CUADERNO V

MATRICES Y ALGORITMOS MATRICIALES

Miguel A. Sainz, Joan Serarols, Anna M. Pérez
Dep. de Informática y Matemática Aplicada
Universidad de Girona

RESUMEN: Se va a definir y estudiar la principal herramienta del álgebra lineal: las matrices. En principio se definirán como unos objetos asociados a las aplicaciones lineales, y despues adquirirán identidad algebraica propia, formando sus propias estructuras. Mediante las matrices se estudiarán problemas como el cambio de base, el estudio del núcleo, imagen y rango de una aplicación lineal, la solución de un sistema de ecuaciones lineales, y se crearán algoritmos muy eficientes para resolverlos.

V.1.- MATRIZ DE UNA APLICACION LINEAL

Sea f una aplicación lineal entre U y V e.v.s.un mismo cuerpo K. De acuerdo con el teorema de la determinanción de una aplicación lineal, para definir f basta asignar imágenes $\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\ldots,\boldsymbol{b}_n$ a los vectores de una base $(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,..,\boldsymbol{e}_n)$ de U. Supongamos que el espacio vectorial final V es de dimensión finita y que $(\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2,..,\boldsymbol{u}_m)$ es una base; expresando los vectores $\boldsymbol{b}_1,...,\boldsymbol{b}_n$ como combinación lineal de los vectores de esta base, tendremos para la aplicación lineal

$$
\begin{aligned}
f:\ U &\longrightarrow V \\
\boldsymbol{e}_1 &\longrightarrow f(\boldsymbol{e}_1) = \boldsymbol{b}_1 = a_{11}\boldsymbol{u}_1+a_{21}\boldsymbol{u}_2+...+a_{m1}\boldsymbol{u}_m \\
\boldsymbol{e}_2 &\longrightarrow f(\boldsymbol{e}_2) = \boldsymbol{b}_2 = a_{12}\boldsymbol{u}_1+a_{22}\boldsymbol{u}_2+...+a_{m2}\boldsymbol{u}_m \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\boldsymbol{e}_n &\longrightarrow f(\boldsymbol{e}_n) = \boldsymbol{b}_n = a_{1n}\boldsymbol{u}_1+a_{2n}\boldsymbol{u}_2+...+a_{mn}\boldsymbol{u}_m
\end{aligned}
$$

donde las componentes de los vectores $\boldsymbol{b}_i$ respecto de la base $(\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2,...,\boldsymbol{u}_n)$ han sido expresadas mediante una letra, afectada de dos subíndices que indican de que vector $\boldsymbol{b}_i$ y respecto a que vector $\boldsymbol{u}$ están referidas. Al ser únicas estas componentes tenemos que, fijadas las bases $(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\ldots,\boldsymbol{e}_n)$ y $(\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2,...,\boldsymbol{u}_m)$ de U y V, una aplicación lineal entre ambos espacios viene determinada por las componentes, respecto de la base $(\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2,...,\boldsymbol{u}_m)$ del espacio final V, de los vectores imagen de los que forman la base $(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\ldots,\boldsymbol{e}_n)$ del espacio inicial U. Estas componentes las escribiremos dispuestas en m filas, que es la dimensión de V, y n columnas, que es la dimensión de U, de modo que la columna i–ésima está formada por los elementos de K que son las componentes, respecto de la base del espacio final, del vector imagen del vector i-ésimo de la base del espacio inicial; así tendremos la disposición de elementos de K en m filas y n columnas

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & .. & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & .. & a_{2n} \\ ..... & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & .. & a_{mn} \end{pmatrix}$$

que denominaremos ***matriz de f*** referida a las bases $(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,...,\boldsymbol{e}_n)$ y $(\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2,...,\boldsymbol{u}_m)$; llamaremos ***orden*** de la matriz al par (m,n) formado por el número de filas y el de columnas.

Ejemplo V.1.1

Sean los espacios $\mathbf{R}^2$ y $\mathbf{R}^3$ referidos a las bases canónicas y la aplicación lineal

$$\begin{aligned} f:\ \mathbf{R}^2 &\longrightarrow \mathbf{R}^3 \\ (1,0) &\longrightarrow (3,4,2) \\ (0,1) &\longrightarrow (4,1,-1) \end{aligned}$$

Su matriz referida a estas bases es

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Si elegimos ((1,2,−1),(0,0,1),(0,−1,−1)) como base de $\mathbf{R}^3$, la matriz de f referida a la base canónica de $\mathbf{R}^2$ y a esta base de $\mathbf{R}^3$, se construirá hallando las componentes de los vectores imagen

$$(3,4,2) = \alpha_1(1,2,-1)+\alpha_2(0,0,1)+\alpha_3(0,-1,-1)$$

Resolviendo esta ecuación por el método de Gauss-Jordan

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & -1 & 4 \\ -1 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 5 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} \to$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

de donde

$$(3,4,2) = 3(1,2,-1)+7(0,0,1)+2(0,-1,-1)$$

Análogamente se obtiene

$$(4,1,-1) = 4(1,2,-1)+10(0,0,1)+7(0,-1,-1)$$

con lo que la nueva matriz de f es

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 7 & 10 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$$

Si elegimos ((1,−3),(2,2)) como base de $\mathbf{R}^2$ y ((1,2,−1),(0,0,1),(0,−1,−1)) de $\mathbf{R}^3$, para hallar la nueva matriz de f respecto de estas bases, hallaremos las imágenes de los vectores de la base de $\mathbf{R}^2$, obteniendo previamente la fórmula de la aplicación

$$\begin{array}{rcl} f: \mathbf{R}^2 & \longrightarrow & \mathbf{R}^3 \\ (x,y) & \longrightarrow & f(x,y) = x(3,4,2)+y(4,1,-1) = (3x+4y,4x+y,2x-y) \end{array}$$

con lo que $f(1,-3) = (-9,1,5)$ y $f(2,2) = (14,10,2)$, y después las componentes de estos vectores en la base de $\mathbf{R}^3$

$$(-9,1,5) = \alpha_1(1,2,-1)+\alpha_2(0,0,1)+\alpha_3(0,-1,-1)$$

cuya solución es

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -9 \\ 2 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 5 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -9 \\ 0 & 0 & -1 & 19 \\ 0 & 1 & -1 & -4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -9 \\ 0 & 1 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & -1 & 19 \end{pmatrix} \to$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -9 \\ 0 & 1 & 0 & -23 \\ 0 & 0 & -1 & 19 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -9 \\ 0 & 1 & 0 & -23 \\ 0 & 0 & 1 & -19 \end{pmatrix}$$

de donde

$$(-9,1,5) = -9(1,2,-1)-23(0,0,1)-19(0,-1,-1)$$

y análogamente para el otro vector se obtiene

$$(14,10,2) = 14(1,2,-1)+34(0,0,1)+18(0,-1,-1)$$

Así, la matriz de f referida a estas dos bases es

$$\begin{pmatrix} -9 & 14 \\ -23 & 34 \\ -19 & 18 \end{pmatrix}$$

Vemos que una aplicación lineal tendrá matrices distintas según las bases elegidas para ambos espacios, pero una vez elegidas éstas la matriz es única. Si $\mathrm{L}(U,V)$ es el conjunto de las aplicaciones lineales de U en V y designamos por $M_{(m,n)}(K)$ el conjunto de matrices de elementos de K con m filas y n columnas, la correspondencia

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{L}(U,V) & \longrightarrow & M_{(m,n)}(K) \\ f & \longrightarrow & \mathbf{M}_f \end{array}$$

en la que a cada aplicación lineal entre U y V le asociamos como imagen su matriz respecto a dos bases previamente establecidas para U y V, es una aplicación. Recíprocamente, a toda matriz de $M_{(m,n)}(K)$ le corresponde la aplicación lineal entre U y V en la que las imágenes de los vectores de la base dada de U son los vectores de V que, respecto de una base dada de V, tienen por componentes las columnas de la matriz; como esta aplicación es única, según el teorema de la determinación de una aplicación lineal, la correspondencia anterior es una biyección.

Ejemplo V.1.2

Sean los espacios vectoriales $\mathbf{R}^2$ y $\mathbf{R}^3$ referidos a las bases canónicas. La aplicación lineal que respecto de estas bases tiene por matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

es

$$\begin{aligned} f:\ \mathbf{R}^2 &\longrightarrow \mathbf{R}^3 \\ (1,0) &\longrightarrow (1,2,0) \\ (0,1) &\longrightarrow (4,2,1) \end{aligned}$$

Sean ahora las bases $((1,-3),(2,2))$ de $\mathbf{R}^2$ y $((1,2,-1),(0,0,1),(0,-1,-1))$ de $\mathbf{R}^2$ y $\mathbf{R}^3$. La aplicación lineal que respecto de estas bases tiene por matriz,

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

es

$$\begin{aligned} f:\ \mathbf{R}^2 &\longrightarrow \mathbf{R}^3 \\ (1,-3) &\longrightarrow 1(1,2,-1)+2(0,0,1)+0(0,-1,-1) = (1,2,1) \\ (2,2) &\longrightarrow 4(1,2,-1)+2(0,0,1)+1(0,-1,-1) = (4,7,-3) \end{aligned}$$

Según lo anterior parece que no tiene sentido plantearse una matriz si previamente no se han establecido dos espacios vectoriales y sendas bases. Sin embargo, al igual que en el estudio de las funciones reales de variable real es posible establecer un convenio para definir muchas de ellas mediante una fórmula, una disposición de $m \cdot n$ elementos de un cuerpo K, dispuestos en m filas y n columnas, define una matriz, conviniendo en que su aplicación lineal asociada es la aplicación lineal entre K^n y K^m, referidos a sus bases canónicas, tal que el i-ésimo vector de la base canónica de K^n tiene por imagen el vector cuyas componentes respecto de la base canónica de K^m son los elementos de la columna i-ésima de la matriz, a la cual nos referiremos brevemente llamándole vector columna.

Ejercicios

V.1.- Sea la aplicación lineal

$$\begin{array}{rcl} f: & \mathbf{R}^3 & \longrightarrow \mathbf{R}^3 \\ & (x,y,z) & \longrightarrow (3x, x-y, 2x+y+z) \end{array}$$

a) Probar que $f \in \mathcal{GL}(\mathbf{R}^3)$ y hallar f^{-1}.

b) Determinar la matriz de f en la base ((1,0,1),(−1,2,1),(2,1,1)).

V.2.- Sea $\mathbf{R}^3$ referido a la base $(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3)$ y una aplicación lineal $f: \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}^3$, tal que

$$f(\boldsymbol{e}_2) = \boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{e}_3 \qquad\qquad f(\boldsymbol{e}_3) = 2\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2 + 4\boldsymbol{e}_3$$

Sabiendo que el núcleo de f está engendrado por el vector $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{e}_1 + 2\boldsymbol{e}_2 + 3\boldsymbol{e}_3$, hallar la matriz asociada a f en la base $(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3)$

V.3.- Sea $\mathbf{R}_2(x)$ el espacio vectorial de los polinomios con coeficientes reales y grado menor o igual a dos. Sea f la aplicación:

$$\begin{array}{rcl} f: \mathbf{R}_2(x) & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ p(X) & \longrightarrow & f(p(x)) = \displaystyle\int_0^1 p(x)\,dx \end{array}$$

a) Hallar la imagen de $p(x) = x^2+x+2$.

b) Probar que f es lineal.

c) Calcular la matriz asociada a f.

d) Hallar el rang f, Nuc(f) e Im(f) y una base de estos últimos subespacios.

V.4.- Definir los endomorfismos correspondientes a las matrices

$$\begin{pmatrix} a_1 & 0 & .. & 0 \\ 0 & a_2 & .. & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & .. & a_n \end{pmatrix} \qquad\qquad \begin{pmatrix} a & 0 & .. & 0 \\ 0 & a & .. & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & .. & a \end{pmatrix}$$

Definimos ***rango de una matriz*** como la dimensión del subespacio engendrado por sus vectores columna, es decir, el número máximo de vectores columna linealmente independientes. El rango de una matriz coincide con el de cualquier aplicación lineal asociada a ella ya que, según el teorema de la determinación de una aplicación lineal, éste es igual a la dimensión del subespacio formado por los vectores imagen, que forman las columnas de la matriz.

Ejercicios

V.5.- Dada la aplicación f de $\mathbf{R}^3$ en $\mathbf{R}^2$ definida por $f(x,y,z) = (\alpha_1 x+\alpha_2 y, \alpha_3 x+\alpha_4 y)$, con α_1 = , α_2 = , α_3 = , α_4 = ,

a) Demostrar que es lineal.

b) Bases del núcleo e imagen

c) Clasificar la aplicación.

d) Hallar su matriz respecto a las bases canónicas

e) Rango de esta matriz.

V.6.- Dada la aplicación f de $\mathbf{R}$ en $\mathbf{R}$ definida por $f(x) = -3x$,

a) Demostrar que es lineal.

b) Bases del núcleo e imagena.

c) Clasificarla.

d) Hallar su matriz respecto a las bases canónicas

e) Rango de esta matriz.

V.2.- OPERACIONES CON MATRICES

Como sobre las aplicaciones lineales entre espacios vectoriales hemos definido leyes de composición, la suma el producto por un escalar y la composición de aplicaciones, definamos sobre las matrices leyes de composición análogas, de forma que la biyección entre aplicaciones lineales y matrices conserve las operaciones. Para ello habrá que definir matriz suma de **A** y **B** como la matriz de la aplicación suma $f_{\mathbf{A}}+f_{\mathbf{B}}$, matriz producto de **A** por un escalar α como la matriz de la aplicación $\alpha f_{\mathbf{A}}$ y matriz del producto de **A** y **B** como la matriz de la aplicación compuesta $f_{\mathbf{A}} \circ f_{\mathbf{B}}$, según vamos a ver a continuación.

Suma de matrices : Sean

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & .. & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & .. & a_{2n} \\ ..... & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & .. & a_{mn} \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & .. & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & .. & b_{2n} \\ ..... & & & \\ b_{m1} & b_{m2} & .. & b_{mn} \end{pmatrix}$$

dos matrices sobre K, del mismo tipo, y sus aplicaciones asociadas

$$\begin{aligned} f_{\mathbf{A}}: \quad K^n &\longrightarrow K^m \\ (1,0,...,0) &\longrightarrow (a_{11},a_{21},...,a_{m1}) \\ (0,1,...,0) &\longrightarrow (a_{12},a_{22},...,a_{m2}) \\ &..... \\ (0,0,...,1) &\longrightarrow (a_{1n},a_{2n},...,a_{mn}) \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} f_{\mathbf{B}}: \quad K^n &\longrightarrow K^m \\ (1,0,...,0) &\longrightarrow (b_{11},b_{21},...,b_{m1}) \\ (0,1,...,0) &\longrightarrow (b_{12},b_{22},...,b_{m2}) \\ &..... \\ (0,0,...,1) &\longrightarrow (b_{1n},b_{2n},...,b_{mn}) \end{aligned}$$

La aplicación suma es

$$
\begin{array}{rcl}
f_{\mathbf{A}}+f_{\mathbf{B}}: \quad K^n & \longrightarrow & K^m \\
(1,0,...0) & \longrightarrow & (a_{11}+b_{11},a_{21}+b_{21},...,a_{m1}+b_{m1}) \\
(0,1,...0) & \longrightarrow & (a_{12}+b_{12},a_{22}+b_{22},...,a_{m2}+b_{m2}) \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & & \\
(0,0,...1) & \longrightarrow & (a_{1n}+b_{1n},a_{2n}+b_{2n},...,a_{mn}+b_{mn})
\end{array}
$$

que tiene por matriz, respecto a las bases canónicas que hemos utilizado para K^n y K^m

$$
\mathbf{A}+\mathbf{B} = \begin{pmatrix}
a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & .. & a_{1n}+b_{1n} \\
a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & .. & a_{2n}+b_{2n} \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & & & \\
a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & .. & a_{mn}+b_{mn}
\end{pmatrix}
$$

que definimos como matriz suma de **A** y **B**. Obsérvese que **A** y **B** deben ser del mismo tipo pues si no las aplicaciones lineales asociadas no podrían sumarse. Como $(\mathbf{L}(K^n,K^m),+)$ es un grupo abeliano, $(M_{(m,n)}(K),+)$ es también un grupo abeliano, cuyo elemento neutro es la matriz, que llamaremos matriz nula de tipo (m,n)

$$
\begin{pmatrix}
0 & 0 & .. & 0 \\
0 & 0 & .. & 0 \\
\cdots\cdots & & & \\
0 & 0 & .. & 0
\end{pmatrix}
$$

por ser la matriz asociada a la aplicación nula, y la opuesta de **A** es la matriz

$$
\begin{pmatrix}
-a_{11} & -a_{12} & .. & -a_{1n} \\
-a_{21} & -a_{22} & .. & -a_{2n} \\
\cdots\cdots\cdots\cdots & & & \\
-a_{m1} & -a_{m2} & .. & -a_{mn}
\end{pmatrix}
$$

por ser la asociada a la aplicación opuesta.

***Producto externo**:* Sea **A** la matriz anterior, $\alpha \in K$ y $f_{\mathbf{A}}$ la aplicación asociada. La aplicación

$$
\begin{array}{rcl}
\alpha f_{\mathbf{A}}: \quad K^n & \longrightarrow & K^m \\
(1,0,...,0) & \longrightarrow & \alpha(a_{11},a_{21},...,a_{m1}) = (\alpha a_{11},\alpha a_{21},...,\alpha a_{m1}) \\
(0,1,...,0) & \longrightarrow & \alpha(a_{12},a_{22},...,a_{m2}) = (\alpha a_{12},\alpha a_{22},...,\alpha a_{m2}) \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
(0,0,...,1) & \longrightarrow & \alpha(a_{1n},a_{2n},...,a_{mn}) = (\alpha a_{1n},\alpha a_{2n},...,\alpha a_{mn})
\end{array}
$$

tiene por matriz

$$
\alpha\mathbf{A} = \begin{pmatrix}
\alpha a_{11} & \alpha a_{12} & .. & \alpha a_{1n} \\
\alpha a_{21} & \alpha a_{22} & .. & \alpha a_{2n} \\
\cdots\cdots\cdots\cdots & & & \\
\alpha a_{m1} & \alpha a_{m2} & .. & \alpha a_{mn}
\end{pmatrix}
$$

que definimos como matriz producto de **A** por el escalar α. Como $\mathbf{L}(K^n,K^m)$ con la suma

anterior y este producto externo es un espacio vectorial sobre K, también $M_{(m,n)}(K)$ con la suma y el producto por un escalar es un espacio vectorial, y es de dimensión $m \cdot n$ pues una base suya, la base canónica, la forman las matrices (m,n) con todos los elementos nulos excepto uno de ellos, igual a 1, colocado sucesivamente en una de las posiciones de la matriz, es decir

$$\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & .. & 0 \\ 0 & 0 & .. & 0 \\ . & . & . & . \\ 0 & 0 & .. & 0 \end{pmatrix},\ldots,\begin{pmatrix} 0 & 0 & .. & 1 \\ 0 & 0 & .. & 0 \\ . & . & . & . \\ 0 & 0 & .. & 0 \end{pmatrix},\ldots,\begin{pmatrix} 0 & 0 & .. & 0 \\ 0 & 0 & .. & 0 \\ . & . & . & . \\ 1 & 0 & .. & 0 \end{pmatrix},\ldots,\begin{pmatrix} 0 & 0 & .. & 0 \\ 0 & 0 & .. & 0 \\ . & . & . & . \\ 0 & 0 & .. & 1 \end{pmatrix}\right)$$

pues forman un conjunto linealmente independiente, dado que

$$\lambda_{11}\begin{pmatrix} 1 & 0 & .. & 0 \\ 0 & 0 & .. & 0 \\ . & . & . & . \\ 0 & 0 & .. & 0 \end{pmatrix} + \lambda_{12}\begin{pmatrix} 0 & 1 & .. & 0 \\ 0 & 0 & .. & 0 \\ . & . & . & . \\ 0 & 0 & .. & 0 \end{pmatrix} + \ldots + \lambda_{mn}\begin{pmatrix} 0 & 0 & .. & 0 \\ 0 & 0 & .. & 0 \\ . & . & . & . \\ 0 & 0 & .. & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & .. & 0 \\ 0 & 0 & .. & 0 \\ . & . & . & . \\ 0 & 0 & .. & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \lambda_{ij} = 0$$

y toda matriz de $M_{(m,n)}(K)$ es combinación lineal de ellas

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & .. & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & .. & a_{2n} \\ . & . & . & . \\ a_{m1} & a_{m2} & .. & a_{mn} \end{pmatrix} = a_{11}\begin{pmatrix} 1 & 0 & .. & 0 \\ 0 & 0 & .. & 0 \\ . & . & . & . \\ 0 & 0 & .. & 0 \end{pmatrix} + a_{12}\begin{pmatrix} 0 & 1 & .. & 0 \\ 0 & 0 & .. & 0 \\ . & . & . & . \\ 0 & 0 & .. & 0 \end{pmatrix} + \ldots + a_{mn}\begin{pmatrix} 0 & 0 & .. & 0 \\ 0 & 0 & .. & 0 \\ . & . & . & . \\ 0 & 0 & .. & 1 \end{pmatrix}$$

Producto interno: Sean

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & .. & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & .. & a_{2n} \\ . & . & . & . \\ a_{m1} & a_{m2} & .. & a_{mn} \end{pmatrix} \in M_{(m,n)}(K) \qquad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & .. & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & .. & b_{2p} \\ . & . & . & . \\ b_{n1} & b_{n2} & .. & b_{np} \end{pmatrix} \in M_{(n,p)}(K)$$

y sus aplicaciones lineales asociadas

$$\begin{aligned} f_{\mathbf{A}}: \quad K^n &\longrightarrow K^m \\ (1,0,\ldots,0) &\longrightarrow (a_{11},a_{21},\ldots,a_{m1}) \\ (0,1,\ldots,0) &\longrightarrow (a_{12},a_{22},\ldots,a_{m2}) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ (0,0,\ldots,1) &\longrightarrow (a_{1n},a_{2n},\ldots,a_{mn}) \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} g_{\mathbf{B}}: \quad K^p &\longrightarrow K^n \\ (1,0,\ldots,0) &\longrightarrow (b_{11},b_{21},\ldots,b_{n1}) \\ (0,1,\ldots,0) &\longrightarrow (b_{12},b_{22},\ldots,b_{n2}) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ (0,0,\ldots,1) &\longrightarrow (b_{1p},b_{2p},\ldots,b_{np}) \end{aligned}$$

La aplicación compuesta

$$f_{\mathbf{A}} \circ g_{\mathbf{B}} : K^p \longrightarrow K^m$$

está definida por las imágenes

$$f(g(1,0,...,0)) = f(b_{11},b_{21},...,b_{n1}) = b_{11}(a_{11},...,a_{m1})+b_{21}(a_{12},...,a_{m2})...+b_{n1}(a_{1n},...,a_{mn}) =$$
$$= (a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21}+...+a_{1n}b_{n1},a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21}+...+a_{2n}b_{n1},...,a_{m1}b_{11}+a_{m2}b_{21}+...+a_{mn}b_{n1})$$

$$f(g(0,1,...,0)) = f(b_{12},b_{22},...,b_{n2}) = b_{12}(a_{11},...,a_{m1})+b_{22}(a_{12},...,a_{m2})...+b_{n2}(a_{1n},...,a_{mn}) =$$
$$= (a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22}+...+a_{1n}b_{n2},a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22}+...+a_{2n}b_{n2},...,a_{m1}b_{12}+a_{m2}b_{22}+...+a_{mn}b_{n2})$$

. . . . . .

$$f(g(0,0,...,1)) = f(b_{1p},b_{2p},...,b_{np}) = b_{1p}(a_{11},...,a_{m1})+b_{2p}(a_{12},...,a_{m2})...+b_{np}(a_{1n},...,a_{mn}) =$$
$$= (a_{11}b_{1p}+a_{12}b_{2p}+...+a_{1n}b_{np},a_{21}b_{1p}+a_{22}b_{2p}+...+a_{2n}b_{np},...,a_{m1}b_{1p}+a_{m2}b_{2p}+...+a_{mn}b_{np})$$

y tiene por matriz

$$\mathbf{AB} = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21}+..+a_{1n}b_{n1} & a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22}+..+a_{1n}b_{n2} & .. & a_{11}b_{1p}+a_{12}b_{2p}+..+a_{1n}b_{np} \\ a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21}+..+a_{2n}b_{n1} & a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22}+..+a_{2n}b_{n2} & .. & a_{21}b_{1p}+a_{22}b_{2p}+..+a_{2n}b_{np} \\ \multicolumn{4}{c}{. . . . . .} \\ a_{m1}b_{11}+a_{m2}b_{21}+..+a_{mn}b_{n1} & a_{m1}b_{12}+a_{m2}b_{22}+..+a_{mn}b_{n2} & .. & a_{m1}b_{1p}+a_{m2}b_{2p}+..+a_{mn}b_{np} \end{pmatrix}$$

que definimos como matriz producto de **A** y **B**. Obsérvese que **A** y **B** deben ser tales que el número de columnas de **A** debe coincidir con el número de filas de **B**, pues si no las aplicaciones lineales asociadas no podrían componerse; el resultado es una matriz con el mismo número de filas de **A** y el mismo número de columnas que **B**, cuyos elementos son la suma de los productos de los elementos de cada fila de **A** por los elementos de cada columna de **B**,

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}.b_{kj}$$

Otro modo de obtener el producto de dos matrices consiste en descomponerlas en bloques apropiados, que van a comportarse del mismo modo que los elementos de las matrices en la fórmula que antes hemos obtenido para el producto **AB**. Sean, como antes

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & .. & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & .. & a_{2n} \\ \multicolumn{4}{c}{. . . . . .} \\ a_{m1} & a_{m2} & .. & a_{mn} \end{pmatrix} \in M_{(m,n)}(K) \qquad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & .. & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & .. & b_{2p} \\ \multicolumn{4}{c}{. . . . . .} \\ b_{n1} & b_{n2} & .. & b_{np} \end{pmatrix} \in M_{(n,p)}(K)$$

y sean $m_0, m_1,..., m_r, n_0, n_1,..., n_s, p_0, p_1,..., p_t$ números naturales tales que

$$0 = m_0 < m_1 < ... < m_r = m$$

$$0 = n_0 < n_1 < \ldots < n_s = n$$
$$0 = p_0 < p_1 < \ldots < p_t = p$$

Descompongamos las matrices **A** y **B** en bloques, cada uno de los cuales sea una submatriz $\mathbf{A}_{ij}$ de orden $(m_i - m_{i-1}, n_j - n_{j-1})$ o $\mathbf{B}_{kl}$ de orden $(n_k - n_{k-1}, p_l - p_{l-1})$ de forma que el número de columnas de cualquier bloque $\mathbf{A}_{ik}$ coincida con el número de filas de los bloques $\mathbf{B}_{kj}$, es decir

$$\mathbf{A} = \left(\begin{array}{c|c|c|c} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} & \ldots & \mathbf{A}_{1s} \\ \hline \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} & \ldots & \mathbf{A}_{2s} \\ \hline \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots \\ \hline \mathbf{A}_{r1} & \mathbf{A}_{r2} & \ldots & \mathbf{A}_{rs} \end{array}\right) \qquad \mathbf{B} = \left(\begin{array}{c|c|c|c} \mathbf{B}_{11} & \mathbf{B}_{12} & \ldots & \mathbf{B}_{1t} \\ \hline \mathbf{B}_{21} & \mathbf{B}_{22} & \ldots & \mathbf{B}_{2t} \\ \hline \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots \\ \hline \mathbf{B}_{s1} & \mathbf{B}_{s2} & \ldots & \mathbf{B}_{st} \end{array}\right)$$

Construyamos la matriz **C** de $r \cdot t$ bloques formada por

$$\mathbf{C} = \left(\begin{array}{c|c|c|c} \mathbf{A}_{11}\mathbf{B}_{11}+\ldots+\mathbf{A}_{1s}\mathbf{B}_{s1} & \mathbf{A}_{11}\mathbf{B}_{12}+\ldots+\mathbf{A}_{1s}\mathbf{B}_{s2} & \ldots & \mathbf{A}_{11}\mathbf{B}_{1t}+\ldots+\mathbf{A}_{1s}\mathbf{B}_{st} \\ \hline \mathbf{A}_{21}\mathbf{B}_{11}+\ldots+\mathbf{A}_{2s}\mathbf{B}_{s1} & \mathbf{A}_{21}\mathbf{B}_{12}+\ldots+\mathbf{A}_{2s}\mathbf{B}_{s2} & \ldots & \mathbf{A}_{21}\mathbf{B}_{1t}+\ldots+\mathbf{A}_{2s}\mathbf{B}_{st} \\ \hline \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \hline \mathbf{A}_{r1}\mathbf{B}_{11}+\ldots+\mathbf{A}_{rs}\mathbf{B}_{s1} & \mathbf{A}_{r1}\mathbf{B}_{12}+\ldots+\mathbf{A}_{rs}\mathbf{B}_{s2} & \ldots & \mathbf{A}_{r1}\mathbf{B}_{1t}+\ldots+\mathbf{A}_{rs}\mathbf{B}_{st} \end{array}\right)$$

de manera que cada bloque viene definido por $\mathbf{C}_{ij} = \sum_{k=1}^{s} \mathbf{A}_{ik}\mathbf{B}_{kj}$, expresión análoga a la que del elemento c_{ij} de la matriz producto cambiando escalares por matrices–bloque; los $\mathbf{C}_{ij}$ existen pues el número de columnas de $\mathbf{A}_{ik}$ coincide con el número de filas de $\mathbf{B}_{kj}$. Se verifica que

$$\mathbf{C} = \mathbf{AB}$$

En efecto, un elemento cualquiera c_{ij} de la matriz **C** se calcula del siguiente modo: se calcula entre que subíndices *m* y *p* están *i* y *j*; por ejemplo, si $m_{a-1} < i \le m_a$ y $p_{b-1} < j \le p_b$, entonces

c_{ij} = elemento (i,j) de la matriz **C** = elemento $(i-m_{a-1}, j-p_{b-1})$ del bloque $\mathbf{C}_{m_a\, p_b}$ =

= elemento $(i-m_{a-1}, j-p_{b-1})$ de $(\mathbf{A}_{m_a 1}\, \mathbf{B}_{1 p_b} + \ldots + \mathbf{A}_{m_a s}\, \mathbf{B}_{s\, p_b})$ =

= elemento $(i-m_{a-1}, j-p_{b-1})$ de $\mathbf{A}_{m_a 1}\, \mathbf{B}_{1 p_b}$ +...+ elemento $(i-m_{a-1}, j-p_{b-1})$ de $\mathbf{A}_{m_a s}\, \mathbf{B}_{s\, p_b}$ =

= $\sum$(($i-m_{a-1}$)ª fila de $\mathbf{A}_{m_a 1}$)·(($j-p_{b-1}$)ª columna de $\mathbf{B}_{1 p_b}$) +...

...+ $\sum$(($i-m_{a-1}$)ª fila de $\mathbf{A}_{m_a s}$)·(($j-p_{b-1}$)ª columna de $\mathbf{B}_{s\, p_b}$) =

= $\sum$((i)ª fila de **A**)·((j)ª columna de **B**) = elemento (i,j) de **AB**

Ejemplo V.2.1

Para multiplicar las matrices

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1&3&0&1&2\\0&1&3&1&-1\\2&1&3&2&1\\1&1&0&2&1\end{pmatrix}\qquad \mathbf{B}=\begin{pmatrix}0&1&2\\2&-2&1\\3&-3&0\\1&1&0\\4&4&0\end{pmatrix}$$

las dividimos en los bloques

$$\mathbf{A}=\left(\begin{array}{cc|ccc}1&3&0&1&2\\\hline 0&1&3&1&-1\\2&1&3&2&1\\1&1&0&2&1\end{array}\right)\qquad \mathbf{B}=\left(\begin{array}{cc|c}0&1&2\\2&-2&1\\\hline 3&-3&0\\1&1&0\\\hline 4&4&0\end{array}\right)$$

de forma que si bien la división de **A** en bloques es arbitraria, la de **B** no lo es pues el número de filas de cada bloque de **B** debe ser igual que el número de columnas de los bloques de **A**, para que existan los productos $\mathbf{A}_{ik}\mathbf{B}_{kj}$. esta división en bloques que hemos hecho equivale a tomar

$$\begin{matrix}1 & 4\\ 0<m_1<m_2\end{matrix}\qquad \begin{matrix}2 & 4 & 5\\ 0<n_1<n_2<n_3\end{matrix}\qquad \begin{matrix}2 & 3\\ 0<p_1<p_2\end{matrix}$$

La matriz **C** estará entonces formada por los 4 bloques siguientes

$$\mathbf{C}=\left(\begin{array}{c|c}\begin{pmatrix}1&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\2&-2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&-3\\1&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4&4\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}1&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\end{pmatrix}\\\hline \begin{pmatrix}0&1\\2&1\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\2&-2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3&1\\3&2\\0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&-3\\1&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4&4\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&1\\2&1\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3&1\\3&2\\2&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\end{pmatrix}\end{array}\right)$$

es decir

$$\mathbf{C}=\left(\begin{array}{cc|c}15&4&5\\8&-14&1\\\hline 17&-3&5\\8&5&3\end{array}\right)=\begin{pmatrix}15&4&5\\8&-14&1\\17&-3&5\\8&5&3\end{pmatrix}=\mathbf{AB}$$

Multiplicar dos matrices por bloques puede ser ventajoso cuando contienen bloques nulos que dan lugar a productos nulos. Así para multiplicar las matrices

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1&2&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1\\0&0&2&2\end{pmatrix}\qquad \mathbf{B}=\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&2&0\\1&0&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}$$

las dividimos en los bloques

$$\mathbf{A} = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{array}\right) \qquad \mathbf{B} = \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

y el producto resulta ser

$$\mathbf{AB} = \left(\begin{array}{c|c} \left(\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) & \left(\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) \\ \hline \left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) & \left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) \end{array}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

El producto de matrices es asociativo, por serlo la composición de aplicaciones, y distributivo respecto de la suma, porque la composición de aplicaciones tiene la misma propiedad respecto de la suma. Como $(\mathrm{End}(K^n),+,\circ)$ es un anillo unitario la estructura $(M_{(n,n)}(K),+,\cdot)$, es decir las matrices cuadradas de orden n, forman un anillo unitario y su elemento unidad será la matriz

$$\mathbf{I}_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & . & . & 0 \\ 0 & 1 & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & . & . & 1 \end{pmatrix}$$

ya que es la asociada a la aplicación idéntica.

Si U es e.v.s. K de dimensión n, y un endormorfismo de U tiene rango n, según propiedades anteriores, es biyectivo y la matriz asociada $\mathbf{A}_f$ es una matriz cuadrada de orden n y rango n; este tipo de matrices las denominaremos ***regulares***. Como f tiene inversa, la matriz asociada a f^{-1} se representa por $\mathbf{A}^{-1}$ con lo que las igualdades

$$f \circ f^{-1} = I_U \qquad\qquad f^{-1} \circ f = I_U$$

se traducen a las igualdades matriciales

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{I}_n \qquad\qquad \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{I}_n$$

por lo que $\mathbf{A}^{-1}$ se denomina ***matriz inversa de*** $\mathbf{A}$. Unicamente tienen inversa las matrices regulares ya que existe endomorfismo inverso de f cuando $\mathrm{rang}(f) = \dim(U)$.

Ejemplo V.2.2

Dada la matriz $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ su aplicación lineal asociada es

$$\begin{array}{rcl} f_{\mathbf{A}}: \ \mathbf{R}^3 & \longrightarrow & \mathbf{R}^3 \\ (1,0,0) & \longrightarrow & (1,0,2) \\ (0,1,0) & \longrightarrow & (2,1,1) \\ (0,0,1) & \longrightarrow & (3,1,4) \end{array}$$

que es biyectiva ya que

$$\text{rang}(f) = \dim(\text{Im}(f)) = \dim[(1,0,2),(2,1,1),(3,1,4)] = 3$$

por formar los tres vectores un conjunto l.i., como fácilmente se comprueba. Por tanto rang(**A**) = 3 y **A** es regular. Para calcular su inversa, respecto de la base canónica, construyamos f^{-1}

$$\begin{array}{rcl} f^{-1}: \ \mathbf{R}^3 & \longrightarrow & \mathbf{R}^3 \\ (1,0,2) & \longrightarrow & (1,0,0) \\ (2,1,1) & \longrightarrow & (0,1,0) \\ (3,1,4) & \longrightarrow & (0,0,1) \end{array}$$

La fórmula de f^{-1} se calcula resolviendo previamente la ecuación

$$(x,y,z) = \alpha_1(1,0,2)+\alpha_2(2,1,1)+\alpha_3(3,1,4)$$

que mediante el método de Gauss-Jordan

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & x \\ 0 & 1 & 1 & y \\ 2 & 1 & 4 & z \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & x \\ 0 & 1 & 1 & y \\ 0 & -3 & -2 & -2x+z \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & x-2y \\ 0 & 1 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 & -2x+3y+z \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3x-5y-z \\ 0 & 1 & 0 & 2x-2y-z \\ 0 & 0 & 1 & -2x+3y+z \end{pmatrix}$$

da por solución $\alpha_1 = 3x-5y-z$, $\alpha_2 = 2x-2y-z$, $\alpha_3 = -2x+3y+z$ por lo que

$$\begin{aligned} f^{-1}(x,y,z) &= (3x-5y-z)(1,0,0)+(2x-2y-z)(0,1,0)+(-2x+3y+z)(0,0,1) = \\ &= (3x-5y-z,2x-2y-z,-2x+3y+z) \end{aligned}$$

Como

$$\begin{aligned} f^{-1}(1,0,0) &= (3,2,-2) \\ f^{-1}(0,1,0) &= (-5,-2,3) \\ f^{-1}(0,0,1) &= (-1,-1,1) \end{aligned}$$

la matriz de f^{-1}, respecto a las mismas bases que f tiene por matriz **A**, las canónicas, es

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -5 & -1 \\ 2 & -2 & -1 \\ -2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Fácilmente su comprueba que $\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{I}$.

Ejercicios

V.7.- Siendo $\mathbf{X}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & i\end{pmatrix}$ $\mathbf{Y}=\begin{pmatrix}0 & -i\\ i & 0\end{pmatrix}$ $\mathbf{Z}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$, hallar $\mathbf{YZ}-\mathbf{ZY}$, $\mathbf{ZX}-\mathbf{XZ}$, $\mathbf{XY}-\mathbf{YZ}$ y $\mathbf{X}^2+\mathbf{Y}^2+\mathbf{Z}^2$.

V.8 .- Sea f una aplicación lineal de $\mathbf{R}^3$ sobre $\mathbf{R}^3$, de matriz $\mathbf{U}=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$. Hallar el rango de f y la matriz de f^2. Demostrar que $\mathbf{U}^2-3\mathbf{U}=\mathbf{0}$.

V.9 .- Determinar x e y en la ecuación

$$\begin{pmatrix}3 & x & 1\\ 1 & 2 & 0\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}2 & 1 & 3\\ 5 & x & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7 & 3 & 7\\ 11 & y & 8\end{pmatrix}$$

V.10.- Resolver la ecuación

$$\begin{pmatrix}\alpha_1 & 1\\ 3 & 4\end{pmatrix}\mathbf{X}\begin{pmatrix}4 & -2\\ -3 & \alpha_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6 & \alpha_3\\ \alpha_4 & 14\end{pmatrix}$$

para $\alpha_1=$, $\alpha_2=$, $\alpha_3=$, $\alpha_4=$.

V.11.- Resolver la ecuación $\mathbf{AX}=\mathbf{XA}$ siendo $\mathbf{A}$ la matriz

$$\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

V.12.- Hallar $\mathbf{A}^n$ y $\mathbf{B}^n$ siendo $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}$ y $\mathbf{B}=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$.

V.13.- Para el conjunto $A=\left\{\begin{pmatrix}a & b\\ 0 & c\end{pmatrix} \mid a, b, c\in\mathbf{R}\right\}$

a) Probar que A es subespacio y subanillo de $M_{(2,2)}(\mathbf{R})$.

b) Probar que $\left(\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right)$ es una base de A.

c) Sea f una aplicación de A sobre A tal que $f\begin{pmatrix}a & b\\ 0 & c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}c & b\\ 0 & a\end{pmatrix}$; probar que f es lineal y biyectiva y hallar su matriz respecto a la base de b).

V.14.- En el espacio vectorial de las matrices cuadradas de orden 2, averiguar si los vectores

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \alpha_1 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} \alpha_2 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \alpha_3 & 0 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{v}_4 = \begin{pmatrix} 1 & \alpha_4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

forman base para para $\alpha_1 =$, $\alpha_2 =$, $\alpha_3 =$, $\alpha_4 =$. Obtener las componentes del vector $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ en esta base.

V.15.- Demostrar que si **A** y **B** son matrices regulares y **A** es conmutable con **B**, entonces $\mathbf{B}^{-1}$ es conmutable con $\mathbf{A}^{-1}$.

V.16.- Se considera la matriz

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Probar que la matriz **I**–**A** tiene como inversa una matriz de la forma **I**+*c***A** para algún valor de *c*. Determinar *c*.

V.3.- MATRIZ TRANSPUESTA

Dada una matriz $\mathbf{A} \in M_{(m,n)}(K)$, denominaremos ***matriz transpuesta*** de **A**, representándola por $\mathbf{A}^t$, aquella cuyas filas son las columnas de **A** (y por tanto sus columnas son las filas de **A**), es decir, la matriz resultante de cambiar en **A** filas por columnas.

Las propiedades más interesantes de la matriz transpuesta figuran en la Tabla V.3.1

TABLA V.3.1.

Propiedades de la matriz transpuesta
1) $\mathbf{A} \in M_{(m,n)}(K)$ equivale a $\mathbf{A}^t \in M_{(n,m)}(K)$
2) $(\mathbf{A}^t)^t = \mathbf{A}$
3) $(\alpha\mathbf{A})^t = \alpha\mathbf{A}^t$
4) $(\mathbf{A}+\mathbf{B})^t = \mathbf{A}^t+\mathbf{B}^t$
5) $(\mathbf{AB})^t = \mathbf{B}^t\,\mathbf{A}^t$
6) $(\mathbf{A}^{-1})^t = (\mathbf{A}^t)^{-1}$
7) $\text{rang}(\mathbf{A}^t) = \text{rang}(\mathbf{A})$

Demostraciones:

1) Obviamente, si $\mathbf{A}$ tiene m filas y n columnas, $\mathbf{A}^t$ tiene m columnas y n filas.

2) Para todo $1 \le i \le m$ se verifica

$$\text{fila } i \text{ de } (\mathbf{A}^t)^t = \text{columna } i \text{ de } \mathbf{A}^t = \text{fila } i \text{ de } \mathbf{A} \;\Rightarrow\; (\mathbf{A}^t)^t = \mathbf{A}$$

3) Para todo $1 \le i \le n$ se verifica

$$\text{fila } i \text{ de } (\alpha\mathbf{A})^t = \text{columna } i \text{ de } (\alpha\mathbf{A}) = \alpha(\text{columna } i \text{ de } \mathbf{A}) = \alpha(\text{fila } i \text{ de } \mathbf{A}^t) = \text{fila } i \text{ de } \alpha\mathbf{A}^t$$

4) Para todo $1 \le i \le n$ se verifica

$$\text{fila } i \text{ de } (\mathbf{A}+\mathbf{B})^t = \text{columna } i \text{ de } (\mathbf{A}+\mathbf{B}) = (\text{columna } i \text{ de } \mathbf{A})+(\text{columna } i \text{ de } \mathbf{B}) =$$
$$= (\text{fila } i \text{ de } \mathbf{A}^t)+(\text{fila } i \text{ de } \mathbf{B}^t) = \text{fila } i \text{ de } (\mathbf{A}^t+\mathbf{B}^t)$$

5) Si $\mathbf{A} \in M_{(m,n)}(K)$ y $\mathbf{B} \in M_{(n,p)}(K)$, entonces $\mathbf{AB} \in M_{(m,p)}(K)$; además $\mathbf{A}^t \in M_{(n,m)}(K)$ y $\mathbf{B}^t \in M_{(p,n)}(K)$, luego existe $\mathbf{B}^t\mathbf{A}^t \in M_{(p,m)}(K)$. Tendremos, para todo $1 \le i \le p$ y $1 \le j \le m$

$$\text{elemento } ij \text{ de } (\mathbf{AB})^t = \text{elemento } ji \text{ de } \mathbf{AB} = \sum(\text{fila } j \text{ de } \mathbf{A})\cdot(\text{columna } i \text{ de } \mathbf{B}) =$$
$$= \sum(\text{columna } i \text{ de } \mathbf{B})\cdot(\text{fila } j \text{ de } \mathbf{A}) = \sum(\text{fila } i \text{ de } \mathbf{B}^t)\cdot(\text{columna } j \text{ de } \mathbf{A}^t) = \text{elemento } ij \text{ de } \mathbf{B}^t\mathbf{A}^t$$

6) En efecto, según la propiedad anterior es

$$\mathbf{A}^t(\mathbf{A}^{-1})^t = (\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A})^t = (\mathbf{I}_n)^t = \mathbf{I}_n \qquad (\mathbf{A}^{-1})^t\,\mathbf{A}^t = (\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1})^t = (\mathbf{I}_n)^t = \mathbf{I}_n$$

7) Como las columnas de $\mathbf{A}^t$ son las filas de $\mathbf{A}$, esta propiedad equivale a decir que el número máximo de columnas de $\mathbf{A}$ linealmente independientes es igual al número máximo de filas linealmentes independientes, o con más brevedad, que el rango por columnas $r_c(\mathbf{A})$ y el rango por filas $r_f(\mathbf{A})$ coinciden. En efecto, sea

$$c = r_c(\mathbf{A})$$

y designemos por $\boldsymbol{c}_i$ y $\boldsymbol{f}_j$ los vectores columna y fila de $\mathbf{A}$, respectivamente. Tenemos así

$$\boldsymbol{c}_i \in K^m \quad \text{para } 1 \le i \le n \quad \text{y} \quad \boldsymbol{f}_j \in K^n \quad \text{para } 1 \le j \le m$$

con lo que

$$c = \dim[\boldsymbol{c}_1,\boldsymbol{c}_2,\ldots,\boldsymbol{c}_n]$$

luego existen c vectores columnas $\boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{c}_2,\ldots,\boldsymbol{c}_c$ (supongamos que son los c primeros) que forman una base de $[\boldsymbol{c}_1,\boldsymbol{c}_2,\ldots,\boldsymbol{c}_n]$ por lo que todas las columnas serán combinación lineal de ellos

$$\boldsymbol{c}_h = \alpha_{1h}\boldsymbol{c}_1+\alpha_{2h}\boldsymbol{c}_2+\ldots+\alpha_{ch}\boldsymbol{c}_c \quad \text{para } 1 \le h \le n$$

es decir, pasando a las componentes de los vectores columna $\boldsymbol{c}_h = (a_{1h},a_{2h},...,a_{mh})$, tendremos que para $1 \le i \le m$ y $1 \le h \le n$ será

$$a_{ih} = \alpha_{1h}a_{i1}+\alpha_{2h}a_{i2}+...+\alpha_{ch}a_{ic} = a_{i1}\alpha_{1h}+a_{i2}\alpha_{2h}+...+a_{ic}\alpha_{ch}$$

Si consideramos *i* fijo y *h* variable, esta igualdad nos expresa que la fila $\boldsymbol{f}_i$ es combinación lineal de las filas $\boldsymbol{b}_i$ de la matriz

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & .. & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & .. & \alpha_{2n} \\ & ..... & & \\ \alpha_{c1} & \alpha_{c2} & .. & \alpha_{cn} \end{pmatrix}$$

luego $[\boldsymbol{f}_1,\boldsymbol{f}_2,...,\boldsymbol{f}_m] \subseteq [\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,...,\boldsymbol{b}_c]$, por lo que $\text{rang}_f(\mathbf{A}) \le c = \text{rang}_c(\mathbf{A})$. Con un razonamiento similar, cambiando las palabras fila y columna, se obtiene de forma análoga que $\text{rang}_c(\mathbf{A}) \le \text{rang}_f(\mathbf{A})$, luego

$$\text{rang}_f(\mathbf{A}) = \text{rang}_c(\mathbf{A}) \;\Rightarrow\; \text{rang}(\mathbf{A}^t) = \text{rang}(\mathbf{A})$$

Una matriz cuadrada que sea igual a su transpuesta verifica

$$a_{ij} = \text{elemento } ij \text{ de } \mathbf{A} = \text{elemento } ij \text{ de } \mathbf{A}^t = \text{elemento } ji \text{ de } \mathbf{A} = a_{ji}$$

es decir, tiene iguales los elementos que ocupan lugares simétricos respecto de la que se denomina diagonal principal de la matriz y, por esta razón, se denomina ***matriz simétrica***. Si los elementos simétricos respecto de la diagonal principal son opuestos tenemos la ***matriz antisimétrica***. Si todos los elementos que están a un lado de la diagonal principal son nulos tenemos una ***matriz triangular***, que será triangular superior si son nulos los que están debajo de la diagonal y triangular inferior en caso contrario. Si son nulos todos los elementos de la matriz cuadrada excepto los de la diagonal tenemos una ***matriz diagonal***, por ejemplo, la matriz unidad. Una matriz diagonal que tenga iguales todos los elementos de la diagonal se denomina ***matriz escalar***.

Ejercicios

V.17.- Calcular la matriz **C** sabiendo que verifica

$$\mathbf{C}+\mathbf{C}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{9}{4} \\ \frac{9}{2} & 0 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{C}+\mathbf{C}^{t} = \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 6 & 0 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{C}^{t}+\mathbf{C}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{17}{4} \\ \frac{5}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

V.18.- Probar que

a) Una matriz antisimétrica coincide con la opuesta de su transpuesta

b) Toda matriz simétrica o antisimétrica es cuadrada.

c) Toda matriz cuadrada se puede descomponer de manera única en suma de una matriz

simétrica y una antisimétrica.

d) Aplicarlo a la matriz

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_1 & 2 & a_2 \\ -1 & a_3 & 0 \\ 0 & 1 & a_4 \end{pmatrix}$$

para $\alpha_1 =$, $\alpha_2 =$, $\alpha_3 =$, $\alpha_4 =$.

V.19.- Se dice que **A** y **B**, matrices cuadradas del mismo orden son semejantes, si existe una matriz cuadrada y regular **H** que verifique $\mathbf{B} = \mathbf{HAH}^{-1}$. Se pide

a) Demostrar que esta relación es de equivalencia.

b) Probar que si dos matrices son semejantes también lo son sus traspuestas.

c) Demostrar que la inversa de una matriz regular es semejante a la inversa de cualquier matriz semejante a élla.

V.4 .- REPRESENTACION MATRICIAL DE UN VECTOR

Sea V e.v.s. K de dimensión finita y $(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,...,\boldsymbol{e}_n)$ una base de V; todo vector $\boldsymbol{x} \in V$ se descompone de forma única como combinación lineal de la base

$$\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2 + ... + x_n\boldsymbol{e}_n$$

de forma que $\boldsymbol{x}$ viene determinado por los escalares $x_1,x_2,...,x_n$ que son sus componentes. Por ello vamos a representar el vector mediante una matriz columna formada por estos escalares

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ x_n \end{pmatrix}$$

de modo que, fijada una base, todo vector viene representado por una matriz columna de n elementos de K y, recíprocamente, a toda matriz columna con n elementos de un cuepo K

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ . \\ . \\ y_n \end{pmatrix}$$

puede asociarsele el vector $\boldsymbol{y} = (y_1,y_2,...,y_n) \in K^n$

Flexibilizando el concepto de matriz de manera formal, admitiendo que los objetos que la componen puedan ser vectores y, de manera también formal, el producto de matrices y el producto externo de un vector por un escalar podemos escribir

$$\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{e}_1+x_2\boldsymbol{e}_2+\ldots+x_n\boldsymbol{e}_n = \begin{pmatrix} \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 \,.\, \boldsymbol{e}_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ .. \\ x_n \end{pmatrix} = \mathbf{ex}$$

representando por **e** la matriz fila formada por los *n* vectores de la base y **x** la matriz columna que forman las componentes del vector. Este producto de matrices vectoriales fila por una matriz columna verifica las siguientes propiedades:

1) $(\alpha\,\mathbf{e})\mathbf{x} = \mathbf{e}(\alpha\,\mathbf{x}) = \alpha\,(\mathbf{ex})$ ya que

$$(\alpha\,\mathbf{e})\mathbf{x} = \begin{pmatrix} \alpha\,\boldsymbol{e}_1 & \alpha\,\boldsymbol{e}_2 & .. & \alpha\,\boldsymbol{e}_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ .. \\ x_n \end{pmatrix} = x_1\alpha\,\boldsymbol{e}_1+x_2\alpha\,\boldsymbol{e}_2+\ldots+x_n\alpha\,\boldsymbol{e}_n =$$

$$= \alpha\,x_1\boldsymbol{e}_1+\alpha\,x_2\boldsymbol{e}_2+\ldots+\alpha\,x_n\boldsymbol{e}_n = \begin{pmatrix} \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & .. & \boldsymbol{e}_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha\,x_1 \\ \alpha\,x_2 \\ .. \\ \alpha\,x_n \end{pmatrix} = \mathbf{e}(\alpha\,\mathbf{x})$$

y lo mismo para la otra igualdad.

2) Análogamente se demuestra que $\mathbf{e}(\mathbf{x}+\mathbf{y}) = \mathbf{ex}+\mathbf{ey}$ y $(\mathbf{e}+\mathbf{u})\mathbf{x} = \mathbf{ex}+\mathbf{ux}$

Se define asímismo el producto de la matriz **e** por una matriz cuadrada $\mathbf{M} = (a_{ij})$ como

$$\mathbf{eM} = (\boldsymbol{e}_1 \quad \boldsymbol{e}_2 \,.\, \boldsymbol{e}_n)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \,.\, a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \,.\, a_{2n} \\ \cdots\cdots\cdots \\ a_{n1} & a_{n2} \,.\, a_{nn} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}\boldsymbol{e}_1+a_{21}\boldsymbol{e}_2+\ldots+a_{n1}\boldsymbol{e}_n & a_{12}\boldsymbol{e}_1+a_{22}\boldsymbol{e}_2+\ldots+a_{n2}\boldsymbol{e}_n & .. & a_{1n}\boldsymbol{e}_1+a_{2n}\boldsymbol{e}_2+\ldots+a_{nn}\boldsymbol{e}_n \end{pmatrix}$$

verificándose que si **N** es otra matriz cuadrada del mismo tipo, entonces $(\mathbf{eM})\mathbf{N} = \mathbf{e}(\mathbf{MN})$, como fácilmente se prueba haciendo los productos indicados.

Si entre *U* y *V*, e.v.s. *K*, de dimensión finita, referidos a las bases respectivas $(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\ldots,\boldsymbol{e}_n)$ y $(\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2,\ldots,\boldsymbol{u}_m)$, existe una aplicación lineal dada por

$$\begin{aligned} f: U &\longrightarrow V \\ \boldsymbol{e}_1 &\longrightarrow f(\boldsymbol{e}_1) = a_{11}\boldsymbol{u}_1+a_{21}\boldsymbol{u}_2+\ldots+a_{m1}\boldsymbol{u}_m \\ \boldsymbol{e}_2 &\longrightarrow f(\boldsymbol{e}_2) = a_{12}\boldsymbol{u}_1+a_{22}\boldsymbol{u}_2+\ldots+a_{m2}\boldsymbol{u}_m \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \boldsymbol{e}_n &\longrightarrow f(\boldsymbol{e}_n) = a_{1n}\boldsymbol{u}_1+a_{2n}\boldsymbol{u}_2+\ldots+a_{mn}\boldsymbol{u}_m \end{aligned}$$

su matriz respecto a estas bases es

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & .. & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & .. & a_{2n} \\ ..... & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & .. & a_{mn} \end{pmatrix}$$

La imagen de un vector $\boldsymbol{x} \in U$ que, como combinación lineal respecto de la base $(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n)$, se exprese por

$$\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2 + \ldots + x_n\boldsymbol{e}_n$$

será

$$\boldsymbol{y} = f(\boldsymbol{x}) = f(x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2 + \ldots + x_n\boldsymbol{e}_n) =$$
$$= x_1(a_{11}\boldsymbol{u}_1 + a_{21}\boldsymbol{u}_2 + .. + a_{m1}\boldsymbol{u}_m) + x_2(a_{12}\boldsymbol{u}_1 + a_{22}\boldsymbol{u}_2 + .. + a_{mn}\boldsymbol{u}_m) + \ldots + x_n(a_{1n}\boldsymbol{u}_1 + a_{2n}\boldsymbol{u}_2 + .. + a_{mn}\boldsymbol{u}_m) =$$
$$= (x_1a_{11} + x_2a_{12} + .. + x_na_{1n})\boldsymbol{u}_1 + (x_1a_{21} + x_2a_{22} + .. + x_na_{2n})\boldsymbol{u}_2 + \ldots + (x_1a_{m1} + x_2a_{m2} + .. + x_na_{mn})\boldsymbol{u}_m$$

y teniendo en cuenta que las componentes de este vector imagen son los elementos de la matriz producto de la matriz de la aplicación lineal por la matriz columna que respecto al vector $\boldsymbol{x}$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & .. & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & .. & a_{2n} \\ ..... & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & .. & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ .. \\ x_n \end{pmatrix}$$

resulta equivalente escribir la relación vectorial

$$\boldsymbol{y} = f(\boldsymbol{x})$$

que la relación matricial

$$\mathbf{y} = \mathbf{Ax}$$

Ambas son las ecuaciones vectorial y matricial, respectivamente, de la aplicación lineal ya que definen al vector $\boldsymbol{y}$ como la imagen del vector $\boldsymbol{x}$ en f. Por ello, el núcleo de f está formado por los vectores cuyas componentes son los elementos de la matriz columna solución de la ecuación matricial

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$$

Ejercicios

V.20.- Sea f una aplicación de $\mathbf{R}^3$ sobre $\mathbf{R}^4$ de matriz $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$. Hallar $f(5,3,-2)$, núcleo, imagen, rango y clasificarla.

V.21 .- Sea f un endomorfismo de $\mathbf{R}^3$ cuya matriz respecto a la base canónica es

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 3 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Resolver la ecuación $f(x,y,z) = (1,0,-2)$ y hallar el núcleo de f.

V.22.- Sea $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ la matriz de una aplicación lineal f de $\mathbf{R}^3$ en $\mathbf{R}^3$. Hallar

$$A = \{\boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^3 \mid f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}\} \qquad B = \{\boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^3 \mid f(\boldsymbol{x}) = \lambda \boldsymbol{x}\}$$

para $\lambda =$.

V.23.- Sea V un espacio vectorial real de dimensión tres y $B = (\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3)$ una base de V y los vectores $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{e}_2+\boldsymbol{e}_3$, $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_3$ y $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2$. Sea f el endomorfismo de V que verifica

$$(\forall \boldsymbol{x} \in [\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}])\ (f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}) \qquad \boldsymbol{c} \in \mathrm{Nuc}(f)$$

Hallar la ecuación matricial de f en la base $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})$ y el núcleo de f.

V.5 .- CAMBIOS DE BASE

Al referir un espacio vectorial a una base, cualquier vector puede expresarse como combinación lineal de los vectores de la base, de forma única, siendo los coeficientes de la combinación lineal las componentes del vector. No obstante su unicidad, si referimos el espacio a otra base distinta las componentes de un mismo vector varían; se trata de averiguar que relación puede existir entre las componentes de un mismo vector con respecto a dos bases distintas. Asímismo una aplicación lineal entre dos espacios vectoriales sobre un mismo cuerpo, referidos a sendas bases, tiene una única matriz asociada, que variará si cambiamos las bases de los espacios. Un segundo problema relacionado con el cambio de base es averiguar la relación entre las matrices de una misma aplicación lineal cuando los espacios se refieren a bases distintas.

Resolvamos el primer problema. Sea U un e.v.s. K de dimensión n, $(\boldsymbol{e}_1,\ldots,\boldsymbol{e}_n)$ una base de U, a la que nos referiremos brevemente como base $(\boldsymbol{e})$, y $\boldsymbol{x}$ un vector de U que, expresado como combinación lineal de la base, es

$$\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{e}_1+\ldots+x_n\boldsymbol{e}_n$$

siendo así $x_1,\ldots,x_n$ sus componentes respecto de la base $(\boldsymbol{e})$. Sea $(\boldsymbol{u}_1,\ldots,\boldsymbol{u}_n)$ otra base de U, a la que nos referiremos como base $(\boldsymbol{u})$, y sea la expresión de $\boldsymbol{x}$ respecto de esta base

$$\boldsymbol{x} = y_1\boldsymbol{u}_1+\ldots+y_n\boldsymbol{u}_n$$

donde $y_1,\ldots,y_n$ son sus componentes respecto de la base $(\boldsymbol{u})$

Supongamos que los vectores de la base $(\boldsymbol{u})$ vienen expresados en función de la base $(\boldsymbol{e})$ por

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u}_1 &= a_{11}\boldsymbol{e}_1+\ldots+a_{n1}\boldsymbol{e}_n \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \boldsymbol{u}_n &= a_{1n}\boldsymbol{e}_1+\ldots+a_{nn}\boldsymbol{e}_n \end{aligned}$$

y consideremos la matriz cuyas columnas son las componentes de los vectores de la base (***u***) en función de la base (***e***), es decir

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} a_{11} & .. & a_{1n} \\ ..... & & \\ a_{n1} & .. & a_{nn} \end{pmatrix}$$

a la que llamaremos ***matriz del cambio de la base*** (***e***) a la base (***u***); las igualdades anteriores, que expresan a los vectores de la base (***u***) en función de los de la base (***e***), pueden escribirse en la forma matricial

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{u}_1 & .. & \boldsymbol{u}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{e}_1 & .. & \boldsymbol{e}_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & .. & a_{1n} \\ ..... & & \\ a_{n1} & .. & a_{nn} \end{pmatrix} \quad \text{o, más brevemente} \quad \mathbf{u} = \mathbf{eM}$$

Esta matriz es regular pues sus *n* columnas forma un conjunto de vectores l.i. y, por ello, existe su inversa $\mathbf{M}^{-1}$. Además, si **M** es la matriz del cambio de la base (***e***) a la (***u***), entonces $\mathbf{M}^{-1}$ es la matriz del cambio de la base (***u***) a la (***e***); en efecto, al ser **u** = **eM** si **e** = **uN**, tenemos

$$\mathbf{u} = \mathbf{uNM} \;\Rightarrow\; \mathbf{NM} = \mathbf{I} \;\Rightarrow\; \mathbf{N} = \mathbf{M}^{-1}$$

Si **x** es la matriz de componentes de un vector ***x*** respecto de una base, al ser únicas tendremos

$$\mathbf{ex} = \mathbf{uy} = \mathbf{eMy} \;\Rightarrow\; \mathbf{x} = \mathbf{My}$$

es decir

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ .. \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & .. & a_{1n} \\ ..... & & \\ a_{n1} & .. & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ .. \\ y_n \end{pmatrix}$$

Al existir la inversa de la matriz del cambio de base, será

$$\mathbf{y} = \mathbf{M}^{-1}\,\mathbf{x}$$

que expresa la relación entre las componentes respecto de la nueva base en función de las componentes respecto de la base antigua.

Ejemplo V.5.1

En el espacio vectorial $\mathbf{R}^3$, con las bases

$$(\boldsymbol{e}) = ((1,0,0),(0,1,0),(0,0,1))$$
$$(\boldsymbol{u}) = ((1,0,2),(2,1,1),(3,1,4))$$

el vector $\boldsymbol{x}$ = (2,4,6) tiene como componentes respecto de la primera base 2, 4 y 6. Como la matriz del cambio de base es

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

las componentes de $\boldsymbol{x}$ respecto de la base ($\boldsymbol{u}$) serán

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}$$

De acuerdo con el resultado obtenido en el ejemplo V.2.2 para la matriz inversa, tendremos

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -5 & -1 \\ 2 & -2 & -1 \\ -2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -20 \\ -10 \\ 14 \end{pmatrix}$$

es decir, $\boldsymbol{x} = -20(1,0,2)-10(2,1,1)+14(3,1,4)$

La matriz del cambio de una base ($\boldsymbol{e}$) de U a otra base ($\boldsymbol{u}$) tiene la propiedad de ser la matriz de la aplicación idéntica I_V, referida a las bases ($\boldsymbol{u}$) de U como espacio inicial y ($\boldsymbol{e}$) de U como espacio final; en efecto

$$\begin{aligned} I_U: \quad & U \longrightarrow U \\ & \boldsymbol{u}_1 \longrightarrow I_V(\boldsymbol{u}_1) = \boldsymbol{u}_1 = a_{11}\boldsymbol{e}_1 + \ldots + a_{n1}\boldsymbol{e}_n \\ & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ & \boldsymbol{u}_n \longrightarrow I_V(\boldsymbol{u}_n) = \boldsymbol{u}_n = a_{1n}\boldsymbol{e}_1 + \ldots + a_{nn}\boldsymbol{e}_n \end{aligned}$$

Esta propiedad resulta ser muy útil para resolver el segundo problema relacionado con el cambio de base. Sean U y V e.v.s. K, referidos a bases distintas

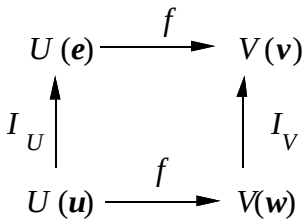
$$(\boldsymbol{e}_1,\ldots,\boldsymbol{e}_n) \text{ y } (\boldsymbol{u}_1,\ldots,\boldsymbol{u}_n) \text{ bases de } U \qquad (\boldsymbol{v}_1,\ldots,\boldsymbol{v}_m) \text{ y } (\boldsymbol{w}_1,\ldots,\boldsymbol{w}_m) \text{ bases de } V$$

a las que nos referiremos brevemente como ($\boldsymbol{e}$), ($\boldsymbol{u}$), ($\boldsymbol{v}$) y ($\boldsymbol{w}$), con las correspondientes matrices de cambio de base

M matriz de cambio de la base ($\boldsymbol{e}$) a la ($\boldsymbol{u}$)

N matriz de cambio de la base ($\boldsymbol{v}$) a la ($\boldsymbol{w}$)

Sea la aplicación lineal f de U en V de matrices $\mathbf{A}$, respecto de las bases $(\boldsymbol{e})$ y $(\boldsymbol{v})$, y $\mathbf{B}$, respecto de las bases $(\boldsymbol{u})$ y $(\boldsymbol{w})$. Teniendo en cuenta el diagrama



se verifica la igualdad funcional

$$f = (I_V)^{-1} \circ f \circ I_U$$

que expresada a través de las respectivas matrices en las bases indicadas es

$$\mathbf{B} = \mathbf{N}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{M}$$

o bien

$$\mathbf{A} = \mathbf{N}\mathbf{B}\mathbf{M}^{-1}$$

Si U y V coinciden, es decir, si f es un endomorfismo de U de matriz $\mathbf{A}$ respecto de $(\boldsymbol{e})$ como base de U, en tanto que espacio inicial y final, y de matriz $\mathbf{B}$ respecto de la base $(\boldsymbol{u})$, la relación entre ambas es

$$\mathbf{B} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{M} \quad \text{o bien} \quad \mathbf{A} = \mathbf{M}\mathbf{B}\mathbf{M}^{-1}$$

igualdades que permiten calcular una de las matrices conociendo la otra.

Ejemplo V.5.2

Sea la aplicación lineal f de $\mathbf{R}^3$ en $\mathbf{R}^2$ de matriz

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

respecto de unas bases $(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3)$ de $\mathbf{R}^3$ y $(\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2)$ de $\mathbf{R}^2$. Sean las bases $(\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2,\boldsymbol{u}_3)$ de $\mathbf{R}^3$, definida por

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u}_1 &= \boldsymbol{e}_1 \\ \boldsymbol{u}_2 &= \boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2 \\ \boldsymbol{u}_3 &= \boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2+\boldsymbol{e}_3 \end{aligned}$$

y $(\boldsymbol{w}_1,\boldsymbol{w}_2)$ de $\mathbf{R}^2$, definida por

$$\begin{aligned} \boldsymbol{w}_1 &= 2\boldsymbol{v}_1+\boldsymbol{v}_2 \\ \boldsymbol{w}_2 &= \boldsymbol{v}_1-\boldsymbol{v}_2 \end{aligned}$$

Las respectivas matrices del cambio de base son

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{N} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

la matriz de f respecto de las bases $(\boldsymbol{u})$ y $(\boldsymbol{w})$ será

$$\mathbf{B} = \mathbf{N}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

El cálculo de la matriz **B** del ejemplo anterior, al igual que algunos de los ejercicios que siguen, necesita de algún algoritmo eficiente para el cálculo de la matriz inversa, que se verá un poco más adelante en la Sección V.10.

Ejercicios

V.24 .- Sean $\boldsymbol{a}_1 = (2,1,-3)$, $\boldsymbol{a}_2 = (3,2,-5)$, $\boldsymbol{a}_3 = (1,-1,1)$ y $\boldsymbol{x} = (6,2,-7)$ vectores de $\mathbf{R}^3$. Demostrar que $(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3)$ es una base de $\mathbf{R}^3$ y hallar respecto a esta base las componentes de $\boldsymbol{x}$.

V.25 .- Sea E un espacio vectorial sobre **R** de dimensión tres y $(\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2,\boldsymbol{u}_3)$ una base de E. Las componentes de un vector $\boldsymbol{x} \in E$ respecto a esta base son $1,-1$ y 0. Hallar las componentes de $\boldsymbol{x}$ respecto de la base

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v}_1 &= \boldsymbol{u}_1+\boldsymbol{u}_2+\boldsymbol{u}_3 \\ \boldsymbol{v}_2 &= \boldsymbol{u}_1-\boldsymbol{u}_2 \\ \boldsymbol{v}_3 &= \boldsymbol{u}_2-\boldsymbol{u}_3 \end{aligned}$$

V.26 .- Sea $f : \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}^3$ de matriz respecto a la base $(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3)$

$$\begin{pmatrix} 15 & -11 & 5 \\ 20 & -15 & 8 \\ 8 & -7 & 6 \end{pmatrix}$$

Hallar la matriz de f respecto de la base

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u}_1 &= 2\boldsymbol{e}_1+3\boldsymbol{e}_2+\boldsymbol{e}_3 \\ \boldsymbol{u}_2 &= 3\boldsymbol{e}_1+4\boldsymbol{e}_2+\boldsymbol{e}_3 \\ \boldsymbol{u}_3 &= \boldsymbol{e}_1+2\boldsymbol{e}_2+2\boldsymbol{e}_3 \end{aligned}$$

V.27.- Sea $f : \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}^3$ de matriz

$$\begin{pmatrix} -2 & 4 & 2 \\ 1 & \lambda & \lambda \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

respecto a una base $(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3)$. Hallar la matriz de f respecto de la base $(\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2,\boldsymbol{u}_3)$ siendo $\boldsymbol{e}_1 = \boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{e}_2 = 1/2\ \boldsymbol{u}_2$, $\boldsymbol{e}_3 = \boldsymbol{u}_1 - 1/2\ \boldsymbol{u}_2 + \boldsymbol{u}_3$.

V.28.- Sean $B = (\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3,\boldsymbol{e}_4)$ y $C = (\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2,\boldsymbol{u}_3)$ bases de dos espacios vectoriales E y F sobre $\mathbf{R}$. Sea la aplicación lineal $f : E \longrightarrow F$ de matriz respecto a las bases B y C

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & -1 & 2 & -2 \\ -2 & \alpha_2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & \alpha_3 & \alpha_4 \end{pmatrix}$$

para $\alpha_1 =$, $\alpha_2 =$, $\alpha_3 =$, $\alpha_4 =$. Plantear la matriz de f respecto a las bases $B' = (\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\boldsymbol{v}_3,\boldsymbol{v}_4)$ y $C' = (\boldsymbol{w}_1,\boldsymbol{w}_2,\boldsymbol{w}_3)$ siendo

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v}_1 &= \boldsymbol{e}_1 + 2\boldsymbol{e}_2 + 3\boldsymbol{e}_3 + 4\boldsymbol{e}_4 \\ \boldsymbol{v}_2 &= 2\boldsymbol{e}_1 + 3\boldsymbol{e}_2 + 5\boldsymbol{e}_3 - 2\boldsymbol{e}_4 \\ \boldsymbol{v}_3 &= 3\boldsymbol{e}_1 + 5\boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3 + \boldsymbol{e}_4 \\ \boldsymbol{v}_4 &= \boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{e}_2 - 5\boldsymbol{e}_3 - 7\boldsymbol{e}_4 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \boldsymbol{w}_1 &= \boldsymbol{u}_1 + 2\boldsymbol{u}_3 \\ \boldsymbol{w}_2 &= 2\boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_3 \\ \boldsymbol{w}_3 &= 2\boldsymbol{u}_2 \end{aligned}$$

V.29 .- Para la aplicación lineal $f : \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}^4$ hallar:
$(x,y,z) \longrightarrow (y-z, x+y, x-z, x+y+z)$

a) Ecuación matricial de f respecto a las bases canónicas.

b) Ecuación matricial de f respecto a ((1,1,0),(1,0,1),(0,1,1)) base de $\mathbf{R}^3$ y la base canónica de $\mathbf{R}^4$.

c) Ecuación matricial de f respecto a ((0,1,1),(1,0,1),(1,1,0)) base de $\mathbf{R}^3$ y como base de $\mathbf{R}^4$ la ((1,−1,0,0),(0,1,−1,0),(0,0,1,−1),(0,0,0,−1)).

V.6.- TRANFORMACIONES ELEMENTALES

Las matrices como objetos matemáticos asociados a las aplicaciones lineales, con unas operaciones que las estructuran de manera idéntica a éllas, permiten resolver de forma ágil y rápida problemas típicos de espacios vectoriales y sus morfismos. Un resultado válido para aplicaciones lineales podrá ser traducido en un resultado sobre matrices y recíprocamente, estableciéndose así un doble instrumento, matricial y vectorial, de gran potencia.

Para ello se van a definir unas transformaciones con las filas de la matriz, que se denominan ***transformaciones elementales*** de fila y van a ser el fundamento de los algoritmos que se construirán más adelante. Son las siguientes:

a) Permutar dos filas.

b) Multiplicar una fila por un escalar no nulo.

c) Sumar a una fila otra fila multiplicada por un escalar

Análogamente podrían plantearse las análogas transformaciones elementales de columna.

Si una matriz **B** es el resultado de aplicar transformaciones elementales de fila a otra matriz **A**, escribiremos **A**→**B**. Apliquemos estas transformaciones elementales a la matriz unidad y designemos por

F(i,j) la matriz resultante de permutar las filas i y j en la matriz unidad $\mathbf{I}_n$,

$\mathbf{F}_\alpha(i)$ la matriz resultante de multiplicar por el escalar $\alpha \neq 0$ la fila i de la matriz unidad $\mathbf{I}_n$,

$\mathbf{F}_\alpha(i,j)$ la matriz resultante de sumar a la fila i de la matriz unidad $\mathbf{I}_n$ la fila j multiplicada por un escalar,

que representaremos de modo conjunto por $\mathbf{F}^n_\alpha(i,j)$ y se denominan ***matrices elementales***. Una transformación elemental de filas aplicada a una matriz **A** de orden (m,n) da lugar a una matriz igual al producto

$$\mathbf{F}^m_\alpha(i,j)\cdot\mathbf{A}$$

En efecto, comprobémoslo, por ejemplo, para la transformación elemental de tipo c) consistente en sumar a la fila i la fila j multiplicada por α; tendremos

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{j1} & a_{j2} & \dots & a_{jn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1}+\alpha a_{j1} & a_{i2}+\alpha a_{j1} & \dots & a_{in}+\alpha a_{j1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{j1} & a_{j2} & \dots & a_{jn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

y la matriz resultante es igual a

$$\mathbf{F}^m_\alpha(i,j)\cdot\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0\,.\,0\,.\,0 \\ \dots & \dots \\ 0 & 1\,.\,\alpha\,.\,0 \\ \dots & \dots \\ 0 & 0\,.\,1\,.\,0 \\ \dots & \dots \\ 0 & 0\,.\,0\,.\,1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{j1} & a_{j2} & \dots & a_{jn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1}+\alpha a_{j1} & a_{i2}+\alpha a_{j1} & \dots & a_{in}+\alpha a_{j1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{j1} & a_{j2} & \dots & a_{jn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

De modo análogo se razonaría para las otras transformaciones elementales.

V.7 .- CALCULO DEL RANGO DE UNA APLICACION LINEAL

El rango de una aplicación lineal es, desde un punto de vista matricial, igual al rango de su

matriz asociada, es decir, el número máximo de vectores columna (o fila) l.i.. Veamos como calcular este rango mediante un conjunto de transformaciones sobre la matriz que la reduzcan a otra cuyo rango sea inmediato de averiguar.

De acuerdo con las propiedades de los conjuntos generadores de un espacio vectorial de dimensión finita, las transformaciones elementales aplicadas a una matriz dejan invariable el subespacio engendrado por sus vectores fila y, por tanto, su dimensión, es decir, el rango de la matriz. Por ello y como si $b_{11} \neq 0$, $b_{22} \neq 0$,..., $b_{rr} \neq 0$, la matriz

$$\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & .. & b_{1r} & .. & b_{1n} \\ 0 & b_{22} & .. & b_{2r} & .. & b_{2n} \\ . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & .. & b_{rr} & .. & b_{rn} \\ 0 & 0 & .. & 0 & .. & 0 \\ .. & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & .. & 0 & .. & 0 \end{pmatrix}$$

tiene rango r, por ser sus r primeros vectores fila linealmente independientes, se trata de aplicar transformaciones elementales a la matriz dada hasta reducirla a una de este tipo. Para ello, en la matriz dada

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & .. & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & .. & a_{2n} \\ . & . & . & . \\ a_{m1} & a_{m2} & .. & a_{mn} \end{pmatrix}$$

si $a_{11} \neq 0$, sumamos a la fila i (i = 2,...,m) la primera multiplicada por $-a_{i1}/a_{11}$ obteniendo otra matriz

$$\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & .. & b_{1r} & .. & b_{1n} \\ 0 & b_{22} & .. & b_{2r} & .. & b_{2n} \\ . & . & . & . & . & . \\ 0 & b_{m2} & .. & b_{mr} & .. & b_{mn} \end{pmatrix}$$

en la que, si $b_{22} \neq 0$, sumamos a la fila i (i = 3,...,m) la segunda multiplicada por $-b_{i2}/b_{22}$ y, así sucesivamente, llegaremos a una matriz tipo deseado. Si $a_{11} = 0$, habrá algún $a_{1j} \neq 0$, ya que si todos fueran cero la primera fila puede suprimirse sin afectar el rango de la matriz, con lo que bastará permutar las columnas 1ª y jª para que el primer elemento sea distinto de cero; lo mismo si $b_{22} = 0$, y así sucesivamente.

Ejemplo V.7.1.

Para calcular el rango de la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & 2 \\ 2 & -6 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 4 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

prodeceremos como sigue:

1) Sumamos a la $\begin{Bmatrix} 2ª \text{ fila la } 1ª \text{ multiplicada por } -2 \\ 3ª \text{ fila la } 1ª \text{ multiplicada por } -1 \\ 4ª \text{ fila la } 1ª \text{ multiplicada por } -1 \\ 5ª \text{ fila la } 1ª \text{ multiplicada por } -2 \end{Bmatrix}$ obteniendo $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 4 & 1 & 1 \\ 0 & 7 & 1 & -1 \\ 0 & 11 & 2 & -4 \end{pmatrix}$

2) Permutamos las filas 2ª y 5ª obteniendo $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 1 & 1 \\ 0 & 7 & 1 & -1 \\ 0 & 11 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

3) Sumamos a la $\begin{Bmatrix} 3ª \text{ fila la } 2ª \text{ multiplicada por } -7/4 \\ 4ª \text{ fila la } 2ª \text{ multiplicada por } -11/4 \end{Bmatrix}$ obteniendo $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -3/4 & -11/4 \\ 0 & 0 & -3/4 & -27/4 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

4) Sumamos a la 4ª fila la 3ª multiplicada por -1, obteniendo $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -3/4 & -11/4 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

5) Sumamos a la 5ª fila la 4ª multiplicada por $-1/2$, obteniendo $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -3/4 & -11/4 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

y así hemos reducido la matriz dada a una del tipo buscado, cuyo rango es cuatro.

Ejercicios

V.30.- Sea $(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3)$ una base del espacio vectorial $\mathbf{R}^3$ sobre $\mathbf{R}$. Se considera la aplicación lineal f de $\mathbf{R}^3$ en $\mathbf{R}^3$ tal que

$$f(\boldsymbol{e}_3) = \alpha_1\boldsymbol{e}_1+\alpha_2\boldsymbol{e}_2+5\boldsymbol{e}_3$$
$$f(\boldsymbol{e}_2+\boldsymbol{e}_3) = \alpha_3\boldsymbol{e}_1$$
$$f(\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2+\boldsymbol{e}_3) = \boldsymbol{e}_2-\alpha_4\boldsymbol{e}_3$$

para $\alpha_1 =$, $\alpha_2 =$, $\alpha_3 =$, $\alpha_4 =$. Hallar la matriz asociada a f en la base $(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3)$ de $\mathbf{R}^3$, $f(\boldsymbol{e}_1+2\boldsymbol{e}_2+3\boldsymbol{e}_3)$ y el rango de f.

V.31.- Calcular el rango de las matrices

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 4 & 5 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & 4 \\ 5 & 2 & -6 & 1 \\ -3 & -8 & 8 & 7 \\ -7 & -13 & 15 & 10 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} -1 & 4 & -2 & 5 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & -2 & 5 \\ 3 & 10 & -6 & 11 & 10 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & a \\ 1 & 1 & a & a^2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -1 & i & 1-2i \\ i & 1 & -2+i \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1+i & i & 2i \\ -i & 2-i & 1 & 2+i \\ 1-i & -1+i & 2i & 0 \\ -1 & -2i & 1+i & 2+i \end{pmatrix}$$

V.32.- Sea el endomorfismo de $\mathbf{R}^3$ de matriz $\mathbf{M} = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 2 \\ 1 & a & a \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. Demostrar que para todo a el rango de $\mathbf{M}$ es dos.

V.33.- Hallar el rango de la matriz

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ a & 0 & a & 0 & a \\ 0 & a & 0 & a & 0 \\ a & a & a & a & a \end{pmatrix}$$

según los valores de $a \in \mathbf{R}$.

V.8 .- CALCULO DE LAS BASES DEL NUCLEO E IMAGEN

Sean U y V e.v.s. K de dimensión finita, $(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\ldots,\boldsymbol{e}_n)$ base de U, $(\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2,...,\boldsymbol{u}_m)$ base de V y la aplicación lineal

$$
\begin{aligned}
f : U &\longrightarrow V \\
\boldsymbol{e}_1 &\longrightarrow f(\boldsymbol{e}_1) = a_{11}\boldsymbol{u}_1 + a_{21}\boldsymbol{u}_2 + \ldots + a_{m1}\boldsymbol{u}_m \\
\boldsymbol{e}_2 &\longrightarrow f(\boldsymbol{e}_2) = a_{12}\boldsymbol{u}_1 + a_{22}\boldsymbol{u}_2 + \ldots + a_{m2}\boldsymbol{u}_m \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\boldsymbol{e}_n &\longrightarrow f(\boldsymbol{e}_n) = a_{1n}\boldsymbol{u}_1 + a_{2n}\boldsymbol{u}_2 + \ldots + a_{mn}\boldsymbol{u}_m
\end{aligned}
$$

Construyamos para representar a f la siguiente matriz, especial para resolver este problema

$$
\left(\begin{array}{cccc|ccc}
1 & 0 & \ldots & 0 & a_{11} & a_{21} & \ldots & a_{m1} \\
0 & 1 & \ldots & 0 & a_{12} & a_{22} & \ldots & a_{m2} \\
\multicolumn{4}{c|}{\ldots\ldots\ldots\ldots} & \multicolumn{3}{c}{\ldots\ldots\ldots} \\
0 & 0 & \ldots & 1 & a_{1n} & a_{2n} & \ldots & a_{mn}
\end{array}\right)
$$

en la que una fila i está formada por las componentes del vector $\boldsymbol{e}_i$ respecto de la base de trabajo en U (si es la $(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\ldots,\boldsymbol{e}_n)$ la fila i será $0\ 0\ \ldots\ 1\ \ldots\ 0$), seguidas de las componentes del vector imagen $f(\boldsymbol{e}_i)$ respecto de la base $(\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2,\ldots,\boldsymbol{u}_m)$.

Esta matriz se considera dividida en dos submatrices, la izquierda constituída por las componentes de los vectores $\boldsymbol{e}_i$ y la derecha por las componentes de sus vectores imagen $f(\boldsymbol{e}_i)$. De acuerdo con la definición de aplicación lineal, como la imagen de la suma de vectores es la suma de imágenes y la imagen del producto por un escalar es el producto del escalar por la imagen, cualquier transformación elemental de filas la convierte en otra matriz representante de f. Realicemos pues sobre esta matriz las necesarias transformaciones elementales de fila hasta que la submatriz izquierda sea escalonada. Si $a_{11} \neq 0$, sumamos a cada fila j ($j = 2,\ldots,n$) la primera multiplicada por

$$-a_{ij}/a_{11}$$

(si $a_{11} = 0$ buscamos una fila j tal que $a_{1j} \neq 0$ y la permutamos con la primera; si fueran todos los $a_{1j} = 0$, ignoraremos esta columna y pasaremos a operar de modo análogo con la segunda columna de la submatriz derecha) con lo que se obtiene una matriz de la forma

$$
\left(\begin{array}{cccc|ccc}
c_{11} & c_{12} & \ldots & c_{1n} & b_{11} & b_{21} & \ldots & b_{m1} \\
c_{21} & c_{22} & \ldots & c_{2n} & 0 & b_{22} & \ldots & b_{m2} \\
\multicolumn{4}{c|}{\ldots\ldots\ldots\ldots} & \multicolumn{3}{c}{\ldots\ldots\ldots} \\
c_{n1} & c_{n2} & \ldots & c_{nn} & 0 & b_{2n} & \ldots & b_{mn}
\end{array}\right)
$$

Si $b_{22} \neq 0$, sumamos a cada fila j ($j = 3,\ldots,n$) la segunda multiplicada por

$$-b_{ij}/b_{22}$$

(si $b_{22} = 0$ procederemos igual que antes) y así sucesivamente hasta obtener una matriz, que en su forma general sea de la forma

$$\begin{pmatrix} y_{11} & y_{21} & .. & y_{n1} & 0 & 0 & .. & z_{p1} & .. & z_{q1} & .. & z_{s1} & .. & z_{m1} \\ y_{12} & y_{21} & .. & y_{n1} & 0 & 0 & .. & 0 & .. & z_{q2} & .. & z_{s2} & .. & z_{m2} \\ & & & & & & & & & & & & & \\ y_{1r} & y_{2r} & .. & y_{nr} & 0 & 0 & .. & 0 & .. & 0 & .. & z_{sr} & .. & z_{mr} \\ y_{1r+1} & y_{2r+1} & .. & y_{nr+1} & 0 & 0 & .. & 0 & .. & 0 & .. & 0 & .. & 0 \\ & & & & & & & & & & & & & \\ y_{1n} & y_{2n} & .. & y_{nn} & 0 & 0 & .. & 0 & .. & 0 & .. & 0 & .. & 0 \end{pmatrix}$$

en la que inmediatamente se observa que

$$\mathrm{Im}(f) = [z_{p1}\boldsymbol{u}_p+\ldots+z_{m1}\boldsymbol{u}_m,\ z_{q2}\boldsymbol{u}_q+\ldots+z_{m2}\boldsymbol{u}_m,\ \ldots,z_{sr}\boldsymbol{u}_s+\ldots+z_{mr}\boldsymbol{u}_m]$$

y como estos vectores forman un conjunto l.i., entonces

$$(z_{p1}\boldsymbol{u}_p+\ldots+z_{m1}\boldsymbol{u}_m,\ z_{q2}\boldsymbol{u}_q+\ldots+z_{m2}\boldsymbol{u}_m,\ldots,\ z_{sr}\boldsymbol{u}_s+\ldots+z_{mr}\boldsymbol{u}_m)$$

es una base de Im(*f*). Además como

$$\mathrm{rang}(f) = \dim(\mathrm{Im}(f)) = r \ \Rightarrow\ \dim(\mathrm{Nuc}(f)) = \dim(U)-\mathrm{rang}(f) = n-r$$

tendremos para base de Nuc(*f*)

$$(y_{1r+1}\boldsymbol{e}_1+\ldots+y_{nr+1}\boldsymbol{e}_n,\ldots,y_{1n}\boldsymbol{e}_1+\ldots+y_{nn}\boldsymbol{e}_n)$$

pues son vectores l.i. cuya imagen, según indica la matriz, es el vector nulo.

Ejemplo V.8.1

Sean U y V e.v.s. $\mathbf{R}$ de bases $(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3,\boldsymbol{e}_4)$ y $(\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2,\boldsymbol{u}_3,\boldsymbol{u}_4,\boldsymbol{u}_5)$ respectivamente y la aplicación lineal

$$\begin{aligned} f: U &\longrightarrow V \\ \boldsymbol{e}_1 &\longrightarrow 3\boldsymbol{u}_3+4\boldsymbol{u}_4+2\boldsymbol{u}_5 \\ \boldsymbol{e}_2 &\longrightarrow 2\boldsymbol{u}_2+\boldsymbol{u}_3+4\boldsymbol{u}_4+2\boldsymbol{u}_5 \\ \boldsymbol{e}_3 &\longrightarrow 2\boldsymbol{u}_2-2\boldsymbol{u}_3 \\ \boldsymbol{e}_4 &\longrightarrow 4\boldsymbol{u}_2+\boldsymbol{u}_3+2\boldsymbol{u}_4+5\boldsymbol{u}_5 \end{aligned}$$

Referida a las bases $(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3,\boldsymbol{e}_4)$ y $(\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2,\boldsymbol{u}_3,\boldsymbol{u}_4,\boldsymbol{u}_5)$, la matriz representante de f será

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 4 & 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

sobre la que realizaremos las siguientes transformaciones elementales de columna:

a) Como la primera columna de la submatriz derecha es nula, operaremos con la

segunda, permutando, en primer lugar las 1ª y 2ª filas, para conseguir un primer elemento distinto de cero

$$\left(\begin{array}{ccccccccc} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 4 & 1 & 2 & 5 \end{array}\right)$$

b) Sumamos a la 3ª fila la 1ª multiplicada por −1
" 4ª " 1ª " " −2

$$\left(\begin{array}{ccccccccc} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 4 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -3 & -4 & -2 \\ 0 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & -6 & 1 \end{array}\right)$$

c) Sumamos a la 3ª fila la 2ª multiplicada por 1
" 4ª " , multiplicada por 3, la 2ª

$$\left(\begin{array}{ccccccccc} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 4 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -6 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & -14 & 5 \end{array}\right)$$

Permutando las filas 3ª y 4ª, de esta última matriz se deduce que:

1) $(2\boldsymbol{u}_2+\boldsymbol{u}_3+4\boldsymbol{u}_4+2\boldsymbol{u}_5, 3\boldsymbol{u}_3+4\boldsymbol{u}_4+2\boldsymbol{u}_5, -14\boldsymbol{u}_4+5\boldsymbol{u}_5)$ es una base de Im(f) y rang(f) = 3

2) dim(Nuc(f)) = 1, siendo $(\boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{e}_2+\boldsymbol{e}_3)$ una base de Nuc(f)

El algoritmo también es válido aunque refiramos los vectores de la base del espacio inicial a otra base diferente.

Ejemplo V.8.2

La aplicación lineal

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbf{R}^3 & \longrightarrow & \mathbf{R}^4 \\ & (2,-1,1) & \longrightarrow & (2,-3,1,0) \\ & (5,0,2) & \longrightarrow & (6,-9,0,2) \\ & (-3,1,4) & \longrightarrow & (8,-12,-2,4) \end{array}$$

está bien definida puesto que ((2,−1,1),(5,0,2),(−3,1,4)) forman una base de $\mathbf{R}^3$. Tomando como bases de referencia en $\mathbf{R}^3$ y $\mathbf{R}^4$ sus bases canónicas, la matriz que representa a f es

$$\left(\begin{array}{rrrrrrr} 2 & -1 & 1 & 2 & -3 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 2 & 6 & -9 & 0 & 2 \\ -3 & 1 & 4 & 8 & -12 & -2 & 4 \end{array}\right)$$

en la que sumaremos a la 2ª fila la 1ª multiplicada por (−3), y a la 3ª fila la 1ª multiplicada por (−4), obteniendo

$$\left(\begin{array}{rrrrrrr} 2 & -1 & 1 & 2 & -3 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & -1 & 0 & 0 & -3 & 2 \\ -11 & 5 & 0 & 0 & 0 & -6 & 4 \end{array}\right)$$

y sumando a la 3ª fila la 2ª multiplicada por (–2)

$$\left(\begin{array}{rrrrrrr} 2 & -1 & 1 & 2 & -3 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & -1 & 0 & 0 & -3 & 2 \\ -9 & -1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

tendremos que una base de Im(f) es ((2,−3,1,0),(0,0,−3,2)), rang(f) = 2, una base de Nuc(f) es ((–9,–1,2)) y dim(Nuc(f)) = 1.

Ejercicios

V.34.- Para la aplicación lineal

$$\begin{array}{rcl} f: & \mathbf{R}^3 & \longrightarrow \mathbf{R}^3 \\ & (x,y,z) & \longrightarrow (x+2y,2x+y-3z,-x+y+3z) \end{array}$$

hallar la matriz de la aplicación en las bases canónicas, bases de los subespacios Nuc(f) e Im(f) y la antiimagen, si existe, de (1,0,0).

V.35.- Sea

$$\begin{array}{rcl} f: & \mathbf{R}^4 & \longrightarrow \mathbf{R}^4 \\ & (1,0,0,0) & \longrightarrow (2,-1,-1,0) \\ & (0,1,0,0) & \longrightarrow (-1,1,0,-1) \\ & (0,0,1,0) & \longrightarrow (1,0,1,-1) \\ & (0,0,0,1) & \longrightarrow (0,-1,-1,2) \end{array}$$

Hallar $f(2,5,6,8)$, $f(x,y,z,t)$, $f^{-1}(1,0,0,1)$, Nuc(f), Im(f), rang f y clasificarla.

V.36.- Dadas las siguientes aplicaciones lineales, hallar sus matrices respecto a las bases canónicas, sus rangos, bases del núcleo e imagen y clasificarlas:

$$\begin{array}{rcl} f: & \mathbf{R}^3 & \longrightarrow \mathbf{R}^2 \\ & (x,y,z) & \longrightarrow (x+y/2,x+z/2) \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} g: & \mathbf{R}^3 & \longrightarrow \mathbf{R}^4 \\ & (1,1,0) & \longrightarrow (3,2,0,1) \\ & (2,3,1) & \longrightarrow (1,-2,1,1) \\ & (0,-2,1) & \longrightarrow (4,0,1,2) \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} h: \mathbf{R}^2 & \longrightarrow & \mathbf{R}^4 \\ (2,-1) & \longrightarrow & (1,0,-1,3) \\ (4,1) & \longrightarrow & (2,-2,3,1) \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} i: \mathbf{R}^3 & \longrightarrow & \mathbf{R}^3 \\ (0,1,0) & \longrightarrow & (0,2,0) \\ (1,0,0) & \longrightarrow & (1,0,0) \\ (1,1,1) & \longrightarrow & (0,0,0) \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} j: \mathbf{R}^4 & \longrightarrow & \mathbf{R}^2 \\ (1,2,-1,-3) & \longrightarrow & (-5,6) \\ (-3,-1,0,5) & \longrightarrow & (8,4) \\ (4,2,5,0) & \longrightarrow & (10,6) \\ (-3,-2,1,7) & \longrightarrow & (13,0) \end{array}$$

V.37.- Sea $f: \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}^4$ la aplicación lineal definida por

$$f(1,0,0) = (1,0,1,1) \qquad f(0,1,0) = (0,1,1,1) \qquad f(0,0,1) = (1,-1,0,a)$$

donde $a \in \mathbf{R}$ es fijo. Se pide

a) Obtener la ecuación matricial de f respecto a las bases canónicas.

b) Determinar a para que f no sea inyectiva.

V.38.- Sea la aplicación lineal f de $\mathbf{R}^3$ en $\mathbf{R}^3$ dada por

$$f(x,y,z) = ((\lambda-2)x+2y-z, 2x+\lambda y+2z, 2\lambda x+2(\lambda+1)y+(1+\lambda)z)$$

con $\lambda \in \mathbf{R}$ dado. Hallar según los valores de λ, el Nuc(f), Im(f) y rang f.

V.39.- Sean V y W dos espacios vectoriales reales, de bases $(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3)$ y $(\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2,\boldsymbol{u}_3,\boldsymbol{u}_4)$, respectivamente. Si $\lambda \in \mathbf{R}$, dada la aplicación

$$\begin{array}{rcl} f: V & \longrightarrow & W \\ \boldsymbol{e}_1 & \longrightarrow & \lambda\boldsymbol{u}_1+\boldsymbol{u}_2 \\ \boldsymbol{e}_2 & \longrightarrow & \boldsymbol{u}_3+\boldsymbol{u}_4 \\ \boldsymbol{e}_3 & \longrightarrow & \boldsymbol{u}_1+\boldsymbol{u}_2+\boldsymbol{u}_3+\boldsymbol{u}_4 \end{array}$$

hallar la ecuación de f, Nuc(f) e Im(f) y averiguar cuándo f es inyectiva.

V.40.- Sea el endomorfismo f de $\mathbf{R}_5(x)$ definido por $f(P(x)) = P'(x)$. Demostrar que es lineal y hallar las bases del Nuc(f) e Im(f).

V.41.- Sea $M_{(2,2)}(\mathbf{R})$ el espacio vectorial de las matrices reales cuadradas de orden dos.

a) Demostrar que la aplicación

$$\begin{array}{rcl} f: M_{(2,2)}(\mathbf{R}) & \longrightarrow & M_{(2,2)}(\mathbf{R}) \\ \mathbf{M} & \longrightarrow & f(\mathbf{M}) = \mathbf{PM} \end{array}$$

es lineal, siendo $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

b) Hallar la matriz de f respecto a la base canónica de $M_{(2,2)}(\mathbf{R})$.

c) Hallar el rango de f y las bases del Nuc(f) e Im(f) .

d) Clasificar f.

V.42.- Dos endomorfismos f y g de $\mathbf{R}^3$ admiten por matrices respecto a la base canónica

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

respectivamente. Demostrar

a) $\{\boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^3 \mid f(x) = g(\boldsymbol{x})\}$ es un subespacio vectorial.

b) f es biyectivo.

c) Hallar la matriz del endomorfismo compuesto.

d) Hallar bases del núcleo y de la imagen y clasificar el endomorfismo compuesto.

V.9 .- CALCULO DE LA MATRIZ INVERSA DE UNA MATRIZ REGULAR

Dada una matriz $\mathbf{A}$ regular de orden n, su inversa ya vimos que es una matriz regular $\mathbf{A}^{-1}$ de orden n que verifica $\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{I}_n$. Si $\mathbf{F}^n_{\alpha_1}(i_1,j_1),\ldots,\mathbf{F}^n_{\alpha_r}(i_r,j_r)$ son transformaciones de fila tales que el producto $(\mathbf{F}^n_{\alpha_1}(i_1,j_1)\cdot\ldots\cdot\mathbf{F}^n_{\alpha_r}(i_r,j_r))\cdot\mathbf{A} = \mathbf{I}_n$, entonces

$$\mathbf{F}^n_{\alpha_1}(i_1,j_1)\cdot\ldots\cdot\mathbf{F}^n_{\alpha_r}(i_r,j_r)\cdot(\mathbf{A}\cdot\mathbf{A}^{-1}) = \mathbf{F}^n_{\alpha_1}(i_1,j_1)\cdot\ldots\cdot\mathbf{F}^n_{\alpha_r}(i_r,j_r)\cdot\mathbf{I}_n \;\Rightarrow\; \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{F}^n_{\alpha_1}(i_1,j_1)\cdot\ldots\cdot\mathbf{F}^n_{\alpha_r}(i_r,j_r)\cdot\mathbf{I}_n$$

es decir, las transformaciones elementales de fila que aplicadas a $\mathbf{A}$ la convierten en la matriz unidad $\mathbf{I}_n$ son las que aplicadas a la matriz $\mathbf{I}_n$ dan la matriz inversa $\mathbf{A}^{-1}$. Por ello el algoritmo para obtener la matriz inversa se construye a partir de una matriz formada por la matriz $\mathbf{A}$ junto con la matriz unidad del mismo orden que $\mathbf{A}$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & .. & a_{1n} & 1 & 0 & .. & 0 \\ a_{21} & a_{22} & .. & a_{2n} & 0 & 1 & .. & 0 \\ \multicolumn{8}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots} \\ a_{n1} & a_{n2} & .. & a_{nn} & 0 & 0 & .. & 1 \end{pmatrix}$$

y mediante transformaciones de fila obtener una matriz de la forma

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & .. & 0 & b_{11} & b_{12} & .. & b_{1n} \\ 0 & 1 & .. & 0 & b_{21} & b_{22} & .. & b_{2n} \\ & & & \cdots & & & & \\ 0 & 0 & .. & 1 & b_{n1} & b_{n2} & .. & b_{nn} \end{pmatrix}$$

con lo que la submatriz derecha de la matriz final es la matriz inversa buscada. La matriz final siempre podrá obtenerse mediante transformaciones de filas únicamente, si la matriz **A** es regular, pues sus vectores columna forman un conjunto l.i.. Para que **A** se convierta en **I** después de las transformaciones elementales, y dado aue éstas conservan el rango, es necesario que rang(**A**) = *n*, es decir, **A** debe ser regular.

Ejemplo VI.9.1

Busquemos la inversa de

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 7 & 4 \end{pmatrix}$$

Para ello aplicaremos transformaciones elementales de fila a la matriz

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 7 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 7 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \to$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 7 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 1 & -14 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1/2 & 7 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1/4 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Si aplicamos este proceso para hallar la inversa de

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -5 & -5 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

tendremos

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -5 & -5 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & -2 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & 1 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -10 & 0 & -6 & 5 & 3 & 0 \\ 0 & 10 & -2 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

no pudiéndose llegar a la forma deseada, porque en este caso rang(**A**) = 2, luego **A** no es regular y no tiene inversa.

Ejercicios

V.43.- Hallar las inversas de las matrices siguientes:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 0 \\ -3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & \alpha_2 & 5 & -2 \\ 3 & 5 & \alpha_3 & 1 \\ 1 & 1 & -5 & \alpha_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & .. & 1 \\ 1 & 2 & 2 & .. & 2 \\ 1 & 2 & 3 & .. & 3 \\ \multicolumn{5}{c}{\dots\dots\dots} \\ 1 & 2 & 3 & .. & n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -a & 0 & .. & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -a & .. & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & .. & 0 & 0 \\ \multicolumn{6}{c}{\dots\dots\dots\dots} \\ 0 & 0 & 0 & .. & 1 & -a \\ 0 & 0 & 0 & .. & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

para $\alpha_1 =$, $\alpha_2 =$, $\alpha_3 =$, $\alpha_4 =$.

V.44.- Para qué valores de a el endomorfismo f definido en $\mathbf{R}^3$ de matriz en la base canónica

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & -a \\ 2 & 6 & -2a \\ 1 & 3 & 1+a \end{pmatrix}$$

es biyectivo. En este caso, hallar f^{-1}.

V.45.- Sea f un endomorfismo de $\mathbf{R}^3$ cuya matriz respecto a la base canónica es

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & a+2 & a \\ 3 & 3 & b \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{con } a,\ b \in \mathbf{R}$$

Estudiar según los valores de a y b, la existencia de f^{-1} y cuando exista hallar su matriz respecto a las bases canónicas.

V.10.- RESOLUCION DE SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

Diremos que un sistema de m ecuaciones con n incógnitas es lineal, cuando sus ecuaciones son algebraicas de primer grado; en general, un sistema de m ecuaciones y n incógnitas sobre un cuerpo K lo escribiremos en la forma

$$\begin{array}{c} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\ldots+a_{mn}x_n = b_m \end{array}$$

Si los términos independientes son nulos, el sistema se denomina ***homogéneo***. Solución de un sistema es una n–pla de valores de las incógnitas, tales que al sustituirlas por ellos hacen que

cada igualdad del sistema se verifique. Un sistema con solución se denomina ***compatible***; si la solución es única, ***determinado*** y si hay más de una solución ***indeterminado***. Dos sistemas diremos que son ***equivalentes*** si y sólo si tienen las mismas soluciones. Las matrices

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & .. & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & .. & a_{2n} \\ .. & .. & .. & .. \\ a_{m1} & a_{m2} & .. & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad \mathbf{A}|\mathbf{b} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & .. & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & .. & a_{2n} & b_2 \\ .. & .. & .. & .. & .. \\ a_{m1} & a_{m2} & .. & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

se denominan ***matriz de los coeficientes y matriz ampliada***, respectivamente. Mediante la primera el sistema puede expresarse en forma matricial

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$$

siendo **x** y **b** las matrices $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ .. \\ x_n \end{pmatrix}$ y $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ .. \\ b_m \end{pmatrix}$.

Como toda matriz vertical del tipo $(n,1)$ representa a un vector del espacio K^n y como la imagen de un vector en una aplicación lineal puede expresarse mediante un producto de matrices, el sistema puede representarse en forma vectorial

$$f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{b}$$

donde $\boldsymbol{x} = (x_1,x_2,...,x_n) \in K^n$ es el vector antiimagen del $\boldsymbol{b} = (b_1,b_2,...,b_m) \in K^m$ en la aplicación de K^n en K^m en la que las imágenes de los vectores de la base canónica de K^n son los vectores columnas de **A**. El núcleo de f es el conjunto de vectores de K^n tales que $f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}$ o, equivalentemente, $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ por lo que sus componentes son las soluciones del que se denomina sistema homogéneo asociado. Tendremos pues que $\boldsymbol{x} = (x_1,x_2,...,x_n)$ es solución de la ecuación vectorial $f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{b}$ si y sólo si $(x_1,x_2,...,x_n)$ es solución del sistema. De forma análoga $\boldsymbol{x}^0 = (x^0_1,x^0_2,\ldots,x^0_n)$ es un vector del núcleo si y sólo si $(x^0_1,x^0_2,\ldots,x^0_n)$ es solución del sistema homogéneo asociado.

La ecuación $f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{b}$ tiene solución si y sólo si $\boldsymbol{b} \in \mathrm{Im}(f)$. Además puede determinarse cuántas soluciones tiene ya que, al ser f lineal

$$\left.\begin{array}{rcl} \boldsymbol{x} \text{ antiimagen de } \boldsymbol{b} & \Rightarrow & f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{n} \in \mathrm{Nuc}(f) & \Rightarrow & f(\boldsymbol{n}) = \boldsymbol{0} \end{array}\right| \quad \Rightarrow \quad f(\boldsymbol{x})+f(\boldsymbol{n}) = \boldsymbol{b} \quad \Rightarrow \quad f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{n}) = \boldsymbol{b}$$

es decir, $(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{n})$ es también antiimagen de $\boldsymbol{b}$; como

$$\left.\begin{array}{rcl} \boldsymbol{x}_1 \text{ antiimagen de } \boldsymbol{b} & \Rightarrow & f(\boldsymbol{x}_1) = \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{x}_2 \text{ antiimagen de } \boldsymbol{b} & \Rightarrow & f(\boldsymbol{x}_2) = \boldsymbol{b} \end{array}\right| \quad \Rightarrow \quad f(\boldsymbol{x}_2)-f(\boldsymbol{x}_1) = \boldsymbol{0} \quad \Rightarrow \quad f(\boldsymbol{x}_2-\boldsymbol{x}_1) = \boldsymbol{0}$$

por lo que $\boldsymbol{x}_2-\boldsymbol{x}_1 = \boldsymbol{n} \in \mathrm{Nuc}(f)$ y $\boldsymbol{x}_2 = \boldsymbol{x}_1+\boldsymbol{n}$. Podemos pues afirmar que si $\boldsymbol{b}$ tiene antiimagen, ésta será única o no dependiendo de si el núcleo no contiene más vectores que el vector nulo, o

contiene otros vectores. La solución general de la anterior ecuación vectorial es igual a una solución particular más cualquier vector del núcleo, por lo que es necesario conocer una base de éste y como

$$\dim(\text{Nuc}(f)) = n - \text{rang}(f)$$

será suficiente conocer n–rang(f) vectores l.i. que formarán la base. Tenemos entonces que

"La ecuación $f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{b}$ tiene solución si y sólo si $\boldsymbol{b} \in \text{Im}(f)$; la solución general es $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}' + \boldsymbol{n}$ siendo $\boldsymbol{x}'$ una solución particular y $\boldsymbol{n}$ un vector de Nuc(f) por lo que la solución es única si y sólo si Nuc(f) = $\{\boldsymbol{0}\}$, lo equivale a que rang(f) = n".

Traduzcamos estos resultados a lenguaje de sistemas; si $\boldsymbol{b} \in \text{Im}(f)$, entonces la última columna de $\mathbf{A}|\mathbf{b}$ es combinación lineal de las demás con lo que rang($\mathbf{A}$) = rang($\mathbf{A}|\mathbf{b}$). Así tenemos que

"Un sistema de ecuaciones lineales $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ será compatible si y sólo si rang($\mathbf{A}$) = rang($\mathbf{A}|\mathbf{b}$); la solución general viene dada por $x_1 = x_1' + x_1^0$, ... , $x_n = x_n' + x_n^0$, siendo $x_1', \ldots, x_n'$ una solución particular y $x_1^0, \ldots, x_n^0$ una solución del sistema homogéneo asociado, por lo que el sistema será determinado si y sólo si rang($\mathbf{A}$) = rang($\mathbf{A}|\mathbf{b}$) = n".

Resumiendo, un sistema de m ecuaciones lineales con n incógnitas será

a) compatible si y sólo si las matrices de los coeficientes y la ampliada tienen el mismo rango,

a1) compatible determinado si este rango común es igual al número de incógnitas,

a2) compatible indeterminado si el rango común es menor que el número de incógnitas, en cuyo caso la solución general será igual a una solución particular más cualquier combinación lineal de $n–r$ soluciones independientes del sistema homogéneo asociado.

Este resultado se conoce como el ***Teorema de Rouché***. En particular, un sistema homogéneo

$$\begin{gathered} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = 0 \end{gathered}$$

presenta la particularidad de que al ser

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad \mathbf{A}|\mathbf{b} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & 0 \end{pmatrix}$$

siempre es

$$\text{rang}(\mathbf{A}) = \text{rang}(\mathbf{A}|\mathbf{b})$$

es decir el sistema es compatible; obviamente, tiene la solución trivial $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$. El

teorema de Rouché aplicado a estos sistemas dice que si

$$\text{rang}(\mathbf{A}) = n \text{ el sistema es determinado}$$

$$\text{rang}(\mathbf{A}) < n \text{ el sistema es indeterminado}$$

Ejemplo V.10.1

En el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} 3x-y+4z &= 1\\ 6x-y+5z &= 2\\ 2x+y+2z &= 3\\ x-y-z &= -2\\ 4x-2y+3z &= -1 \end{aligned}$$

estudiemos los rangos de $\mathbf{A}$ y $\mathbf{A}|\mathbf{b}$ conjuntamente

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 4 & 1\\ 6 & -1 & 5 & 2\\ 2 & 1 & 2 & 3\\ 1 & -1 & -1 & -2\\ 4 & -2 & 3 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 3 & -1 & 4 & 1\\ 0 & 1 & -3 & 0\\ 0 & -5 & 2 & -7\\ 0 & 2 & 7 & 7\\ 0 & 2 & 7 & 7 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 3 & -1 & 4 & 1\\ 0 & 1 & -3 & 0\\ 0 & 0 & -13 & -7\\ 0 & 0 & 13 & 7\\ 0 & 0 & 13 & 7 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 3 & -1 & 4 & 1\\ 0 & 1 & -3 & 0\\ 0 & 0 & -13 & -7\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

de donde

$$\text{rang}(\mathbf{A}) = \text{rang}(\mathbf{A}|\mathbf{b}) = 3$$

y el sistema es compatible y determinado.

El Teorema de Rouché justifica el algoritmo de Gauss-Jordan que hemos estado utilizando para resolver sistemas como veremos a continuación.

Cualquier transformación elemental de filas que hagamos en la matriz de un sistema da lugar a una matriz que representa a un sistema equivalente pues

$$\mathbf{x} \text{ solución de } \mathbf{Ax} = \mathbf{b} \iff \mathbf{x} \text{ solución de } (\mathbf{F}^m_\alpha(i,j)\,\mathbf{A})\mathbf{x} = \mathbf{F}^m_\alpha(i,j)\,\mathbf{b}$$

Asímismo si en un sistema lineal añadimos o quitamos una ecuación que sea combinación lineal de otras, se obtiene otro sistema equivalente, ya que si $\mathbf{A}_i = (a_{i1}\ \ a_{i2}\ \ldots\ a_{in})$

$$\mathbf{x} \text{ solución de } \begin{cases} \mathbf{A}_1\mathbf{x} = b_1\\ \ldots\ldots\\ \mathbf{A}_m\mathbf{x} = b_m \end{cases} \iff \mathbf{x} \text{ solución de } \begin{cases} \mathbf{A}_1\mathbf{x} = b_1\\ \ldots\ldots\\ \mathbf{A}_m\mathbf{x} = b_m\\ (\alpha_1\mathbf{A}_1+\ldots+\alpha_m\mathbf{A}_m)\mathbf{x} = \alpha_1 b_1+\ldots+\alpha_m b_m \end{cases}$$

Debido a estas propiedades, para resolver un sistema lineal aplicaremos sobre su matriz ampliada transformaciones elementales de fila hasta reducirla a una de la forma

$$\begin{pmatrix} 1 & .. & 0 & .. & 0 & c_{1r+1} & .. & c_{1n} & d_1 \\ 0 & .. & 1 & .. & 0 & c_{2r+1} & .. & c_{2n} & d_2 \\ & & & & \cdots & & & & \\ 0 & .. & 0 & .. & 1 & c_{rr+1} & .. & c_{rn} & d_r \\ 0 & .. & 0 & .. & 0 & 0 & .. & 0 & 0 \\ & & & & \cdots & & & & \\ 0 & .. & 0 & .. & 0 & 0 & .. & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Las columnas que contienen todos sus elementos iguales a 0 excepto uno igual a 1 señalan las incógnitas principales, las demás columnas corresponden a las otras incógnitas, excepto la última formada por los términos independientes del sistema transformado, que es equivalente al inicial. Según los resultados del teorema de Rouché, para hallar la solución general debemos sumar a una solución particular (que se obtiene fácilmente dando a las incógnitas no principales el valor 0 con lo que las incógnitas principales son igual a los términos independientes) una solución del sistema homogéneo asociado (que se halla haciendo nulos los términos independientes y despejando las incógnitas principales en función de las demás). Es decir, si, por ejemplo, las incógnitas principales fueran x_1, x_2,..., x_r, la solución general es

$$\begin{aligned} x_1 &= d_1 - c_{1r+1}x_{r+1} - \ldots - c_{1n}x_n \\ x_2 &= d_2 - c_{2r+1}x_{r+1} - \ldots - c_{2n}x_n \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_r &= d_r - c_{rr+1}x_{r+1} - \ldots - c_{rn}x_n \end{aligned}$$

Ejemplo V.10.2

Sea el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} x_1+2x_2+3x_3-2x_4+x_5+3x_6 &= 1 \\ -x_1-2x_2-x_3+2x_4+5x_5+6x_6 &= 2 \\ 3x_1+6x_2+3x_3-4x_4-3x_5-9x_6 &= 3 \\ 3x_1+6x_2+5x_3-4x_4+3x_5 &= 6 \end{aligned}$$

Estudiamos en primer lugar su compatibilidad mediante el cálculo de los rangos de su matriz y su matriz ampliada. Como todas las transformsciones de fila conservan el rango, implementamos el algoritmo de Gauss-Jordan y tendremos

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -2 & 1 & 3 & 1 \\ -1 & -2 & -1 & 2 & 5 & 6 & 2 \\ 3 & 6 & 3 & -4 & -3 & -9 & 3 \\ 3 & 6 & 5 & -4 & 3 & 0 & 6 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -2 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 6 & 9 & 3 \\ 0 & 0 & -6 & 2 & -6 & -18 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 2 & 0 & -9 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -2 & -4 & 0 & 4 & 16 & 21 & 7 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 6 & 9 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 12 & 9 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 12 & 9 & 9 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow\begin{pmatrix} -2 & -4 & 0 & 4 & -8 & 3 & -11 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 6 & 9 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 12 & 9 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

por lo que rang($\mathbf{A}$) = rang($\mathbf{A}|\mathbf{b}$) = 3 y el sistema es compatible e indeterminado. Continuando el proceso, dividiendo por los pivotes, tendremos

$$\rightarrow\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 4 & -3/2 & 11/2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 & 9/2 & 3/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 6 & 9/2 & 9/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

cuyas incógnitas principales son x_1, x_3 y x_4 y cuya solución general es

$$\begin{aligned} x_1 &= 11/2-2x_2-4x_5+3/2x_6 \\ x_3 &= 3/2-3x_5-9/2x_6 \\ x_4 &= 9/2-6x_5-9/2x_6 \end{aligned}$$

Busquemos las soluciones del sistema

$$\begin{aligned} 3x-y+4z &= 0 \\ 6x-y+5z &= 0 \\ 15x+y+2z &= 0 \\ 6x+y-z &= 0 \end{aligned}$$

Como es homogéneo trabajaremos con la matriz de los coeficientes

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 6 & -1 & 5 \\ 15 & 1 & 2 \\ 6 & 1 & -1 \end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 6 & -18 \\ 0 & 3 & -9 \end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

cuyo rango es 2 y el sistema es indeterminado. Su solución general se obtendrá continuando el algoritmo de Gauss-Jordan

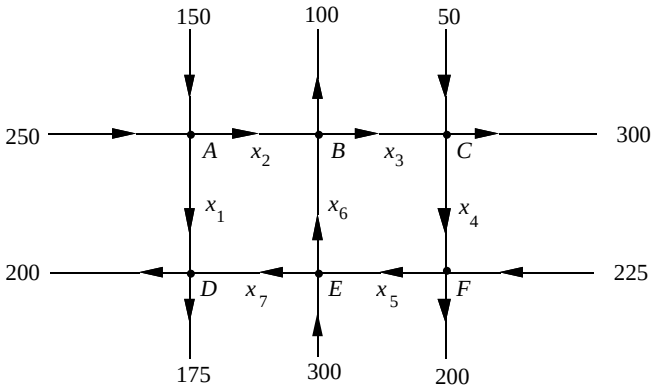
$$\rightarrow\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1/3 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

con lo que $x = -z/3$, $y = 3z$.

Ejemplo V.10.3

Existen una gran variedad de situaciones físicas que al modelizarlas dan lugar a sistemas de ecuaciones lineales. El estudio del flujo del tránsito rodado por las calles de

una zona urbana es una de ellas. Consideramos la siguiente red de calles de un único sentido,



en la que la cantidad de coches que en una hora circulan por un punto concreto viene dado por las cifras de la red en los puntos indicados. Las variables x_i (i = 1,...,7) indican el número de coches que en una hora circulan de un cruce a otro, por ejemplo x_1, es el número de coches que en una hora van del cruce *A* al *D*. Suponemos que está prohibido estacionarse en toda la zona. Si en un día concreto hay mercado en la calle de *E* a *D*, impidiendo el tráfico, ¿qué cantidad de coches/hora circularán en las calles de la red?, ¿Y si el mercado se situa en la calle F a D?. Los datos de que disponemos nos permiten plantear el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned}
\text{cruce } A &: \; x_1+x_2 = 400 \\
\text{cruce } B &: \; x_2+x_6 = 100+x_3 \\
\text{cruce } C &: \; x_3+50 = x_4+300 \\
\text{cruce } D &: \; x_1+x_7 = 375 \\
\text{cruce } E &: \; x_5+300 = x_6+x_7 \\
\text{cruce } F &: \; x_4+225 = x_5+200
\end{aligned}$$

Es un sistema de seis ecuaciones lineales con siete incógnitas, cuya matriz ampliada es

$$\left(\begin{array}{ccccccc|c}
1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 400 \\
0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 100 \\
0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 250 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 375 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & -300 \\
0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & -25
\end{array}\right)$$

Realizando transformaciones elementales de filas, obtenemos la matriz del sistema de ecuaciones equivalente al anterior:

$$\left(\begin{array}{cccccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 375 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 25 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & -75 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & -325 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & -300 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

que señala a $x_1,...,x_5$ como incógnitas principales y x_6, x_7 no principales. La solución general es, por tanto

$$\begin{aligned} x_1 &= 375-x_7 \\ x_2 &= 25+x_7 \\ x_3 &= -75+x_6+x_7 \\ x_4 &= -325+x_6+x_7 \\ x_5 &= -300+x_6+x_7 \end{aligned}$$

Puesto que estamos considerando calles de sentido único, debemos limitarnos a las soluciones tales que $x_i \geq 0$ ($i = 1,...,7$).

Si hay mercado en la calle de E a D, entonces $x_7 = 0$, obteniendo

$$\begin{aligned} x_1 &= 375 \\ x_2 &= 25 \\ x_3 &= -75+x_6 \quad \Rightarrow \quad x_6 \geq 75 \\ x_4 &= -325+x_6 \quad \Rightarrow \quad x_6 \geq 325 \\ x_5 &= -300+x_6 \quad \Rightarrow \quad x_6 \geq 300 \end{aligned}$$

es decir, cualquier valor de $x_6 \geq 325$ nos proporciona una distribución del tráfico en la red de calles que nos permite realizar el mercado en la calle de E a D sin tránsito. Si además del mercado, se quiere restringir lo más posible el tráfico entre E y F, en el sistema obtenido podemos dar, análogamente al caso anterior, a x_7 el valor nulo y elegir para x_6 el valor que minimiza $x_5 = x_6-300$, pero que a la vez proporcione valores no negativos para las demás incógnitas, por tanto, se trata de dar a x_6 el valor 325, con lo cual $x_5 = 25$.

Problemas análogos, al que acabamos de comentar, se obtienen aplicando las leyes de Kirchhoff a un circuito eléctrico, en modelos de flujos económicos, y en otras muy diversas materias.

Ejercicios

V.46.- Discutir la compatibilidad y resolver, cuando sea posible, los siguientes sistemas:

1) $$\left.\begin{array}{r} x+y-2z+t+3u = 1 \\ 2x-y+2z+2t+6u = 2 \\ 3x+2y-4z-3t-9u = 3 \end{array}\right\}$$

2) $\left.\begin{array}{r} 3x-y+4z = 1 \\ 6x-y+5z = 2 \\ 2x+y+2z = 3 \\ x-y-z = -2 \\ 4x-2y+3z = -1 \end{array}\right\}$

3) $\left.\begin{array}{r} (1-i\,)x+iy+2z = 19i\,/6 \\ (3+2i)x+4/5y+i\,z = 19/30+14i\,/3 \\ (2-2i\,)x+(1+i\,)y-2/3z = 29/6-5i\,/6 \end{array}\right\}$

V.47.- Discutir la compatibilidad según los valores de los parámetros y resolver, cuando sea posible, los siguientes sistemas:

1) $\left.\begin{array}{r} \alpha_1 x-y+z = \alpha_2 \\ x+my-z = \alpha_3 \\ mx+\alpha_4 y+mz = 8 \end{array}\right\}$ para $\alpha_1 =$, $\alpha_2 =$, $\alpha_3 =$, $\alpha_4 =$

2) $\left.\begin{array}{r} ax+y+z = 1 \\ x+ay+z = 1 \\ x+y+az = 1 \end{array}\right\}$

3) $\left.\begin{array}{r} 2x-ay+z = 0 \\ 2x-2y+z = 0 \\ bx+2y-4z = 0 \\ 4x+2y+7z = 0 \end{array}\right\}$

4) $\left.\begin{array}{r} (2\lambda+2)x+\lambda y+2z = 2\lambda-2 \\ 2x+(2-\lambda)y = 0 \\ (\lambda+1)x+(\lambda+1)z = \lambda-1 \end{array}\right\}$

5) $\left.\begin{array}{r} (1+a)x+y+z = 1 \\ x+(1+a)y+z = 1+a \\ x+y+(1+a)z = 1+a^2 \end{array}\right\}$

6) $\left.\begin{array}{r} 2y-z = a \\ 3x-2z = 11 \\ y+z = 6 \\ 2x+y-4z = a \end{array}\right\}$

V.48.- Discutir y resolver en los casos en que sea posible los siguientes sistemas:

$$\left.\begin{aligned}(\lambda+1)x+y+z+t &= 0\\ x+(\lambda+1)y+z+t &= 0\\ x+y+(\lambda+1)z+t &= 0\\ x+y+z+(\lambda+1)t &= 0\end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned}ax_1-x_2 &= 0\\ -x_1+ax_2-x_3 &= 0\\ -x_2+ax_3-x_4 &= 0\\ -x_3+ax_4-x_5 &= 0\\ -x_4+ax_5 &= 0\end{aligned}\right\}$$

V.49.- Determinar los parámetros para que sean compatible y resolver los sistemas

$$\left.\begin{aligned}x-ny+z &= 0\\ x+y-z &= 0\\ mx-2y-5z &= 0\\ 2x+y+z &= 0\end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned}kx+y+z &= k+2\\ x+ky+z &= k+2\\ x+y+kz &= k+2\end{aligned}\right\}$$

PROCEDIMIENTOS PRÁCTICOS BASICOS

Los procedimientos básicos que forman los elementos constructivos a partir de los cuales pueden abordarse los problemas que tratan sobre las materias desarrolladas en este Cuaderno, son los siguientes:

- Hallar la matriz de una aplicación lineal.
- Operaciones con matrices y estructuras matriciales
- Imagen de un vector y núcleo de una aplicación lineal definida matricialmente.
- Efectuar cambios de base.
- Calcular el rango de una matriz.
- Bases de Nuc e Im de una aplicación lineal.
- Discutir y resolver sistemas de ecuaciones lineales.
- Hallar la matriz inversa.

EJERCICIOS DE RECAPITULACION

V.50.- Dadas las siguientes aplicaciones lineales, hallar sus matrices respecto a las bases canónicas, sus rangos, bases del núcleo e imagen y clasificarlas:

$$f: \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}^2 \qquad (x,y,z) \longrightarrow (x+y/2, x+z/2)$$

$$g: \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}^4 \qquad (1,1,0) \longrightarrow (3,2,0,1) \qquad (2,3,1) \longrightarrow (1,-2,1,1) \qquad (0,-2,1) \longrightarrow (4,0,1,2)$$

$$h: \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}^4 \qquad (2,-1) \longrightarrow (1,0,-1,3) \qquad (4,1) \longrightarrow (2,-2,3,1)$$

$$i: \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}^3 \qquad (0,1,0) \longrightarrow (0,2,0) \qquad (1,0,0) \longrightarrow (1,0,0) \qquad (1,1,1) \longrightarrow (0,0,0)$$

$$j: \mathbf{R}^4 \longrightarrow \mathbf{R}^2 \qquad (1,2,-1,-3) \longrightarrow (-5,6) \qquad (-3,-1,0,5) \longrightarrow (8,4) \qquad (4,2,5,0) \longrightarrow (10,6) \qquad (-3,-2,1,7) \longrightarrow (13,0)$$

V.51.- Dada la aplicación lineal f entre el espacio vectorial K^2 sobre el cuerpo $(K,+,\cdot)$

$$f: K^2 \longrightarrow K^2 \qquad (x,y) \longrightarrow f(x,y) = (x+y,x)$$

hallar base y dimensión del núcleo y de la imagen. Clasificarla y hallar su matriz asociada en la base canónica.

V.52.- Hallar el rango, bases del núcleo e imagen de las siguientes aplicaciones lineales:

$$f: \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}^4 \qquad (x,y,z) \longrightarrow (x-y,y-z,x-z,x+y+z)$$

$$g: \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}^3 \qquad (1,1) \longrightarrow (2,0,-1) \qquad (-1,1) \longrightarrow (2,-2,3)$$

Clasificarlas y hallar $g(x,y)$ y $g^{-1}(1,1,1)$.

V.53.- Para

$$f: \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}^4 \qquad (1,1,2) \longrightarrow (1,2,3,4) \qquad (1,3,2) \longrightarrow (3,1,2,0) \qquad (0,0,1) \longrightarrow (1,1,1,1)$$

hallar:

a) Las ecuaciones de la aplicación y la imagen del vector (1,0,4).

b) Matriz asociada en las bases canónicas.

c) Dimensión de Im(f) y Nuc(f).

d) Una base de Nuc(f).

V.54.- Sea f la aplicación lineal definida por

$$\begin{aligned} f:\ \mathbf{R}^3 &\longrightarrow \mathbf{R}^3 \\ (x,y,z) &\longrightarrow (x+4y+8z, y+2z, -x+2y+3z) \end{aligned}$$

a) Hallar la matriz asociada a f en la base canónica. Hallar la Im(f), Nuc(f), sus dimensiones y bases respectivas. Clasificar f.

b) ¿Existe f^{-1}?. En caso afirmativo, hallar su matriz asociada en la base canónica.

V.55.- Dada la aplicación lineal

$$\begin{aligned} f:\ \mathbf{R}^2 &\longrightarrow \mathbf{R}^4 \\ (2,-1) &\longrightarrow (1,0,-1,3) \\ (4,1) &\longrightarrow (2,-2,3,1) \end{aligned}$$

a) Hallar su matriz referida a las bases canónicas.

b) Hallar la base y la dimensión de Nuc(f) e Im(f).

c) Clasificar f y hallar la antiimagen, si existe, del vector (1,1,1,1).

V.56.- Sea $f:\mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}^3$ de matriz

$$\begin{pmatrix} -2 & 4 & 2 \\ 1 & \lambda & \lambda \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

respecto a una base $(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3)$.

a) Hallar, para los distintos valores de λ, la dimensión de $f(\mathbf{R}^3)$.

b) Hallar el Nuc(f) y la Im(f) para $\lambda = -2$.

V.57.- Sea E el espacio vectorial $\mathbf{R}_2[x]$.

a) Si f es un endomorfismo de E definido por $f(1) = 1$ $f(x) = x-1$ $f(x^2) = (x-1)^2$, hallar $f(a+bx+cx^2)$.

b) Obtener la matriz $\mathbf{A}$ asociada a f en la base canónica de E.

c) ¿Es f biyectiva?.

d) En caso de serlo, calcular $\mathbf{A}^{-1}$ y hallar un polinomio $P(x)$ tal que $f(P(x)) = 1+x^2$.

V.58.- Sea f una aplicación de $\mathbf{R}^3$ en $\mathbf{R}^3$ definida por

$$f(x,y,z) = (x-y+2z, 2x+y, -x-2y+2z)$$

a) Probar que es lineal.

b) Hallar su matriz asociada en la base canónica y en la base formada por los vectores

$$\boldsymbol{u}_1 = (1,2,1),\ \boldsymbol{u}_2 = (1,0,1) \text{ y } \boldsymbol{u}_3 = (0,1,1).$$

c) Bases de Nuc(f) e Im(f) indicando su dimensión.

d) Si (a,b,c) es un vector de $\mathbf{R}^3$ indicar las condiciones para que dicho vector sea del Nuc(f) y de la Im(f), respectivamente.

V.59.- Dados los siguientes espacios vectoriales y las bases que se indican:

$V = \mathbf{R}^3$, con la base canónica.

$U = M_{(2,2)}(\mathbf{R})$, con la base $\left(\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right)$

W = espacio vectorial de las funciones polinómicas de $\mathbf{R}$ en $\mathbf{R}$ de grado menor o igual a tres, con la base $(p_0(x) = 1,\ p_1(x) = x,\ p_2(x) = x^2,\ p_3(x) = x^3)$

Sean $f : V \longrightarrow U$ y $g : U \longrightarrow W$ definidas mediante

$$f(x,y,z) = \begin{pmatrix} x-y & y\\ y & y-z\end{pmatrix} \qquad g(\mathbf{A}) \text{ es el polinomio } \begin{pmatrix}1 & x\end{pmatrix}\mathbf{A}\begin{pmatrix}x\\ x^2\end{pmatrix}$$

a) Pruébese que f y g son lineales.

b) Hállense las matrices asociadas a f y a g respecto a las bases dadas e indicar los rangos de dichas matrices.Hallar el núcleo y las imágenes de f y g.

c) Hallar la matriz asociada a $g \circ f$ su rango, el núcleo y la imagen de $g \circ f$.

V.60.- Sean $B = (\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3,\boldsymbol{e}_4)$ y $C = (\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2,\boldsymbol{u}_3)$ bases de dos espacios vectoriales E y F sobre $\mathbf{R}$. Sea la aplicación lineal $f : E \longrightarrow F$ de matriz respecto a las bases B y C

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -2\\ -2 & 2 & -1 & 1\\ -1 & 1 & 1 & -1\end{pmatrix}$$

Hallar Im(f) y Nuc(f) y una base de cada uno de éllos.

V.61.- Sean $(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3)$ una base de $\mathbf{R}^3$, la aplicación

$$\begin{aligned} f : \mathbf{R}^3 &\longrightarrow \mathbf{R}^3 \\ \boldsymbol{v}_1 &\longrightarrow 2\boldsymbol{e}_1+3\boldsymbol{e}_2+\boldsymbol{e}_3 \qquad \text{con} \quad \boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2 \\ \boldsymbol{v}_2 &\longrightarrow -\boldsymbol{e}_2+\boldsymbol{e}_3 \qquad\qquad\quad \boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_3 \\ \boldsymbol{v}_3 &\longrightarrow -2\boldsymbol{e}_2+3\boldsymbol{e}_3 \qquad\qquad\quad \boldsymbol{v}_3 = \boldsymbol{e}_2+\boldsymbol{e}_3 \end{aligned}$$

el subespacio $A = \{(x,y,z) \mid x = 2y+z\}$ y los vectores

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u}_1 &= 2\boldsymbol{e}_1+3\boldsymbol{e}_3 \\ \boldsymbol{u}_2 &= -\boldsymbol{e}_2-2\boldsymbol{e}_3 \\ \boldsymbol{u}_3 &= 2\boldsymbol{e}_1-2\boldsymbol{e}_2 \end{aligned}$$

Hallar

a) $f(\boldsymbol{v})$ con $\boldsymbol{v} = 4\boldsymbol{e}_1+2\boldsymbol{e}_2-3\boldsymbol{e}_3$.
b) Bases de Nuc(f) e Im(f).
c) Probar que A es subespacio de $\mathbf{R}^3$ y hallar su dimensión.
d) Hallar una base del subespacio $f(A)$.
e) Matriz de f en las bases $(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3)$ y $(\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2,\boldsymbol{u}_3)$.
f) Resolver la ecuación $f(\boldsymbol{x}) = \lambda\boldsymbol{x}$.

V.62.- Resolver la ecuación $\mathbf{XA}+\mathbf{B} = \mathbf{C}$ siendo

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 5 & 1 & -3 \end{pmatrix} \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 \\ -2 & 4 & -6 \end{pmatrix}$$

V.63.- Hallar las matrices conmutables con la matriz $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

V.64.- Siendo $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{n} & \frac{1}{n} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, hallar $\mathbf{A}^n$.

V.65.- Dada la matriz $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ hallar $\mathbf{A}+\mathbf{A}^2+...+\mathbf{A}^n$.

V.66.- Calcular las potencias sucesivas de la matriz

$$\begin{pmatrix} a & 1 & 0 & .. & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & .. & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & .. & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & .. & a & 1 \\ 0 & 0 & 0 & .. & 0 & a \end{pmatrix}$$

V.67.- En el anillo $M_{(2,2)}(\mathbf{R})$ resolver el sistema

$$2\mathbf{x}+3\mathbf{y}=\begin{pmatrix}1&0\\1&2\end{pmatrix}$$

$$-\mathbf{x}+5\mathbf{y}=\begin{pmatrix}1&3\\0&5\end{pmatrix}$$

V.68.- Resolver $\mathbf{AX}-\mathbf{BX}=\mathbf{C}$ con

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}3&2&1\\0&3&-1\\5&2&1\end{pmatrix}\qquad \mathbf{B}=\begin{pmatrix}1&0&3\\-5&2&1\\4&0&-3\end{pmatrix}\qquad \mathbf{C}=\begin{pmatrix}0&2&-2&8\\12&0&1&20\\-33&8&-1&36\end{pmatrix}$$

V.69.- Si **A** y **B** designan dos matrices cuadradas de orden *n* y si **A** es regular, demostrar que la relación $\mathbf{AB}=\mathbf{0}$ implica $\mathbf{B}=\mathbf{0}$.

V.70.- En el conjunto de las matrices cuadradas regulares de orden *n* resolver la ecuación

$$\mathbf{X}+\mathbf{X}^{-1}+2\mathbf{I}=\mathbf{0}$$

V.71.- a) Si **A** es una matriz cuadrada y $\mathbf{A}^2=\mathbf{A}$ demostrar que $(2\mathbf{A}-\mathbf{I})^2=\mathbf{I}$.

b) Si **A** es una matriz cuadrada y regular, ¿cómo debe ser **A** para que $\mathbf{A}^2=\mathbf{A}$?.

V.72.- Sea **A** una matriz cuadrada, no singular, que verifica

$$a\mathbf{A}^2+b\mathbf{A}+c\mathbf{I}=\mathbf{0};\ c\neq 0.$$

Demostrar que de esta ecuación resulta que **A** tiene inversa y obtenerla en función de **A**.

V.73.- Se considera la matriz $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&-1\\-1&1&a\end{pmatrix}$

a) Demostrar que $\mathbf{A}^3-a\mathbf{A}^2+2\mathbf{A}-\mathbf{I}=\mathbf{0}$.

b) Demostrar que **A** es inversible y deducir del apartado anterior la matriz inversa $\mathbf{A}^{-1}$.

c) Calcular la matriz $\mathbf{A}^5-a\mathbf{A}^4+\mathbf{A}^3-(1-a)\mathbf{A}^2-\mathbf{A}+\mathbf{I}$.

V.74.- Demostrar que $\left\{\begin{pmatrix}a&0&0\\b&d&0\\c&e&f\end{pmatrix}\text{con } a,\ b,\ c,\ d,\ e,\ f\in\mathbf{R}\right\}$ es un subanillo de $M_{(3,3)}(\mathbf{R})$.

Lo mismo para $\left\{\begin{pmatrix}u&v&w\\w&u&v\\v&w&u\end{pmatrix}\text{con } u,\ v,\ w\in\mathbf{R}\right\}$.¿Son conmutativos?.

V.75.- Averiguar si $\left\{\begin{pmatrix}a&-b\\b&a\end{pmatrix}\mid a,\ b\in\mathbf{R}\right\}$ es un subespacio de $M_{(2,2)}(\mathbf{R})$. Demostrar que es un

cuerpo.

V.76.- Demostrar que $\left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ b+a & a-b \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbf{Q} \right\}$ es un subespacio de $M_{(2,2)}(\mathbf{Q})$ y hallar una base del mismo.

V.77.- Demostrar que $A = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid a \in \mathbf{R} \right\}$ es un grupo multiplicativo.

V.78.- Se llama ***traza*** de una matriz cuadrada a la suma de los elementos de su diagonal principal. Demostrar que

a) $\text{tr}(\lambda\mathbf{A}) = \lambda\ \text{tr}(\mathbf{A})$

b) $\text{tr}(\mathbf{A}+\mathbf{B}) = \text{tr}(\mathbf{A})+\text{tr}(\mathbf{B})$

c) $\text{tr}(\mathbf{AB}) = \text{tr}(\mathbf{BA})$

V.79.- Probar que $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mid x, y, z \in \mathbf{R} \right\}$ es un grupo respecto al producto de matrices.

V.80.- Sea $\mathbf{G} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ y consideremos las matrices $\mathbf{X}$ de orden (2,2) tales que $\mathbf{X}^t\mathbf{G}\mathbf{X} = \mathbf{G}$. Demostrar que dichas matrices forman grupo respecto a la multiplicación.

V.81.- En el conjunto de las matrices cuadradas de segundo orden con elementos reales, consideramos el subconjunto H de las matrices de la forma

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

¿El conjunto H es un cuerpo conmutativo?.

V.82.- En el conjunto $M_{(2,2)}(\mathbf{R})$ se define la aplicación

$$\begin{aligned} f : M_{(2,2)}(\mathbf{R}) &\longrightarrow \mathbf{R} \\ \mathbf{A} &\longrightarrow f(\mathbf{A}) = \text{tr}(\mathbf{A}) \end{aligned}$$

a) Demostrar que f es lineal y hallar su matriz respecto de las bases canónicas.

b) Si $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in M_{(2,2)}(\mathbf{R})$, demostrar que $f(\mathbf{AB}) = f(\mathbf{BA})$.

c) A partir del resultado anterior, demostrar que es imposible que existan dos matrices, tales que

$$\mathbf{AB}-\mathbf{BA} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

d) Hallar la dimensión y una base de Nuc(f).

e) Demostrar que el conjunto $D = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \mid a \in \mathbf{R} \right\}$ es un subespacio vectorial de $M_{(2,2)}(\mathbf{R})$. Indicar la dimensión y una base.

f) Demostrar que Nuc(f) y el conjunto D, son dos subespacios suplementarios de $M_{(2,2)}(\mathbf{R})$.

V.83.- Sea la matriz $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. Probar que las matrices: $\mathbf{A}^0 = \mathbf{I}, \mathbf{A}, \mathbf{A}^2, ..., \mathbf{A}^n$ pertenecen

al subespacio vectorial de las matrices triangulares cuadradas de orden 3. Hallar la dimensión y la base del subespacio.

V.84.- Sea la matriz $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ cuyos elementos a,b,c,d pertenecen a un cierto cuerpo K. Se pide

a) ¿Existen m y n de K tales que $m\mathbf{I}+n\mathbf{A} = \mathbf{A}^2$?.

b) ¿Qué estructura define el conjunto F de matrices $\mathbf{M}$ tales que $\mathbf{M} = r\mathbf{I}+s\mathbf{A}$ con r y s elementos de K?.

c) Si $K = \mathbf{R}$, demostrar que $\mathbf{M}^{-1} \in F$.

e) ¿Bajo que condiciones es F un cuerpo?.

V.85.- En el espacio vectorial $\mathbf{R}^3$ referido a la base canónica se considera el endomorfismo de matriz

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -\text{sen}\alpha \\ -1 & 0 & \cos\alpha \\ -\text{sen}\alpha & \cos\alpha & 0 \end{pmatrix}$$

a) Hallar $\mathbf{M}^3$.

b) Para la aplicación $f : \mathbf{R} \longrightarrow M_{(3,3)}(\mathbf{R})$
$\boldsymbol{x} \longrightarrow f(\boldsymbol{x}) = \mathbf{I}_3+\boldsymbol{x}\mathbf{M}+\boldsymbol{x}^2/2\ \mathbf{M}^2$

demostrar que $f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) = f(\boldsymbol{x})\cdot f(\boldsymbol{y})$ y a partir de esta igualdad, demostrar que para todo vector $\boldsymbol{x}$ de $\mathbf{R}$, $f(\boldsymbol{x})$ tiene inversa y calcularla.

V.86.- Sea la matriz $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & m \end{pmatrix}$. Encontrar el valor de m para que existan matrices $\mathbf{B}$ no nulas tales que $\mathbf{AB} = \mathbf{0}$. Demostrar que el conjunto E de dichas matrices constituyen un subespacio vectorial de las matrices $M_{(2,2)}(\mathbf{R})$. Hallar la dimensión y una base del mismo.

V.87.- Dadas las matrices $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, sea H el conjunto de las matrices

tales que $\mathbf{M} = a\mathbf{A}+b\mathbf{B}$, con $a,b \in \mathbf{R}$.

a) Demostrar que H es un espacio vectorial sobre $\mathbf{R}$. Dar una base del mismo.

b) Desmostrar que $(H,+,\cdot)$ es anillo conmutativo unitario.

c) Determinar el conjunto de las matrices inversibles de H y probar que sus inversas son elementos de H.

V.88.- Discutir para los diferentes valores de $m \in \mathbf{R}$ el sistema

$$\left.\begin{array}{r} x+my+z = m+2 \\ x+y+mz = -2(m+1) \\ mx+y+z = m \end{array}\right\}$$

V.90.- Discutir y resolver según los valores de k y m el sistema

$$\left.\begin{array}{r} x-2y = 3k+3m \\ x-y = 2k+2m+1 \\ mx+ky+5 = m^2-k^2-1 \\ kx+my+7 = k^2-m^2+13 \end{array}\right\}$$

V.91.- Discutir según los valores de a y b, los sistemas

$$\left.\begin{array}{r} ax+y+z+t = a \\ x+ay+z+t = a \\ x+y+az+t = a \\ x+y+z+at = a \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{r} ax+by+z = 1 \\ x+aby+z = b \\ x+by+az = 1 \end{array}\right\}$$

V.92- Estudiar la compatibilidad de los sistemas lineales siguientes y resolver el segundo:

$$\left.\begin{array}{r} 2x+y-z = b_1 \\ x+2y+z = b_2 \\ 3x+y-2z = b_3 \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{r} ax+y+z = 1 \\ x+ay+z = a \\ x+y+az = a^2 \end{array}\right\}$$

V.93.- Resolver, según los valores de los parámetros reales a, b, c, d el sistema

$$\left.\begin{array}{r} x+y+z = 1 \\ ax+by+cz = d \\ a^2x+b^2y+c^2z = d^2 \end{array}\right\}$$

Encontrar el valor de $P = a^3x+b^3y+c^3z$, si (x,y,z) es una solución del sistema anterior.

V.94.- Hallar a y b para el siguiente sistema admita solución distinta de la trivial:

$$\left.\begin{array}{r} 2x-ay+bz = 0 \\ x-ay+z = 0 \\ 2bx+2y+3z = 0 \\ 3x-y+2z = 0 \end{array}\right\}$$

V.95.- Bajo que condición el sistema sobre **R**

$$\left.\begin{aligned} y+az+a^2t &= 1 \\ x+a^2z+at &= -1 \\ ax+a^2y+t &= 1 \\ a^2x+ay+z &= 1 \end{aligned}\right\}$$

posee solución única. Resuélvase en este caso concreto.

BIBLIOGRAFIA

de Burgos J. (1988). *Curso de Algebra y Geometría*. Alhambra. Madrid.

Dixmier J. (1974). *Matemáticas Generales.* Editorial Aguilar. Madrid.

Godement R. (1974). *Algebra*. Tecnos. Madrid.

Hoffmann R., Kunze R. (1974). *Algebra Lineal*. Prentice. Madrid.

Lentin A., Rivaud J. (1973). *Algebra Moderna*. Aguilar. Madrid.

Noble B., Daniel J.W. (1988). *Applied Linear Algebra*. Prentice Hall. London.

Puerta F. (1986). *Algebra lineal*. Marcombo. Barcelona.

Queysanne M. (1985) *Algebra*. Vicens-Vives. Barcelona.

Sainz M.A., Serarols J.L. Pérez A.M. (1994). *Álgebra*. Escuela Politécnica Superior. Gerona.

Strang G. (1982). *Algebra Lineal y sus aplicaciones.* Fondo Educativo Interamericano. Méjico.

Torregrosa J.R., Jordan C. (1987). *Algebra Lineal y sus aplicaciones*. McGraw-Hill. Madrid.

Xambó S. (1977). *Algebra Lineal y geometrias lineales*. EUNIBAR. Barcelona.