $(-A) * (-B) = A * B$
    b) $A \subseteq B$, $C \subseteq D \Rightarrow A + C \subseteq B + D$, $A * C \subseteq B * D$
    c) $A + \vee(i, I)B(i) = \vee(i, I)(A + B(i))$

13. Actividades

1. Supongamos disponemos de tres resistencias conectadas en paralelo a una diferencia de potencial $U_T = [210, 230]$V por medio de un cable que presenta una resistencia $R_l = [5, 15]\Omega$. Si sabemos que el valor de cada una de estas

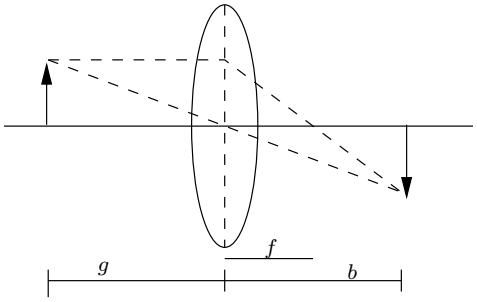
resistencias está comprendido entre $[585, 615]\Omega$, calcúlese cuál será la diferencia de potencia V en sus extremos.



2. La distancia g entre un objeto y una lente, la distancia focal f y la distancia b entre la imagen y la lente, cumplen la relación

$$\frac{1}{g} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f}$$

Suponiendo que cualquier distancia b entre 49mm y 51mm producirá una visión correcta, y que la distancia g de visión distinta va de 200 a 5000mm, obtener la distancia focal f.



3. La capacidad desconocida de un condensador c_1 y de un resistencia r_1 pueden encontrarse usando el circuito de la figura 19.

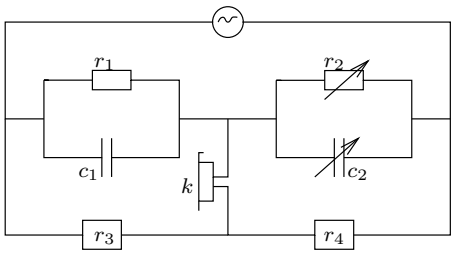


Figura 19: Puente de medida de corriente alterna

La idea es equilibrar la capacidad variable c_2 y la resistencia variable r_2 hasta que el tono en el altavoz k (que se considera de resistencia nula) alcanza un

mínimo o desaparece. En este caso,

$$c_1 = r_4 * c_2/r_3 \quad \text{y}$$
$$r_1 = r_2 * r_3/r_4$$

Suponiendo que $r_3 \in [9{,}9, 10{,}1]\Omega$ y $r_4 \in [6{,}8, 6{,}9]\Omega$, c_2 se estima entre [40,2, 41,5] F y r_2 entre $[18{,}3, 19{,}8]\Omega$. Estimar la variación de c_1 y r_1.

4. La figura 20 muestra el diagrama del filtro de paso de banda. El diseño nominal está centrado en $\omega = 1$ y $Q = 10$. Los valores de las resistencias se muestran en la figura, y los componentes restantes tienen por valor $C_1 = 1F$, $C_2 = 1F$, $\mu = 2{,}9$.

   La función de transferencia voltage es

$$H(s) = \frac{2\mu C_2 s}{2C_1C_2s^2 + (C_1 + 5C_2 - 2\mu C_2) + s + 2}$$

   donde a las resistencias ya se les ha asignado el valor numérico.

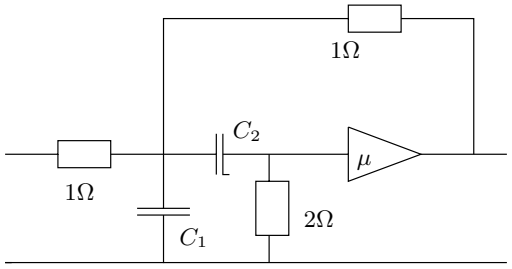


Figura 20: Diagrama de filtro

   Analizar la función amplitud $|H(jw)|$ para las siguientes tolerancias $C_1 \in [0{,}98, 1{,}02]$, $C_2 \in [0{,}98, 1{,}02]$, $\mu \in [2{,}871, 2{,}929]$ en los puntos $w_r = 10^{0,1r-1}$, $r = 0, 1, \cdots, 20$. (Para evitar problemas si el sistema es inestable, aplicar la aritmética intervalar a $1/|H(jw)|$). Obtener una representación gráfica de los resultados.