CUADERNO XI

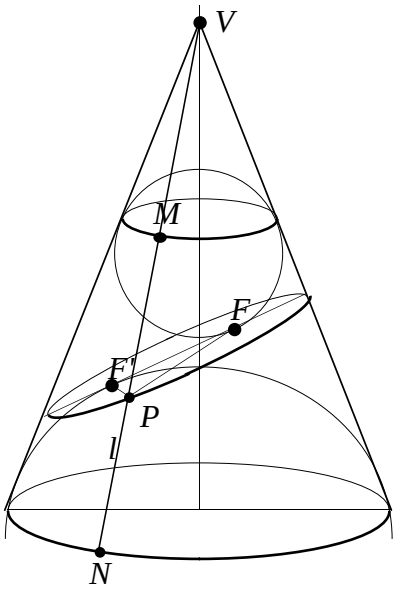
CÓNICAS Y CUÁDRICAS

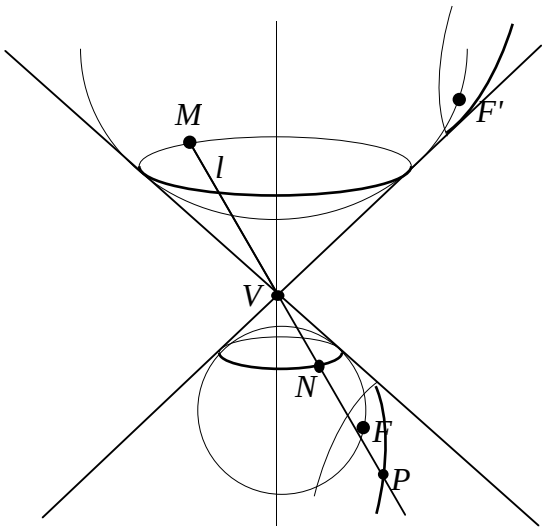
Miguel A. Sainz, Joan Serarols, Anna M. Pérez
Dep. de Informática y Matemática Aplicada
Universidad de Girona

RESUMEN: Se estudian las curvas y superficies que vienen dadas por ecuaciones de segundo grado en el espacio de dos dimensiones, las cónicas, y en el aspacio de tres dimensiones, las cuádricas, que se estudian en su forma canónica y su clasificación general, obteniéndose los elementos geométricos qu las definen.

XI.1 .- DEFINICION DE CONICA

En geometría clásica se denominan ***secciones cónicas*** a las curvas intersección de una superficie cónica, de ahí su nombre, con un plano que no pase por su vértice. Dependiendo de las posiciones relativas entre el plano y la superficie se obtienen distintos tipos de curvas. Si el plano no es paralelo a ninguna generatriz la curva obtenida se denomina ***elipse***, que en el caso particular de ser el plano perpendicular al eje del cono es una ***circunferencia***; si el plano es paralelo a una sola generatriz la curva se denomina ***parábola***; por último, si el plano es paralelo a dos generatrices se obtiene la ***hipérbola***.





Si P es un punto de la elipse o de la hipérbola y l la generatriz que pasa por él, puede probarse que existen dos esferas tangentes al cono y al plano que define la elipse o hipérbola; sean F y F' los puntos de tangencia de ambas esferas con el plano, que llamaremos ***focos***, y M y N a los de tangencia con la generatriz l; como los segmentos de tangente trazados por un punto exterior a una esfera son iguales, tendremos que

$$d(P,F) = d(P,N) \qquad d(P,F') = d(P,M)$$

por lo cual en el caso de la elipse

$$d(P,F')+d(P,F) = d(P,M)+d(P,N) = d(M,N)$$

y en el caso de la hipérbola

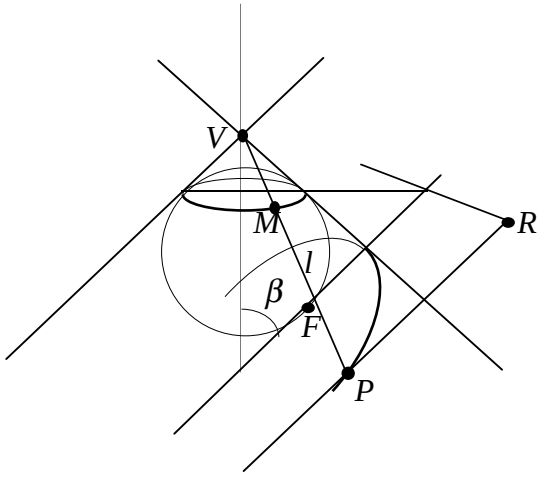
$$d(P,F')-d(P,F) = d(P,M)-d(P,N) = d(M,N)$$

Como la posición de los puntos F y F' y la distancia $d(M,N)$ son constantes para cualquiera que sea el punto P, hemos llegado a la propiedad siguiente:

> "Los puntos de la elipse (hipérbola) verifican que la suma (diferencia) de distancias a dos puntos puntos fijos es constante".

Recíprocamente, puede demostrarse que el lugar geométrico de los puntos de un plano α cuya suma (diferencia) de distancias a dos puntos fijos F y F' de α es una constante k, es una elipse (hipérbola).

Para la parábola, la esfera tangente a su plano y al cono tiene con éste una circunferencia común; el plano que contiene a esta circunferencia corta al plano de la parábola en un recta d que llamaremos ***directriz***; el punto común de la esfera y el plano lo seguiremos denominando foco. Sea P un punto de la parábola, l la generatriz que pasa por él y M el punto de tangencia de l con



la esfera. Tenemos que, por ser segmentos de tangentes a una esfera por un punto,

$$d(P,M) = d(P,F)$$

Por ser el plano de la cónica paralelo a una generatriz, el ángulo β que forma con el eje del cono es el mismo que el ángulo que con él forma cualquier generatriz con lo que al ser iguales las

proyecciones de $\overline{PM}$ y $\overline{PR}$ sobre el eje, por estar M y R en un un mismo plano perpendicular a él, tendremos

$$d(P,M)\cos\beta = d(P,R)\cos\beta \;\Rightarrow\; d(P,F) = d(P,M) = d(P,R)$$

Como P es un punto cualquiera de la parábola hemos llegado a la propiedad:

"Los puntos de la parábola distan del foco lo mismo que de la directriz".

Puede probarse también el recíproco, es decir, la parábola es el lugar geométrico de los puntos que equidistan de un punto fijo llamado foco, y de una recta fija, llamada directriz.

Estas propiedades se van a revelar como muy apropiadas para obtener las ecuaciones de las cónicas en cuanto fijemos en el plano euclídeo un sistema de referencia.

Sea E el plano euclídeo y sean F y F' dos puntos de E. El conjunto de puntos cuya suma de distancias a F y F' es constante es la elipse; poniendo como distancia constante $2a$, la condición será

$$d(P,F)+d(P,F') = 2a$$

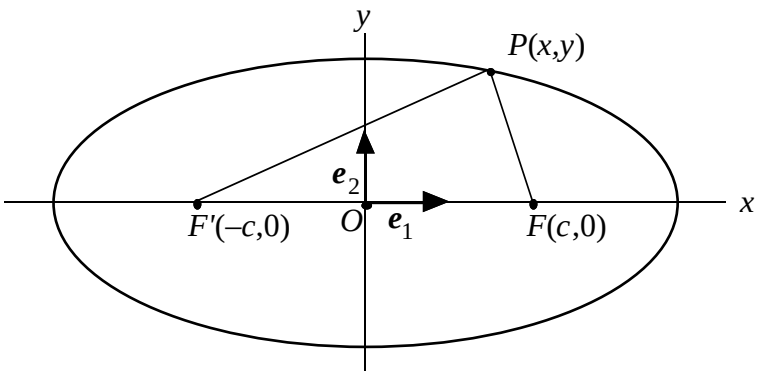
Los puntos F y F' se denominan ***focos*** de la elipse, la recta FF' ***eje principal***, la mediatriz del segmento FF' ***eje secundario***, la distancia entre los focos $2c$, el punto medio O del segmento FF' ***centro*** y los puntos intersección del eje principal con la elipse ***vértices*** de la misma. Como un lado de un triángulo es menor que la suma de los otros dos, se verifica $a > c$; al cociente

$$e = \frac{c}{a}$$

se le denomina ***excentricidad*** de la elipse, siendo menor que 1.

Sea un sistema de referencia ortonormal con origen en O y como vectores de la base un vector unitario en la dirección del eje principal y otro unitario en la dirección del eje secundario.

Elipse



Las coordenadas de los puntos respecto a este sistema serán

$$P(x,y) \quad , \quad F(c,0) \quad , \quad F'(-c,0)$$

y la relación anterior dará

$$((x-c)^2+y^2)^{1/2}+((x+c)^2+y^2)^{1/2} = 2a$$

Aislando una raíz en un miembro y elevando al cuadrado tendremos

$$-a((x-c)^2+y^2)^{1/2} = cx-a^2$$

y elevando de nuevo al cuadrado

$$(a^2-c^2)x^2+a^2y^2 = a^2(a^2-c^2)$$

Al ser $a > c$ podemos hacer $a^2-c^2 = b^2$ y sustituyendo llegamos a

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} = 1$$

que es la ecuación de la elipse en el sistema de referencia elegido, cuyos ejes son los ejes de simetría de la elipse, como prueba esta ecuación. Se deduce asimismo que los vértices principales de la elipse tienen por coordenadas

$$A(a,0) \qquad A'(-a,0)$$

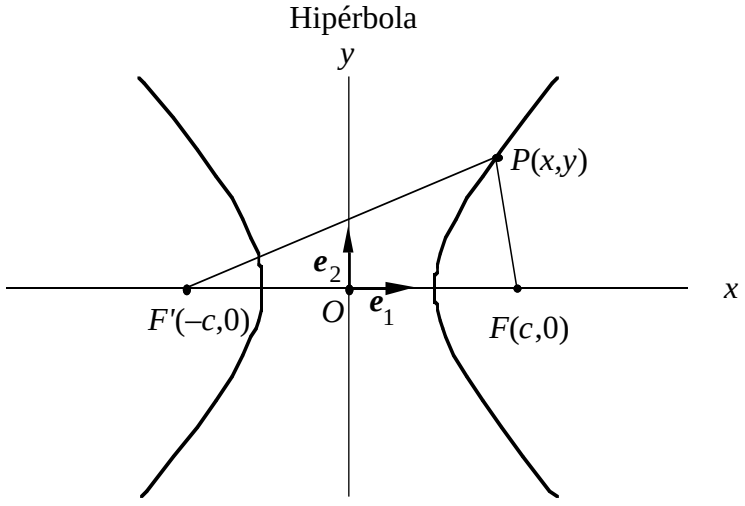
y los puntos de corte con el eje secundario

$$B(b,0) \qquad B'(-b,0)$$

Si $c = 0$, entonces $F = F' = O$, la elipse es una circunferencia de radio a, de ecuación

$$x^2+y^2 = a^2$$

El conjunto de puntos cuya diferencia de distancias a F y F' es constante se denomina hipérbola



Poniendo como distancia constante $2a$, la condición será

$$d(P,F)-d(P,F') = 2a$$

Los puntos F y F' se denominan ***focos*** de la hipérbola, la recta FF' ***eje principal***, la mediatriz del segmento FF' ***eje secundario***, la distancia entre los focos $2c$, el punto medio O del segmento FF' centro y los puntos intersección del eje principal con la hipérbola ***vértices*** de la misma. Como un lado de un triángulo es mayor que la diferencia de los otros dos, se verifica que $a < c$; al cociente

$$e = \frac{c}{a}$$

se le denomina ***excentricidad de la hipérbola***, siendo mayor que 1.

Para el sistema de referencia ortonormal elegido la relación anterior será

$$((x-c)^2+y^2)^{1/2}-((x+c)^2+y^2)^{1/2} = 2a$$

Aislando una raíz en un miembro y elevando al cuadrado tendremos

$$a((x-c)^2+y^2)^{1/2} = cx-a^2$$

y elevando de nuevo al cuadrado

$$(c^2-a^2)x^2-a^2y^2 = a^2(c^2-a^2)$$

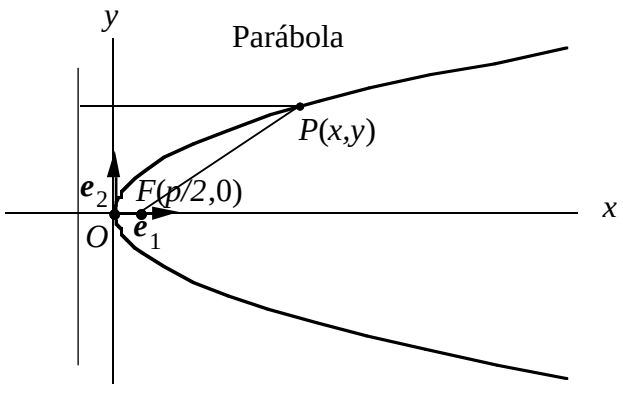
Al ser $a < c$ podemos hacer $c^2-a^2 = b^2$ y sustituyendo llegamos a

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2} = 1$$

que es la ecuación de la hipérbola en el sistema de referencia elegido, cuyos ejes son los ejes de simetría de la hipérbola, como prueba esta ecuación. Se deduce asimismo que los vértices principales tienen por coordenadas

$$A(a,0) \qquad A'(-a,0)$$

Sea d una recta contenida en E. El conjunto de puntos que equidistan de F y d se denomina



parábola de foco F y directriz d. La recta perpendicular a d por F se denomina ***eje principal*** de la parábola, la mediatriz del segmento que determinan F y la intersección del eje principal y la directriz ***eje secundario*** y el punto de intersección del eje principal con la parábola se denomina ***vértice***. Si tomamos un sistema de referencia de centro O y como vectores de la base un vector unitario en la dirección del eje principal y otro unitario en la dirección del eje secundario las coordenadas de F serán

$$F(p/2,0)$$

y si las coordenadas de un punto cualquiera son $P(x,y)$, entonces la condición que define la parábola se traduce en

$$((x-p/2)^2+y^2) = (x+p/2)^2$$

y haciendo operaciones se llega a

$$y^2 = 2px$$

Vemos como las ecuaciones de las cónicas, referidas a sus ejes, son ecuaciones de segundo grado, por lo que vamos a considerar en el espacio euclídeo E_n sobre $\mathbf{R}^n$ con un sistema de referencia ortonormal $(O;\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\ldots,\boldsymbol{e}_n)$ las ecuaciones de la forma

$$\sum_{i,k} a_{ik}x_ix_k + 2\sum_i b_ix_i + c = 0 \quad \text{con} \quad a_{ik} = a_{ki}$$

Para $n = 2$ la ecuación representa una ***cónica*** y para $n = 3$ una superficie que se denomina ***cuádrica*** y, dependiendo de los coeficientes, podrán ser de un tipo u otro.

XI.2 .- REDUCCION DE UNA CONICA A LA FORMA CANONICA

La ecuación de la cónica, en el caso más general, en el que sus ejes de simetría no coinciden con el sistema de referencia ortonormal del plano euclídeo $(O;\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2)$, será de la forma

$$f(x_1,x_2) = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 + 2b_1x_1 + 2b_2x_2 + c = 0$$

Consideremos la forma cuadrática formada por los tres primeros sumandos,

$$a_{11}x_1^{\,2}+2a_{12}x_1x_2+a_{22}x_2^{\,2} = \mathbf{x}^t\mathbf{A}\,\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

cuya matriz es la matriz simétrica

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$$

Sabemos que siempre es posible efectuar un cambio de base ortonormal que la transforme en una matriz diagonal, bastando para ello encontrar sus valores propios, que llamaremos h_1,h_2 y considerar como base ortonormal la formada por respectivos vectores propios asociados. Sea

($\boldsymbol{u}_1$,$\boldsymbol{u}_2$) dicha base, con la ecuación del cambio de base

$$\mathbf{u} = \mathbf{eS}$$

El cambio al sistema de referencia ortonormal (O;$\boldsymbol{u}_1$,$\boldsymbol{u}_2$) vendrá dado por

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}$$

es decir,

$$x_1 = s_{11}X_1+s_{12}X_2$$
$$x_2 = s_{21}X_1+s_{22}X_2$$

Como ambas bases ($\boldsymbol{e}_1$,$\boldsymbol{e}_2$) y ($\boldsymbol{u}_1$,$\boldsymbol{u}_2$) son ortonormales, la matriz $\mathbf{S}$ del cambio de base será ortogonal, es decir $\mathbf{S}^{-1} = \mathbf{S}^t$, luego el cambio inverso de sistema de referencia tiene por ecuaciones

$$X_1 = s_{11}x_1+s_{21}x_2$$
$$X_2 = s_{12}x_1+s_{22}x_2$$

Al sustituir en la ecuación inicial, teniendo en cuenta que la forma cuadrática formada por los primeros términos quedará en la forma canónica $h_1X_1^2+h_2X_2^2$ y la parte lineal es

$$2b_1x_1+2b_2x_2+c = 2(b_1s_{11}+b_2s_{21})X_1+2(b_1s_{12}+b_2s_{22})X_2+c$$

y haciendo

$$b'_i = b_1s_{1i}+b_2s_{2i} \quad \text{(para } i = 1,2)$$

queda en la forma

$$h_1X_1^{\,2}+h_2X_2^{\,2}+2b'_1X_1+2b'_2X_2+c = 0$$

Efectuemos un cambio de origen, de O a $O'(k_1,k_2)$, de modo que para un punto cualquiera $P(X_1,X_2)$

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OO'}+\overrightarrow{O'P}$$

es decir,

$$X_1 = x+k_1$$
$$X_2 = y+k_2$$

siendo x e y las coordenadas de P respecto del nuevo sistema de referencia (O';$\boldsymbol{u}_1$,$\boldsymbol{u}_2$) Sustituyendo en la ecuación anterior y haciendo operaciones nos quedará

$$h_1x^2+h_2y^2+2(b'_1+h_1k_1)x+2(b'_2+h_2k_2)y+C = 0$$

siendo

$$C = c+h_1k^2{}_1+h_2k^2{}_2+2b_1'k_1+2b_2'k_2$$

Según sea el determinante de la matriz **A**, y por ello sus valores propios, pueden distinguirse dos casos:

a) Si det (**A**) ≠ 0, entonces el término independiente de la ecuación característica no es nulo y, por lo tanto, no tiene raíces nulas, con lo que h_1 y h_2 son diferentes de cero. En este caso podemos hacer

$$k_1 = -\frac{b_1'}{h_1} \qquad\qquad k_2 = -\frac{b_2'}{h_2}$$

con lo que la ecuación anterior queda en la forma

$$h_1x^2+h_2y^2+C = 0$$

con

$$C = c - \frac{b_1'^2}{h_1} - \frac{b_2'^2}{h_2}$$

Esta es la ecuación de la cónica en la referencia cartesiana formada por el punto O', nuevo origen y las rectas que pasan por este punto y tienen por vectores directores los vectores propios $\boldsymbol{u}_1$ y $\boldsymbol{u}_2$. El nuevo origen, que tiene por coordenadas $O'(k_1,k_2)$ en el sistema de referencia $(O;\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2)$, es centro de simetría, puesto que el cambio de x por $-x$ e y por $-y$ no altera la ecuación. Tal punto se llama ***centro de la cónica***. Los nuevos ejes ortogonales, son ejes de simetría y se llaman ***ejes de la cónica***. Las cónicas para las que det(**A**) ≠ 0 se llaman ***cónicas con centro***.

b) Si det (**A**) = 0, entonces la ecuación característica tiene una raíz nula, que debe ser simple, ya que, en caso contrario, sería

$$\left.\begin{array}{r} a_{11}+a_{22} = 0 \\ a_{11}a_{22}-a^2_{12} = 0 \end{array}\right| \Rightarrow -a^2_{11}-a^2_{12} = 0 \Rightarrow a_{11} = a_{12} = a_{22} = 0$$

y la ecuación inicial no sería de 2º grado. Sea, por ejemplo, $h_1 = 0$ y la ecuación final queda de la siguiente forma

$$h_2y^2+2b_1'x+2(b_2'+h_2k_2)y+C = 0$$

Podemos hacer

$$k_2 = -\frac{b_2'}{h_2}$$

y la ecuación anterior se reduce a

$$h_2y^2+2b_1'x+C = 0$$

con

$$C = c+2b_1'k_1-\frac{b_2'^2}{h_2}$$

Si es $b_1' \neq 0$, haciendo

$$k_1 = \frac{-c+\dfrac{b_2'^2}{h_2}}{2b_1'}$$

es $C = 0$, con lo cual resulta

$$h_2y^2+2b_1'x = 0$$

El nuevo origen es $O'(k_1,k_2)$ con

$$k_1 = \frac{-c+\dfrac{b_2'^2}{h_2}}{2b_1'} \qquad k_2 = -\frac{b_2'}{h_2}$$

que se llama ***vértice de la cónica***. Si $b_1' = 0$ la ecuación queda en la forma

$$h_2y^2+C = 0$$

Las cónicas para las que $\det(\mathbf{A}) = 0$ son las ***cónicas sin centro*** Los ejes coordenados vienen definidos igualmente por los vectores propios $\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2$. Uno de éllos es eje de simetría (el definido por $\boldsymbol{u}_1$, pues el cambio de y por $-y$ deja inalterable la ecuación); dicho eje se llama ***eje de la cónica***.

Las ecuaciones anteriores se llaman ***formas canónicas*** de las ecuaciones de las cónicas.

La ecuación canónica de las cónicas con centro es

$$h_1x^2+h_2y^2+C = 0$$

y si $C \neq 0$, dividiendo por h_1 y h_2 (que no son nulos)

$$\frac{x^2}{\dfrac{C}{h_1}}+\frac{y^2}{\dfrac{C}{h_2}}+1 = 0$$

Según los signos de los denominadores podemos establecer la siguiente discusión:

a) Si $C \neq 0$ distinguimos los casos

a1) Si $C/h_1 > 0$ y $C/h_2 > 0$ podemos hacer

$$a^2 = C/h_1 \qquad b^2 = C/h_2$$

quedando la ecuación en la forma

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + 1 = 0$$

cónica que se denomina ***elipse imaginaria*** ya que la ecuación no tiene solución real.

a2) Si $C/h_1 < 0$ y $C/h_2 < 0$ podemos hacer

$$a^2 = -C/h_1 \qquad b^2 = -C/h_2$$

y la ecuación queda en la forma

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$$

que es una ***elipse***. Si $h_1 = h_2$, es $a = b = r$ y tenemos la ***circunferencia*** de radio r

$$x^2+y^2 = r^2$$

a3) Si $C/h_1 \cdot C/h_2 < 0$, que equivale a que los valores propios son de signos contrarios, es decir, $h_1 \cdot h_2 < 0$; si es, por ejemplo, $C/h_1 > 0$ y $C/h_2 < 0$, haciendo

$$a^2 = C/h_1 \qquad b^2 = -C/h_2$$

la ecuación se escribe en la forma

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

que es una ***hipérbola***.

b) Si $C = 0$ distinguimos según los signos de los valores propios:

b1) Si $h_1 > 0$ y $h_2 > 0$ resulta

$$h_1x^2+h_2y^2 = 0 \iff (\sqrt{h_1}x+i\sqrt{h_2}y)\,(\sqrt{h_1}x-i\sqrt{h_2}y) = 0 \iff \left|\begin{array}{l}\sqrt{h_1}x+i\sqrt{h_2} = 0\\ \sqrt{h_1}x-i\sqrt{h_2} = 0\end{array}\right.$$

que son dos rectas imaginarias que tienen un solo punto real, el (0,0) que es común a ambas.

b2) Si $h_1 > 0$ y $h_2 < 0$ resulta

$$h_1x^2 - |h_2|y^2 = 0 \iff (\sqrt{h_1}x+\sqrt{|h_2|}\,y)(\sqrt{h_1}x-\sqrt{|h_2|}\,y) = 0 \iff \begin{array}{c} \sqrt{h_1}x+\sqrt{|h_2|}\,y = 0 \\ \vee \\ \sqrt{h_1}x-\sqrt{|h_2|}\,y = 0 \end{array}$$

y la cónica se reduce a dos rectas reales.

La ecuación canónica de las cónicas sin centro es

$$h_2y^2+2b_1'x+C = 0$$

Análogamente a la discusión anterior distingamos según los signos de los coeficientes :

a) Si $b_1' \neq 0$ hemos visto que es posible elegir k_1 para que $C = 0$ con lo que la ecuación queda en la forma

$$h_2y^2+2b_1'x = 0$$

es decir,

$$y^2 = 2px \qquad \text{con } p = -b_1'/h_2$$

que es una ***parábola***.

b) Si $b_1' = 0$, entonces

b1) Si $C/h_2 > 0$, haciendo $a^2 = C/h_2$, la ecuación toma la forma

$$y^2+a^2 = 0 \iff (y+ia)(y-ia) = 0 \iff \begin{array}{c} (y+ia) = 0 \\ \vee \\ (y-ia) = 0 \end{array}$$

que son dos rectas imaginarias sin punto real.

b2) Si $C/h_2 < 0$, haciendo $a^2 = -C/h_2$, la ecuación toma la forma

$$y^2-a^2 = 0 \iff (y+a)(y-a) = 0 \iff \begin{array}{c} (y+a) = 0 \\ \vee \\ (y-a) = 0 \end{array}$$

que son dos rectas reales paralelas.

b3) Si $C = 0$, entonces se llega a

$$y^2 = 0$$

que son dos rectas reales coincidentes, es decir, es una recta real doble.

Ejemplo XI.1.1

Para clasificar la cónica dada en un sistema de referencia ortonormal $(O;\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2)$ por la ecuación

$$x_1^2+x_2^2+x_1x_2+3x_1+3x_2 = 0$$

hallar su forma canónica y sus elementos de simetría, empezaremos diagonalizando la matriz de la forma cuadrática asociada

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1 \end{pmatrix}$$

Sus valores propios son $h_1 = 3/2$ y $h_2 = 1/2$, obteniéndose los vectores propios ortonormales

$$\boldsymbol{u}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2) \qquad\qquad \boldsymbol{u}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{e}_2)$$

La matriz del cambio de base y las ecuaciones de cambio de sistema de referencia son

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \qquad\qquad \left| \begin{array}{l} x_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} X_1 + \frac{1}{\sqrt{2}} X_2 \\ x_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} X_1 - \frac{1}{\sqrt{2}} X_2 \end{array} \right.$$

La ecuación de la cónica en la referencia $(0;\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2)$ será

$$\frac{3}{2} X_1^2 + \frac{1}{2} X_2^2 + \frac{6}{\sqrt{2}} X_1 = 0$$

El cambio de origen vendrá dado por

$$\begin{aligned} X_1 &= x+k_1 \\ X_2 &= y+k_2 \end{aligned}$$

con

$$k_1 = -\frac{b_1'}{h_1} = -\frac{\frac{3}{\sqrt{2}}}{\frac{3}{2}} = -\sqrt{2} \qquad\qquad k_2 = -\frac{b_2'}{h_2} = -\frac{0}{\frac{1}{2}} = 0$$

obteniéndose

$$C = -\frac{b_1'^2}{h_1} = -\frac{\left(\frac{6}{2\sqrt{2}}\right)^2}{\frac{3}{2}} = -3$$

quedando la ecuación en la forma

$$\frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2 - 3 = 0$$

que en la referencia $(O';\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2)$ es una elipse real. Sus elementos de simetría son

Centro

En el sistema de referencia $(O';\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2)$ sus coordenadas son : $x = 0$, $y = 0$

En el sistema de referencia $(O;\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2)$ sus coordenadas son : $X_1 = -\sqrt{2}$, $X_2 = 0$

En el sistema de referencia $(O;\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2)$ sus coordenadas son : $x_1 = -1$, $x_2 = -1$

Ejes

En el sistema de referencia $(O';\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2)$ sus ecuaciones son : $x = 0$, $y = 0$

En el sistema de referencia $(O;\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2)$ sus ecuaciones son : $X_1 = -\sqrt{2}$, $X_2 = 0$

En el sistema de referencia $(O;\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2)$ sus ecuaciones son :

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= -1 + \frac{1}{\sqrt{2}}X_2 \\ x_2 &= -1 - \frac{1}{\sqrt{2}}X_2 \end{aligned}\right| \quad \Rightarrow \quad x_1 + x_2 = -2 \quad , \qquad \left.\begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{\sqrt{2}}X_1 \\ x_2 &= \frac{1}{\sqrt{2}}X_1 \end{aligned}\right| \quad \Rightarrow \quad x_1 = x_2$$

Para la cónica

$$x_1^2 + 4x_2^2 + 4x_1x_2 + x_2 - 2x_1 + 1 = 0$$

en la referencia $(O;\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2)$. Los valores propios son $h_1 = 0$ y $h_2 = 5$. Por tener un valor propio $h_1 = 0$ será una cónica sin centro. Como vectores propios ortonormales se obtienen

$$\boldsymbol{u}_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}(-2\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2) \qquad\qquad \boldsymbol{u}_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}(\boldsymbol{e}_1 + 2\boldsymbol{e}_2)$$

La matriz del cambio de base y las ecuaciones de cambio de sistema de referencia son

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \qquad \left| \begin{array}{l} x_1 = -\frac{2}{\sqrt{5}} X_1 + \frac{1}{\sqrt{5}} X_2 \\ x_2 = \frac{1}{\sqrt{5}} X_1 + \frac{2}{\sqrt{5}} X_2 \end{array} \right.$$

La cónica en la referencia $(O;\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2)$ tendrá por ecuación

$$5X_2^2 + \frac{5}{\sqrt{5}} X_1 + 1 = 0$$

Tomando como nuevo origen $O'(k_1,k_2)$ con

$$k_2 = -\frac{b_2'}{h_2} = -\frac{0}{5} = 0 \qquad k_1 = -\frac{\sqrt{5}}{10}$$

quedará

$$5y^2 + \frac{5}{\sqrt{5}} x = 0$$

que es una parábola. Sus elementos de simetría son

Vértice

En el sistema de referencia $(O';\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2)$ sus coordenadas son : $x = 0$, $y = 0$

En el sistema de referencia $(O;\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2)$ sus coordenadas son : $X_1 = -\sqrt{5}/10$, $X_2 = 0$

En el sistema de referencia $(O;\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2)$ sus coordenadas son : $x_1 = 1/5$, $x_2 = -1/10$

Eje

En el sistema de referencia $(O';\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2)$ su ecuación es : $x = 0$

En el sistema de referencia $(O;\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2)$ su ecuación es : $X_1 = -\sqrt{5}/10$

En el sistema de referencia $(O;\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2)$ sus ecuaciones son

$$\left| \begin{array}{l} x_1 = \frac{-2}{\sqrt{5}}\left(-\frac{\sqrt{5}}{10}\right) + \frac{1}{\sqrt{5}} X_2 \\ x_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(-\frac{\sqrt{5}}{10}\right) + \frac{2}{\sqrt{5}} X_2 \end{array} \right. \quad \Rightarrow \quad x_2 - 2x_1 = -\frac{1}{2}$$

XI.3 .- CUADRICAS Y SU REDUCCION A LA FORMA CANONICA

La ecuación de la cuádrica en el caso más general, en el que sus ejes de simetría no coinciden con el sistema de referencia ortonormal del espacio euclídeo $(O;\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3)$, será de la forma

$$f(x_1,x_2,x_3) = \sum_{i,k} a_{ik}x_ix_k + 2\sum_i b_ix_i + c = 0 \quad \text{con } a_{ik} = a_{ki} \text{ y } i,k = 1,2,3$$

Consideremos la forma cuadrática formada por los seis primeros sumandos,

$$\sum_{i,k} a_{ik}x_ix_k = \mathbf{x}^t\mathbf{A}\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

cuya matriz es la matriz simétrica

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Sabemos que siempre es posible efectuar un cambio de base ortonormal que la transforme en una matriz diagonal. Basta para éllo encontrar sus valores propios, que llamaremos h_1,h_2,h_3 y considerar como base una formada por sus respectivos vectores propios ortonormales. Sea $(\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2,\boldsymbol{u}_3)$ dicha base; si la ecuación del cambio de base es

$$\mathbf{u} = \mathbf{e}\mathbf{S}$$

las ecuaciones del cambio al sistema de referencia ortonormal $(O;\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2,\boldsymbol{u}_3)$ vendrán dadas por

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} \\ s_{21} & s_{22} & s_{23} \\ s_{31} & s_{32} & s_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix}$$

es decir,

$$\begin{aligned} x_1 &= s_{11}X_1+s_{12}X_2+s_{13}X_3 \\ x_2 &= s_{21}X_1+s_{22}X_2+s_{23}X_3 \\ x_3 &= s_{31}X_1+s_{32}X_2+s_{33}X_3 \end{aligned}$$

Como la matriz $\mathbf{S}$ del cambio de base es ortogonal, es decir $\mathbf{S}^{-1} = \mathbf{S}^t$, el cambio inverso de sistema de referencia tiene por ecuaciones

$$\begin{aligned} X_1 &= s_{11}x_1+s_{21}x_2+s_{31}x_3 \\ X_2 &= s_{12}x_1+s_{22}x_2+s_{32}x_3 \\ X_3 &= s_{13}x_1+s_{23}x_2+s_{33}x_3 \end{aligned}$$

Al sustituir en la ecuación inicial, teniendo en cuenta que la forma cuadrática formada por los primeros términos queda en la forma canónica $h_1X_1^2+h_2X_2^2+h_3X_3^3$, y la parte lineal es

$$2b_1x_1+2b_2x_2+2b_3x_3+c =$$

$$= 2(b_1s_{11}+b_2s_{21}+b_3s_{31})X_1+2(b_1s_{12}+b_2s_{22}+b_3s_{32})X_2+2(b_1s_{13}+b_2s_{23}+b_3s_{33})X_3+c$$

y haciendo

$$b'_i = b_1s_{1i}+b_2s_{2i}+b_3s_{3i} \qquad (\text{para } i = 1,2,3)$$

queda en la forma

$$h_1X_1^2+h_2X_2^2+h_3X_3^2+2b'_1X_1+2b'_2X_2+2b'_3X_3+c = 0$$

Efectuemos ahora un cambio de origen, pasando del sistema de referencia $(O;\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2,\boldsymbol{u}_3)$ al $(O';\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2,\boldsymbol{u}_3)$, de modo que para un punto cualquiera P

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OO'}+\overrightarrow{O'P}$$

es decir,

$$X_1 = x+k_1$$
$$X_2 = y+k_1$$
$$X_3 = z+k_1$$

Sustituyendo en la ecuación anterior y haciendo operaciones nos quedará

$$h_1x^2+h_2y^2+h_3z^2+2(b'_1+h_1k_1)x+2(b'_2+h_2k_2)y+2(b'_3+h_3k_3)z+C = 0$$

siendo

$$C = c+h_1k^2{}_1+h_2k^2{}_2+h_3k^2{}_3+2b'_1k_1+2b'_2k_2+2b'_3k_3$$

Según sea el determinante de la matriz **A** y, por ello, sus valores propios pueden distinguirse los siguientes casos:

a) Si det (**A**) $\neq 0$, entonces el término independiente de la ecuación característica no es nulo y por lo tanto dicha ecuación no tiene raíces nulas, es decir $h_i \neq 0$ (para $i = 1,2,3$). En este caso podemos tomar

$$k_i = -\frac{b'_i}{h_i} \qquad (\text{para } i = 1,2,3)$$

que sustituyendo en la ecuación anterior resulta

$$h_1x^2+h_2y^2+h_3z^2+C = 0$$

siendo

$$C = c - \sum_{i\,=\,1,2,3} \frac{b_i'^2}{h_i}$$

Esta es la ecuación de la cuádrica en la referencia cartesiana formada por el punto O', nuevo origen y las rectas que pasan por este punto y tienen por vectores directores los vectores propios $\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_2$ y $\boldsymbol{u}_3$. Este nuevo origen, que tiene por coordenadas $O'(k_1,k_2,k_3)$ en el sistema de referencia $(O;\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2,\boldsymbol{u}_3)$, es centro de simetría, puesto que el cambio de x, y o z por $-x$, $-y$ o $-z$, respectivamente, no altera la ecuación. Tal punto se llama ***centro de la cuádrica***. Los nuevos ejes, que son ortogonales, son ejes de simetría y se llaman ***ejes de la cuádrica***. Este tipo de cuádricas para las que $\det(\mathbf{A}) \neq 0$ se denominan ***cuádricas con centro***.

b) Si $\det(\mathbf{A}) = 0$ entonces un valor propio, por ejemplo h_3, es nulo y distinguiremos, según sea simple o doble.

b1) Si $h_3 = 0$ es raíz simple, en la ecuación de la cuádrica es posible efectuar el cambio

$$k_i = -\frac{b_i'}{h_i} \qquad (\text{para } i = 1,2)$$

quedando expresada de la forma

$$h_1x^2+h_2y^2+2b_3'z+C = 0$$

con

$$C = c+2b_3'k_3 - \frac{b_1'^2}{h_1} - \frac{b_2'^2}{h_2}$$

pudiéndose distinguir, nuevamente, dos casos :

b11) Si $b_3' \neq 0$ es posible dar a k_1 el valor

$$k_3 = \frac{-c + \dfrac{b_1'^2}{h_1} + \dfrac{b_2'^2}{h_2}}{2b_3'}$$

para el cual $C = 0$, con lo cual la ecuación de la cuádrica queda en la forma

$$h_1x^2+h_2y^2+2b_3'z = 0$$

b12) Si $b_3' = 0$ la ecuación de la cuádrica es

$$h_1x^2+h_2y^2+C = 0$$

b2) Si $h_3 = 0$ es raíz doble, sólo podremos fijar

$$k_1 = -\frac{b_1'}{h_1}$$

con lo que la ecuación de la cuádrica queda en la forma

$$h_1x^2+2b_2'y+2b_3'z+C = 0$$

con

$$C = c +2b_2'k_2+2b_3'k_3 - \frac{b_1'^2}{h_1}$$

Distingamos ahora los siguientes casos:

b21) Si $b_3' = b_2' = 0$ la ecuación se reduce a

$$h_1x^2+C = 0$$

b22) Si $b_3' = 0$ y $b_2' \neq 0$ la ecuación se reduce a

$$h_1x^2+2b_2'y+C = 0$$

pudiéndose elegir

$$k_2 = \frac{-c + \dfrac{b_1'^2}{h_1}}{2b_2'}$$

de modo que $C = 0$, quedando la ecuación en la forma

$$h_1x^2+2b_2'y = 0$$

b23) Si $b_3' \neq 0$ y $b_2' \neq 0$, el hecho de ser $h_3 = 0$ doble significa que los vectores propios $\boldsymbol{u}_2$ y $\boldsymbol{u}_3$ de la base $(\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2,\boldsymbol{u}_3)$ corresponden al mismo valor propio, es decir, que el subespacio de vectores propios asociado a h_3 tiene de dimensión 2; es posible elegir otra base $(\boldsymbol{v}_2,\boldsymbol{v}_3)$, ortonormal, de este subespacio de forma que $\boldsymbol{v}_2$ y $\boldsymbol{v}_3$ sigan siendo vectores propios asociados a h_3 y a la vez ortogonales a $\boldsymbol{u}_1$. El nuevo sistema de referencia será pues $(O';\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{v}_2,\boldsymbol{v}_3)$. El cambio de base es

$$\begin{aligned}\boldsymbol{u}_1 &= \boldsymbol{u}_1\\ \boldsymbol{v}_2 &= c_{22}\boldsymbol{u}_2+c_{32}\boldsymbol{u}_3\\ \boldsymbol{v}_3 &= c_{23}\boldsymbol{u}_2+c_{33}\boldsymbol{u}_3\end{aligned}$$

de matriz

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c_{22} & c_{23} \\ 0 & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix}$$

que es una matriz ortogonal. Las ecuaciones del cambio de sistema de referencia, que dan la relación entre las coordenadas x,y,z y las nuevas coordenadas Y_i son

$$\begin{aligned} x &= Y_1 \\ y &= c_{22}Y_2+c_{23}Y_3 \\ z &= c_{32}Y_2+c_{33}Y_3 \end{aligned}$$

Sustituyendo en la ecuación de la cuádrica queda

$$h_1Y_1^2+2b_2''Y_2+2b_3''Y_3+C = 0$$

con

$$b_2'' = c_{22}b_2'+c_{32}b_3' \qquad\qquad b_3'' = c_{23}b_2'+c_{33}b_3'$$

Entonces al ser $b_3' \neq 0$ y $b_2' \neq 0$, pueden elegirse c_{33} y c_{23} para que sea $b_3'' = 0$, obteniéndose

$$\frac{c_{33}}{c_{23}} = -\frac{b'_2}{b'_3}$$

que unida a las condiciones de ortogonalidad de **T**, permite determinar **T** (no de forma única). No puede ser, a la vez, $b_2'' = 0$ pues entonces **T** no sería una matríz regular al tener dos filas proporcionales. En cuanto al parámetro C, pueden elegirse k_2 y k_3 para que sea nulo, con lo que nos queda

$$h_1Y_1^2+2b_2''Y_2 = 0$$

que es del mismo tipo que la del caso b22)

Las ecuaciones anteriores son las llamadas ***formas canónicas*** de las cuádricas.

La ecuación canónica de las cuádricas con centro es

$$h_1x^2+h_2y^2+h_3z^2+C = 0$$

y si $C \neq 0$, dividiendo por h_1, h_2 y h_3 (que no son nulos)

$$\frac{x^2}{\frac{C}{h_1}}+\frac{y^2}{\frac{C}{h_2}}+\frac{z^2}{\frac{C}{h_3}}+1 = 0$$

Según los signos de los denominadores podemos distinguir los siguientes casos:

a) Si $C \neq 0$ separamos según que:

a1) Si $C/h_1 > 0$, $C/h_2 > 0$ y $C/h_3 > 0$ podemos hacer

$$a^2 = C/h_1 \qquad b^2 = C/h_2 \qquad c^2 = C/h_3$$

quedando la ecuación en la forma

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} + 1 = 0$$

cuádrica que se denomina ***elipsoide imaginario*** y la ecuación no tiene solución real.

a2) Si $C/h_1 > 0$, $C/h_2 > 0$ y $C/h_3 < 0$ podemos hacer

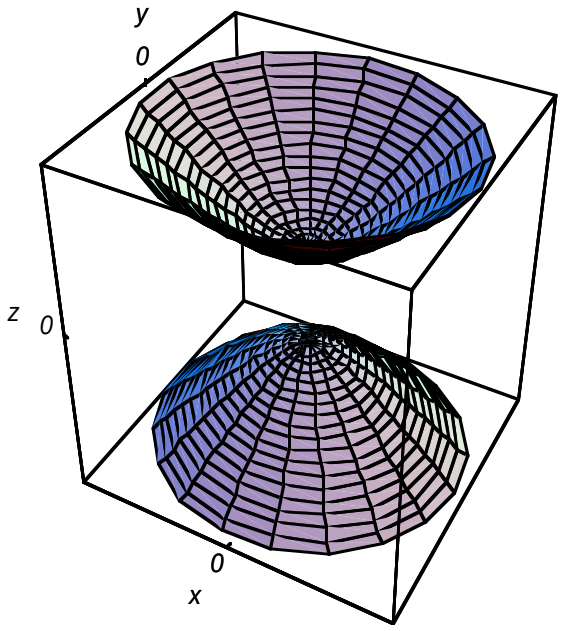
$$a^2 = C/h_1 \qquad b^2 = C/h_2 \qquad c^2 = -C/h_3$$

quedando en la forma

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} + 1 = 0$$

cuádrica que se denomina ***hiperboloide de dos hojas*** cuya representación geométrica es (basta considerar las intersecciones con los planos coordenados)

Hiperboloide de dos hojas



Análogamente ocurre si hay dos cocientes C/h_i positivos y uno negativo, se obtienen otros hiperboloides de dos hojas con eje de simetría uno de los tres ejes coordenados.

a3) Si $C/h_1 < 0$, $C/h_2 < 0$ y $C/h_3 > 0$ podemos hacer

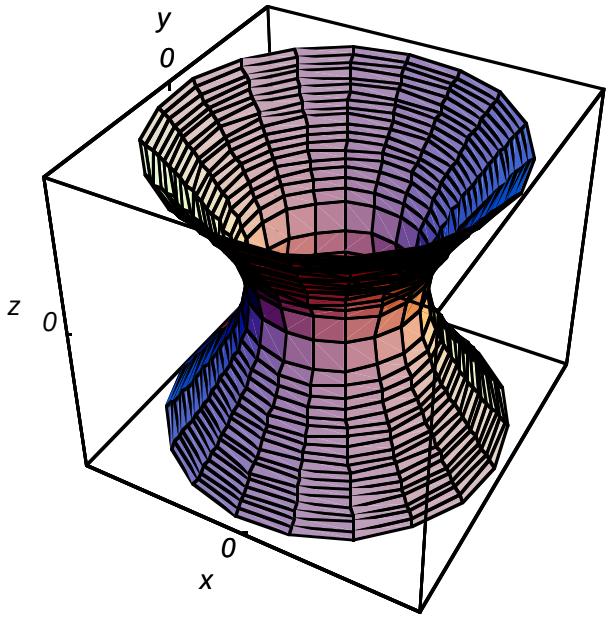
$$a^2 = -C/h_1 \qquad b^2 = -C/h_2 \qquad c^2 = C/h_3$$

quedando la ecuación en la forma

$$-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}+1=0$$

cuádrica que se denomina ***hiperboloide de una hoja*** de representación geométrica

Hiperboloide de una hoja



Análogamente ocurre si hay dos cocientes C/h_i negativos y uno positivo, se obtienen hiperboloides de una hoja con el eje de simetría según uno de los tres ejes coordenados.

a4) Si $C/h_1 < 0$, $C/h_2 < 0$ y $C/h_3 < 0$ podemos hacer

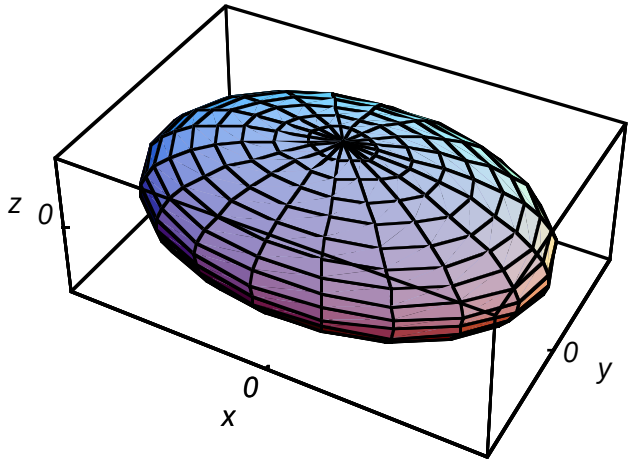
$$a^2 = -C/h_1 \qquad b^2 = -C/h_2 \qquad c^2 = -C/h_3$$

resultando

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1=0$$

cuádrica que se denomina ***elipsoide real*** (si $a = b = c = r$ se denomina ***esfera*** de radio r) cuya representación geométrica es

Elipsoide



b) Si $C = 0$ distinguimos según los signos de los coeficientes :

b1) Si $h_1 > 0$, $h_2 > 0$ y $h_3 > 0$ podemos hacer

$$a^2 = 1/h_1 \qquad b^2 = 1/h_2 \qquad c^2 = 1/h_3$$

quedando la ecuación en la forma

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0$$

y la cuádrica se denomina ***cono imaginario*** que tiene real el vértice (0,0,0).

b2) Si $h_1 > 0$, $h_2 > 0$ y $h_3 < 0$ podemos hacer

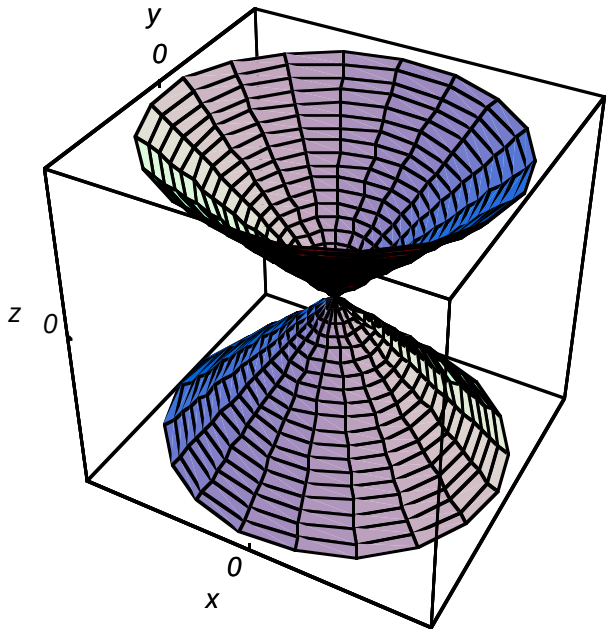
$$a^2 = 1/h_1 \qquad b^2 = 1/h_2 \qquad c^2 = -1/h_3$$

quedando la ecuación en la forma

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$$

y la cuádrica se denomina ***cono real***, elíptico o de revolución, cuya representación geométrica es

Cono elíptico



Análogamente ocurre si hay dos cocientes C/h_i positivos y uno negativo, se obtienen conos con el eje de simetría según uno de los tres ejes coordenados. Si dos cocientes son negativos y uno positivo, cambiando de signo toda la ecuación, estamos en el mismo caso. Si los tres cocientes son negativos, cambiando de signo estamos en el caso b1).

Para las cónicas sin centro, que son aquellas para las que el det(**A**) = 0, según las ecuaciones antes obtenidas, tenemos

a) Si $h_3 = 0$ es raíz simple y $b'_3 \neq 0$ (caso b11) la ecuación es

$$h_1x^2+h_2y^2+2b'_3z = 0$$

que vamos a distinguir según los signos :

a1) Si $h_1 < 0$ y $h_2 < 0$, para $b'_3 > 0$ se puede poner

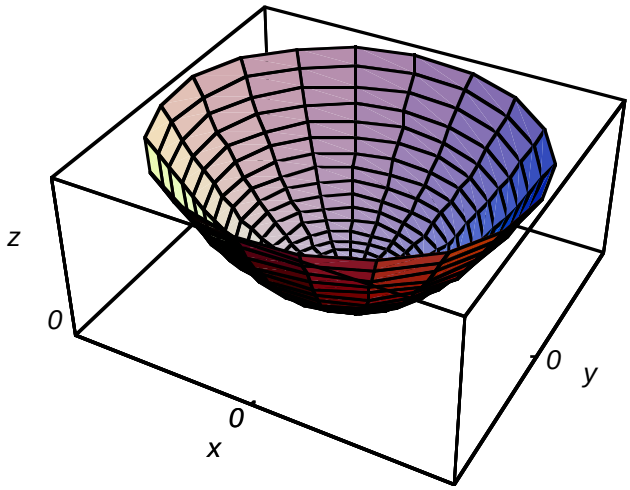
$$a^2 = -b'_3/h_1 \qquad\qquad b^2 = -b'_3/h_2$$

quedando en la forma

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} - 2z = 0$$

denominándose ***paraboloide***, elíptico o de revolución, cuya representación gráfica es

Paraboloide elíptico



Para $b_3' < 0$ haciendo

$$a^2 = b_3'/h_1 \qquad b^2 = b_3'/h_2$$

obtenemos el mismo tipo de paraboloide, con la concavidad hacia la parte negativa. Si $h_1 > 0$ y $h_2 > 0$ tenemos los mismos paraboloides.

a2) Si $h_1 > 0$ y $h_2 < 0$, para $b_3' > 0$ se puede poner

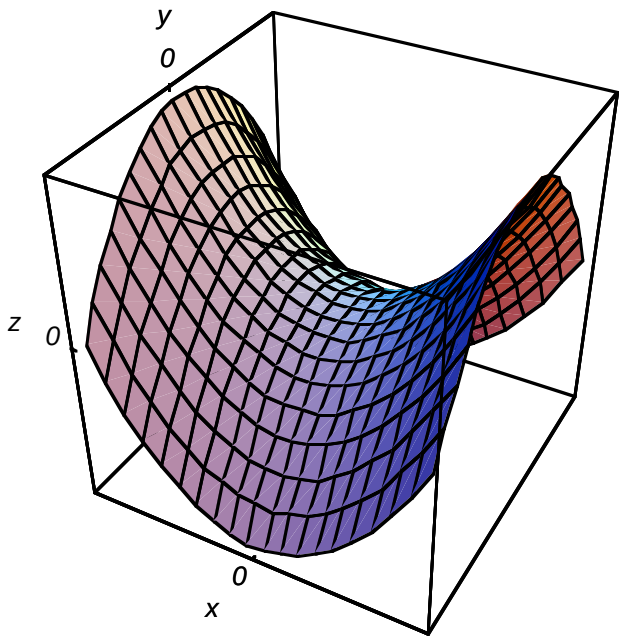
$$a^2 = b_3'/h_1 \qquad b^2 = -b_3'/h_2$$

quedando en la forma

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + 2z = 0$$

denominándose ***paraboloide hiperbólico***, cuya representación gráfica es

Paraboloide hiperbólico



Si fuera $b_3' < 0$ se puede poner

$$a^2 = -b_3'/h_1 \qquad b^2 = b_3'/h_2$$

resultando el mismo paraboloide orientado de forma contraria, respecto del eje vertical.

b) Si $h_3 = 0$ es raíz simple y $b_3' = 0$ (caso b12) la ecuación es

$$h_1x^2+h_2y^2+C = 0$$

Según el valor de C distinguimos los casos :

b1) Si $C \neq 0$ dividiendo por C tendremos

$$\frac{x^2}{C/h_1} + \frac{y^2}{C/h_2} + 1 = 0$$

que se separa según los signos en la forma :

b11) Si $C/h_1 > 0$ y $C/h_2 > 0$, puede hacerse

$$a^2 = C/h_1 \qquad b^2 = C/h_2$$

quedando en la forma

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + 1 = 0$$

que se denomina ***cilindro imaginario***.

b12) Si $C/h_1 > 0$ y $C/h_2 < 0$ se puede poner

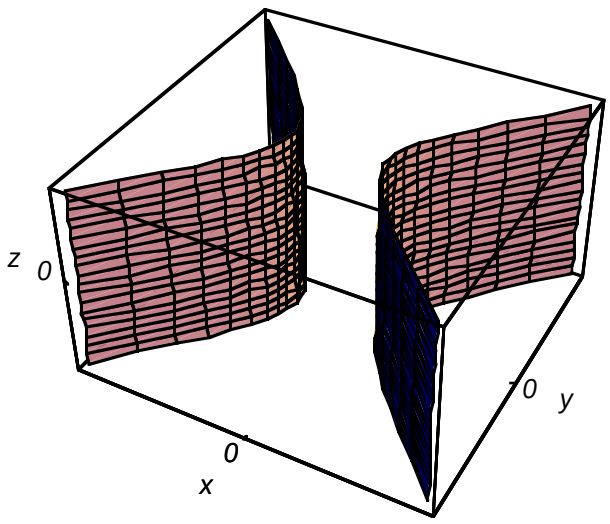
$$a^2 = C/h_1 \qquad b^2 = -C/h_2$$

quedando en la forma

$$-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$$

denominándose ***cilindro hiperbólico***, cuya representación gráfica es

Cilindro hiperbólico



El caso $C/h_1 < 0$ y $C/h_2 > 0$ se reduce a éste, con el cilindro orientado de adelante hacia atrás.

b13) Si $C/h_1 < 0$ y $C/h_2 < 0$ se puede poner

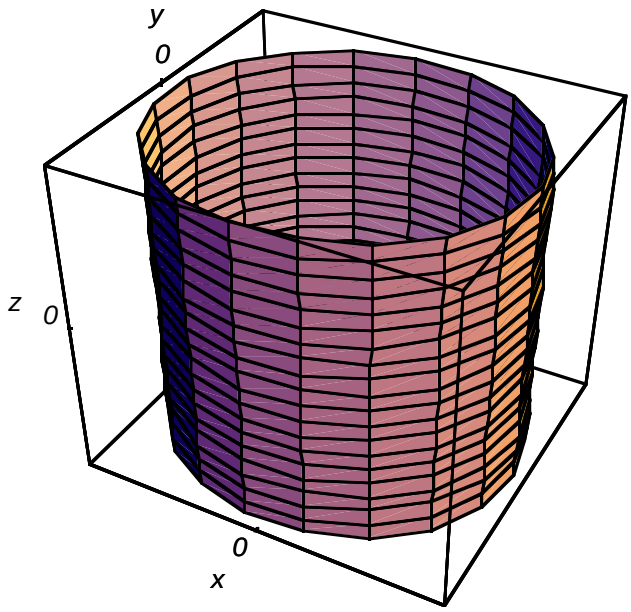
$$a^2 = -C/h_1 \qquad b^2 = -C/h_2$$

quedando en la forma

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$$

denominándose ***cilindro elíptico***, cuya representación gráfica es

Cilindro elíptico



b2) $C = 0$, se distinguen los casos:

b21) Si $h_1 > 0$ y $h_2 > 0$ queda en la forma

$$h_1x^2+h_2y^2 = 0 \iff (\sqrt{h_1}x+i\sqrt{h_2}y)\,(\sqrt{h_1}x-i\sqrt{h_2}y) = 0 \iff \left|\begin{array}{c}\sqrt{h_1}x+i\sqrt{h_2}y = 0\\ \vee \\ \sqrt{h_1}x-i\sqrt{h_2}y = 0\end{array}\right.$$

que son dos planos imaginarios que se cortan en la recta real

$$x = 0 \qquad y = 0$$

b22) Si $h_1 > 0$ y $h_2 < 0$ queda en la forma

$$h_1x^2-|h_2|\,y^2 = 0 \iff (\sqrt{h_1}x+\sqrt{|h_2|}\,y)(\sqrt{h_1}x-\sqrt{|h_2|}\,y) = 0 \iff \left|\begin{array}{c}\sqrt{h_1}x+\sqrt{|h_2|}\,y = 0\\ \vee \\ \sqrt{h_1}x-\sqrt{|h_2|}\,y = 0\end{array}\right.$$

que son dos planos reales.

c) Si $h_3 = 0$ es raíz doble y un coeficiente es distinto de 0, por ejemplo, $b'_2 \neq 0$ (caso b21), la ecuación es

$$h_1x^2+2b'_2y = 0$$

y haciendo

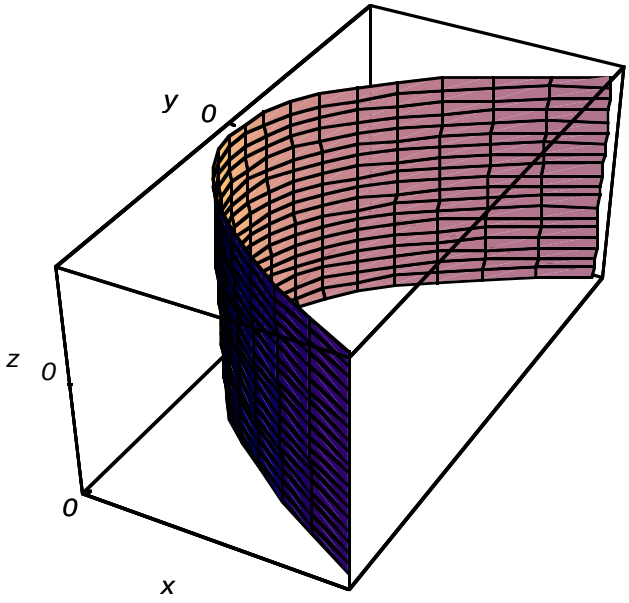
$$p = -2b_2'/h_1$$

puede ponerse en la forma

$$x^2-2py = 0$$

denominándose ***cilindro parabólico***, cuya representación gráfica es

Cilindro parabólico



d) Si $h_3 = 0$ es raíz doble y $b_3' = b_2' = 0$ (caso b21) la ecuación es

$$h_1x^2+C = 0$$

en la que distinguimos los casos siguientes :

d1) Si $C \neq 0$ diferenciamos entre:

d11) Si $C/h_1 > 0$, haciendo

$$a^2 = C/h_1$$

queda en la forma

$$x^2+a^2 = 0 \iff (x+ia)(x-ia) = 0 \iff \begin{array}{l}(x+ia) = 0 \\ \vee \\ (x-ia) = 0\end{array}$$

que son dos planos imaginarios.

d12) Si $C/h_3 < 0$, haciendo

$$a^2 = -C/h_1$$

puede ponerse en la forma

$$x^2-a^2 = 0 \iff (x+a)(x-a) = 0 \iff \begin{array}{c}(x+a) = 0 \\ \vee \\ (x-a) = 0\end{array}$$

que son dos planos reales paralelos.

d2) Si $C = 0$, la ecuación tiene la forma

$$x^2 = 0$$

que son dos planos reales coincidentes.

Ejemplo XI.3.1

Para la cuádrica

$$x_1^2+2x_2^2+4x_3^2-2x_1+8x_2+5 = 0$$

tendremos que en el sistema de referencia $(O;\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3)$ la matriz de su forma cuadrática

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Los valores propios son $h_1 = 1$, $h_2 = 2$, $h_3 = 4$. Como det $(\mathbf{A}) \neq 0$ es una cuádrica con centro. Vamos a reducirla a la forma canónica más simplificada; hacemos

$$k_1 = -\frac{b_1'}{h_1} = -\frac{-1}{1} = 1 \qquad k_2 = -\frac{b_2'}{h_2} = -\frac{4}{2} = -2 \qquad k_3 = -\frac{b_3'}{h_3} = -\frac{0}{2} = 0$$

$$C = c - \frac{b_1'^2}{h_1} - \frac{b_2'^2}{h_2} = 5 - \frac{1}{1} - \frac{16}{2} = -4$$

resultando

$$x^2+2y^2+4z^2-4 = 0$$

que es el elipsoide real

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} + \frac{z^2}{1} = 4$$

En el sistema $(O;\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3)$ las coordenadas del centro serán $O'(k_1,k_2,k_3)$, luego

$$O'(1,-2,0)$$

Para la cuádrica

$$4x_2{}^2+4x_3{}^2+4x_2x_3-2x_1-14x_2-22x_3+33 = 0$$

en la referencia cartesiana $(O;\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3)$ tenemos

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

cuyos valores propios son $h_1 = 0$, $h_2 = 2$ y $h_3 = 6$ y los vectores propios

$$\boldsymbol{u}_1 = (1,0,0) \in V(0) \quad , \quad \boldsymbol{u}_2 = (0,1/\sqrt{2},-1/\sqrt{2}) \in V(2) \quad , \quad \boldsymbol{u}_2 = (0,1/\sqrt{2},1/\sqrt{2}) \in V(6)$$

Como det $(\mathbf{A}) = 0$, se trata de una cuádrica sin centro. La matriz y ecuaciones del cambio de base son

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 0 & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \qquad \begin{aligned} x_1 &= X_1 \\ x_2 &= 1/\sqrt{2}\ X_2 + 1/\sqrt{2}\ X_3 \\ x_3 &= -1/\sqrt{2}\ X_2 + 1/\sqrt{2}\ X_3 \end{aligned}$$

con lo que

$$\begin{pmatrix} b'_1 \\ b'_2 \\ b'_3 \end{pmatrix} = \mathbf{S} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \mathbf{S} \begin{pmatrix} -1 \\ -7 \\ -11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -18/\sqrt{2} \\ -4/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

y la cuádrica en la referencia $(O;\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2,\boldsymbol{u}_3)$ tiene por ecuación

$$2X_2{}^2+6X_3{}^2-2X_1-(36/\sqrt{2})X_2-(8/\sqrt{2})X_3+33 = 0$$

Como h_1 es raíz simple, efectuamos el cambio de origen de O a $O'(k_1,k_2,k_3)$ dado por

$$k_2 = -\frac{b'_2}{h_2} = -\frac{\frac{-18}{\sqrt{2}}}{2} = \frac{9\sqrt{2}}{2}$$

$$k_3 = -\frac{b'_3}{h_3} = -\frac{\frac{-4}{\sqrt{2}}}{2} = \sqrt{2}$$

$$k_1 = \frac{\frac{b_2'^2}{h_2} + \frac{b_3'^2}{h_3} - c}{2b_1'} = -\frac{145}{2}$$

es decir,

$$X_1 = x - 145/2$$
$$X_2 = y + k_2 = y + (9\sqrt{2}/2)$$
$$X_3 = z + k_3 = z + \sqrt{2}$$

se obtiene $2y^2+6z^2-2x = 0$, que es el paraboloide elíptico

$$-x + y^2 + \frac{z^2}{\frac{1}{3}} = 0$$

EJERCICIOS DEL CAPITULO XI

XI.1 .- Hallar la ecuación de las elipses, referidas a un sistema de referencia ortonormal en que los ejes de simetría de las elipses coinciden con los ejes de coordenadas, sabiendo que

a) Su excentricidad es 3/5 y su distancia focal es igual a 3.

b) Su excentricidad es $\sqrt{5}/3$ y su semieje mayor es igual a 3.

c) Su semieje mayor es 7 y el punto $P(3,10\sqrt{10}/7)$ pertenece a la elipse.

d) Los puntos $P(2,3\sqrt{3}/2)$ y $Q(-3,3\sqrt{7}/4)$ pertenecen a la elipse.

e) Dos vértices son los puntos (10,0) y (0,6).

XI.2 .- Hallar la ecuación de las hipérbolas, referidas a un sistema ortonormal en que los ejes de las mismas coinciden con los ejes de coordenadas, sabiendo que

a) Su excentricidad es 5/4 y su distancia focal 5.

b) Su excentricidad es $\sqrt{13}/3$ y el punto $P(5,8/3)$ pertenece a la hipérbola.

c) Los puntos $P(25/4,3)$ y $Q(5,0)$ pertenecen a la hipérbola.

XI.3 .- Hallar la ecuación de las parábolas, referidas a un sistema ortonormal en que el eje OX coincide con el eje de las parábolas y el origen de coordenadas es el vértice de las mismas, sabiendo que

a) La ecuación de su directriz es $x = -2$.

b) Pasa por el punto $P(6,6)$.

c) Su foco es el punto $F(3,0)$.

XI.4 .- En el plano euclídeo y respecto de una referencia ortonormal, clasificar las siguientes cónicas y hallar sus ecuaciones reducidas

a) $y^2+2xy+x^2-2y+x+1 = 0$

b) $4x^2-2xy+y^2-14x+2y+13 = 0$

c) $2x^2-3xy-2x+5y-3 = 0$

d) $y^2+2xy-6x-8y+15 = 0$

e) $y^2-2xy+4y-2x+3 = 0$

XI.5 .- En el plano euclídeo y respecto de una referencia ortonormal, clasificar, según los valores del parámetro real a, la cónica

$$3ax^2+y^2+2xy-4ax+2y+2 = 0$$

Hallando en cada caso su ecuación reducida.

XI.6 .- En el plano euclídeo y respecto de una referencia ortonormal, sea la cónica

$$-4\sqrt{2}x^2+28\sqrt{2}y^2+16xy+2x = 0$$

obtener una ecuación reducida de ella que conste sólo de dos términos.

XI.7 .- En el plano euclídeo y respecto de una referencia ortonormal, sea el haz de cónicas

$$x^2+a^2y^2+(a^2-a)xy-a^2y = 0$$

Determinar el lugar geométrico de sus centros.

XI.8 .- En el plano euclídeo y respecto de una referencia ortonormal, determinar la ecuación de la hipérbola que pasa por el punto (2,5) y cuyas asíntotas son las rectas

$$y+2 = 0 \qquad\qquad x-y = 1$$

XI.9 .- En el plano euclídeo y respecto de una referencia ortonormal, determinar la ecuación de la cónica que pasa por el origen y por los puntos

$$A(2,0) \quad , \quad B(0,-3) \quad , \quad C(-1,4) \quad , \quad D(-2,2)$$

XI.10.- En el plano euclídeo y respecto de una referencia ortonormal, sea la cónica de ecuación

$$ax^2-4y^2+4xy-4ax-16y = 0$$

Clasificarla según los distintos valores del parámetro $a\in\mathbf{R}$.

XI.11.- En el plano euclídeo y respecto de una referencia ortonormal, hallar razonadamente la ecuación de la cónica que pasa por los puntos $A(3,0)$, $B(0,1)$ y $C(1,1)$ y que tiene por centro de simetría el origen de coordenadas.

XI.12.- En el plano euclídeo y respecto de una referencia ortonormal obtener la ecuación de la tangente en el punto (3,5) de la cónica $2x^2-2xy+y^2+2x-8y+21 = 0$.

XI.13.- En el plano euclídeo y respecto de una referencia ortonormal, hallar la ecuación de la cónica que pasa por los puntos $A(2,0)$; $B(6,0)$; $C(0,-3)$; $D(0,4)$; $E(1,-2)$.

XI.14.- En el plano euclídeo y respecto de una referencia ortonormal, hallar el lugar geométrico de los centros de los triángulos equiláteros inscritos en la elipse

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0$$

XI.15.- En el plano euclídeo y respecto de una referencia ortonormal, sea la ecuación $x^2+2Axy+By^2-2x+4Ay-A^2=0$. Calcular B en función de A para que se descomponga en dos rectas y hallar su intersección.

XI.16.- En el plano euclídeo y respecto de una referencia ortonormal, sea la cónica de ecuación

$$x^2+2xy-2y^2+2x-4y+1=0$$

Hallar un paralelogramo circunscrito a dicha cónica, cuyos lados tengan las direcciones de los vectores $\boldsymbol{a}_1=(1,0)$ y $\boldsymbol{a}_2=(1,1)$.

XI.17.- En el plano euclídeo y respecto de una referencia ortonormal, clasificar según los distintos valores de a y b la cónica que admite como ecuación

1) $(a+b)(x^2+y^2)+2(a-b)(xy+1)=0$ con $a,b\in\mathbf{R}$

2) $ax^2+2bxy+ay^2+(a+b)(x+y)+1=0$ con $a,b\in\mathrm{R}$

XI.18.- En el plano euclídeo y respecto de una referencia ortonormal, considérese el conjunto

$$C=\{\,P(x,y)\mid x=\frac{a\lambda^2+b\lambda+c}{\alpha\lambda^2+\beta\lambda+\gamma}\ \wedge\ y=\frac{a'\lambda^2+b'\lambda+c'}{\alpha\lambda^2+\beta\lambda+\gamma}\ \wedge\ \lambda\in\mathbf{R}\}$$

Demostrar que C es una cónica y clasificarla.

XI.19.- La intersección de la esfera $x^2+y^2+z^2-2x-2y-4z-4=0$ con el plano $x+y-z-1=0$, se proyecta ortogonalmente sobre el plano coordenado XOY. Estudiar la cónica proyección y hallar su ecuación reducida.

XI.20.- Hallar la ecuación reducida y un sistema de referencia ortonormal para las siguientes cuádricas:

a) $5x^2-4xy+2xz+2y^2-4yz+3z^2-1 = 0$

b) $x^2+2xy-2y^2+2yz-2x-4y+2z+4 = 0$

c) $xy-3xz+2yz = 0$

d) $2x^2-2xy-4xz+5y^2+2y+2z^2+2x-10y-2z+4 = 0$

e) $4x^2-4xy-2yz-z^2+3x+3z = 0$

f) $x^2+2xy-2xz+y^2-2yz+z^2-4x-4y+4z+3 = 0$

g) $x^2-2y^2+z^2-4xy+6xz-8yz+6x+8y-2z+3 = 0$

h) $x^2+2y^2+3z^2-4xz+2y-2z-1 = 0$

i) $y^2+4xz+1 = 0$

XI.21.- En el espacio euclídeo y respecto de una referencia ortonormal, sean las cuádricas que admiten por ecuación

$$x^2+2y^2-2xy+2yz+2x+az+1 = 0 \quad \text{con } a\in \mathbf{R}$$

Hallar los valores de a para los que se obtienen conos. Determinar y clasificar dichos conos.

XI.22.- En el espacio euclídeo y respecto de una referencia ortonormal, considérense las cuádricas que admiten por ecuaciones

$$x^2-2y^2+az^2-2xz+2yz+2x+1 = 0 \quad \text{con } a\in \mathbf{R}$$

Clasificar dichas cuádricas según los distintos valores de a.

XI.23.- En el espacio euclídeo y respecto de una referencia ortonormal, sean las cuádricas de ecuación

$$x^2+y^2(a+1)-2az+4(a-1)y+3 = 0$$

Hallar el lugar geométrico de los centros de dichas cuádricas para $a\in \mathbf{R}$.

XI.24.- En el espacio euclídeo y respecto de una referencia ortonormal, hallar la ecuación del paraboloide de revolución cuyo vértice es el origen de coordenadas, su eje es el OZ, y pasa por el punto $P = (0,1,1)$.

XI.25.- En el espacio euclídeo y respecto de una referencia ortonormal, sea la cuádrica de de ecuación

$$x^2+3y^2+6z^2+2xy-2xz+6yz+6z-4 = 0$$

Hallar la intersección de dicha superficie con el plano que pasa por el punto (1,2,1) y es perpendicular a la recta

$$x+y = 1 \qquad\qquad x-z = 2$$

XI.26.- Hallar el lugar geométrico de los puntos del espacio que equidistan de dos rectas que se cruzan.

XI.27.- Hallar la ecuación de una superficie determinada por una elipse que gira alrededor de la recta que une sus focos. Idem de una hipérbola.

BIBLIOGRAFIA

de Burgos J. (1988). *Curso de Algebra y Geometría*. Alhambra. Madrid.

Hoffmann R., Kunze R. (1974). *Algebra Lineal*. Prentice. Madrid.

Puerta F. (1986). *Algebra lineal*. Marcombo. Barcelona.

Sainz M.A., S erarols J.L. Pérez A.M. (1994). *Álgebra*. Escuela Politécnica Superior. Gerona.

Torregrosa J.R., Jordan C. (1987). *Algebra Lineal y sus aplicaciones*. McGraw-Hill. Madrid.

Trillas E., Alsina C. (1984). *Lecciones de Algebra y Geometría*. Gustavo Gili. Barcelona.