CUADERNO X

MOVIMIENTOS EN DIMENSION 2 Y 3

Miguel A. Sainz, Joan Serarols, Anna M. Pérez
Dep. de Informática y Matemática Aplicada
Universidad de Girona

RESUMEN: A partir del concepto de transformación geométrica se estudian los movimientos en el plano y en espacio, junto con otras transformaciones como las homotecias semejanzas y dilataciones, obteniéndose sus expresiones matriciales en coordenadas homogéneas y sus ecuaciones explícitas.

X.1.- TRANSFORMACIONES GEOMETRICAS

Sea el espacio euclídeo n-dimensional E_n con espacio vectorial asociado $\mathbf{R}^n$ y con un sistema de referencia cartesiano $(O;\boldsymbol{e}_1,...,\boldsymbol{e}_n)$. Una ***transformación geométrica*** en E_n es una aplicación de E_n en E_n tal que si $X(x_1,...,x_n)\in E_n$, su imagen es el punto $X'(x'_1,...,x'_n)\in E_n$ dado por

$$\begin{cases} x'_1 = a_{11}x_1+...+a_{1n}x_n+b_1 \\ \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ x'_n = a_{n1}x_1+...+a_{nn}x_n+b_n \end{cases}$$

que en forma matricial es

$$\mathbf{x}'=\mathbf{A}\mathbf{x}+\mathbf{b}$$

siendo **A** la matriz de la transformación. Obviamente la transformacion compuesta de dos transformaciones $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}+\mathbf{b}$ y $\mathbf{x}' = \mathbf{B}\mathbf{x}+\mathbf{c}$ es otra transformación de ecuación

$$\mathbf{x}'' = \mathbf{B}\mathbf{x}'+\mathbf{c} = \mathbf{A}(\mathbf{B}\mathbf{x}+\mathbf{c})+\mathbf{b} = \mathbf{A}\mathbf{B}\mathbf{x}+(\mathbf{A}\mathbf{c}+\mathbf{b})$$

y matriz **AB**.

Si el punto $P(p_1,...,p_n)$, tiene por imagen el punto $P'(p'_1,...,p'_n)$ y $Q(q_1,...,q_n)$, tiene por imagen el punto $Q'(q'_1,...,q'_n)$, entonces

$$\begin{cases} p'_1 = a_{11}p_1+...+a_{1n}p_n+b_1 \\ \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ p'_n = a_{n1}p_1+...+a_{nn}p_n+b_n \end{cases} \quad \text{y} \quad \begin{cases} q'_1 = a_{11}q_1+...+a_{1n}q_n+b_1 \\ \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ q'_n = a_{n1}q_1+...+a_{nn}q_n+b_2 \end{cases}$$

luego

$$\begin{cases} q'_1 - p'_1 = a_{11}(q_1 - p_1) + \ldots + a_{1n}(q_n - p_n) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ q'_n - p'_n = a_{n1}(q_1 - p_1) + \ldots + a_{nn}(q_n - p_n) \end{cases}$$

por lo que la relación entre las componentes de los vectores $\overrightarrow{PQ}$ y $\overrightarrow{P'Q'}$ es

$$\overrightarrow{P'Q'} = \mathbf{A}\overrightarrow{PQ}$$

Otra forma matricial para expresar una transformación geométrica es

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ \ldots \\ x'_n \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} \ldots a_{1n} & b_1 \\ \cdots\cdots\cdots & \ldots \\ a_{n1} \ldots a_{nn} & b_n \\ 0 \ \ldots \ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \ldots \\ x_n \\ 1 \end{pmatrix}$$

o más brevemente

$$\mathbf{x}'_h = \mathbf{A}_h \mathbf{x}_h$$

que se denomina ***expresión matricial en coordenadas homogéneas***.

Si se cambia del sistema de referencia cartesiano $(O;\boldsymbol{e}_1,\ldots,\boldsymbol{e}_n)$ a otro sistema de referencia cartesiano $(P;\boldsymbol{u}_1,\ldots,\boldsymbol{u}_n)$, la matriz del cambio de base **M** será ortogonal. Si las coordenadas de un punto son $X(x_1,\ldots,x_n)$ en el sistema antiguo y $X(y_1,\ldots,y_n)$ en el sistema nuevo, la fórmula del cambio es

$$\mathbf{x} = \mathbf{M}\mathbf{y} + \mathbf{p}$$

que también puede expresarse en coordenadas homogéneas como

$$\mathbf{x}_h = \mathbf{M}_h \mathbf{y}_h \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{y}_h = \mathbf{M}_h^{-1} \mathbf{x}_h$$

donde la matriz del cambio de base tiene la forma homogénea

$$\mathbf{M}_h = \begin{pmatrix} m_{11} \ldots m_{1n} & p_1 \\ \cdots\cdots\cdots & \ldots \\ m_{n1} \ldots m_{nn} & p_n \\ 0 \ \ldots \ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

y como **M** es ortogonal, la inversa de $\mathbf{M}_h$ es

$$\mathbf{M}_h^{-1} = \begin{pmatrix} m_{11} \ldots m_{n1} & -m_{11}p_1 - \ldots - m_{n1}p_n \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \ldots \\ m_{1n} \ldots m_{nn} & -m_{1n}p_1 - \ldots - m_{nn}p_n \\ 0 \ \ldots \ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Realizando el cambio de sistema de referencia $\mathbf{y}_h = \mathbf{M}_h{}^{-1}\mathbf{x}_h$ e $\mathbf{y'}_h = \mathbf{M}_h{}^{-1}\mathbf{x'}_h$, la ecuación matricial en coordenadas homogéneas de la transformación geométrica $\mathbf{y'}_h = \mathbf{A}_h\mathbf{y}_h$ pasa a ser

$$\mathbf{x'}_h = \mathbf{M}_h\mathbf{A}_h\mathbf{M}_h{}^{-1}\mathbf{x}_h$$

que significa que del punto $X(x_1,...,x_n)$ se pasa, mediante el cambio del sistema de referencia $(O;\boldsymbol{e}_1,...,\boldsymbol{e}_n)$ al $(P;\boldsymbol{u}_1,...,\boldsymbol{u}_n)$, a $X(y_1,...,y_n)$ al que se la aplica la transformación geométrica para obtener el punto $X'(y'_1,...,y'_n)$ que, mediante el cambio del sistema de referencia $(P;\boldsymbol{u}_1,...,\boldsymbol{u}_n)$ al $(O;\boldsymbol{e}_1,...,\boldsymbol{e}_n)$, pasa a ser $X'(x'_1,...,x'_n)$.

Aquellas transformaciones cuya matriz $\mathbf{A}$ es ortogonal, es decir $\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^t$ se denominan ***movimientos***. Los movimientos conservan el producto escalar ya que si $\boldsymbol{u}'$ y $\boldsymbol{v}'$ son los vectores transformados de $\boldsymbol{u}$ y $\boldsymbol{v}$, como la matriz de producto escalar es la matriz unidad, será

$$< \boldsymbol{u}',\boldsymbol{v}'> = < \mathbf{A}\boldsymbol{u},\mathbf{A}\boldsymbol{v}> = (\mathbf{A}\boldsymbol{u})^t\mathbf{I}(\mathbf{A}\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{u}^t\mathbf{A}^t\mathbf{I}\mathbf{A}\boldsymbol{v} = \boldsymbol{u}^t\mathbf{I}\boldsymbol{v} = < \boldsymbol{u},\boldsymbol{v}>$$

Por ello conservan también las distancias y los ángulos. Además

$$\det(\mathbf{A}) = \det(\mathbf{A}^t) = \det(\mathbf{A}^{-1}) = 1/\det(\mathbf{A}) \;\Rightarrow\; \det(\mathbf{A}) = \pm 1.$$

La composición de dos movimientos de matrices $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ es también un movimiento ya que su matriz $\mathbf{AB}$ verifica que $(\mathbf{AB})^t = \mathbf{B}^t\mathbf{A}^t = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1} = (\mathbf{AB})^{-1}$.

Estudiaremos a continuación los tipos más interesantes de transformaciones geométricas en los espacios euclídeos de dimensión 2 y 3.

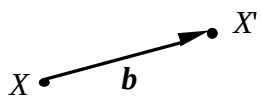
X.2.- TRANSFORMACIONES GEOMÉTRICAS EN DOS DIMENSIONES.

Veamos, en primer lugar, las transformaciones geométricas que conservan las distancias y los ángulos, es decir, los movimientos.

a) ***Movimientos*** Según las matrices que verifican la condición $\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^t$ se encuentran los siguientes tipos de movimientos.

a1) ***Traslación*** de vector $\boldsymbol{b} = (b_1,b_2)$ es el movimiento $T_{\boldsymbol{b}}$ de matrizn coordenadas homogéneas

$$\mathbf{T}_h = \begin{pmatrix} 1 & 0 & b_1 \\ 0 & 1 & b_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

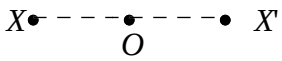


luego está definido por las ecuaciones

$$\begin{cases} x'_1 = x_1+b_1 \\ x'_2 = x_2+b_2 \end{cases}$$

a2) ***Simetría central*** respecto del origen $O(0,0)$ es el movimiento S_O de matriz en coordenadas homogéneas

$$\mathbf{S}_h = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

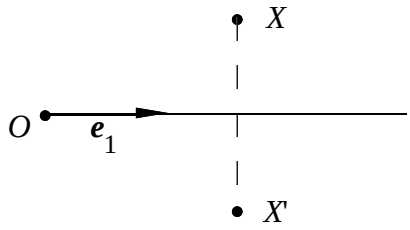


luego está definido por las ecuaciones

$$\begin{cases} x'_1 = -x_1 \\ x'_2 = -x_2 \end{cases}$$

a3) ***Simetría axial*** respecto de la recta que contiene al origen O y tiene como vector director $\boldsymbol{e}_1$ es el movimiento S_r de matriz en coordenadas homogéneas

$$\mathbf{S}_h = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

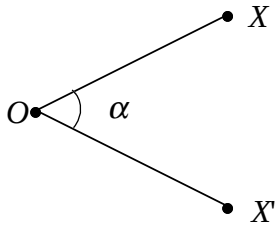


luego está definido por las ecuaciones

$$\begin{cases} x'_1 = x_1 \\ x'_2 = -x_2 \end{cases}$$

a4) ***Giro*** de centro el origen O (0,0) y ángulo α es el movimiento $G_{O,\alpha}$ de matriz en coordenadas homogéneas

$$_h = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\text{sen}\,\alpha & 0 \\ \text{sen}\,\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



luego está definido por las ecuaciones

$$\begin{cases} x'_1 = x_1 \cos\alpha - x_2 \sin\alpha \\ x'_2 = x_1 \sin\alpha + x_2 \cos\alpha \end{cases}$$

Ejercicios

X.1.- Hallar las ecuaciones de una traslación, una simetría central, una simetría axial y un

giro en coordenadas homogéneas.

X.2.- En una transformación geométrica un punto se denomina *punto doble* si coincide con su punto imagen. Hallar si existen los puntos dobles de una traslación, un giro de centro el origen, una simetria de centro el origen y una simetría axial respecto del eje $\boldsymbol{e}_1$.

X.3.- Hallar la transformada de la recta $3x+4y = 24$ por el giro de centro el origen y ángulo $\pi/3$. Hallar la transformada de una recta en una traslación, un giro de centro el origen, una simetria de centro el origen y una simetría axial respecto del eje $\boldsymbol{e}_1$.

X.4.- Dadas las circunferencias C_1: $x^2+y^2-4x+6y+9 = 0$ y C_2: $x^2+y^2-8x-6y+21 = 0$, hallar las componentes del vector traslación que transforma una en otra.

La generalización de los movimientos anteriores al caso que sus centros o ejes no sean los coordenados, se obtiene del modo que se expone a continuación.

a5) Sea el punto $C(c_1,c_2)$. Para hallar las ecuaciones de la simetría con respecto al centro C basta hacer el cambio del sistema de referencia $(O;\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2)$ al $(C;\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2)$, El resultado es

$$\mathbf{x}'_h = \mathbf{M}_h\mathbf{S}_h\mathbf{M}_h^{-1}\mathbf{x}_h$$

donde

$$\mathbf{M}_h\mathbf{S}_h\mathbf{M}_h^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & c_1 \\ 0 & 1 & c_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & c_1 \\ 0 & 1 & c_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2c_1 \\ 0 & -1 & 2c_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

luego tiene por ecuaciones

$$\begin{cases} x'_1 = -x_1+2c_1 \\ x'_2 = -x_2+2c_2 \end{cases}$$

a6) Sea la recta r que pasa por el punto $P(p_1,p_2)$ y tiene como vector director unitario $\boldsymbol{u}_1 = (u_{11},u_{21})$. Para hallar las ecuaciones de la simetría axial con respecto a la recta r basta hacer el cambio del sistema de referencia $(O;\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2)$ al $(P;\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2)$, siendo $\boldsymbol{u}_2 = (u_{12},u_{22})$ un vector unitario ortogonal a $\boldsymbol{u}_1$. El resultado es

$$\mathbf{x}'_h = \mathbf{M}_h\mathbf{S}_h\mathbf{M}_h^{-1}\mathbf{x}_h$$

donde

$$\mathbf{M}_h\mathbf{S}_h\mathbf{M}_h^{-1} = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & p_1 \\ u_{21} & u_{22} & p_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & p_1 \\ u_{21} & u_{22} & p_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} =$$

$$= \begin{pmatrix} u_{11}^2-u_{12}^2 & u_{11}u_{21}-u_{12}u_{22} & -(u_{11}^2-u_{12}^2)p_1-(u_{11}u_{21}-u_{12}u_{22})p_2+p_1 \\ u_{11}u_{21}-u_{12}u_{22} & u_{21}^2-u_{22}^2 & -(u_{11}u_{21}-u_{12}u_{22})p_1-(u_{21}^2-u_{22}^2)p_2+p_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

luego tiene por ecuaciones

$$\begin{cases} x'_1 = (u_{11}^2-u_{12}^2)\,x_1+(u_{11}u_{21}-u_{12}u_{22})\,x_2-(u_{11}^2-u_{12}^2)p_1-(u_{11}u_{21}-u_{12}u_{22})p_2+p_1 \\ x'_2 = (u_{11}u_{21}-u_{12}u_{22})\,x_1+(u_{21}^2-u_{22}^2)\,x_2-(u_{11}u_{21}-u_{12}u_{22})p_1-(u_{21}^2-u_{22}^2)p_2+p_2 \end{cases}$$

a7) Sea el punto $C(c_1,c_2)$. Para hallar las ecuaciones del giro con respecto al centro C basta hacer el cambiar del sistema de referencia $(O;\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2)$ al $(C;\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2)$. El resultado es

$$\mathbf{x}'_h = \mathbf{M}_h\mathbf{G}_h\mathbf{M}_h{}^{-1}\mathbf{x}_h$$

donde

$$\mathbf{M}_h\mathbf{G}_h\mathbf{M}_h^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & c_1 \\ 0 & 1 & c_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & c_1 \\ 0 & 1 & c_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} =$$
$$= \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & -c_1\cos\alpha+c_2\sin\alpha+c_1 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & -c_1\sin\alpha-c_2\cos\alpha+c_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

luego tiene por ecuaciones

$$\begin{cases} x'_1 = x_1\cos\alpha-x_2\sin\alpha-c_1\cos\alpha+c_2\sin\alpha+c_1 \\ x'_2 = x_1\sin\alpha+x_2\cos\alpha-c_1\sin\alpha-c_2\cos\alpha+c_2 \end{cases}$$

Ejercicios

X.5.- Hallar ecuación de la recta transformada de r: $3x+y = 3$ mediante un giro de centro $C(2,2)$ y ángulo $\pi/4$ y mediante una simetría axial respecto de la recta $x+y+1=0$.

X.6.- Hallar el producto de una simetría axial respecto de la recta $x = 4$ y otra simetría axial respecto de la bisectriz del primer cuadrante y hallar las coordenadas del punto transformado del $X(2,1)$.

X.7.- Hallar el producto de cuatro simetrías axiales respecto de la rectas respectivas r_1: $y = 0$, r_2: $x-y+4 = 0$, r_1: $x+4 = 0$, r_1: $x = 0$.

X.8.- Hallar el producto de dos simetrías axiales sabiendo que la primera transforma el punto $X(-1,2)$ en el $P'(4,0)$ y la segunda transforma X' en el $X''(4,-3)$. Aplicar la

transfromación resultante a la circunferencia de centro $C(-1,2)$ y radio 3.

X.9.- Hallar las coordenadas del centro del giro producto de un giro de centro el origen y ángulo $\pi/4$ con el giro de centro $P(4,4)$ y ángulo $\pi/2$. Hallar las coordenadas del transformado del punto $Q(4,0)$ en el giro producto.

X.10.- Hallar las ecuaciones matriciales de los siguientes movimientos:

a) Giro de centro $C(1,0)$ y ángulo $3\pi/4$.

b) Giro de ángulo $3\pi/4$. que lleva el punto $X(2,1)$ al $X'(1,0)$.

c) El producto de los dos movimientos anteriores.

X.11.- Hallar

a) El producto de dos giros del mismo centro y distintos ángulos.

b) El producto de una traslación y un giro.

c) El producto de dos simetrías respecto del mismo centro y respecto centros distintos.

d) El producto de dos simetrías axiales respecto de la misma recta centro, respecto rectas distintas y paralelas y respecto de rectas que se cortan.

e) El producto de dos giros respecto centros distintos.

X.12.- Hallar la simetría con respecto a un centro $C(c_1,c_2)$ como producto de una traslación de vector $\overrightarrow{CO} = (-c_1,-c_2)$, de ecuación $\mathbf{x}' = \mathbf{I}\mathbf{x}+(-\mathbf{c})$, con una simetría de centro el origen O, de ecuación $\mathbf{x}'' = -\mathbf{I}\mathbf{x}'$, y con una traslación de vector $\overrightarrow{OC} = (c_1,c_2)$, de ecuación $\mathbf{x}''' = \mathbf{I}\mathbf{x}''+\mathbf{c}$.

X.13.- Hallar todos los movimientos que transforman $X(1,0)$ en $X'(2,1)$ e $Y(0,1)$ en $Y'(1,0)$, indicando los elementos geométricos que los definen.

X.14.- Estudiar los siguientes movimientos, hallando su tipo, los elementos geométricos que los definen y los puntos dobles:

$$M_1: \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$M_2: \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$M_3 = M_2 \circ M_1 \qquad M_4 = M_1 \circ M_2$$

b) ***Homotecia***. Una homotecia de razón $r \neq 0$ es una transformación geométrica de matriz en coordenadas homogéneas

$$\mathbf{H}_h = \begin{pmatrix} r & 0 & 0 \\ 0 & r & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

El determinante de $\mathbf{H}$ es $\det(\mathbf{H}) = r^2$. Si $r > 0$ la homotecia se llama directa y si $r < 0$ se denomina inversa; si $r = 1$ se trata de la transformación idéntica y si $r = -1$ se trata de una simetría de centro el origen. La homotecia no conserva el producto escalar ya que si $\boldsymbol{u}'$ y $\boldsymbol{v}'$ son los vectores transformados de $\boldsymbol{u}$ y $\boldsymbol{v}$, como la matriz de producto escalar es la matriz unidad, será

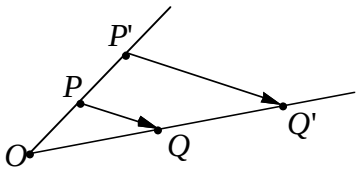
$$< \boldsymbol{u}',\boldsymbol{v}'> = < \mathbf{H}\boldsymbol{u},\mathbf{H}\boldsymbol{v}> = (\mathbf{H}\boldsymbol{u})^t\mathbf{I}(\mathbf{H}\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{u}^t\mathbf{H}^t\mathbf{I}\mathbf{H}\boldsymbol{v} = \boldsymbol{u}^t r^2\mathbf{I}\boldsymbol{v} = r^2 < \boldsymbol{u},\boldsymbol{v}>$$

Por ello no conserva las distancias pero si conserva los ángulos. Una homotecia de centro el origen está definida por

$$\begin{cases} x'_1 = rx_1 \\ x'_2 = rx_2 \end{cases}$$

Si el punto P se transforma en el P' y el punto Q en el Q', la relación entre los vectores $\overrightarrow{PQ}$ y $\overrightarrow{P'Q'}$ es

$$\overrightarrow{P'Q'} = r\overrightarrow{PQ}$$



Dado el punto $C(c_1,c_2)$, para hallar las ecuaciones de la homotecia con respecto al centro C basta hacer el cambio del sistema de referencia $(O;\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2)$ al $(C;\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2)$. El resultado es

$$\mathbf{x}'_h = \mathbf{M}_h\mathbf{H}_h\mathbf{M}_h^{-1}\mathbf{x}_h$$

donde

$$\mathbf{M}_h\mathbf{H}_h\mathbf{M}_h^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & c_1 \\ 0 & 1 & c_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} r & 0 & 0 \\ 0 & r & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & c_1 \\ 0 & 1 & c_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} r & 0 & -rc_1+c_1 \\ 0 & r & -rc_2+c_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

luego tiene por ecuaciones

$$\begin{cases} x'_1 = rx_1 - rc_1 + c_1 \\ x'_2 = rx_2 - rc_2 + c_2 \end{cases}$$

c) ***Semejanza*** es la composición de una homotecia con un movimiento. De las propiedades de ambos se deducen que el determinante de su matriz es igual a r^2 y que las semejanzas conservan los ángulos.

d) ***Contracciones y dilataciones a partir del origen en las direcciones de los ejes***. Se denominan también cambios de escala y son transformaciones geométricas de matriz en coordenadas homogéneas

$$\mathbf{A}_h = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

con los coeficientes a y b distintos de 0. Los coeficientes en valor absoluto mayores que 1 dilatan y los menores contraen en un sentido o en otro respecto de O dependiendo del signo de a y b. Al igual que en las anteriores transformaciones se hallan las ecuaciones matriciales, o desarrolladas, para contracciones o dilataciones en direcciones distintas de los ejes a partir de un punto que no sea el origen.

Ejercicios

X.15.- Demostrar que en una homotecia, el centro es un punto doble, que una recta se transforma en otra recta paralela a ella y que toda recta que pasa por el centro se transforma en si misma.

X.16.- Demostrar que el producto de dos homotecias del mismo centro y razones r y r' es otra homotecia del mismo centro y razón rr' y que el producto de dos homotecias de centros distintos y razones r y r' es otra homotecia de razón rr'.

X.17.- Demostrar que en una homotecia si P' es el transformado del punto P, entonces el centro está alineado con P y P' y entre P y P' si $r < 0$.

X.18.- Dado el triángulo de vértices $P(1,2)$, $Q(2,-1)$ y $R(-3,4)$, hallar el triángulo transformado mediante una homotecia de razón 1/2 y centro $C(1,1)$ y un giro del mismo centro y ángulo π. Dibujar su transformado mediante una dilatación-contracción de parámetros

1) $a = 2, b = 2$ 2) $a = 0.5, b = 0.8$ 3) $a = 2, b = -2$ 4) $a = 3, b = -0.5$

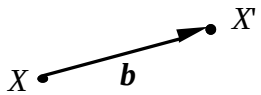
X.3.- TRANSFORMACIONES GEOMÉTRICAS EN TRES DIMENSIONES.

Veamos, en primer lugar, los movimientos, es decir, las transformaciones geométricas que conservan las distancias y los ángulos.

a) ***Movimientos*** Según las matrices que verifican la condición $\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^t$, se encuentran los siguientes tipos de movimientos.

a1) ***Traslación*** de vector $\boldsymbol{b} = (b_1,b_2,b_3)$ es el movimiento $T_{\boldsymbol{b}}$ de matriz en coordenadas homogéneas

$$\mathbf{T}_h = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

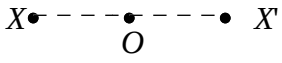


luego está definido por las ecuaciones

$$\begin{cases} x'_1 = x_1 + b_1 \\ x'_2 = x_2 + b_2 \\ x'_3 = x_3 + b_3 \end{cases}$$

a2) ***Simetría central*** respecto del origen $O(0,0,0)$ es el movimiento S_O de matriz en coordenadas homogéneas

$$\mathbf{S}_h = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

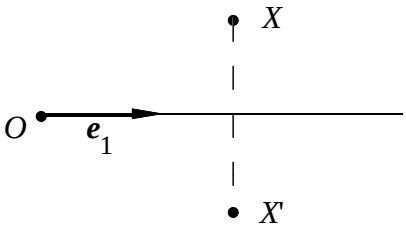


luego está definido por las ecuaciones

$$\begin{cases} x'_1 = -x_1 \\ x'_2 = -x_2 \\ x'_3 = -x_3 \end{cases}$$

a3) ***Simetría axial*** respecto de la recta que contiene al origen O y tiene como vector director $\boldsymbol{e}_1$ es el movimiento S_r de matriz en coordenadas homogéneas

$$\mathbf{S}_h = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

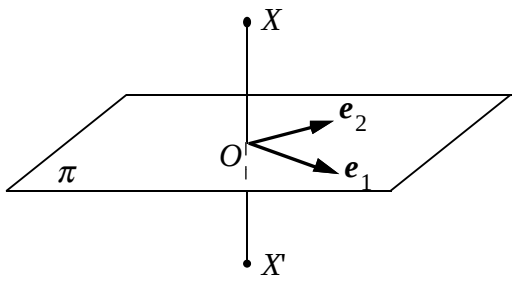


luego está definido por las ecuaciones

$$\begin{cases} x'_1 = x_1 \\ x'_2 = -x_2 \\ x'_3 = -x_3 \end{cases}$$

a3) ***Simetría especular*** respecto del plano π que contiene al origen y tiene como vectores directores $\boldsymbol{e}_1$ y $\boldsymbol{e}_2$ es el movimiento S_π de matriz en coordenadas homogéneas

$$\mathbf{S}_h = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

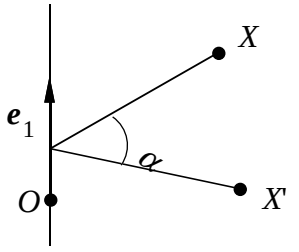


luego está definido por las ecuaciones

$$\begin{cases} x'_1 = x_1 \\ x'_2 = x_2 \\ x'_3 = -x_3 \end{cases}$$

a4) ***Giro*** de eje la recta que pasa por el origen y tiene a $\boldsymbol{e}_1$ como vector director y ángulo α es el movimiento G_α de matriz en coordenadas homogéneas

$$\mathbf{G}_h = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\text{sen}\,\alpha & 0 \\ 0 & \text{sen}\,\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



luego está definido por las ecuaciones

$$\begin{cases} x'_1 = x_1 \\ x'_2 = x_2 \cos\alpha - x_3 \sin\alpha \\ x'_3 = x_2 \sin\alpha + x_3 \cos\alpha \end{cases}$$

Ejercicios

X.19.- Hallar las ecuaciones de una traslación, una simetría central, una simetría axial, una simetría especular y un giro en coordenadas homogéneas.

X.20.- Hallar si existen los puntos dobles de una traslación, un giro de centro el origen, una simetria de centro el origen, una simetría axial respecto del eje de vector director $\boldsymbol{e}_1$ y una simetría especular respecto del plano de vectores directores $\boldsymbol{e}_1$ y $\boldsymbol{e}_2$.

X.21.- Hallar la transformada de la recta que pasa por $P(1,2,3)$ y tiene por vector director $\boldsymbol{u} = (0,-1,1)$ por el giro de centro el origen y ángulo $\pi/3$. Hallar la transformada de una recta en una traslación, un giro de centro el origen, una simetria de centro el origen, una simetría axial respecto del eje $\boldsymbol{e}_1$ y una simetría especular respecto del plano de vectores directores $\boldsymbol{e}_1$ y $\boldsymbol{e}_2$.

La generalización de los movimientos anteriores al caso que sus centros o ejes no sean los coordenados, se obtiene del mismo modo que el empleado para las transformaciones en E_2, obteniéndose los resultados que se exponen a continuación.

a5) Sea el punto $C(c_1,c_2,c_2)$. Para hallar las ecuaciones de la simetría con respecto al centro C basta hacer el cambio del sistema de referencia $(O;\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\mathbf{e}_3)$ al $(C;\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\mathbf{e}_3)$, El resultado es

$$\mathbf{x}'_h = \mathbf{M}_h\mathbf{S}_h\mathbf{M}_h^{-1}\mathbf{x}_h$$

donde

$$\mathbf{M}_h\mathbf{S}_h\mathbf{M}_h^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & c_1 \\ 0 & 1 & 0 & c_2 \\ 0 & 0 & 1 & c_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & c_1 \\ 0 & 1 & 0 & c_2 \\ 0 & 0 & 1 & c_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} =$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 2c_1 \\ 0 & -1 & 0 & 2c_2 \\ 0 & -1 & 0 & 2c_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

luego tiene por ecuaciones

$$\begin{cases} x'_1 = -x_1+2c_1 \\ x'_2 = -x_2+2c_2 \\ x'_3 = -x_3+2c_3 \end{cases}$$

a6) Sea la recta r que pasa por el punto $P(p_1,p_2p_3)$ de vector director unitario $\boldsymbol{u}_1 = (u_{11},u_{21},u_{31})$. Para hallar las ecuaciones de la simetría axial con respecto a la recta r basta hacer el cambio del sistema de referencia $(O;\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3)$ al $(C;\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2,\boldsymbol{u}_3)$, siendo $\boldsymbol{u}_2 = (u_{12},u_{22},u_{32})$ y $\boldsymbol{u}_3 = (u_{13},u_{23},u_{33})$ vectores unitarios ortogonales a $\boldsymbol{u}_1$ y ortogonales entre sí. El resultado es

$$\mathbf{x}'_h = \mathbf{M}_h\mathbf{S}_h\mathbf{M}_h^{-1}\mathbf{x}_h$$

con expresiones desarrolladas y ecuaciones análogas al caso de dimensión 2.

a7) Sea el plano π que pasa por el punto $P(p_1,p_2p_3)$ de vectores directores ortogonales y unitarios $\boldsymbol{u}_1 = (u_{11},u_{21},u_{31})$ y $\boldsymbol{u}_2 = (u_{12},u_{22},u_{32})$. Para hallar las ecuaciones de la simetría especular con respecto al plano π basta hacer el cambio del sistema de referencia $(O;\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3)$ al $(P;\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2,\boldsymbol{u}_3)$, siendo $\boldsymbol{u}_3$ un vector unitario ortogonal a $\boldsymbol{u}_1$ y $\boldsymbol{u}_2$. El resultado es

$$\mathbf{x}'_h = \mathbf{M}_h\mathbf{S}_h\mathbf{M}_h^{-1}\mathbf{x}_h$$

con expresiones desarrolladas y ecuaciones análogas al caso de dimensión 2.

a8) Sea la recta r que pasa por el punto $P(p_1,p_2p_3)$ de vector director unitario $\boldsymbol{u}_1 = (u_{11},u_{21},u_{31})$. Para hallar las ecuaciones del giro de eje la recta r basta hacer el cambio del sistema de referencia $(O;\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3)$ al $(C;\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2,\boldsymbol{u}_3)$, siendo $\boldsymbol{u}_2 = (u_{12},u_{22},u_{32})$ y $\boldsymbol{u}_3 = (u_{13},u_{23},u_{33})$ vectores unitarios ortogonales a $\boldsymbol{u}_1$ y ortogonales entre sí. El resultado es

$$\mathbf{x}'_h = \mathbf{M}_h\mathbf{G}_h\mathbf{M}_h^{-1}\mathbf{x}_h$$

con expresiones desarrolladas y ecuaciones análogas al caso de dimensión 2.

Ejercicios

X.22.- Hallar las ecuaciones matriciales de los siguientes movimientos:

a) Giro de centro $C(1,0,3)$ y ángulo $3\pi/4$.

b) Giro de ángulo $3\pi/4$. que lleva el punto $X(2,1,4)$ al $X'(1,0,2)$.

c) El producto de los dos movimientos anteriores.

X.23.- Hallar las expresiones matriciales en coordenadas homogéneas y las ecuaciones cartesianas de los movimientos anteriores a6), a7) y a8).

X.24.- Hallar

a) El producto de dos giros del mismo eje y distintos ángulos y de ejes paralelos.

b) El producto de una traslación y un giro.

c) El producto de dos simetrías respecto del mismo centro y respecto centros distintos.

d) El producto de dos simetrías axiales respecto de la misma recta y respecto rectas distintas y paralelas y respecto de rectas que se cortan.

e) El producto de dos giros respecto centros distintos.

b) ***Homotecia***. Una homotecia de razón $r \neq 0$ es una transformación geométrica de matriz en coordenadas homogéneas

$$\mathbf{H}_h = \begin{pmatrix} r & 0 & 0 & 0 \\ 0 & r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

El determinante de $\mathbf{H}$ es $\det(\mathbf{H}) = r^3$. Si $r > 0$ la homotecia se llama directa y si $r < 0$ se denomina inversa; si $r = 1$ se trata de la transformación idéntica y si $r = -1$ se trata de una simetría de centro el origen. La homotecia no conserva el producto escalar ya que si $\boldsymbol{u}'$ y $\boldsymbol{v}'$ son los vectores transformados de $\boldsymbol{u}$ y $\boldsymbol{v}$, como la matriz de producto escalar es la matriz unidad, será

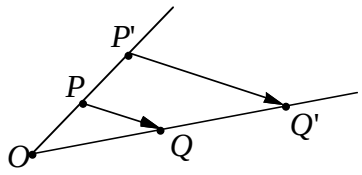
$$< \boldsymbol{u}',\boldsymbol{v}'> = < \mathbf{H}\boldsymbol{u},\mathbf{H}\boldsymbol{v}> = (\mathbf{H}\boldsymbol{u})^t\mathbf{I}(\mathbf{H}\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{u}^t\mathbf{H}^t\mathbf{I}\mathbf{H}\boldsymbol{v} = \boldsymbol{u}^t r^2\mathbf{I}\boldsymbol{v} = r^2 < \boldsymbol{u},\boldsymbol{v}>$$

Por ello no conserva las distancias pero si conserva los ángulos. Una homotecia de centro el origen está definida por

$$\begin{cases} x'_1 = rx_1 \\ x'_2 = rx_2 \\ x'_3 = rx_3 \end{cases}$$

Si el punto P se transforma en el P' y el punto Q en el Q', la relación entre los vectores $\overrightarrow{PQ}$ y $\overrightarrow{P'Q'}$ es

$$\overrightarrow{P'Q'} = r\overrightarrow{PQ}$$



Dado el punto $C(c_1,c_2,c_3)$, para hallar las ecuaciones de la homotecia con respecto al centro C basta hacer el cambiar del sistema de referencia $(O;\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3)$ al $(C;\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3)$. El resultado es

$$\mathbf{x}'_h = \mathbf{M}_h\mathbf{H}_h\mathbf{M}_h^{-1}\mathbf{x}_h$$

con expresiones desarrolladas y ecuaciones análogas al caso de dimensión 2.

c) ***Semejanza*** es la composición de una homotecia con un movimiento. De las propiedades de ambos se deducen que el determinante de su matriz es igual a r^3 y que las semejanzas conservan los ángulos.

d) ***Contracciones y dilataciones a partir del origen en las direcciones de los ejes***. Se denominan también cambios de escala y son transformaciones geométricas de matriz en coordenadas homogéneas

$$\mathbf{A}_h = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

con los coeficientes a b y c distintos de 0. Los coeficientes mayores que cero dilatan y los menores contraen. Los coeficientes en valor absoluto mayores que 1 dilatan y los menores contraen en un sentido o en otro respecto de O dependiendo del signo de a, b y c. Al igual que en las anteriores transformaciones se hallan las ecuaciones matriciales, o desarrolladas, para contracciones o dilataciones en direcciones distintas de los ejes a partir de un punto que no sea el origen.

Ejercicios

X.25.- Demostrar que en una homotecia, el centro es un punto doble, que una recta se

transforma en otra recta paralela a ella y que toda recta que pasa por el centro se transforma en si misma.

X.26.- Demostrar que en una homotecia si P' es el transformado del punto P, entonces el centro está alineado con P y P' y entre P y P' si $r < 0$.

X.27.- Demostrar que el producto de dos homotecias del mismo centro y razones r y r' es otra homotecia del mismo centro y razón rr' y que el producto de dos homotecias de centros distintos y razones r y r' es otra homotecia de razón rr'.

X.28.- Dado el triángulo de vértices $P(1,2,3)$, $Q(2,–1,0)$ y $R(–3,4,–1)$, hallar el triángulo transformado mediante una homotecia de razón 1/2 y centro $C(1,1,1)$ y un giro del mismo centro y ángulo π. Dibujar su transformado mediante una dilatación-contracción de parámetros

1) $a = 2$, $b = 2$, $c = 3$
2) $a = 0.5$, $b = 0.8$, $c = 0.3$
3) $a = 2$, $b = –2$, $c = –3$
4) $a = 3$, $b = –0.5$, $c = –0.3$

BIBLIOGRAFIA

Anton H. (1985). *Introducción al Algebra Lineal*. Limusa. Méjico.

Castellet M., Llerena I. (1992) *Álgebra y geometría*. Reverté. Barcelona.

de Burgos J. (1988). *Curso de Algebra y Geometría*. Alhambra. Madrid.

Hernández E. (1994). *Álgebra y geometría*. Addison-Wesley Iberoamericana. Wilmington (USA).

Hoffmann R., Kunze R. (1974). *Algebra Lineal*. Prentice. Madrid.

Puerta F. (1986). *Algebra lineal*. Marcombo. Barcelona.

Sainz M.A., S erarols J.L. Pérez A.M. (1994). *Álgebra*. Escuela Politécnica Superior. Gerona.

Segura S. (1964). *Matemáticas*. ECIR. Valencia.

Strang G. (1982). *Algebra Lineal y sus aplicaciones.* Fondo Educativo Interamericano. Méjico.

Trillas E., Alsina C. (1984). *Lecciones de Algebra y Geometría*. Gustavo Gili. Barcelona.

Xambó S. (1977). *Algebra Lineal y geometrias lineales*. EUNIBAR. Barcelona.