Cuestiones de Álgebra Lineal

September 29, 2002

Espacios vectoriales

1. Prueba que cada uno de 1os siguientes conjuntos no tiene estructura de espacio vectorial

   a) El subconjunto de $\mathbb{R}^2$ de parejas (x, y) con $x \geq y$

   b) El conjunto de parejas (x, y), en donde la suma se define como en $\mathbb{R}^2$, pero el producto se define $\lambda(x, y) := (\lambda x, y)$

   c) El conjunto de polinomios de grado, a lo sumo 1 , en donde suma y producto se definen de la forma siguiente:

   $(P + Q)(x) := (a_0 + b_0) + (a_0 b_1 + a_1 b_0)x \;\; ; \;\; (\lambda P)(x) := (\lambda a_0) + (\lambda a_1)x.$

   d) El subconjunto de $\mathbb{R}^3$ de puntos (x, y, z) con $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$.

   e) El subconjunto de $\mathbb{R}^3$ de puntos (x, y, z) con $x + y + z = 1$

   f) El subconjunto de $\mathbb{R}^3$ de puntos (x, y, z) con $x \geq y \geq z$.

2. Sea E e.v.s. K. Entonces

   a) $\{\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} \mid \boldsymbol{x} \in E, \boldsymbol{y} \in E\} = E \times E$

   b) $\{\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} \mid \boldsymbol{x} \in E, \boldsymbol{y} \in E\} = E$

   c) $\{\lambda \boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{x} \in E\} = K \times E$.

3. La multiplicación por un escalar en un e.v.s. K es una aplicación

   a) $E \times E \to K$ b) $K \times K \to K$ c) $K \times E \to E$.

4. Averiguar si los siguientes conjuntos tienen estructura de e.v.s. $\mathbb{R}$

   a) $\{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_4 = 0\}$,

   b) el conjunto de todos los polinomios con coeficientes reales,

   c) el conjunto de las funciones reales de una variable derivables.

5. Un subespacio siempre contiene a1 vector $\boldsymbol{0}$ del espacio vectoria1.

6. El subconjunto de $\mathbb{R}^2$ de los puntos (x, y) tales que $x^2 - y^2 = 1$ es un subespacio.

7. Si F es un subespacio de E, entonces $F + F = F$.

8. Si el subconjunto F genera E, entonces todo vector de E puede ser escrito de forma única como combinacion lineal de elementos de F.

9. Si F y G son subespacios de E, probar que $F \cup G$ es subespacio de E si y solo si, $F \subseteq G$ o $G \subseteq F$ y que si $F \cup G$ es subespacio de E, entonces $F \subset G$ o $G \subset F$.

10. Probar que $F = [1, x^2, x^4, \ldots, x^{2n}]$ es el subespacio de $\mathbb{R}_{2n+1}(x)$ de los polinomios pares y que $G = [x, x^3, x^5, \ldots, x^{2n+1}]$ es el subespacio de $\mathbb{R}_{2n+1}(x)$ de los polinomios impares. Probar que $F + G = \mathbb{R}_{2n+1}(x)$. ¿Es $F \oplus G = \mathbb{R}_{2n+1}(x)$?.

11. Sea F el subconjunto de $\mathbb{R}_3(x)$ de todos los polinomios $P(x)$ tales que $P(1) = 0$. Probar que F es un subespacio y hallar tres polinomios que generen F.

12. Si F, G, H son subespacios y $G \subset F$, entonces $F \cap (G+H) = G+(F \cap H)$.

13. Sea E e.v.s. K, F un subespacio de E y $E - F = \{\boldsymbol{x} \in E \mid \boldsymbol{x} \notin E \cap F\}$. Entonces

    a) existe un subespacio G tal que $E - G$ es subespacio, pero $E - F$ no es, en general, subespacio,

    b) $E - F$ es un subespacio de E,

    c) $E - F$ nunca es subespacio.

14. Sean F y G subespacios de un E e.v.s. K. ¿Son los siguientes subconjuntos subespacios de E?

    a) $F \cap G$ b) $(F + G) \cup (F \cap G)$ c) $F \cup G$.

15. Sea F el e.v.s. $\mathbb{R}$ generado por los vectores $\boldsymbol{u} = \cos^2 x$, $\boldsymbol{v} = \sin^2 x$. Uno de los siguientes vectores pertenece a F:

    a) $\cos 2x$ b) $3 + x^2$ c) $\sin x$.

16. Sean F y G subespacios de E e.v.s. K. Entonces, $F \cup G$

    a) es siempre subespacio de E,

    b) es subespacio si $F \cap G = \boldsymbol{0}$,

c) es subespacio si, y sólo si, $F \subseteq G$ o $G \subseteq F$.

17. Averiguar si es cierto o falso que si V es un espacio vectorial y W un subconjunto de V, entonces W es subespacio de V.

18. Averiguar si es cierto o falso que si V es un espacio vectorial y W_1 y W_2 son subespacios de V, entonces $W_1 \cap W_2$, $W_1 \cup W_2$ y $W_1 + W_2$ son subespacios de V.

19. Averiguar si es cierto o falso que si $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in \mathbb{R}^3$ tales que $\boldsymbol{v} \neq \boldsymbol{w}$, entonces $[\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}] \neq [\boldsymbol{u},\boldsymbol{w}]$.

20. Averiguar si es cierto o falso que si $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ y $\boldsymbol{w}$ son tres vectores cualesquiera de $\mathbb{R}^2$, entonces $\{\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}\}$ es un conjunto generador de $\mathbb{R}^2$.

21. Si $\boldsymbol{0}$ es uno de los vectores del subconjunto $\{\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_k\}$, entonces, $\{\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_k\}$ es l.d..

22. Si $\{\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3\} \subseteq \mathbb{R}^4$ es l.d., entonces $\boldsymbol{x}_i$ es múltiplo de $\boldsymbol{x}_j$ para algunos i, j tales que $i \neq j$.

23. Si $\{\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_k\}$ es l.d., entonces existe un i tal que $\boldsymbol{x}_i = \boldsymbol{0}$.

24. Si F es un subconjunto l.d., entonces todo elemento de F es combinación lineal de los demás.

25. Subconjuntos de conjuntos l.d. son tambien l.d..

26. Subconjuntos de conjuntos l.i. son tambien l.i..

27. Probar que si $\{\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\}$ es l.i., también lo es $\{\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}, \boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\}$.

28. Probar que si $\alpha\boldsymbol{x}+\beta\boldsymbol{y}+\gamma\boldsymbol{z} = \boldsymbol{0}$ con $\alpha\gamma \neq 0$ es l.i., entonces $[\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}] = [\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}]$.

29. Si $\boldsymbol{0} \in A = \{\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n\}$, entonces A

    a) es l.i. b) es l.d. c) puede ser l.i..

30. Si $\{\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3\}$ es un conjunto l.i. de E e.v.s. K, entonces
    a) $\{\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2\}$ es necesariamente l.d.,
    b) $\{\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2\}$ puede ser l.d.,
    c) $\{\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2\}$ es necesariamente l.i..

31. Un subconjunto $\{\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_k\}$ es l.i. si
    a) $\lambda_1 = \ldots = \lambda_k = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1\boldsymbol{x}_1 + \ldots + \lambda_k\boldsymbol{x}_k = \boldsymbol{0}$,
    b) $\lambda_1\boldsymbol{x}_1 + \ldots + \lambda_k\boldsymbol{x}_k = \boldsymbol{0} \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = \ldots = \lambda_k = 0$,
    c) $\lambda_1\boldsymbol{x}_1 + \ldots + \lambda_k\boldsymbol{x}_k = \boldsymbol{0}$ para toda n-pla $(\lambda, \ldots, \lambda_k)$.

32. Averiguar si las siguientes aflrmaciones son válidas:
    a) si $\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3\}$ es l.i., entonces $\{\boldsymbol{u}_3, \boldsymbol{u}_1\}$ es l.i.,
    b) si $\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3\}$ es l.d., entonces $\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3, \boldsymbol{x}\}$ es l.d. para cualquier vector $\boldsymbol{x}$ del espacio vectorial,
    c) si $\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2\}$ es l.i. y si $\boldsymbol{u} \notin [\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_3]$, entonces $\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3\}$ es l.d..

33. Un subconjunto de una base es siempre l.i..

34. Si F es un subespacio de E y si $\dim(F) = \dim(E)$, entonces $F = E$.

35. Si F es un subconjunto l.i. de E y si $\dim(E) = n$, entonces F no puede tener más de n elementos.

36. Si F y G son subespacios de E y si $\dim(F + G) = \dim(F)+\dim(G)$, entonces $F \cap G = \{\boldsymbol{0}\}$.

37. Un espacio vectorial no puede tener más de una base.

38. Si un espacio vectorial tiene dimension finita, todas sus bases tienen el mismo número de vectores.

39. La dimension de $\mathbb{R}_n(x)$ es n.

40. Si E tiene dimension n, entonces E posee exactamente un subespacio de dimension 0 y un subespacio de dimension n.

41. Si F y G son subespacios de E, entonces, $\dim(F+G) = \dim(F) + \dim(G)$.

42. Un espacio de dimensión n, no puede tener un conjunto generador con más de n elementos.

43. Si n vectores generan un espacio de dimensión n, entonces forman un conjunto l.i..

44. El vector $\boldsymbol{0}$ es el único vector de un espacio vectorial cuya expresión como combinación lineal de los elementos de cualquier base tiene todos los coeficientes nulos.

45. Dado un vector $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$, siempre podemos hallar una base del espacio vectorial de forma que sus coordenadas respecto de esa base sean 0,0,... y 0.

46. Hallar una base, lo más simple posible, para los subespacios generados por los conjuntos de vectores

    (i) [(1,1,1,-2),(2,4,3,3),(0,4,2,2)]

    (ii) [(2,-1,1),(4,-2,-1),(-2,1,-3),(6,-3,5)]

    (iii) [(2,-1,2,-1),(1,1,-1,2),(1,2,1,7),(1,3,-2,7)].

47. Si $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})$ es una base de $\mathbb{R}^3$ y

    $\boldsymbol{u} = 2\boldsymbol{x} + 7\boldsymbol{y} - 3\boldsymbol{z}$

    $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{x} - 2\boldsymbol{y} + 5\boldsymbol{z}$

    $\boldsymbol{w} = 4\boldsymbol{x} + 3\boldsymbol{y} + 7\boldsymbol{z}$

    demostrar que no es posible expresar $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ y $\boldsymbol{z}$ como combinaciones lineales de $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ y $\boldsymbol{w}$. ¿Qué significa ese hecho sobre $(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\boldsymbol{w})$?.

48. Determinar cuales de 1os siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}^3$ son bases

    a) (1,0,-1) , (2,5,1) , (0,-4,3)

    b) (2,-4,1) , (0,3,-1) , (6,0,-1)

    c) (1,-3,-2) , (-3,1,3) , (-2,-10,-2)

49. Determinar cuales de 1os siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}_2(x)$ son bases

    a) $\{-1-x+2x^2, 2+x-2x^2, 1-2x+4x^2\}$

    b) $\{1+2x+x^2, 3+x^2, x+x^2\}$.

50. Los vectores (2,-3,1), (1,4,-2), (-8,12,-4), (1,37,-17) y (-3,-5,8) generan $\mathbb{R}^3$. Hallar un subconjunto del anterior que sea base.

51. Los vectores (1,1,1,1), (0,1,1,1), (0,0,1,1) y (0,0,0,1) son una base de $\mathbb{R}^4$. Expresar cualquier vector de $\mathbb{R}^4$ como combinación lineal de la base anterior.

52. Hallar una base para los siguientes subespacios de $\mathbb{R}^4$:

    a) Todos los vectores cuyas dos primeras coordenadas son nulas

    b) Los vectores de la forma (a, b, a, b)

    c) El conjunto de vectores (x, y, z, u) tales que $x + y + z + u = 0$.

53. Hallar la dimensión del subespacio de $\mathbb{R}^3$ de todos los vectores $\boldsymbol{x}=$ (x_1, x_2, x_3) tales que $x_2 = 0$.

54. Sean F y G subespacios de E e.v.s.K de dimensiones m y r respectivamente con $m \geq r$. Probar que $\dim(F \cap G) \leq r$ y que $\dim(F + G) \leq m + r$. Construir subespacios de $\mathbb{R}^3$ en donde las desigualdades se conviertan en igualdades.

55. Probar que si $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ es una base de E, también lo es $(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}, \boldsymbol{x} - \boldsymbol{y})$.

56. Probar que si $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})$ es una base de E, también lo es $(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}+\boldsymbol{z}, \boldsymbol{y}+\boldsymbol{z}, \boldsymbol{z})$.

57. El conjunto de soluciones del sistema

    $x - 2y + z = 0 \qquad 2x - 3y + z = 0$

    es un subespacio de $\mathbb{R}^3$. Hallar una base de este subespacio.

58. Completa $(1, 2 - x, x^2 + 1)$ a una base de $\mathbb{R}_4(x)$ y expresa $P(x) = 2 - 3x + x^2 + 4x^3$ en funcion de esta base.

59. Hallar una base de $\mathbb{R}_4(x)$ que incluya los polinomios 1 y $x + x^3$.

60. Sea $F = \{(x, y, z) \mid y - z = 0\}$. Hallar un subespacio G de $\mathbb{R}_3$ tal que $F \cap G = \{\boldsymbol{0}\}$ y $F + G = \mathbb{R}_3$.

61. Se considera el conjunto F de vectores $\{\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}, \boldsymbol{u}\}$ que verifican $\boldsymbol{x}+2\boldsymbol{y} = \boldsymbol{z}+2\boldsymbol{u}$. Probar que $A = \{(1, 0, 1, 0), (0, 1, 0, 1)\}$ es l.i. y está contenido en F y extender A a una base de F.

62. Extender a una base de $\mathbb{R}^4$ los siguientes conjuntos l.i.:

    a) $(1, 1, 1, 1), (0, 2, 1, 1)$

    b) $(1, 0, 1, 1), (-1, -1, 0, 0), (0, 1, 1, 0)$.

63. Hallar una base de los siguientes subespacios de $\mathbb{R}^3$:

    a) $\{(x, y, z) \mid 3x - 4y + z = 0\}$

    b) $\{(x, y, z) \mid x + y - z = 0, 2x - y + z = 0\}$.

64. Si F y G son subespacios de un espacio vectorial E tales que $\dim(F) = \dim(G)$ y $F \subseteq G$, probar que $F = G$.

65. Hallar una base del conjunto de soluciones del sistema

    $x + 2y - z + 2t = 0 \quad , \quad x + y + 2z - t = 0 \quad , \quad x + 4y - 7z + 8t = 04$

    y prolongarla a una base de $\mathbb{R}^4$.

66. Sea $\{\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n\}$ un conjunto l.d. de vectores de un e.v.s. K. Entonces

    a) contiene al vector $\boldsymbol{0}$,

    b) es tal que $[\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n]$ tiene dimensión k,

    c) puede estar formada por vectores no nulos.

67. El e.v.s. $\mathbb{R}$ de todos 1os polinomios de grado, a lo sumo, n, tiene dimensión

    a) $n + 1$ b) n c) $n - 1$.

68. Sea $A = \{\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_k\}$ un subconjunto de E e.v.s. K y sea $C = \{\boldsymbol{z}_1, \ldots, \boldsymbol{z}_m\}$ un subconjunto l.i. de A. El teorema de Steinitz permite asegurar que

a) $m \leq k$ y que podemos reemplazar r vectores de A (con $r \leq m$) por r vectores de C sin alterar $[\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_k]$,

b) $m = k$ Y que podemos reemplazar todos 1os vectores de A por los de C para obtener $[\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_k]$,

c) $m > k$ y que $[\boldsymbol{z}_1, \ldots, \boldsymbol{z}_m] \supset [\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_k]$.

69. Sea Sea $A = (\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_k)$ una base de E e.v.s.K y sean los escalares $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$. Entonces,

a) $(\alpha_1\boldsymbol{x}_1, \ldots, \alpha_k\boldsymbol{x}_k)$ no es base para ninguna elección de los α_i salvo $\alpha_1 = \ldots = \alpha_k = 1$,

b) puede no ser base de E, aunque todos los α_i sean no nulos,

c) es base de E, si todos los α_i son no nulos.

70. Sea F el e.v.s. $\mathbb{R}$ generado por los vectores $\boldsymbol{u}= \cos^2 x$, $\boldsymbol{v}= \sin^2 x$ y $\boldsymbol{w}= \cos 2x$. Entonces

a) ($\boldsymbol{u}$,$\boldsymbol{v}$,$\boldsymbol{w}$) no es base de F,

b) $\{\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}\}$ es l.i.,

c) $\dim(F) = 3$.

71. Averiguar si las siguientes afirmaciones son correctas:

a) el subespacio $F = \{(a, b, c, 0) \in \mathbb{R}^4 \mid \ a, b, c \in \mathbb{R}\}$ tiene dimensión 3,

b) el subespacio $F = \{(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 \mid d = a + b, c = ab, a, b, c, d \in \mathbb{R}\}$ tiene dimensión 2,

c) el subespacio $F = \{(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 \mid a = b = c = d, a, b, c, d \in \mathbb{R}\}$ tiene dimensión 2,

72. Sean $F = [(1, 0, 0), (0, 1, 0)]$ y $G = [(1, 1, 0)]$. Averiguar si las siguientes afirmaciones son correctas:

a) $\dim(F) = 2$ y $\dim(G) = 1$. Como $F \cap G = G$, entonces $\dim(F \cap G) = 1$,

b) $F + G = \mathbb{R}^3$, con lo que $\dim(F + G) = \dim(F)+\dim(G)$,

c) $\dim(F \cap G) < \dim(G)$.

73. Sea $\{1, 2-x, x^2+1\}$ un conjunto de vectores l.i. de $\mathbb{R}_4(x)$. Uno de los siguientes conjuntos es base de $\mathbb{R}_4(x)$

    a) $\{1, 2-x, x^2+1, x^3-7, x^3-5x+1\}$,

    b) $\{1, 2-x, x^2+1, x^3, x^4\}$,

    c) $\{1, 2-x, x^2+1, x^2+x+1, x^4\}$.

74. Sean F y G subespacios de E e.v.s. K. Si $\dim(F+G) = \dim(F)+\dim(G)$, entonces

    a) $F + G = F \cup G$,

    b) $\dim(F \cap G) = 1$,

    c) $F \cap G = \{\ \boldsymbol{0}\ \}$.

75. Averiguar si es cierto o falso que si $B = (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$ es una base de V e.v.s.$\mathbb{R}$, entonces para todo $\boldsymbol{w} \in V$ se tiene que $\boldsymbol{w} = \alpha\boldsymbol{u} + \beta\boldsymbol{v}$.

76. Averiguar si es cierto o falso que si V es un espacio vectorial de dimensión 3, entonces los conjuntos de vectores $B = (\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3, \boldsymbol{u}_4)$ y $A = (\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2)$ no son bases de V.

77. Averiguar si es cierto o falso que si $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ y $\boldsymbol{w}$ son tres vectores l.i. de $\mathbb{R}^3$, entonces $B = (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w})$ es una base de $\mathbb{R}^3$.

78. Sea V un espacio vectorial de dimensión n y sea $S = \{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_p\}$ un conjuto de vectores de V. Entonces

    a) Si $p < n$, el conjunto S es l.i.

    b) Si $p \geq n$, el conjunto S es generador de V.

    c) Si $[\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_p] \neq V$ y $p = n$, el conjunto S es l.d.

    c) Si $[\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_p] = V$, es $p \geq n$.

79. Sea W un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$ definido por

    $W = \{(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3) \in \mathbb{R}^3 \mid ax_1 + bx_2 + x_3 = 0\ ,\ x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$

    Se tiene que

    a) Si $a = b$, entonces $\dim(S) = 2$.

    b) Si $a \neq b$, entonces $\dim(S) = 1$.

a) Si $a = b = 1$, entonces $((1, -1, 0), (0, 1, -1))$ es una base de W.

80. Dado V e.v.s $\mathbb{R}$, sean $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in V$, $W_1 = [\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}]$ y $W_2 = [\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}]$. Emtonces si $\dim(W_1) = 1$ y $\boldsymbol{w}$ no es combinación lineal de $\boldsymbol{u}$ y $\boldsymbol{v}$ se verifica que $\dim(W_2) = 3$.

a) Verdadero pues como el conjunto $\{\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}\}$ es l.i. y además genera W_2, entonces es una base de W_2 por lo que $\dim(W_2) = 3$.

b) Falso pues al ser $\dim(W_1) = 1$, entonces $\boldsymbol{u}$ y $\boldsymbol{v}$ son l.d. Por tanto el rango de $\{\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}\}$ es 2, de donde se deduce que $\dim(W_2) = 2$.

c) Falso ya que si $\boldsymbol{u} = (1, 1, 0)$, $\boldsymbol{v} = (2, 2, 0)$ y $\boldsymbol{w} = (0, 1, 1)$, entonces se cumplen todas las condiciones del enunciado y, sin embargo,

$\dim(W_2) = \dim([\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + z = y\}] = 2$.

81. Sea $S = \{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_m\}$ un conjunto de m vectores l.d. de un espacio vectorial V. Entonces se verifica que suprimiendo algún vector de S puede encontrarse un subconjunto $B \subset S$ que es base de S.

a) Verdadero porque todo conjunto de vectores l.d. contiene un subconjunto l.i. que es, por tanto, base del espacio vectorial V.

b) Falso pues si S no es generador de V, tampocio lo será ningún subconjunto B de S.

c) Falso ya que si, por ejemplo, $V = \mathbb{R}^2$ y $S = \{\boldsymbol{u}, 2\boldsymbol{u}, 3\boldsymbol{u}\}$, con $\boldsymbol{u} \neq \boldsymbol{0}$, es claro que S es l.d. pero ningún subconjunto de S es una base de $\mathbb{R}^2$.

d) En general es falso, aunque será verdadero si $m \geq \dim(V)$.

82. El conjunto

$W = \{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y - z = 0 \ , \ 2x - y = a\}$

es un subespacio vectorial de dimensión 1.

a) En general es falso aunque es verdadero si $a = 0$ pues, en este caso, todo vector $\boldsymbol{u} \in W$ verifica que $\boldsymbol{u} = \alpha(1, 2, 3)$, con $\alpha \in \mathbb{R}$, por lo que $W = [(1, 2, 3)]$

b) Falso pues si $a = 3$, entonces $\boldsymbol{v} = (1, -1, 0) \in W$ pero $2\boldsymbol{v} \notin W$.

83. Sea W el subespacio de $\mathbb{R}^n$ generado por tres vectores $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3 \in \mathbb{R}^n$ y sea $\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^n$ tal que $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2 + \boldsymbol{v}_3$ y $\boldsymbol{u} = 2\boldsymbol{v}_1 + 3\boldsymbol{v}_3$. Entonces se verifica que $\dim(W) \leq 2$.

a) Verdadero pues como $\boldsymbol{v}_1+\boldsymbol{v}_2+\boldsymbol{v}_3 = 2\boldsymbol{v}_1+3\boldsymbol{v}_3$, entonces $\boldsymbol{v}_1-\boldsymbol{v}_2+2\boldsymbol{v}_3 = 0$, de donde se deduce que $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3\}$ es l.d.. Luego cualquier base de W tiene menos de tres vectores.

b) Verdadero pues si fuese $\dim(W) = 3$, entonces el conjunto $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3\}$ es base de W y todo vector de W se expresa de forma única como combinación lineal de $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$ y $\boldsymbol{v}_3$.

c) Falso pues por ser W un subespacio vectorial generado por tres vectores, su dimensión es 3.

Aplicaciones lineales

84. Averiguar si es cierto o falso que si f es una aplicación de $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}^3$ tal que $f(\boldsymbol{x} = 3\boldsymbol{x}$, entonces f es lineal.

85. Si f es un endomorfismo de E y $\dim(\mathrm{Im}(f)) = \dim(\mathrm{Nuc}(f)$, entonces $\dim(E)$ es un número par.

86. Toda aplicación lineal f transforma el cero del espacio inicial en el cero del espacio imagen, es decir, $f(\boldsymbol{0}) = \boldsymbol{0}$. Toda aplicación lineal transforma conjuntos l.i. en conjuntos l.i..

87. La aplicación f de $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}^2$ definida por $f(x, y, z) = (|x|, y - z)$ es lineal. La aplicación g de $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}^2$ definida por $g(x, y, z) = (0, z)$ es lineal.

88. Averiguar si es cierto o falso que si f es una aplicación lineal de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^3$, entonces $\mathrm{Im}(f)$ es un subespacio de $\mathbb{R}^3$ de dimensión menor o igual que 2.

89. Averiguar si es cierto o falso que si f es una aplicación lineal de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$ tal que $\mathrm{Nuc}(f)=\{\boldsymbol{0}\}$, entonces $m \geq n$.

90. Si f es una aplicación lineal, conserva sumas y productos por escalares.

91. Si f es una aplicación lineal, f es inyectiva si y sólo si $\mathrm{Nuc}(f) = \mathbf{0}$.

92. Si f es una aplicación lineal, $\dim(\mathrm{Nuc}(f)) + \dim(\mathrm{Im}(f)) = \dim(E)$, siendo E el espacio final.

93. Si f es una aplicación lineal, tal que $\mathrm{Nuc}(f) \neq \boldsymbol{0}$, existen vectores $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{y}$ distintos tales que $f(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{y})$.

94. Averiguar si es cierto o falso que si f es una aplicación de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$ y $\{\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n\}$ es un conjunto l.i., entonces $\{f(\boldsymbol{x}_1), \ldots, f(\boldsymbol{x}_n)\}$ es un conjunto l.i. cuando $m \geq n$ y l.d. cuando $m < n$.

95. Hallar $\mathrm{Im}(f)$ y $\mathrm{Nuc}(f)$ para las siguientes aplicaciones lineales de $\mathbb{R}^4$ en $\mathbb{R}^5$:

    a) $f(x, y, z, u) = (5x - y, x + y, z, u, x)$

    b) $f(x, y, z, u) = (x + y + 7z + u, 2z + u, x, y, x - y)$.

96. Sea f una aplicación de E en F. Probar que:

    a) si $\dim(E) < \dim(F)$, f no puede ser sobreyectiva,

    b) si $\dim(E) > \dim(F)$, f no puede ser inyectiva.

97. Dar un ejemplo de endomorfismo f en $\mathbb{R}^2$ tal que $\mathrm{Nuc}(f) = \mathrm{Im}(f)$.

98. Si $\{\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n\}$ es un sistema de generadores de E (pero no necesariamente una base), explica por que una aplicacion lineal f de E en F no viene definida al asignar imagenes mediante f a cada x_i, $(i = 1, \ldots, n)$.

99. Si f es un endomorfismo en E tal que $\mathrm{Im}(f) \cap \mathrm{Nuc}(f) = \boldsymbol{0}$, probar que $f(f(x)) = \boldsymbol{0}$ implica que $f(x) = \boldsymbol{0}$.

100. Sea f un endomorfismo en E y sea $(\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n)$ una base de E. Si f es biyectivo, probar que $(f(\boldsymbol{x}_1), \ldots, f(\boldsymbol{x}_n))$ es también una base de E.

101. Sea f un endomorfismo en E y F un subespacio de E. Si f es biyectivo, probar que $\dim(F) = \dim(f(F))$.

102. Sea $A = (\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_n)$ una base de $\mathbb{R}^n$ y f un endomorfismo de $\mathbb{R}^n$ tal que $f(\boldsymbol{x}_i) = \boldsymbol{x}_{i+1}$ y $f(\boldsymbol{x}_n) = \boldsymbol{0}$. Entonces

    a) f es inyectivo.

    b) f es sobreyectivo.

    c) ninguna de las dos cosas.

103. Sea $(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_n)$ una base de un espacio vectorial E y f un endomorfismo de E. Una de las siguientes afirmaciones no es correcta

    a) Si $f(\boldsymbol{x}_i) = \boldsymbol{0}$, para todo i, entonces $f = 0$.

    b) $(f(\boldsymbol{x}_1), f(\boldsymbol{x}_2), \ldots, f(\boldsymbol{x}_n))$ es siempre base de E

    c) Si $f(\boldsymbol{x}_i) = \boldsymbol{x}_i$, para todo i, entonces $f = I_E$.

104. Sea f la aplicación lineal de $\mathbb{R}_2(x)$ en $\mathbb{R}_3(x)$ definida por $f(p(x)) = xp(x)$. Averiguar si siguientes polinomios pertenecen a $\mathrm{Im}(f)$

a) $1+x$ b) $3-x^2$ c) $x+x^2$

105. Sea f la aplicación lineal de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^n$ definida por $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (0, x_1, \ldots, x_{n-1})$. Entonces

a) $f^{n-1} = 0_{\mathbb{R}^n}$,

b) $f^n = 0_{\mathbb{R}^n}$,

c) $f^{n+1} = 0_{\mathbb{R}^n}$.

106. Sea f la aplicación lineal de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^2$ definida por $f(x, y) = (ax + by, cx + dy)$, para a, b, c, d reales. Entonces

a) f es biyectiva si y sólo si $ad \neq bc$,

b) f es biyectiva si y sólo si $ac \neq bd$,

c) f es biyectiva si y sólo si $ac = bd$.

107. Sea f un endomorfismo de un espacio vectorial E tal que $\mathrm{Im}(f)$ 0 $\mathrm{Nuc}(f)$. Entonces es cierto que

a) no existe un endomorfismo verificando esa igualdad,

b) $\dim(E)$ es par,

c) $f = 0_E$.

108. Sea f la aplicación lineal de $\mathbb{R}_3(x)$ en $\mathbb{R}_1(x)$ definida por $f(a_0 + a_1x + a_2x^2) = (a_0 + a_1) - (2a_1 + 3a_2)x$. Su matriz respecto de las bases canónicas es

a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -2 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$.

b) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -3 \end{pmatrix}$.

c) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -3 \end{pmatrix}$.

109. Toda matriz (2,3) define una aplicación lineal de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^3$.

110. Si f es una aplicación lineal de E en F, con $\dim(E) = n$ y $\dim(F) = m$, entonces su matriz asociada es del tipo (m, n).

111. Permutar el orden de dos vectores de la base la base produce una permutación en el orden de las columnas de la matriz de la aplicación.

112. Sea f un endomorfismo de $\mathbb{R}^2$ tal que $f(1,0) = (1,4)$ y $f(1,1) = (2,5)$. Hallar $f(2,3)$ y estudiar si f es inyectiva.

113. Sea f la aplicación de $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}^2$ tal que $f(x,y,z) = (x,y)$. Probar que es lineal y que $f^2 = f$.

114. Sea f la aplicación de $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}^2$ tal que $f(x,y,z) = (x+a, x-y+z)$, con a un cierto número real, entonces f es una aplicación lineal para todo valor de a es

    a) verdadero pues f es la aplicación lineal cuya matriz asociada respecto de las bases canónicas es $\begin{pmatrix} 1+a & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$,

    b) verdadero pues la función f verifica la condición de aplicación lineal,

    c) falso ya que $f(0,0,0) \neq (0,0)$ si $a \neq 0$,

    d) falso ya que f es aplicación lineal sólamente si $a = 0$.

115. Sea f la aplicación lineal de matriz asociada respecto de las bases canónicas es de $\mathbb{R}^3$ y $\mathbb{R}^2$, respectivamente $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ y sean los subespacios

$$F = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 \mid f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}\}$$
$$G = \{\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^2 \mid (\exists \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3)\boldsymbol{y} = f(\boldsymbol{x})\}.$$

    Entonces $\dim(F) = \dim(G) = 2$ es

    a) falso pues F y G no pueden tener la misma dimensión ya que $F \subseteq \mathbb{R}^3$ y $G \subseteq \mathbb{R}^2$,

    b) falso ya que $\dim(G) = 2$ y $\dim(F) = 1$,

    c) verdadero pues $\dim(F) = \dim(G) = \text{rang}(\mathbf{A}) = 2$.

116. Sea f el endomorfismo de $\mathbb{R}(x)$ definido por $f(P(x)) = \int_0^x P(s)ds$. Probar que f es inyectivo, pero no sobreyectivo.

117. Si f es un endomorfismo de $\mathbb{R}^2$. Hallar la matriz de f respecto de la base canónica en los siguientes casos:

a) $f(\boldsymbol{x}) = 4\boldsymbol{x}$ (una dilatación).

b) $f(\boldsymbol{x}) = -\boldsymbol{x}$ (una simetría respecto del origen).

c) $f(x, y) = (x, -y)$ (una simetría respecto de OX).

d) $f(x, y) = (-y, x)$ (una rotación de ángulo $\pi/2$).

e) $f(x, y) = (x, 0)$ (una proyección sobre OX).

118. Sea f una aplicación lineal de $\mathbb{R}^m$ en $\mathbb{R}^n$ tal que $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}^n$. Entonces

a) $m \geq n$,

b) cualquier matriz asociada a f es de orden (m, n),

c) cualquier matriz asociada a f es de rango m,

d) si $m \neq n$, existe un vector no nulo $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^m$ tal que $f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}$,

e) si $m = n$ existe la función inversa f^{-1}.

119. Si f es un endomorfismo de $\mathbb{R}^3$. Hallar la matriz de f respecto de la base canónica en los siguientes casos:

a) $f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}/3$ (una dilatación).

b) $f(x, y, z) = (x, y, -z)$ (una simetría respecto del plano XOY).

c) $f(x, y, z) = (x, -z, y)$ (una rotación de ángulo $\pi/2$ en el plano XOY).

d) $f(x, y) = (x, y, 0)$ (una proyección sobre el plano XOY).

120. Si f es un endomorfismo de $\mathbb{R}_3(x)$. Hallar la matriz de f respecto de la base canónica en los siguientes casos:

a) $f(P(x)) = P''(x)$.

b) $f(P(x)) = P'''(x)$.

121. Si f es un endomorfismo de $\mathbb{R}_2(x)$. Hallar la matriz de f respecto de la base $(1, x + x^2, x^2)$ en los siguientes casos:

a) $f(P(x)) = 3P'(x)$.

b) $f(P(x)) = P''(x) + P(x)$.

122. Explicar porqué el endomorfismo nulo tiene a la matriz nula como matriz asociada, independientemente de las bases que se elijan.

123. Si $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ es la matriz asociada a un endomorfismo f de $\mathbb{R}^3$ respecto e las bases canónicas, calcular la matriz de f respecto de la base $((1,1,0),(1,0,1),((0,0,1))$.

124. Si $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ es la matriz asociada a un endomorfismo f, probar que $f - (a+b)f + (ad-bc)I = 0$.

125. Sea f un endomorfismo de matriz $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Hallar $\mathrm{Im}(f)$ y $\mathrm{Nuc}(f)$ y hallar una base tal que la matriz de f sea $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. ¿Existe alguna base tal que la matriz de f sea la matriz nula?.

126. Sean f y g los endomorfismos representados por las matrices $\begin{pmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} \lambda - 1 & 2 & 0 \\ -1 & \lambda + 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ respectivamiente. Hallar los valores de a y de λ para los que f y g son biyectivos.

127. Averiguar si son lineales las aplicaciones de $M_{(2,2)}(\mathbb{R})$ en $\mathbb{R}$ tales que si $\mathbf{A} = (a_{ij}) \in M_{(2,2)}(\mathbb{R})$, es

a) $f(\mathbf{A}) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$,

b) $f(\mathbf{A}) = a_{11}^2 + a_{12}^2$,

c) $f(\mathbf{A}) = a_{11} + a_{22}$,

128. Sea f la aplicación lineal de $\mathbb{R}_3(x)$ en $\mathbb{R}_1(x)$ definida por $f(a_0 + a_1x + a_2x^2) = (a_0 + a_1) - (2a_1 + 3a_2)x$. Su matriz respecto de las bases canónicas es

a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -2 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$.

b) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -3 \end{pmatrix}$.

c) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -3 \end{pmatrix}$.

Matrices

129. Si $\mathbf{A}$ es de orden (3,3) y antisimétrica, entonces $\text{rang}(\mathbf{A}) < 3$.

130. Si $\mathbf{A}$ es de orden (n, n) y antisimétrica, entonces $\text{rang}(\mathbf{A}) < n$.

131. $\mathbf{0}$ de orden (m, n) es la única matriz de rango 0.

132. Probar que si $\mathbf{C}$ es una matriz en forma escalonada por filas con r filas no nulas, entonces $\text{rang}(\mathbf{C}) = r$.

133. Probar que la matriz $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ tiene rango 2.

134. Si $\lambda \neq 0$, entonces $\text{rang}(\lambda\mathbf{A}) = \text{rang}(\mathbf{A})$.

135. Probar que si $\mathbf{A}$ tiene algún elemento no nulo, entonces $\text{rang}(\mathbf{A}) \neq 0$.

136. Sea $\mathbf{A}$ una matriz (n, n). El número de elementos que se encuentran por encima y por debajo de la diagonal principal es

    a) $n(n+1)$,

    b) $n(n+1)/2$,

    c) $n(n-1)$.

137. El rango de una matriz cuadrada $\mathbf{A}$ coincide con

    a) La dimensión del núcleo de su endomorfismo asociado.

    b) El número de sus elementos de la diagonal no nulos.

    c) El número de filas no nulas de su forma escalonada.

138. Sea f una aplicación lineal de $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}^3$ y sea $\mathbf{A}$ su matriz respecto de las bases canónicas. Entonces

    a) f es un isomorfismo $\Leftrightarrow \text{rang}(\mathbf{A}) = 3$.

    b) f nunca es un isomorfismo.

c) f es inyectiva $\Leftrightarrow$ rang($\mathbf{A}$) = 4

139. Sean $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in M_{(m,n)}(\mathbb{R})$. Entonces

a) rang($\mathbf{A}$+$\mathbf{B}$) $\leq$ rang($\mathbf{A}$) y rang($\mathbf{A}$+$\mathbf{B}$) $\leq$ rang($\mathbf{B}$).

b) rang($\mathbf{A}$+$\mathbf{B}$) = max(rang($\mathbf{A}$),rang($\mathbf{B}$)).

c) rang($\mathbf{A}$+$\mathbf{B}$) = rang($\mathbf{A}$)+rang($\mathbf{B}$).

140. Sea $\mathbf{A} \in M_{(m,n)}(\mathbb{R})$, con $m \leq n$. Entonces

a) $m \leq$ rang($\mathbf{A}$) $\leq n$.

b) $n \leq$ rang($\mathbf{A}$).

c) rang($\mathbf{A}$) $\leq m$.

141. La dimension del espacio vectorial $M_{(m,n)}(\mathbb{R})$ es $m + n$.

142. Sea f una aplicación del espacio vectorial $M_{(n,n)}(\mathbb{R})$ en sí mismo tal que $f(\mathbf{A}) = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}$, donde $\mathbf{P}$ es una matriz regular. Probar que es lineal.

143. Probar que el conjunto de todas las matrices triangulares superiormente forman un espacio vectorial.

144. Probar que el conjunto de todas las matrices antisimétricas forman un espacio vectorial.

145. Hallar un conjunto l.i. de matrices diagonales que generen todas las matrices diagonales de $M_{(n,n)}(\mathbb{R})$.

146. Si $\mathbf{A}$ es una matriz escalonada, probar que sus filas son vectores l.i..

147. Hallar una base del espacio vectorial de todas las matrices (n, n) que tienen traza cero y de todas las matrices antisimétricas.

148. Averiguar si los siguientes tres conjuntos tienen estructura de e.v.s. $\mathbb{R}$ con las operaciones habituales

a) el conjunto de las n-plas $(x, x, \ldots, x)$ con x real,

b) el conjunto de las matrices (2,2) del tipo $\begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & b \end{pmatrix}$ con a y b reales,

c) el conjunto de las matrices (2,2) diagonales.

149. El conjunto de los n vectores fila de una matriz (n, n) regular

a) puede ser l.d.,

b) no generan necesariamente $\mathbb{R}^n$,

c) forman una base de $\mathbb{R}^n$.

150. En el espacio vectorial $M_{(2,2)}\mathbb{R}$ se tiene que

a) $\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\}$ es l.d.,

b) $\alpha \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \alpha = \beta = 0$,

c) existen cinco matrices que forman un conjunto l.i..

151. Sean a, b, c reales cualesquiera y sean F y G los subespacios de $M_{(2,2)}(\mathbb{R})$ de las matrices de la forma $\begin{pmatrix} a & b \\ c & a \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & b \end{pmatrix}$, respectivamente. Hallar las dimensiones de F, G, $F + G$ y $F \cap G$.

152. Si $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, entonces $\mathbf{AA} = \mathbf{0}$.

153. Probar que las aplicaciones lineales de matrices $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ son no inyectiva y no sobreyectiva, respectivamente. Comprobar que $\mathbf{AB} = \mathbf{I}$, mientras que $\mathbf{BA} \neq \mathbf{I}$ e interpretar este resultado.

154. Las matrices $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ y $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ conmutan.

155. Si $\mathbf{A} \in M_{(m,n)}(\mathbb{R})$, $\mathbf{B} \in M_{(n,p)}(\mathbb{R})$ y $\mathbf{AB} = \mathbf{0}$, entonces $\mathbf{A} = \mathbf{0}$ o $\mathbf{B} = \mathbf{0}$.

156. Si $\mathbf{A} \in M_{(m,n)}(\mathbb{R})$, $\mathbf{B} \in M_{(n,p)}(\mathbb{R})$ y a y b son dos números reales, entonces $(a\mathbf{A})(b\mathbf{A}) = (ab)\mathbf{AB}$.

157. Si $\mathbf{A} \in M_{(m,n)}(\mathbb{R})$, $\mathbf{B} \in M_{(m,n)}(\mathbb{R})$ y $\mathbf{C} \in M_{(n,p)}(\mathbb{R})$, entonces $(\mathbf{A} - \mathbf{B})\mathbf{C} = \mathbf{AC} - \mathbf{BC}$.

158. Si $\mathbf{A} + \mathbf{A} = \mathbf{0}$, entonces $\mathbf{A} = \mathbf{0}$.

159. Si p es un entero positivo impar, entonces $(-\mathbf{A})^p = -\mathbf{A}^p$.

160. $\mathbf{A}^2 - \mathbf{B}^2 = (\mathbf{A} + \mathbf{B})(\mathbf{A} - \mathbf{B}$.

161. Si $\mathbf{A}$ es simétrica, también lo es $\mathbf{A}^k$.

162. El producto de dos matrices triangulares es triangular.

163. Si $\mathbf{A}$ conmuta con $\mathbf{B}$ y $\mathbf{B}$ conmuta con $\mathbf{C}$, entonces $\mathbf{A}$ conmuta con $\mathbf{C}$.

164. Si $\mathbf{BA} = \mathbf{A}$, entonces $\mathbf{B} = \mathbf{I}$.

165. Si $\mathbf{A}$ es diagonal, entonces $\mathbf{A}^k$ es diagonal.

166. Si para algún natural p tenemos que $\mathbf{A}^p = \mathbf{0}$, entonces $\mathbf{A} = \mathbf{0}$.

167. $\mathbf{AD} = \mathbf{DA}$ si $\mathbf{D}$ es una matriz diagonal.

168. Hallar una matriz $\mathbf{A} \in M_{(2,2)}(\mathbb{R})$ tal que $\mathbf{A}^2 = \mathbf{I}$.

169. Probar que dos matrices que conmuten con $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, deben conmutar entre sí.

170. Expresar la matriz $\begin{pmatrix} 3 & 3 & -1 \\ 0 & 3 & 2 \\ -1 & 32 & 2 \end{pmatrix}$ como suma de una matriz simétrica y de otra antisimétrica.

171. Calcula las potencias sucesivas de $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

172. Hallar matrices $\mathbf{B}$ y $\mathbf{C}$ tales que $\mathbf{AB} = \mathbf{I}_2$ y $\mathbf{CA} = \mathbf{I}_2$ siendo $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ y comparar ambas matrices.

173. Si $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ hallar, si es posible, una matriz $\mathbf{B}$ tal que $\mathbf{AB} = \mathbf{I}_2$. Qué es lo que no funciona? ¿Se puede hallar una matriz $\mathbf{C}$ tal que $\mathbf{AC} = \mathbf{0}_2$?.

174. Probar que si $\mathbf{A}$ es antisimétrica, entonces $\mathbf{A}^2$ es simétrica.

175. ¿Es cierto que la matriz inversa de una matriz triangular inferior con 1 en la diagonal se obtiene manteniendo la diagonal y cambiando de signo los demás elementos?

176. Si $\mathbf{A^{-1}}$ y $\mathbf{B^{-1}}$ existen y conmutan, entonces $\mathbf{AB}$ conmutan.

177. Sean $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ y $\mathbf{C}$ matrices (n, n), con $\mathbf{C} \neq \mathbf{0}$ y $\text{rang}(\mathbf{A}) > \text{rang}(\mathbf{B})$, entonces $\text{rang}(\mathbf{AC}) > \text{rang}(\mathbf{BC})$.

178. $\text{rang}(\mathbf{A} + \mathbf{B}) \leq \text{rang}(\mathbf{A}) + \text{rang}(\mathbf{B})$.

179. $\text{rang}(\lambda\mathbf{A}) = \lambda \text{ rang}(\mathbf{A})$.

180. $\text{rang}(\mathbf{AB}) \leq \text{rang}(\mathbf{A}) \text{ rang}(\mathbf{B})$.

181. Hallar $\text{rang}(\mathbf{A})$, $\text{rang}(\mathbf{A}^2)$, $\text{rang}(\mathbf{A}^3)$ y $\text{rang}(\mathbf{A}^4)$, para la matriz
$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

182. La potencia n-ésima de $\mathbf{H} = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}$. con a real es

a) $\begin{pmatrix} a^n & 1 \\ 0 & a^v \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} a^n & n \\ 0 & a^n \end{pmatrix}$

c) $a^{n-1} \begin{pmatrix} a & n \\ 0 & a \end{pmatrix}$

183. Sean $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ matrices tales que $\mathbf{AB} = \mathbf{0}$. Entonces,

a) $\mathbf{A} = \mathbf{0}$ o $\mathbf{B} = \mathbf{0}$,

b) $\mathbf{A} = \mathbf{0}$ y $\mathbf{B} = \mathbf{0}$,

c) puede ocurrir que $\mathbf{A} \neq \mathbf{0}$ y $\mathbf{B} \neq \mathbf{0}$.

184. Sean $\mathbf{A}$ una matriz (n, n) tal que $\mathbf{A}+\mathbf{A} = \mathbf{0}$. Entonces,

a) $\mathbf{A}$ es antisimétrica,

b) puede ocurrir que $\mathbf{A} \neq \mathbf{0}$,

c) con seguridad $\mathbf{A} = \mathbf{0}$.

185. Una de las siguientes tres matrices $\mathbf{A}$ satisface $\mathbf{AB} = \mathbf{BA} = \mathbf{I}$ para cualquier matriz $\mathbf{B}$ del tipo (3,3):

a) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$,

b) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$,

c) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

186. La multiplicación entre matrices no tiene la propiedad

a) asociativa b) distributiva c) conmutativa

187. Hallar una base del espacio vectorial de todas las matrices (n, n) que tienen traza cero y del espacio vectorial de todas las matrices antisimétricas.

188. Averiguar si es cierto que si p es impar y $\mathbf{A}$ es cuadrada, entonces

a) $(-\mathbf{A})^p = -\mathbf{A}^p$,

b) si $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ son matrices (m, n), entonces $\mathbf{A} - \mathbf{AB} = -(\mathbf{B} - \mathbf{A})$,

c) si $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ son cuadradas, entonces $\mathbf{A}^2 - \mathbf{B}^2 = (\mathbf{A} + \mathbf{B})(\mathbf{A} - \mathbf{B})$.

189. Sea $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Entonces

a) $\mathbf{AB} = \mathbf{A}$ para cualquier matriz $\mathbf{B}$ de orden (2,2),

b) la ecuación $\mathbf{AX} = \mathbf{I}$ nunca tiene solución,

c) $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ verifica $\mathbf{AB} = \mathbf{I}$.

190. Averiguar si los siguientes resultados son correctos:

a) $\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 1 & na \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$,

b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 1 & 2^n \\ 0 & 3^n \end{pmatrix}$,

c) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & na \\ 0 & 1 & nb \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

191. Si $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{pmatrix}$, entonces $\mathbf{A}^n$ es igual a

a) $\mathbf{I}$,

b) $\begin{pmatrix} \cos^n x & -\sin^n x \\ \sin^n x & \cos^n x \end{pmatrix}$,

c) $\begin{pmatrix} \cos(nx) & -\sin(nx) \\ \sin nx) & \cos(nx) \end{pmatrix}$.

192. El conjunto de matrices que conmutan con $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}^n$, es

a) $\begin{pmatrix} x & 1 \\ 0 & y \end{pmatrix}$,

b) $\begin{pmatrix} 0 & x \\ y & 0 \end{pmatrix}$,

c) $\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix}$.

193. El conjunto de matrices que conmutan con $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n$, es

a) $\begin{pmatrix} x & y \\ 0 & x \end{pmatrix}$,

b) $\begin{pmatrix} x & x \\ 0 & x \end{pmatrix}$,

c) $\begin{pmatrix} x & x \\ 0 & y \end{pmatrix}$.

194. Averiguar si las siguientes afirmaciones son correctas:

a) si existe $\mathbf{AB}$, entonces existe $\mathbf{BA}$,

b) si existe $\mathbf{AB}$ y $\mathbf{AC}$, entonces $\mathbf{A}(\mathbf{B}+\mathbf{C}) = \mathbf{AB} + \mathbf{AC}$,

c) si $\mathbf{AB} = \mathbf{0}$, entonces $\mathbf{A}=\mathbf{0}$ o $\mathbf{A}=\mathbf{0}$.

195. Averiguar si las siguientes afirmaciones son correctas:

a) si $\mathbf{AB} = \mathbf{AC}$, entonces existe $\mathbf{B} = \mathbf{C}$,

b) si existe $\mathbf{A}^2 = \mathbf{I}$, entonces $\mathbf{A} = \mathbf{I}$ o $\mathbf{A} = -\mathbf{I}$,

c) si $\mathbf{A}^n = \mathbf{0}$, entonces $\mathbf{A}^p = \mathbf{0}$ para todo $p \geq n$.

196. Si las matrices $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ y $\mathbf{C}$ satisfacen las igualdades $\mathbf{AB} = \mathbf{0}$ y $\mathbf{CA} = \mathbf{I}$, entonces

a) $\mathbf{A} = \mathbf{B}$ b) $\mathbf{B} = \mathbf{0}$ c) $\mathbf{B} = \mathbf{I}$.

197. Sean las matrices $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{pmatrix}$ y $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \cos x & \sin x \\ \sin x & -\cos x \end{pmatrix}$. Para qué ángulo α conmutan $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$

a) para ninguno b) $\alpha = k\pi/2, \quad k \in \mathbb{Z}$ c) $\alpha = k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$

198. Sean $\mathbf{A} \in M_{(m,n)}(\mathbb{R})$ y $\mathbf{B} \in M_{(n,m)}(\mathbb{R})$ tales que $\mathbf{BA} = \mathbf{I} \in M_{(n,n)}(\mathbb{R})$ y f y g sus respectivas aplicaciones lineales asociadas. Entonces

a) $m = n$, f es biyectivo y g es biyectivo.

b) $m \leq n$, f es sobreyectivo y g es inyectivo.

a) $m \geq n$, f es inyectivo y g es sobreyectivo.

199. $\mathbf{AA}^\top$ siempre es simétrica.

200. Averiguar si las siguientes afirmaciones son correctas:

a) dos matrices diagonales conmutan siempre,

b) si $\mathbf{A}$ es antisimétrica, entonces $\mathbf{B}^\top\mathbf{AB}$ es antisimétrica ,

c) si $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ son simétricas, entonces $\mathbf{AB}$ es simétrica.

201. Si f es un endomorfismo de $M_{(2,2)}\mathbb{R}$ definido por $f(\mathbf{A}) = \mathbf{A}^\top$, hallar la matriz de f respecto de la base canónica.

202. Prueba que si $\mathbf{A} + 2\mathbf{A}^\top = \mathbf{0}$, entonces $a_{ii} = 0$ para todo i.

203. Probar que si $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ conmutan equivale a que $\mathbf{A}^\top$ y $\mathbf{B}^\top$ conmutan.

204. Probar que si $\mathbf{A}$ es simétrica, también lo es $\mathbf{P}^\top\mathbf{AP}$ para cualquier elección de $\mathbf{P}$.

205. Hallar todas las matrices de $M_{(2,2)}(\mathbb{R})$ que satisfagan $\mathbf{A}^\top\mathbf{A} = \mathbf{0}$.

206. Averiguar si las siguientes afirmaciones son correctas:

a) Si $\mathbf{A}$ es (m, n) y tiene sus elementos enteros, entonces $\mathbf{AA}^\top$ no tiene necesariamente sus elementos enteros,

b) Si $\mathbf{A}$ es cuadrada y si $\mathbf{A} + 2\mathbf{A}^\top = \mathbf{0}$, entonces algún elemento de la diagonal de $\mathbf{A}$ puede ser no nulo,

c) Si $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ son matrices (m, n) y si $\mathbf{A} + \mathbf{B} = -\mathbf{A}$, entonces $\mathbf{A} = \mathbf{B}/2$.

207. Sea $\mathbf{A}$ una matriz real triangular. Si $\mathbf{A}\mathbf{A}^\top = \mathbf{A}^\top\mathbf{A}$, entonces
a) $\mathbf{A}$ es una matriz escalar b) $\mathbf{A} = \mathbf{I}$ c) $\mathbf{A}$ es diagonal

208. Averiguar si las siguientes igualdades son correctas:
a) $(\mathbf{ABC})^t = \mathbf{A}^\top\mathbf{B}^\top\mathbf{C}^\top$ b) $(\mathbf{A}^\top\mathbf{B}^\top)^t = \mathbf{BA}$ c) $(\lambda\mathbf{A})^t = \lambda\mathbf{A}^\top$.

209. Sean $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in M_{(n,n)}(\mathbb{R})$. Entonces
a) $\text{rang}(\mathbf{AB}) = \text{rang}(\mathbf{A})\text{rang}(\mathbf{B})$.
b) $\text{rang}(\mathbf{AB}) = \text{rang}(\mathbf{BA})$.
c) $\text{rang}(\mathbf{AB}) = \text{rang}(\mathbf{B}^\top\mathbf{A}^\top)$.

210. La traza $\text{tr}(\mathbf{A})$ de una matriz cuadrada se define como la suma de todas sus entradas diagonales. Probar que $\text{tr}(\mathbf{A}+\mathbf{AB}) = \text{tr}(\mathbf{A})+\text{tr}(\mathbf{B})$ y que $\text{tr}(\lambda\mathbf{A} = \lambda\text{tr}(\mathbf{A})$.

211. El producto de dos matrices elementales es una matriz elemental.

212. La inversa de una matriz elemental es elemental.

213. La traspuesta de una matriz elemental es elemental.

214. La suma de dos matrices elementales es elemental.

215. Si $\mathbf{B}$ es obtiene efectuando una operación elemental por filas en $\mathbf{A}$, entonces $\mathbf{B}$ puede ser obtenida también efectuando una operación elemental por columnas en $\mathbf{A}$.

216. El aplicar operaciones elementales sobre filas a la matriz ampliada $\mathbf{A}|\mathbf{b}$ de un sistema de ecuaciones lineales $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ para obtener otra matriz $\mathbf{C}|\mathbf{d}$, hace que el sistema $\mathbf{Cx} = \mathbf{d}$ tenga las mismas soluciones que el anterior.

217. Señalar qué tipo de operaciones elementales de filas hay que efectuar sobre $\mathbf{I}$ para obtener las siguientes matrices elementales

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

218. Sea $\mathbf{A}$ una matriz $(3, m)$. Indica a qué operación elemental sobre filas de $\mathbf{A}$ corresponde el acto de premultiplicar $\mathbf{A}$ por cada una de las siguientes matrices

$$\begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

219. Comprueba que una matriz elemental es distinta de $\mathbf{I}$ en, a lo sumo, dos filas.

220. Probar que $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ no es una matriz elemental. Prueba que $\mathbf{P}^2 \neq \mathbf{I}$ pero que $\mathbf{P}^3 = \mathbf{I}$ y escribe $\mathbf{P}$ como producto de dos matrices elementales.

221. Una matriz diagonal es no regular si y sólo si $a_{11}a_{22}\cdots a_{nn} = 0$.

222. Toda matriz elemental es regular.

223. Si $\mathbf{A}$ es producto de matrices elementales, $\mathbf{A}$ es regular.

224. Si $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ es regular, $\mathbf{A} + \mathbf{B}$ es regular.

225. Si $\mathbf{A}$ es regular y $\mathbf{AB} = \mathbf{0}$, $\mathbf{B} = \mathbf{0}$.

226. La matriz adjunta de $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ es $\begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}$

227. Suponiendo que todas las matrices que intervienen son regulares, despeja $\mathbf{D}$ en cada una de las siguientes ecuaciones matriciales:

a) $\mathbf{ADB} = \mathbf{C}$ b) $\mathbf{ACDB} = \mathbf{C}$ c) $\mathbf{CADB} = \mathbf{C}$

d) $(\mathbf{AB})^{-1}\mathbf{AD} = \mathbf{I}$ e) $\mathbf{A}(\mathbf{B} + \mathbf{D}) = (\mathbf{B}^{-1})^{-1}$.

228. Suponiendo que una matriz $\mathbf{B}$ de orden (n, n) satisface la ecuación $\mathbf{B}^7 - 3\mathbf{B} + \mathbf{I} = \mathbf{0}$, probar que $\mathbf{B}$ es regular y halla una fórmula para $\mathbf{B}^{-1}$ en función de $\mathbf{B}$.

229. Suponiendo que una matriz $\mathbf{A}$ de orden (n, n) satisface la ecuación $\mathbf{A}^p = \mathbf{0}$ para algún p, probar que $\mathbf{A}$ es no regular.

230. Si $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$, calcular $\mathbf{A}^{-2}$ y $\mathbf{A}^{-3}$.

231. Si $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 4 & -5 & 3 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ y $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ resolver la ecuación matricial $\mathbf{AX} + \mathbf{B} = \mathbf{0}$

232. Sean $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ matrices cuadradas. Probar que si $\mathbf{AB}$ es regular, entonces $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ son regulares.

233. Probar que si $\mathbf{A}$ es regular y simétrica, $\mathbf{A}^{-1}$ es simétrica.

234. Hallar una matriz regular $\mathbf{P}$ tal que $\mathbf{PA} = \mathbf{B}$ siendo

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Hallar asímismo una matriz regular $\mathbf{Q}$ tal que $\mathbf{AQ} = \mathbf{B}$.

235. Calcular la inversa de la matriz $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & c & b \\ c & 0 & a \\ b & a & 0 \end{pmatrix}$

236. Comprobar que la matriz $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 7 & 2 & 0 \\ 3 & 5 & -1 \\ 0 & 5 & -6 \end{pmatrix}$ está dominada por sus elementos diagonales y concluir que A es regular. En la definición de matriz dominante en la diagonal, reemplazar $>$ por $\geq$ y hallar una matriz con elemntos no nulos que cumpla esa condicion y que no sea regular

237. Probar que si $\mathbf{A}$ es no-singular y si $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$, entonces $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B} = \mathbf{BA}^{-1}$.

238. Calcular la inversa de la matriz $\mathbf{H} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & a \\ 0 & -1 & a & b \\ -1 & a & b & c \end{pmatrix}$.

239. Probar que si $\mathbf{A}$ es simétrica y regular, entonces $\mathbf{A}^{-1}$ es simétrica y regular.

240. Probar que si $\mathbf{A}$ y $\mathbf{A}$ son matrices regulares, entonces las siguientes fórmulas son equivalentes

$\mathbf{AB} = \mathbf{BA} \quad \mathbf{AB}^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A} \quad \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B} = \mathbf{BA}^{-1} \quad \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$.

241. Hallar la inversa de la matriz de Vandermonde $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{pmatrix}$.

242. Averiguar si es cierto que si $\mathbf{A}$ es regular y si

a) $\mathbf{A}$ tiene todos sus elementos enteros, entonces $\mathbf{A}^{-1}$ tiene todos sus elementos enteros,

b) $\mathbf{A}$ es diagona1, entonces $\mathbf{A}^{-1}$ es diagonal,

c) $\mathbf{A}$ es simétrica, entonces $\mathbf{A}^{-1}$ es simétrica.

243. ¿Para qué valores de a es regular la matriz $\begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$.

244. ¿Para qué valores de a es regular la matriz $\begin{pmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ 0 & 1 & a & a^2 \\ 0 & 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

245. Si $\mathbf{A}$ es una matriz (n, n) regular que verifica $\mathbf{A}^2 - 4\mathbf{A} + \mathbf{I} = \mathbf{0}$, entonces

a) $\mathbf{A}^{-1} = 4\mathbf{I} - \mathbf{A}$ b) $\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A} - 4\mathbf{I}$ c) $\mathbf{A}^{-1} = 4\mathbf{I} + \mathbf{A}$.

246. Averiguar si es cierto que para una matriz regular $\mathbf{A}$

a) $(\lambda\mathbf{A})^k = \lambda^k\mathbf{A}^k$, para todo entero k,

b) $\mathbf{AB} = \mathbf{AC} \;\Rightarrow\; \mathbf{B} = \mathbf{C}$,

c) $(\mathbf{A}+\mathbf{B})^{-1} = \mathbf{A}^{-1} + \mathbf{B}^{-1}$, si $\mathbf{B}$ es regular.

247. Sean A y B dos bases de un espacio vectorial E y sea I_E el endomorfismo idéntico sobre E. Entonces

a) la matriz de I_E en las bases A y B es una matriz no regular,

b) la matriz de I_E en las bases A y B puede ser la matriz unidad,

c) la matriz de I_E en las bases A y A es la matriz unidad.

248. Sea $\mathbf{A} \in M_{(n,n)}(\mathbb{R})$, entonces

a) $\text{rang}(\mathbf{A}) = n$ si y sólo si $\mathbf{A}$ es regular.

b) Si $\mathbf{A}$ es regular, $\text{rang}(\mathbf{A}) = n$ pero existen matrices de rango n que no son regulares.

c) Si $\text{rang}(\mathbf{A}) = n$, $\mathbf{A}$ es regular pero existen matrices regulares de rango n.

Cambios de base

249. Sean A, B y C bases de E un e.v.s. K y f y g endomorfismos de E. Entonces

a) Matriz de $f \circ g$ respecto de las bases A y C es igual al producto de la matriz de f en las bases B y C por la matriz de g en las bases A y C.

b) Matriz de $f \circ g$ respecto de las bases A y C es igual al producto de la matriz de f en las bases B y C por la matriz de g en las bases A y C.

c) Matriz de $f \circ g$ respecto de las bases A y C es igual al producto de la matriz de f en las bases C y B por la matriz de g en las bases C y A.

250. Si $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ son matrices de un mismo endormorfismo (respecto a bases distintas), entonces existe una matriz regular $\mathbf{P}$ tal que $\mathbf{A} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{P}$.

251. Sea E un e.v.s. K referido a una base A y F otro e.v.s. K referido a una base B. Sea f una aplicación lineal de E en F y sea el esquema

$$\begin{array}{ccccccc} & I_E & & f & & I_F & \\ E & \rightarrow & E & \rightarrow & F & \rightarrow & F \end{array}$$

Sea $\mathbf{B}$ la matriz de la aplicación f en las bases A y B y sea $\mathbf{A}$ la matriz de la aplicación $I_F \circ f \circ I_E$ en las bases A y B. Entonces

a) $\mathbf{A} = \mathbf{I}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{I}$,

b) $\mathbf{B} = \mathbf{I}\mathbf{A}\mathbf{I}^{-1}$,

c) $\mathbf{A} = \mathbf{I}\mathbf{B}\mathbf{I}^{-1}$.

Sistemas de ecuaciones lineales

252. Sean los sistemas:

$2x + y - (3 + 2\lambda)z = 0 \qquad x + (1 + \mu)z = 0$

y

$x - y + (3 - \lambda)z = 0 \qquad (\mu - 1)x + y + \mu(\mu - 1)z = 0$

Obtener el conjunto de soluciones de ambos sistemas y calcular los valores de λ y μ que hacen los sistemas equivalentes.

253. Todo sistema tiene, al menos, una solución. Todo sistema tiene, a lo sumo, una solución. Todo sistema homogéneo tiene, al menos, una solución.

254. Cualquier sistema de n ecuaciones con n incógnitas tiene, a lo sumo, una solución. Cualquier sistema de n ecuaciones con n incógnitas tiene, al menos, una solución.

255. Si $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ tiene una solución, entonces $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ tiene una solución.

256. Si el sistema lineal $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ sólo tiene laa solución trivial, entonces $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ es compatible determinado para cualquier $\mathbf{b}$.

257. Si $\mathbf{A} \in M_{(m,n)}(\mathbb{R})$, $\mathbf{b} \in M_{(m,1)}(\mathbb{R})$ y $\text{rang}(\mathbf{A}) = n$, entonces $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ es compatible determinado.

258. Si $\mathbf{A} \in M_{(4,3)}(\mathbb{R})$, $\mathbf{b} \in M_{(4,1)}(\mathbb{R})$, $\text{rang}(\mathbf{A}) = 2$ y el sistema $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ es compatible, entonces las infinitas soluciones del sistema dependen de un parámetro.

259. Si $\mathbf{A} \in M_{(4,3)}(\mathbb{R})$, $\mathbf{b} \in M_{(4,1)}(\mathbb{R})$, $\text{rang}(\mathbf{A}) = 2$, entonces el sistema $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ es equivalente al sistema formado por dos ecuaciones de $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$.

260. Si $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in M_{(m,n)}(\mathbb{R})$, $\mathbf{b} \in M_{(m,1)}(\mathbb{R})$ y $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ son soluciones de los ssitemas $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ y $\mathbf{Bx} = \mathbf{0}$, respectivamente, entonces $\mathbf{x}+\mathbf{y}$ es solución de $(\mathbf{A}+\mathbf{B})\mathbf{z} = \mathbf{b}$.

261. Si $\mathbf{A}\in M_{(n,n)}(\mathbb{R})$, $\mathbf{b}\in M_{(n,1)}(\mathbb{R})$ y $\det(\mathbf{A}) = 8$, entonces $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ tiene como única solución $\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\,\mathbf{b}$.

262. Sean $\mathbf{A}\in M_{(m,n)}(\mathbb{R})$, $\mathbf{b}\in M_{(m,1)}(\mathbb{R})$. Si S es el conjunto de soluciones del sistema $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, entonces entre las siguientes afirmaciones

(1) $(0, 0, \ldots, 0) \in S$,

(2) S es usbespacio vectorial de $\mathbb{R}^n$,

(3) $\text{rang}(\mathbf{A}) = \text{rang}(\mathbf{A}|\mathbf{b})$,

se verifican las implicaciones

(1) $\Rightarrow$ (3) (3) $\Rightarrow$ (2).

a) Verdadero, pues (1), (2) y (3) son equivalentes.

b) Verdadero, pues (1) $\Rightarrow$ (3) ya que si $(0, 0, \ldots, 0) \in S$, entonces $\mathbf{b} = \mathbf{0}$ y $\text{rang}(\mathbf{A}) = \text{rang}(\mathbf{A}|\mathbf{b})$; además (3) $\Rightarrow$ (2) pues si $\text{rang}(\mathbf{A}) = \text{rang}(\mathbf{A}|\mathbf{b})$, entonces el sistema es compatible y el conjunto de soluciones de un sistema es siempre un espacio vectorial.

c) Falso, pues la implicación (3) $\Rightarrow$ (2) sólo es cierta si $\mathbf{b} = \mathbf{0}$.

263. Sea $\mathbf{A}$ una matriz cuadrada de orden n tal que el sistema homogéneo $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ es compatible indeterminado. Entonces si $\mathbf{b}\in M_{(n,1)}(\mathbb{R})$, el sistema $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ es compatible indeterminado.

a) Verdadero, pues $\text{rang}(\mathbf{A}) = \text{rang}(\mathbf{A}|\mathbf{b})$.

b) Falso, ya que si consideramos las matrices

$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ y $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, se cumple que $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ es compatible indeterminado y, sin embargo, $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ es incompatible.

c) En general es falso, aunque sería cierto si $\mathbf{b}$ es el doble de la primera columna de la matriz $\mathbf{A}$.

264. Sea f un endomorfismo de $\mathbb{R}^3$ de matriz $\mathbf{A}$ respecto de la base canónica, cuyo subespacio imagen está dado por

$\text{Im}(f) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0\ ,\ z = 0\}$.

Entonces se verifica que el sistema $\mathbf{Ax} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ es compatible determinado.

a) Verdadero, pues como $(1,-1,0) \in$ Im (f) el sistema tiene solución y dado que $\text{rang}(\mathbf{A}) = \dim(\text{Im}(f)) = 3$ la solución es única.

b) Falso, ya que como pues como $(1,-1,0) \in$ Im (f) es $\text{rang}(\mathbf{A}) = \text{rang}(\mathbf{A}|\mathbf{b})$ pero este rango común no es igual al número de incógnitas sino menor. Por ello es sistema es compatible indeterminado.

c) Falso, pues no disponemos de información suficiente para poder calcular $\text{rang}(\mathbf{A})$.

265. Si $\mathbf{A} \in M_{(n,n)}(\mathbb{R})$, $\mathbf{b} \in M_{(n,1)}(\mathbb{R})$ sea el sistema, $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$. Entonces si $\mathbf{b}$ pertenece al subespacio generado por las columnas de la matriz $\mathbf{A}$, el sistema es compatible determinado.

a) Verdadero, pues la condición sobre $\mathbf{b}$ garantiza la compatibilidad y como el número de ecuaciones es igual al de incógnitas, es determinado.

b) Falso, pues el sistema de matriz ampliada $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$ es un contraejemplo.

c) Falso, pues lo único que podemos asegurar es que el sistema es compatible.

d) Sería cierto si $\text{rang}(\mathbf{A}) = n$.

266. Si el sistema lineal $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ es incompatible, entonces $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ es compatible indeterminado.

267. El rango de la matriz de coeficientes de un sistema lineal nunca es superior al rango de la matriz ampliada.

268. Si $\mathbf{A}'|\mathbf{b}'$ se obtiene de $\mathbf{A}|\mathbf{b}$ mediante transformaciones elementales de filas, 1os sistemas $\mathbf{A}'\mathbf{x} = \mathbf{b}'$ y $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ son equivalentes.

269. Un sistema $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ con matriz $\mathbf{A}$ del tipo (m,n) y rango m siempre tiene una solución.

270. Un sistema de m ecuaciones con $m+1$ incógnitas siempre tiene una solución.

271. Estudiar la compatibilidad del sistema de ecuaciones lineales cuya matriz ampliada es

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & -5 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 4 \\ 1 & 4 & 6 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

y del que resulta de reemplazar la última columna por la $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}$.

272. El sistema de ecuaciones lineales cuya matriz ampliada es

$$\begin{pmatrix} 1 & k & -2 & -1 \\ k & 1 & -2 & -1 \\ 2 & 2 & -3 & -1 \end{pmatrix}$$

verifica que

a) no tiene solución para $k = 1$,

b) para cualquier $k \in \mathbb{R}$ es compatible,

c) tiene solución única para $k > 1$,

d) tiene infinitas soluciones para $k = 5/3$,

e) tiene exactamente dos soluciones distintas para $k = 0$.

273. El sistema de ecuaciones lineales cuya matriz ampliada es

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -5 & a \\ 1 & 1 & -1 & a \\ 1 & -5 & 17 & b \end{pmatrix}$$

verifica que

a) si $a = 1$, tiene solución única para cualquier $b \in \mathbb{R}$,

b) si $a = b$, es compatible,

c) si $a = b = 0$, el conjunto de todas las soluciones es un espacio vectorial de dimensión 1,

d) si $b = 0$, es compatible indeterminado para cualquier $a \in \mathbb{R}$,

e) no existen valores de a y b para los cuales sea incompatible.

274. Prueba que el sistema de ecuaciones lineales cuya matriz ampliada es

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & -5 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 4 \\ 1 & 4 & 6 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

es compatible si, y sólo si $c - 2a + b = 0$.

275. Resolver los sistemas de ecuaciones lineales cuyas matrices ampliadas son

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 5 & 4 \\ 1 & 5 & -3 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & -4 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 & -1 & 4 & -1 & -5 \\ -6 & 1 & 3 & 2 & 4 & 9 \\ -16 & -8 & 8 & -4 & 6 & 3 \\ -4 & 6 & 2 & 6 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 6 & -2 & 3 \\ 4 & 9 & -5 & 3 & -2 \\ 3 & 7 & -2 & -1 & -6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -5 & 3 & 3 & -3 & 0 \\ 1 & -3 & 2 & 4 & -2 & 0 \\ -2 & 6 & -4 & -3 & 2 & 0 \\ -2 & 8 & -5 & -2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 5 & -4 & 2 \\ 2 & -5 & 7 & 7 & -a & -7 \\ 2 & -4 & 6 & 5 & 2 & -6 \\ -1 & 1 & -2 & -3 & 5 & -3 \\ 1 & -3 & 4 & 2 & 7 & -9 \end{pmatrix}$$

276. Sea el sistema $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ con $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$ y su sistema homogéneo asociado $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$. Sean $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ dos soluciones cualesquiera de $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$. Entonces

a) $\mathbf{x} - \mathbf{y}$ es solución de $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ pero no lo es $\mathbf{x} + \mathbf{y}$,

b) $\mathbf{x}-\mathbf{y}$ y $\mathbf{x}+\mathbf{y}$ son soluciones de $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ pues el conjunto de soluciones de $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ es un subespacio vectorial,

c) $\mathbf{x} + \mathbf{y}$ es solución de $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ pero no lo es $\mathbf{x} - \mathbf{y}$.

277. Si $\mathbf{b}$ es una de las columnas de $\mathbf{A}$, el sistema $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ es

a) compatible determinado,

b) compatible con más de una solución,

c) posiblemente incompatible.

278. Averiguar cuáles de las siguientes afirmaciones son ciertas: el sistema $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ con $\mathbf{A} \in M_{(n,n)}(\mathbb{R})$ es compatible determinado si

a) $\dim(\text{Nuc}(\mathbf{A})) = 0$,

b) $\text{rang}(\mathbf{A}) = n$,

c) $\dim(\text{Nuc}(\mathbf{A})) = n$.

279. Sea $\mathbf{A} \in M_{(n,n)}(\mathbb{R})$ con $\det(\mathbf{A}) = 0$. Entonces el sistema $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$

a) es compatible sólo para alguna $\mathbf{b}$,

b) es compatible sólo para $\mathbf{b} = \mathbf{0}$,

c) es compatible para toda $\mathbf{b}$, pero no necesariamente determinado.

280. Sea $\mathbf{A} \in M_{(n,n)}(\mathbb{R})$ y supongamos que el sistema el sistema $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ tiene dos soluciones l.i. Entonces

a) $\text{rang}(\mathbf{A}) \leq n$ y puede que $\text{rang}(\mathbf{A}) = n$

b) $\text{rang}(\mathbf{A}) \leq n - 1$ y puede que $\text{rang}(\mathbf{A}) = n - 1$

c) $\text{rang}(\mathbf{A}) \leq n - 2$ y puede que $\text{rang}(\mathbf{A}) = n - 2$

281. Sea $\mathbf{A} \in M_{(n,n)}(\mathbb{R})$. Entonces el sistema el sistema $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ tiene solución no trivial si y sólo si

a) $\text{rang}(\mathbf{A}) < n$,

b) $\text{rang}(\mathbf{A}) = n$,

c) $\mathbf{A} \neq \mathbf{0}$.

282. Sea $\mathbf{A} \in M_{(37,38)}(\mathbb{R})$. Entonces el sistema el sistema $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$

a) no tiene solución no trivial,

b) es incompatible,

c) debe tener solución no trivial.

283. Sea $\mathbf{A} \in M_{(38,37)}(\mathbb{R})$. Entonces el sistema el sistema $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$

a) no tiene solución no trivial,

b) es incompatible,

c) debe tener solución no trivial.

Espacios euclideos

284. Todo polinomio de segundo grado es una forma cuadrática. Si $q(\boldsymbol{x}) = \mathbf{x}^\top \mathbf{A}\mathbf{x}$, entonces $\mathbf{A}$ es una matriz simétrica.

285. Si q es una forma cuadrática definida positiva, entonces para todo $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ es $q(\boldsymbol{x}) > 0$. Si q es una forma cuadrática no definida, entonces para todo $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ con $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$es $q(\boldsymbol{x}) \neq 0$. Si q es una forma cuadrática definida negativa, entonces $\alpha q(\boldsymbol{x})$ es definida negativa si $\alpha > 0$ y definida positiva si $\alpha < 0$

286. La fórmula $f(x, y) = -x^2 - y^2$ es una forma cuadrática indefinida.

287. ¿Es definida positiva la forma cuadrática de matriz $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$?.

288. Estudiar el signo de las formas cuadráticas de matrices
$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$.

289. Para qué valores del parámetro son positivas las siguientes formas cuadráticas
$$3x^2 - 4xy + 4ay^2$$
$$5x^2 + y^2 + az^2 + 4xy - 2xz - 2yz$$
$$3x^2 + y^2 + 3z^2 + 2axy + 2xz.$$

290. La forma cuadrática $x^2+3y^2+z^2+4xy-4yz$ se escribe matricialmente
a) $\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 4 & 3 & -4 \\ 0 & -4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$
b) $\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

291. Dada la forma cuadrática $q(x, y) = ax^2 + by^2 + cxy$ con $a, b, c \in \mathbb{R}$, entonces

a) $q(x, y) = (x\ y) \begin{pmatrix} a & 2c \\ -c & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$,

b) $q(x, y) = (x\ y) \begin{pmatrix} a/2 & c/2 \\ c/2 & b/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

c) si $a > 0$, q no está definida,

d) si $ab < 0$, q no está definida,

e) si $a + b + c > 0$, q es definida positiva.

292. Dada la forma cuadrática $q(\boldsymbol{y}) = \mathbf{x}^\top \mathbf{A}\mathbf{x}$ con $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$, entonces

a) si $a < 1$, q no está definida,

b) si $a = 1$, existe un vector no nulo $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3$ tal que $q(\boldsymbol{x}) = 0$,

c) si $a < 0$, q es definida negativa,

d) si $a = 2$, q restringida al conjunto

$B_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y - z = 0\}$

es definida positiva,

e) si $a = 0$, q restringida al conjunto

$B_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = y\ ,\ z = 0\}$

es no definida.

293. Dada la forma cuadrática $q(x_1, x_2, x_3, x_4) = ax_1^2 + bx_2^2 + cx_3^2 + dx_4^2$ con $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ tales que $a^2 = bcd$, se verifica que q es definida positiva o bien indefinida.

a) Falso, ya que de la condición $a^2 = bcd$ sólo puede deducirse que q no es definida negativa.

b) Verdadero, pues si $a^2 = bcd$, entonces o bien a, b, c, d son todos positivos o bien dos de ellos son positivos y los otros dos negativos.

294. La función $f((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = x_1y_1 + x_2y_2$ es un producto escalar en $\mathbb{R}^2$.

295. Si $< \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} >= 0$ para todo $\boldsymbol{y}$ de E, entonces $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{0}$

296. Averiguar si $f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = x_1y_1 + 5x_ly_2 + 5y_lx_2 + 26x_2y_2$ define en $\mathbb{R}^2$ un producto escalar en $\mathbb{R}^2$. Calcular su matriz en las bases

(i) base canónica (ii) $((1, 1), (-1, 1))$ (iii) $((1, 0), (-5, 1))$.

297. Averiguar si $f(P(x), Q(x)) = \int_{-1}^{1} P(x)Q(x)dx$ define un producto escalar en $\mathbb{R}_3(x)$ y hallar su matriz respecto de la base canónica.

298. Toda forma bilineal simétrica define un producto escalar.

299. Averiguar si las siguientes formas bilineales sobre $\mathbb{R}^3$ son productos escalares

a) $f((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)) = x_1 + x_2 + y_1 + y_2$

b) $f((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)) = x_1y_1 + x_2y_2$

c) $f((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)) = 9x_1y_1 + 3x_1y_2 + 4x_2y_2 + 3x_2y_1$

300. Averiguar si las siguientes afirmaciones son correctas

a) $< (x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3) >= 1 \quad \Rightarrow \quad (y_1, y_2, y_3) = (1/x_1, 1/x_2, 1/x_3)$

b) $< (x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3) >=< (x_1, x_2, x_3), (z_1, z_2, z_3) > \Rightarrow \ (y_1, y_2, y_3) = (z_1, z_2, z_3)$

c) $< (y_1, y_2, y_3), (z_1, z_2, z_3) > (x_1, x_2, x_3) = (v_1, v_2, v_3) \ \Rightarrow \ (x_1, x_2, x_3) = (1/ < (y_1, y_2, y_3), (z_1, z_2, z_3) >)(v_1, v_2, v_3)$

301. Sean los vectores $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2)$ y $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2)$ de $\mathbb{R}^2$. Avriguar si son producto escalar

a) $< \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} >= x_1 + x_2 + y_1 + y_2$.

b) $< \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} >= x_1y_1 + x_2y_2$.

c) $< \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} >= 9x_1y_1 + 3x_1y_2 + 4x_2y_2 + 3x_2y_1$.

302. Averiguar si es cierto que

a) $< \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} >= 1 \Rightarrow \boldsymbol{x} = 1/\boldsymbol{y}$.

b) $< \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} >=< \boldsymbol{x}, \boldsymbol{z} >\Rightarrow \boldsymbol{y} = \boldsymbol{z}$.

c) $< \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} > \boldsymbol{x} = \boldsymbol{v} \Rightarrow \boldsymbol{x} = (1/ < \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} >)\boldsymbol{v}$ si $< \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} >\neq 0$.

303. Todo vector es ortogonal a $\boldsymbol{0}$.

304. Si $\boldsymbol{x} \in [\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}]^{\perp}$, entonces $\{\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}\}$ es l.i..

305. Si ortogonalizamos por Gram-Schmidt una familia A de cinco vectores de un espacio euclídeo, de los cuales los tres primeros son ortogonales, entonces los tres primeros vectores producidos por el método coinciden con los tres primeros de A.

306. Si $\boldsymbol{x} \in E$, entonces el ortogonal del ortogonal de $[\boldsymbol{x}]$ es precisamente $[\boldsymbol{x}]$.

307. Si $\boldsymbol{y}$ es ortogonal a n vectores l.i. de un espacio euclideo E de dimensión n, entonces $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{0}$

308. Todo conjunto ortonormal es l.i..

309. Todo espacio euclídeo tiene una base ortonormal.

310. Para todo subespacio F de E, la suma de F y su ortogonal es todo el espacio E.

311. Todo conjunto ortogonal es l.i..

312. Probar que $f(P(x), Q(x)) = \int_{-1}^{1} P(x)Q(x)dx$ define un producto escalar en $\mathbb{R}_1(x)$ y hallar su matriz respecto de la base canónica. Averiguar si las bases siguientes son ortogonales u ortonormales:

(i) base canónica (ii) $(1, x-2)$ (iii) $(x-2/3, x/2)$.

313. En $\mathbb{R}^2$ con el producto escalar ordinario, sean $\boldsymbol{x}$ = (1,2), $\boldsymbol{y}$ = (6,4). Calcular $\|\boldsymbol{x}\|$, $\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|$ y el coseno del ángulo que forman $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{y}$.

314. Sea el producto escalar $f(P(x), Q(x)) = \int_0^2 P(x)Q(x)dx$ en $\mathbb{R}_2(x)$. Calcular $\|x^2\|$, $\|x^2 - x + 2\|$, el coseno del ángulo que forman x^2 y $x + 2$ averiguando si son ortogonales.

315. Aplicar el método de Gram-Schmidt a la base de $\mathbb{R}^3$ $((1, 0, 1), (1, 0, -1), (1, 3, 4))$ para obtener una base ortonormal, considerando el producto escalar ordinario.

316. Sea el producto escalar $f(P(x), Q(x)) = \int_{-1}^1 P(x)Q(x)dx$ en $\mathbb{R}_3(x)$. Ortonormalizar la base canónica.

317. Sea W el subespacio de $\mathbb{R}^4$ de todos los vectores ortogonales a $(1, 0, -1, 1)$ y a $(2, 3, -1, 2)$. Hallar una base ortonorrnal de W y extenderla a una base ortonormal de $\mathbb{R}^4$.

318. En $\mathbb{R}^3$, considera $W = \{(x, y, z)|3x + y - z = 0\}$. Hallar la proyección ortogonal del vector (1,1,1) sobre W.

319. Hallar un vector ortogonal a $(2, 1, -1)$ y $(1, 2, l)$.

320. Averiguar si las siguientes afirmaciones son correctas

a) $| \parallel \boldsymbol{x} \parallel - \parallel \boldsymbol{y} \parallel | \leq \parallel \boldsymbol{x} - \boldsymbol{y} \parallel$

b) $\parallel \boldsymbol{x} \parallel > \parallel \boldsymbol{y} \parallel \Rightarrow \boldsymbol{x} > \boldsymbol{y}$

c) $\parallel \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} \parallel = \parallel \boldsymbol{x} \parallel \Rightarrow \boldsymbol{y} = \boldsymbol{0}$

321. Averiguar si las siguientes afirmaciones son correctas

a) $\parallel \boldsymbol{x} \parallel = \parallel \boldsymbol{y} \parallel \Leftrightarrow \boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$

b) $\parallel \boldsymbol{x} \parallel = \parallel \boldsymbol{y} \parallel \Leftrightarrow < \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}, \boldsymbol{x} - \boldsymbol{y} >= 0$

c) $\parallel \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} \parallel = \parallel \boldsymbol{x} - \boldsymbol{y} \parallel \Leftrightarrow < \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} >= 0$

322. Averiguar si respecto del producto escalar ordinario son ortogonales los siguientes pares de vectores

a) $(5, -2, 3)$ y $(2, -4, -6)$

b) $(1, 1, 1)$ y $(-1, -1, -1)$

c) $(\cos x \cos y, -\sin x \sin y, \sin y)$ y $(\cos x \sin y, -\sin x \cos y, -\cos y)$

323. Averiguar si es o no cierto que: el ángulo formado por los vectores $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{y}$ es de 90 para

a) $\boldsymbol{x} = (5, -2, 3)$ e $\boldsymbol{y} = (2, -4, -6)$

b) $\boldsymbol{x} = (1, 1, 1)$ e $\boldsymbol{y} = (-1, -1, -1)$

c) $\boldsymbol{x} = (\cos a \cos b, -\sin a \sin b, \sin b)$ e $\boldsymbol{y} = (\cos a \sin b, -\sin a \cos b, -\cos b)$.

324. La proyección de $\boldsymbol{x} = (2, -3, -1)$ sobre $\boldsymbol{y} = (-3, 5, -2)$es

a) $-\boldsymbol{x}/2$.

b) $\boldsymbol{y}/2$.

c) $-\boldsymbol{y}/2$.

325. Para los vectores $\boldsymbol{u} = (x, 2, -y, 3, 1)$ y $\boldsymbol{v} = (1, -2x, 4y, x, -1)$ sólo uno de los tres conjuntos es ortogonal:

a) $\{\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}\}$

b) $\{\boldsymbol{0}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}\}$

c) $\{\boldsymbol{u}, \boldsymbol{0}\}$.

326. Si F es un subespacio de un espacio euclídeo E y $F\perp$ su subespacio ortogonal,

a) no existen vectores de E que pertenezcan a F y $F\perp$,

b) $\dim(F) + \dim(F\perp) = \dim\,(E)$

b) $\dim(F + F\perp) = \dim\,(E)$

Determinantes

327. Sea $\mathbf{A}$ una matriz (3,3) con $\det(\mathbf{A}) = 5$. Entonces, no es cierto que
a) $\det(2\mathbf{A}^{-1}) = 8/5$ b) $\det(\ (2\mathbf{A})^{-1}) = 1/40$ c) $\det(3\mathbf{A}) = 125$.

328. Probar que no es posible que 1os seis sumandos que intervienen en el cálculo de un determinante (3,3) sean todos ellos positivos.

329. Sin desarrollar los siguientes determinantes probar que su valor es 0
$\begin{vmatrix} 15 & 16 & 17 \\ 18 & 19 & 20 \\ 21 & 22 & 23 \end{vmatrix}$ $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ b+c & a+c & a+b \end{vmatrix}$ $\begin{vmatrix} x-y & y-z & z-x \\ y-z & z-x & x-y \\ z-x & x-y & y-z \end{vmatrix}$.

330. Escribir $\begin{vmatrix} x+a & y+b & z+c \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 2 \end{vmatrix}$ como suma de dos determinantes.

331. Sabiendo que la matriz $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & (a-b)^2 & (a-c)^2 \\ (b-a)^2 & 0 & (b-c)^2 \\ (c-a)^2 & (c-b)^2 & 0 \end{pmatrix}$ se puede escribir como el producto
$\begin{pmatrix} a^2 & -2a & 1 \\ b^2 & -2b & 1 \\ c^2 & -2c & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{pmatrix}$
calcular $\det(\mathbf{A})$.

332. Si $\mathbf{A} = \mathbf{A}^{-1}$ ¿ Cuáles son los posibles valores de $\det(\mathbf{A})$?

333. Sea $\mathbf{A}$ una matriz (n, n) antisimétrica. Si n es impar, prueba que $\det(\mathbf{A}) = 0$. ¿Qué se puede afirmar del determinante
$\begin{vmatrix} 0 & x & y \\ -x & 0 & -z \\ -y & z & 0 \end{vmatrix}$?

334. Realizar el producto de matrices

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \alpha & \alpha^2 \\ \alpha^2 & 1 & \alpha \\ \alpha & \alpha^2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -\alpha & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

y hallar

$$\begin{vmatrix} 1 & \alpha & \alpha^2 \\ \alpha^2 & 1 & \alpha \\ \alpha & \alpha^2 & 1 \end{vmatrix}.$$

335. Para sucesivos valores de n calcular el detenrminante de la matriz de Fibonacci de orden (n, n)

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & ... & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & ... & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & ... & 0 & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & ... & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & ... & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

y deducir que se obtiene como valor el término n-ésimo de la sucesión de Fibonacci (2,3,5,8,13,...).

336. Probar que todo polinomio $a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$ puede expresarse como el determinante

$$\begin{pmatrix} x & 0 & 0 & ... & 0 & a_0 \\ -1 & x & 0 & ... & 0 & a_1 \\ 0 & -1 & x & ... & 0 & a_2 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & ... & x & a_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & ... & -1 & a_n \end{pmatrix}$$

337. Si $\mathbf{B}$ se obtiene a partir de $\mathbf{A}$ del tipo $(n, n))$ mediante transformaciones elementales de filas, entonces es falso afirmar que

a) $\det(\mathbf{A}) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \det(\mathbf{B}) = 0$,

b) $\det(\mathbf{A}) = \det(\mathbf{B})$,

c) $\det(\mathbf{A}) = \lambda \det(\mathbf{B})$. para un $\lambda \neq 1$

338. Si $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ y $\mathbf{C}$ son matrices $(n, n))$, entonces

a) $\det(\mathbf{ABC}) = \det(\mathbf{BA}) \det(\mathbf{B}) \det(\mathbf{C})$,

b) $\det(\mathbf{A}+\mathbf{B}) = \det(\mathbf{A})+\det(\mathbf{B})$,

c) $\det(\lambda\mathbf{A}) = \lambda\,\det(\mathbf{A})$.

339. Si desarrollamos el determinante de una matriz $\mathbf{A}$ del tipo (n,n) por los elementos de la fila i-ésima, entonces

a) $\sum_{j=1}^{n}(-1)^{i+j}a_{ij}A_{ij}$

b) $\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+j}a_{ij}A_{ij}$

c) $\sum_{j=1}^{n}(-1)^{i+j}a_{ij}A_{ji}$

340. calcular los determinantes

a) $\begin{vmatrix} \lambda & \lambda & \lambda \\ \lambda & \lambda & \lambda \\ \lambda & \lambda & \lambda \end{vmatrix}$,

b) $\begin{vmatrix} \sin^2 x & \cos^2 x \\ \sin^2 y & \cos^2 y \end{vmatrix}$,

c) $\begin{vmatrix} n! & (n+1)! \\ (n+1)! & (n+2)! \end{vmatrix}$.

341. Resolver la acuación $\begin{vmatrix} 1 & \sin x & -\sin x \\ -\sin x & 1 & 0 \\ \sin x & 0 & 1 \end{vmatrix} = 3.$

342. Si $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ son matrices (n,n), entonces $\det(\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{B}^{t})$ es igual a

a) $\det(\mathbf{A})$ b) $\det(\mathbf{B}^2)\det(\mathbf{A})$ c) $1/\det(\mathbf{A})$

343. Si $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ son matrices del tipo (n,n), entonces $\det(\mathbf{A}^{-1}) = 1/\det(\mathbf{A})$ y $\det(\mathbf{AB}) = \det(\mathbf{A})\,\det(\mathbf{B})$.

344. Si $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ son matrices del tipo (n,n) invertibles, entonces $\det(\mathbf{A}\mathbf{B}^{\top}\mathbf{A}^{-1})$ $= \det(\mathbf{B})$.

345. Si $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ son matrices del tipo (n,n) tales que $\det(\mathbf{AB}) = 0$, entonces $\det(\mathbf{A}) = 0$ o $\det(\mathbf{B}) = 0$.

346. El conjunto de vectores $S = \{\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}\}$ es una base de $\mathbb{R}^3$ si y sólo si el determinante de la matriz cuyas filas son los vectores de S es distinto de 0.

347. Sea f un endomorfismo de $\mathbb{R}^n$ cuya matriz asociada a la base canónica tiene determinante no nulo. Entonces $\text{Nuc}(f) = \{\boldsymbol{0}\}$.

348. La matriz adjunta de una matriz triangular es triangular.

349. Si $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ son matrices del tipo (n, n) tales que $\text{rang}(\mathbf{A}) = \text{rang}(\mathbf{B})$, entonces $\det(\mathbf{A}) = \det(\mathbf{B})$ y recíprocamente.

350. Dadas las matrices $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \alpha \\ 0 & 0 & \alpha & 0 \\ 0 & \alpha & 0 & 0 \\ \alpha & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ y $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}$ con $\alpha \neq 0$, entonces

a) $\det(\mathbf{A}) = \alpha^4$,

b) $\det(\mathbf{A}) = -\det(\mathbf{B})$,

c) $\det(\mathbf{A}+\mathbf{B}) = 0$,

d) la matriz $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}$ es simétrica,

e) $\text{rang}(\mathbf{A}) = \text{rang}(\mathbf{B})$.

351. Dada la matriz $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ tal que $\det(\mathbf{A}) \neq 0$, entonces la matriz $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2b-d & d \\ 2a-c & c \end{pmatrix}$ tiene rango 2.

a) Verdadero, pues $\det(\mathbf{B}) = 2bc - 2ad = -2\det(\mathbf{A}) \neq 0$.

b) Falso, ya que $\text{rang}(\mathbf{B}) < 2$ por ser sus columnas l.d.

c) Verdadero, pues como $\mathbf{B}$ se obtiene haciendo combinaciones lineales a partir de las filas de $\mathbf{A}$, entonces $\det(\mathbf{B}) = \det\mathbf{A} \neq 0$.

352. Dadas dos matrices $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ del tipo (n, n) tales que $\det(\mathbf{A})\ \det(\mathbf{B}) = 1$, entonces $\mathbf{B}$ es la matriz inversa de $\mathbf{A}$.

a) Falso, pues lo único que se puede afirmar es que ambas matrices son inversibles.

b) Verdadero, pues como $\det(\mathbf{B}) = 1/\det(\mathbf{A}) = \det(\mathbf{A}^{-1})$, es $\mathbf{B} = \mathbf{A}^{-1}$.

c) Falso, pues la firmación del enunciado sólo es cierta cuando $\mathbf{B} = \mathbf{A}^*/\det(\mathbf{A})$.

353. Dada la matriz $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & 0 & 2a & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 3 & 4 & 5 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ se verifica que $\text{rang}(\mathbf{A}) = 4$ para todo $a \in \mathbb{R}$.

a) Verdadero, pues para todo $a \in \mathbb{R}$ es $\det(\mathbf{A}) = 1$.

b) Falso, ya que si $a = 0$, entonces $\text{rang}(\mathbf{A}) = 3$.

c) Falso, $\text{rang}(\mathbf{A})$ es siempre inferior a 4 cualquiera que sea el valor de a ya que $\det(\mathbf{A}) = a \det(\mathbf{B})$ con

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 3 & 4 & 5 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

siendo $\det(\mathbf{B}) = 0$.

Formas canónicas

354. Hallando los valores propios decidir si son definidas positivas las formas cuadráticas que tienen por matrices

$$\begin{pmatrix} 3/2 & 1/2 & -1 \\ 1/2 & 3/2 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 10 & -9 \\ -9 & 9 \end{pmatrix}.$$

355. Una matriz es regular si tiene algún valor propio no nulo.

356. La traza de una matriz es igual a la suma de sus valores propios.

357. Si $\mathbf{A}$ es no regular, entonces $\lambda = 0$ es un valor propio.

358. Si $\mathbf{A}$ es cuadrada, y $\lambda = 5$ es un valor propio, el sistema $\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I} = \mathbf{0}$ es compatible determinado.

359. Vectores propios asociados a un mismo valor propio son l.d. Vectores propios asociados distintos valores propios son l.i. El número de valores propios es menor o igual que el grado del polinomio característico.

360. Si $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ son matrices del tipo (n, n), entonces $\mathrm{tr}(\mathbf{A}^{-1}) = 1/\mathrm{tr}(\mathbf{A})$ y $\mathrm{tr}(\mathbf{AB}) = \mathrm{tr}(\mathbf{BA})$.

361. Sea la matriz $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & \alpha & -1 & 1 \end{pmatrix}$. Si $\lambda - 1$ divide a su polinomio característico, hallar α.

362. Todo endomorfismo de un espacio vectorial de dimensión n tiene n valores propios distintos.

363. Si $\mathbf{A}$ es una matriz cuadrada regular y λ es uno de sus valores propios y $\boldsymbol{v}$ es un vector no nulo asociado a λ, entonces

a) $1/\lambda$ es un valor propio de $\mathbf{A}^{-1}$ asociado a $\boldsymbol{v}$.

b) λ^3 es un valor propio de $\mathbf{A}^3$ asociado a $\boldsymbol{v}$.

c) λ es un valor propio de $4\mathbf{A}$ asociado a $4\boldsymbol{v}$.

d) $1/\lambda$ es un valor propio de $\mathbf{A}^\top$ asociado a $\boldsymbol{v}$.

364. Sea $\mathbf{A}$ es una matriz cuadrada de orden 3 tal que $\text{rang}(\mathbf{A}) = 1$ y existe un vector $\boldsymbol{v} \neq \boldsymbol{0}$ tal que $\mathbf{Ax} = \mathbf{x}$. Entonces

a) $\lambda = 0$ es un valor propio de $\mathbf{A}$.

b) $\text{Nuc}(f) = V(0)$ y ambos subespacios tienen dimensión 2.

c) $\mathbf{A}$ no es diagonalizable.

d) $\boldsymbol{v}$ es ortogonal a cualquier solución del sistema $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$.

e) Los valores propios de $\mathbf{A}$ son $\lambda = 1$ y $\lambda = 0$, doble.

365. Sea $\mathbf{A}$ es una matriz cuadrada de orden 3 y $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ vectores propios correspondientes a los valores propios $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, respectivamente. Entonces el vector $\alpha_1\boldsymbol{v}_1+\alpha_2\boldsymbol{v}_2+\alpha_3\boldsymbol{v}_3$ es un vector propio de $\mathbf{A}$ cualesquiera que sean $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$.

a) Falso, porque no existe ningún escalar λ que verifique $\mathbf{Av} = \lambda\mathbf{v}$ para cualesquiera que sean $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$.

b) En general es falso, aunque es cierto cuando $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda$ ya que en este caso cualesquiera que sean $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ se tiene que $\mathbf{Av} = \lambda\mathbf{v}$.

c) Verdadero, pues una combinación lineal de vectores propios de una matriz es siempre un vector propio de dicha matriz.

366. Si $\det(\mathbf{A}) = 0$, entonces $\mathbf{A}$ no es diagonalizable

367. Si $\det(\mathbf{A}) \neq 0$ y $\mathbf{A}$ es diagonalizable, entonces $\mathbf{A}^{-1}$ es diagonalizable.

368. Si $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ son diagonalizables, entonces $\mathbf{A}+\mathbf{B}$ es diagonalizable.

369. Si $\mathbf{A}$ es diagonalizable, entonces $\mathbf{A}^k$ es diagonalizable y los valores propios de ambas matrices coinciden.

370. Todo endomorfismo de un espacio vectorial de dimensión n que tenga menos de n valores propios distintos no es diagonalizable.

371. Sea f un endomorfismo de $\mathbb{R}^3$ tal que para ciertos vectores $\boldsymbol{u}$ y $\boldsymbol{v}$ no nulos de $\mathbb{R}^3$ es $f(\boldsymbol{u}) = 2\boldsymbol{u}$ y $f(\boldsymbol{v}) = 3\boldsymbol{v}$. Entonces si $\mathbf{A}$ es la matriz asociada a f respecto de una cierta base, se puede afirmar que $\mathbf{A}$ es diagonalizable.

a) Falso, pues no tenemos datos suficientes para garantizarlo.

b) En general es falso, aunque es cierto si $\det(\mathbf{A}) = 0$.

c) Verdadero, pues los valores propios de f coinciden con los de su matriz asociada $\mathbf{A}$ y como, en este caso son distintos, $\mathbf{A}$ es diagonalizable.

372. Sea $\mathbf{A}$ una matriz simétrica de orden 3 tal que $\lambda_1 = 1$ y $\lambda_2 = 1 - 2$ son valores propios de $\mathbf{A}$ y $\mathrm{tr}(\mathbf{A}) = 0$. Entonces se verifica que $\det(\mathbf{A}^7) = (-2)^7$.

a) Verdadero, pues $\det(\mathbf{A}) = (-2)$ y $\det(\mathbf{A}^7) = (\det(\mathbf{A}))^7 = (-2)^7$.

b) Falso, pues no hay información suficiente para hallar $\mathbf{A^7}$ y, por tanto, no se puede calcular $\det(\mathbf{A}^7)$.

c) Verdadero, ya que $\mathbf{A}$ es diagonalizable y, por tanto,

$$\mathbf{A}^7 = \mathbf{P}\mathbf{D}^7\mathbf{P}^{-1} = \mathbf{P}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (-2)^7 \end{pmatrix}\mathbf{P}^{-1}$$

de donde $\det(\mathbf{A}^7) = \det(\mathbf{P})(-2)^7\det(\mathbf{P}^{-1}) = (-2)^7$.

un espacio vectorial de dimensión n que tenga menos de n valores propios distintos no es diagonalizable.

373. Si λ y μ son valores propios de un endomorfismo f, entonces $V(\lambda) \cap V(\mu) = \{\boldsymbol{0}\}$.

374. Todo endomorfismo diagonalizable tiene al menos un valor propio.

375. Toda matriz del tipo (n, n) es diagonalizable si tiene n valores propios distintos.

376. Averiguar si la matriz $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 2 & 3 & 0 \\ 6 & -6 & 7 \end{pmatrix}$ es diagonalizable.

377. Hallar los valores y vectores propios de la matriz $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} i & 1 \\ 2 & -i \end{pmatrix}$.

378. Probar que los valores propios de una matriz triangular son los elementos de su diagonal.

379. Probar que una matriz diagonalizable con un único valor propio es de la forma $\lambda\mathbf{I}$ y concluir como consecuencia que la matriz $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & i \end{pmatrix}$ no es diagonalizable.

380. Probar que el endomorfismo f de $M_{n,n}(\mathbb{R})$ definido por $f(\mathbf{A}) = \mathbf{A}^\top$ tiene solamente 1 y -1 como valores propios y hallar los correspondientes vectores propios

381. Sea la matriz $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & 1 & d \\ b & 2 & e \\ c & -1 & f \end{pmatrix}$ tal que admite como vectores propios (1,1,0), $(0, 1, -1$ y $(-1, 0, 2)$. Hallar $\mathbf{A}$ y su forma diagonal.

382. Si (1,0,0), (1,1,0), (0,1,0) y (0,0,1) son vectores propios de un endomorfismo f de $\mathbb{R}^3$, hallar todos los vectores propios propios sabiendo que no todo vector es vector propio.

383. Sean $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ los valores propios (distintos o no) de una matriz $\mathbf{A} \in M_{(n,n)}(\mathbb{R})$. Entonces la traza de $\mathbf{A}$ es

    a) La suma de todos ellos.

    b) La suma de todos los productos tomados dos a dos.

    c) El producto de todos ellos.

384. Sea $\mathbf{A} \in M_{(n,n)}(\mathbb{R})$ y sea su polinomio característico $p_{\mathbf{A}}(\lambda) = \det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})$. Si $\mathbf{B}$ es la matriz transpuesta de $\mathbf{A}$, entonces

    a) $p_{\mathbf{A}} \neq p_{\mathbf{B}}$, en general

    b) $p_{\mathbf{A}} = p_{\mathbf{B}}$, sólo si n es impar.

    c) $p_{\mathbf{A}} = p_{\mathbf{B}}$.

385. La matriz $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{pmatrix}$ tiene como valor propio

a) $\lambda = a$.

b) $\lambda = a + b + c$.

c) $\lambda = abc$.

386. Para qué valores reales de a y b la matriz $\begin{pmatrix} 0 & i-1 \\ a+bi & 2 \end{pmatrix}$ tiene sólamente valores propios reales.

a) Para todo a y b.

b) $a = b = 1$.

c) $a = b \leq 1/2$.

387. La matriz $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix}$, con a y b reales, tiene como valores propios

a) $a - 2b$, $a - b$ y $a + b$.

b) $a - 2b$, $a + b$ y $a + b$.

c) $a + 2b$, $a - b$ y $a - b$.

388. El polinomio característico de la matriz $\mathbf{A} = (a_{ij}) \in M_{(n,n)}(\mathbb{R})$, con $a_{i,j} = 1$ si $i \neq j$ y $a_{i,j} = 0$ si $i = j$ es

a) $(-1)^n(\lambda - n + 1)(\lambda + 1)^{n-1}$.

b) $(-1)^n(\lambda - n + 1)(\lambda - 1)^{n-1}$.

c) $(-1)^n(\lambda + n - 1)(\lambda + 1)^{n-1}$.

389. Averiguar cuáles de las siguientes afirmaciones son correctas.

a) 0 es valor propio de $\mathbf{A} \Leftrightarrow \mathbf{A}$ es no regular.

b) Toda matriz real tiene valores propios reales.

c) La ecuación característica de una matriz cuadrada de orden 2 es $\lambda^2 - \mathrm{tr}(\mathbf{A})\lambda + \det(\mathbf{A}) = 0$.

390. Dada la matriz $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, la ecuación matricial

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

proporciona

a) un sólo vector l.i. como base de $V(-1)$.

b) dos vectores l.i. como base de $V(-1)$.

c) dos vectores l.i. como base de $V(1)$.

391. Dada la matriz $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} i & 1+i \\ -1+i & 2i \end{pmatrix}$, su polinomio característico es

a) $\lambda^2 - 3\lambda i$

b) $-\lambda^2 + 3\lambda i$

c) $\lambda^2 - 3\lambda$

392. Si $\mathbf{A} \in M_{(n,n)}(\mathbb{R})$ averiguar cuáles de las siguientes afirmaciones son correctas.

a) $\mathbf{A}$ es regular si y sólo si tiene algún valor propio no nulo.

b) $\mathbf{A}$ y $\mathbf{A}^\top$ pueden tener distinta ecuación característica.

c) la traza de $\mathbf{A}$ es la suma de sus valores propios.

393. Sea λ un valor propio de una matriz regular $\mathbf{A}$. Entonces

a) $\text{rang}(\mathbf{A} - \lambda\, \mathbf{I}) = \text{rang}(\mathbf{A})$.

b) $\text{rang}(\mathbf{A} - \lambda\, \mathbf{I}) < \text{rang}(\mathbf{A})$.

c) ninguna de las dos anteriores.

394. Dada la matriz $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Entonces para el valor propio 1 su orden de multiplicidad y la dimensión de $V(1)$ son, respectivamente

a) 4 y 3.

b) 3 y 3.

c) 4 y 2.

395. Sea f una aplicación lineal entre los espacios vectoriales E y F. Para poder hablar de los posibles valores propios de f

a) f debe ser sobreyectiva.

b) f debe ser endomorfismo.

c) f debe ser inyectiva.

396. Sea f un endormorfismo de E e.v.s.K de dimensión n. Entonces f es diagonalizable sólo si

a) E tiene una base formada por vectores propios de f.

b) f tiene n valores propios distintos.

c) f tiene un sólo valor propio de multiplicidad 1.

397. Sea f un endormorfismo biyectivo de E e.v.s.K. Si $\lambda \neq 0$ es un valor propio de f, entonces

a) λ es valor propio de f^{-1}.

b) $-\lambda$ es valor propio de f^{-1}.

c) $1/\lambda$ es valor propio de f^{-1}.

398. Un vector $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$ es vector propio de un endormorfismo f asociado al valor propio λ si se cumple que $f(\boldsymbol{x}) = \lambda\boldsymbol{x}$. Si en lugar de esta igualdad, se cumple que $f(-\boldsymbol{x}) = \lambda\boldsymbol{x}$, entonces

a) $-\boldsymbol{x}$ es vector propio de f asociado a λ.

b) $\boldsymbol{x}$ es vector propio de f asociado a $-\lambda$.

c) $-\boldsymbol{x}$ es vector propio de f asociado a $-\lambda$.

399. Un endomorfismo sobreyectivo

a) no tiene un valor propio nulo,

b) tiene a 0 como valor propio,

c) puede tener a 0 como valor propio.

400. Si para un valor propio λ de un endomorfismo f con orden de multiplicidad 2 sólo existe un vector propio asociado l.i., entonces

a) f es diagonalizable,

b) para saber si f es diagonalizable hay que estudiar los otros valores propios de f,

c) f no es diagonalizable.

401. Sean $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{y}$ vectores propios de un endormorfismo f. Entonces

a) $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}$ es también un vector propio si $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} \neq \boldsymbol{0}$,

b) $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}$ es también un vector propio,

ac) $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}$ no es un vector propio pues $\{\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}\}$ es l.d..

402. Sea f un endomorfismo de E y λ un valor propio asociado. Entonces $V(\lambda)$ es

a) el conjunto de todos los vectores propios asociados a λ,

b) el conjunto de todos los vectores propios asociados a λ junto con el vector $\boldsymbol{0}$,

b) $\mathrm{Nuc}(\lambda \mathbf{I})$.

403. Cuál de los siguientes vectore es vector propio de la matriz $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

a) $(2, 1)$,

b) $(1, 1)$,

c) $(2, -2)$,

404. Sea la matriz $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Entonces

a) $\mathbf{A}$ es diagonalizable si $(a - c)^2 + 4dc > 0$,

b) $\mathbf{A}$ no es diagonalizable si $(a - d)^2 + 4bc < 0$,

c) $\mathbf{A}$ es diagonalizable si $(a - d)^2 - 4bc > 0$,

405. Si $\mathbf{A}$ es una matriz cuadrada de orden n diagonalizable con un único valor propio k, entonces

a) $\mathbf{A}$ es una matriz diagonal, no necesariamente escalar,

b) $\mathbf{A}$ es una matriz diagonal,

c) como $\mathbf{A} = k(\mathbf{PIP}^{-1})$, entonces $\mathbf{A} = \mathrm{k}\mathbf{I}$.

406. Sea f un endomorfismo de un espacio vectorial E. Entonces

a) la matriz de f respecto de una cierta base B es diagonal si y sólo si B está formada por vectores propios de f,

b) f es diagonalizable si existe una base de E formada por vectores propios,

c) f es diagonalizable si y sólo si el polinomio característico es producto de factores de primer grado.

407. Sea f un endomorfismo de un espacio vectorial E de dimensión n.

a) si $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ son valores propios distintos de f y $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_k$ son vectores propios asociados a ellos, entonces $\{\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_k\}$ es l.i.,

b) si el polinomio característico de f tiene n soluciones distintas, entonces f es diagonalizable

c) si $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ son valores propios de f y $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_k$ son vectores propios asociados a ellos, entonces $\{\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_k\}$ es l.i.,

408. La matriz $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & b \\ 3 & 0 & a \end{pmatrix}$ es diagonalizable para

a) $a = -1$, $b = 0$,

b) $a \neq 1, -1$,

c) $a = 1$, $b \neq 0$.

409. Sean las matrices $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$, $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{y} = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix}$. Calcular $\mathbf{Ax}$ y $\mathbf{Ay}$, deduce que $\boldsymbol{x}$ y $\boldsymbol{y}$ son vectores propios de $\mathbf{A}$, hallando sus valores propios asociados, calcular el vector $\mathbf{A}^{100}\mathbf{x}$ y hallar una fórmula para $\mathbf{A}^n$.

410. Probar que si $\mathbf{A}$ es diagonalizable y $\mathbf{A}^2 = \mathbf{0}$, entonces $\mathbf{A} = \mathbf{0}$.

411. Hallar la forma de Jordan de la matriz $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.