CUADERNO VI

FORMAS BILINEALES Y DETERMINANTES

Miguel A. Sainz, Joan Serarols, Anna M. Pérez
Dep. de Informática y Matemática Aplicada
Universidad de Girona

RESUMEN: Como una extensión de las aplicaciones lineales se van a definir las formas bilineales y sus formas cuadráticas asociadas, fundamentos de importantes conceptos tales como el producto escalar de vectores, norma de un vector, proyección de un vector sobre un subespacio y ángulo de dos vectores, conceptos básicos en la aplicación del álgebra lineal a la geometría. Las formas bilineales se generalizarán a formas multilineales y, en particular, a los determinantes, cuya definición, propiedades y aplicaciones a la solución de sistema lineales, cálculo de la matriz inversa,..., etc se desarrollarán con detalle.

VI.1.- FORMAS BILINEALES

Sobre V, e.v.s. K, definimos una ***forma bilineal*** como una aplicación

$$\begin{aligned} f:\ V^2 &\longrightarrow K \\ (\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) &\longrightarrow f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \end{aligned}$$

lineal en cada componente, es decir, para cualesquiera que sean los vectores $\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}',\boldsymbol{y},\boldsymbol{y}'$ de V y el escalar α de K se verifique

$$f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{x}',\boldsymbol{y}) = f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})+f(\boldsymbol{x}',\boldsymbol{y}) \ \wedge\ f(\alpha\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \alpha f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$$
$$f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}+\boldsymbol{y}') = f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})+f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}') \ \wedge\ f(\boldsymbol{x},\alpha\boldsymbol{y}) = \alpha f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$$

La imagen de un par de vectores que son combinación lineal de otros, generalizando por inducción, viene dada por

$$f(\alpha_1\boldsymbol{x}_1+\ldots+\alpha_m\boldsymbol{x}_m\ ,\ \beta_1\boldsymbol{y}_1+\ldots+\beta_m\boldsymbol{y}_m) = \sum_{\substack{1\le i\le m\\ 1\le j\le m}} \alpha_i\beta_j\, f(\boldsymbol{x}_i,\boldsymbol{y}_j)$$

Ejemplo VI.1.1

Sea la aplicación

$$\begin{aligned} f:\ K^n\times K^n &\longrightarrow K \\ (\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) &\longrightarrow f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \mathrm{Pr}_i(\boldsymbol{x})\cdot\mathrm{Pr}_j(\boldsymbol{y}) \end{aligned}$$

en la que la imagen de un par de vectores es el producto de la proyección *i*-ésima del primer vector por la proyección *j*-ésima del segundo vector. Tenemos respecto del primer vector componente

$$f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{x}',\boldsymbol{y}) = (x_i+x'_i)y_j = x_iy_j+x'_iy_j = \mathrm{Pr}_i(\boldsymbol{x})\cdot\mathrm{Pr}_j(\boldsymbol{y})+\mathrm{Pr}_i(\boldsymbol{x}')\cdot\mathrm{Pr}_j(\boldsymbol{y}) = f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})+f(\boldsymbol{x}',\boldsymbol{y})$$
$$f(\alpha\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = (\alpha x_i)y_j = \alpha(x_iy_j) = \alpha f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$$

y respecto del segundo vector componente

$$f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}'+\boldsymbol{y}) = x_i(y'_j+y_j) = x_iy'_j+x_iy_j = \mathrm{Pr}_i(\boldsymbol{x})\cdot\mathrm{Pr}_j(\boldsymbol{y}')+\mathrm{Pr}_i(\boldsymbol{x})\cdot\mathrm{Pr}_j(\boldsymbol{y}) = f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})+f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}')$$
$$f(\boldsymbol{x},\alpha\boldsymbol{y}) = \mathrm{x}_i(\alpha y_j) = \alpha(x_iy_j) = \alpha f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$$

siendo así una forma bilineal.

Una forma bilineal sobre V diremos que es ***simétrica*** si y sólo si

$$(\forall \boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in V)\ (f(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}))$$

y diremos que es forma bilineal ***alternada*** si y sólo si

$$(\forall \boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in V)\ (f(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x}) = -f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}))$$

Si f es alternada (y si en el cuerpo K la suma de un elemento no nulo consigo mismo es distinta de 0), la imagen de un par de vectores iguales es nula ya que al permutar ambos vectores

$$f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}) = -f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}) \quad\Rightarrow\quad f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}) = 0$$

y recíprocamente si para cualquier vector $\boldsymbol{x}$ es $f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}) = 0$, cualquiera que sea $\boldsymbol{y}$ verifica

$$0 = f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y},\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) = f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})+f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})+f(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x})+f(\boldsymbol{y},\boldsymbol{y}) = f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})+f(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x}) \quad\Rightarrow\quad f(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x}) = -f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$$

es decir, f es alternada.

Ejemplo VI.1.2

La aplicación definida por

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbf{R}^2\times\mathbf{R}^2 & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ & (\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) & \longrightarrow & x_1y_2-x_2y_1 \end{array}$$

siendo $\boldsymbol{x} = (x_1,x_2)$ $\boldsymbol{y} = (y_1,y_2)$, es una forma bilineal ya que verifica

$$f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{x}',\boldsymbol{y}) = (x_1+x'_1)y_2-(x_2+x'_2)y_1 = (x_1y_2-x_2y_1)+(x'_1y_2-x'_2y_1) = f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})+f(\boldsymbol{x}',\boldsymbol{y})$$

demostrándose de forma análoga las otras condiciones de la definición; además es una forma bilineal no simétrica ya que

$$f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = x_1y_2 - x_2y_1 \neq y_1x_2 - y_2x_1 = f(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x})$$

pero sí es alternada pues

$$f(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x}) = y_1x_2 - y_2x_1 = -(y_2x_1 - y_1x_2) = -f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$$

Sea $V = \mathbf{R}^n$, espacio vectorial sobre $\mathbf{R}$ y sean los vectores $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y} \in V$ de componentes respectivos $\boldsymbol{x} = (x_1,...,x_n)$, $\boldsymbol{y} = (y_1,...,y_n)$; la aplicación de $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n$ en $\mathbf{R}$ dada por la fórmula

$$f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \sum_{i=1}^{n} x_iy_i$$

es bilineal ya que

$$f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{x}',\boldsymbol{y}) = \sum_{i=1}^{n} (x_i+x'_i)y_i = \sum_{i=1}^{n} (x_iy_i+x'_iy_i) = \sum_{i=1}^{n} x_iy_i + \sum_{i=1}^{n} x'_iy_i = f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})+f(\boldsymbol{x}',\boldsymbol{y})$$

$$f(\alpha\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \sum_{i=1}^{n} (\alpha x_i)y_i = \sum_{i=1}^{n} \alpha x_iy_i = \alpha \sum_{i=1}^{n} x_iy_i = \alpha f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$$

demostrándose análogamente la linealidad respecto del segundo vector. Además es una forma bilineal simétrica puesto que

$$f(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^{n} y_ix_i = \sum_{i=1}^{n} x_iy_i = f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$$

Se designa por $L_2(V,K)$ como el conjunto de todas las formas bilineales de V en K; análogamente por $S_2(V,K)$ designaremos el conjunto de todas las formas bilineales simétricas de V en K. Se comprueba fácilmente que las formas bilineales $L_2(V,K)$ forman un espacio vectorial sobre K y que $S_2(V,K)$ es un subespacio de $L_2(V,K)$.

Sea $f \in L_2(V,K)$, V un espacio de dimensión finita, $(\boldsymbol{e}_1,\ldots,\boldsymbol{e}_n)$ una base de V y $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y} \in V$, de forma que

$$\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{e}_1+\ldots+x_n\boldsymbol{e}_n \qquad\qquad \boldsymbol{y} = y_1\boldsymbol{e}_1+\ldots+y_n\boldsymbol{e}_n$$

entonces por bilinealidad será

$$f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \sum_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le n}} x_iy_j\, f(\boldsymbol{e}_i,\boldsymbol{e}_j)$$

por lo que una forma bilineal queda determinada por los escalares

$$f(\boldsymbol{e}_i,\boldsymbol{e}_j)$$

imágenes de los pares de vectores de la base. Por ello, definimos como ***matriz de la forma bilineal*** la determinada por estos escalares

$$\mathbf{A}_f = (f(\boldsymbol{e}_i,\boldsymbol{e}_j)) = \begin{pmatrix} f(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_1) & f(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2) & .. & f(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_n) \\ f(\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_1) & f(\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_2) & .. & f(\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_n) \\ ..... & & & \\ f(\boldsymbol{e}_n,\boldsymbol{e}_1) & f(\boldsymbol{e}_n,\boldsymbol{e}_2) & .. & f(\boldsymbol{e}_n,\boldsymbol{e}_n) \end{pmatrix}$$

que será una matriz simétrica si lo es la forma bilineal y hemisimétrica si la forma lineal es alternada.

Ejemplo VI.1.3

Para la forma bilineal definida por

$$\begin{array}{rccl} f: & \mathbf{R}^2\times\mathbf{R}^2 & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ & (\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) & \longrightarrow & x_1y_2-x_2y_1 \end{array}$$

respecto de la base canónica de $\mathbf{R}^2$, como

$$\begin{array}{l} f((1,0),(1,0)) = 1\cdot0-0\cdot1 = 0 \\ f((1,0),(0,1)) = 1\cdot1-0\cdot0 = 1 \\ f((0,1),(1,0)) = 0\cdot0-1\cdot1 = -1 \\ f((0,1),(0,1)) = 0\cdot1-1\cdot0 = 0 \end{array}$$

la matriz de f será

$$\mathbf{A}_f = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Si hacemos

$$f(\boldsymbol{e}_i,\boldsymbol{e}_j) = a_{ij}$$

la fórmula de la forma bilineal puede escribirse como el siguiente producto de matrices:

$$f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \,..\, x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \,..\, a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \,..\, a_{2n} \\ ..... & \\ a_{n1} & a_{n2} \,..\, a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ .. \\ y_n \end{pmatrix} = \mathbf{x}^t\mathbf{A}_f\,\mathbf{y}$$

Ejemplo VI.1.4

En $\mathbf{R}^4$, dados los vectores $\boldsymbol{x} = (2,3,0,1)$ $\boldsymbol{y} = (4,2,1,0)$ la imagen del par que forman en la forma bilineal cuya matriz respecto de la base canónica es

$$\mathbf{A}_f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 4 & 2 \\ -1 & 1 & 5 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

será

$$g(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \mathbf{x}^t\mathbf{A}_f\mathbf{y} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 4 & 2 \\ -1 & 1 & 5 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ 3 \\ 13 \end{pmatrix} = 39$$

Y la fórmula de g

$$g(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = x_1y_1+2x_1y_2-x_1y_3-2x_1y_4+4x_2y_3+2x_2y_4-x_3y_1+x_3y_2+5x_3y_3+2x_4y_1+ \\ +x_4y_2+3x_4y_3+x_4y_4$$

Si V es un espacio vectorial sobre $\mathbf{R}$, de dimensión 3, tal que la matriz de una aplicación bilineal f respecto de una base $(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3)$, es

$$\mathbf{A}_f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

la imagen por f del par de vectores $\boldsymbol{x} = 1\boldsymbol{e}_1+2\boldsymbol{e}_2+3\boldsymbol{e}_3$ y $\boldsymbol{y} = 2\boldsymbol{e}_1-1\boldsymbol{e}_2+3\boldsymbol{e}_3$ será

$$f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = 4$$

La matriz de una forma bilineal vimos que estaba asociada a la base respecto de la cual referimos el espacio vectorial. Vamos a ver como cambia esta matriz al cambiar la base del mismo. Sean $(\boldsymbol{e}_1,\ldots,\boldsymbol{e}_n)$ y $(\boldsymbol{u}_1,\ldots,\boldsymbol{u}_n)$ bases de V con una matriz $\mathbf{M}$ de cambio de base. Sean $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ las matrices de una forma bilineal f sobre V, en las bases $(\boldsymbol{e})$ y $(\boldsymbol{u})$, respectivamente y dos vectores cualesquiera $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{y}$ de V, de componentes respecto de ambas bases

$$\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{e}_1+\ldots+x_n\boldsymbol{e}_n = x'_1\boldsymbol{u}_1+\ldots+x'_n\boldsymbol{u}_n \qquad \boldsymbol{y} = y_1\boldsymbol{e}_1+\ldots+y_n\boldsymbol{e}_n = y'_1\boldsymbol{u}_1+\ldots+y'_n\boldsymbol{u}_n$$

Como, según vimos al resolver el problema del cambio de base

$$\mathbf{x} = \mathbf{M}\mathbf{x}' \qquad \mathbf{y} = \mathbf{M}\mathbf{y}'$$

tendremos

$$\left.\begin{array}{l} f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \mathbf{x}^t\mathbf{A}\,\mathbf{y} \\ f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \mathbf{x}'^t\,\mathbf{B}\mathbf{y}' \end{array}\right| \Rightarrow \mathbf{x}'^t\,\mathbf{B}\mathbf{y}' = (\mathbf{M}\mathbf{x}')^t\mathbf{A}(\mathbf{M}\mathbf{y}') \Rightarrow \mathbf{x}'^t\,\mathbf{B}\mathbf{y}' = \mathbf{x}'^t\,\mathbf{M}^t\mathbf{A}\mathbf{M}\mathbf{y}' \Rightarrow \mathbf{B} = \mathbf{M}^t\mathbf{A}\,\mathbf{M}$$

Ejemplo VI.1.5

Si una forma bilineal f sobre $\mathbf{R}^3$ tiene por matriz respecto de una base $(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3)$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

y $(\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2,\boldsymbol{u}_3)$ es otra base definida por

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u}_1 &= \boldsymbol{e}_1 \\ \boldsymbol{u}_2 &= \boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2 \\ \boldsymbol{u}_3 &= \boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2+\boldsymbol{e}_3 \end{aligned}$$

tendremos que

$$\mathbf{u} = \mathbf{eM} \qquad \text{siendo} \qquad \mathbf{M} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

por lo que, según lo anterior, la matriz $\mathbf{B}$ de f respecto de esta nueva base será

$$\mathbf{B} = \mathbf{M}^t\mathbf{AM} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 2 & 6 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 4 \\ 2 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

Diremos que dos vectores $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in V$ son ***vectores ortogonales respecto de una forma bilineal simétrica*** f sobre V si y sólo si

$$f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = 0$$

Diremos que dos subconjuntos A y B de V son ***subconjuntos ortogonales respecto de una forma bilineal simétrica*** f cuando todo vector de A sea ortogonal a todo vector de B.

Una base $(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\ldots,\boldsymbol{e}_n)$ de V es ***base ortogonal respecto de una forma bilineal simétrica*** f sobre V si y sólo si para cualesquiera vectores distintos $\boldsymbol{e}_i \neq \boldsymbol{e}_j$ es

$$f(\boldsymbol{e}_i,\boldsymbol{e}_j) = 0$$

De manera análoga, diremos que el vector $\boldsymbol{x}\in V$ es un ***vector normalizado respecto de una forma bilineal simétrica*** f sobre V si y sólo si

$$f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}) = 1$$

Una base $(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\ldots,\boldsymbol{e}_n)$ de V es ***base ortonormal respecto de una forma bilineal simétrica*** f sobre V si y sólo si

$$f(\boldsymbol{e}_i,\boldsymbol{e}_j) = \delta_{ij}$$

por lo que la matriz de una forma bilineal simétrica *f* referida a una base que sea ortonormal, respecto de *f*, es la matriz unidad.

Como caso particular, si $(\boldsymbol{e}_1,\ldots,\boldsymbol{e}_n)$ y $(\boldsymbol{u}_1,\ldots,\boldsymbol{u}_n)$ son bases ortonormales de *V*, respecto de una forma bilineal simétrica *f*, la matriz de *f* respecto a ambas bases es la matriz unidad y de acuerdo con la relación existente entre las matrices en bases distintas, tendremos

$$\mathbf{I}_n = \mathbf{M}^t\mathbf{I}_n\mathbf{M} \;\Rightarrow\; \mathbf{I}_n = \mathbf{M}^t\mathbf{M} \;\Rightarrow\; \mathbf{M}^t = \mathbf{M}^{-1}$$

es decir, la matriz de cambio de base entre bases ortonormales cumple la propiedad de que su inversa es igual a su traspuesta. Una matriz con esta propiedad se denomina ***matriz ortogonal***. Recíprocamente, si $(\boldsymbol{e})$ es una base ortonormal de un espacio vectorial *V* sobre *K*, y $(\boldsymbol{u})$ es otra base de *V*, tales que $\mathbf{u} = \mathbf{eM}$, cumpliéndose que

$$\mathbf{M}^t = \mathbf{M}^{-1}$$

entonces $(\boldsymbol{u})$ es también una base ortonormal ya que si **A** y **B** son las matrices de $f \in \mathrm{L}_2(V,K)$ en ambas bases, respectivamente

$$\mathbf{B} = \mathbf{M}^t\mathbf{AM} = \mathbf{M}^t\mathbf{IM} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{M} = \mathbf{I}$$

es decir, una matriz es ortogonal si y sólo si sus vectores columna son ortonormales

Ejemplo VI.1.6

Sea $(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3)$ una base ortonormal de *V*, espacio vectorial sobre **R**; sea la nueva base

$$\begin{aligned}\boldsymbol{u}_1 &= 1/2\boldsymbol{e}_1+\sqrt{3}/2\boldsymbol{e}_2\\ \boldsymbol{u}_2 &= -\sqrt{3}/2\boldsymbol{e}_1+1/2\boldsymbol{e}_2\\ \boldsymbol{u}_3 &= \boldsymbol{e}_3\end{aligned}$$

La matriz del cambio de base es la matriz regular

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 & 0\\ \sqrt{3}/2 & 1/2 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

Hallando su traspuesta y su inversa se obtiene

$$\mathbf{M}^t = \begin{pmatrix} 1/2 & \sqrt{3}/2 & 0\\ -\sqrt{3}/2 & 1/2 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} = \mathbf{M}^{-1}$$

por lo cual, según los resultados previos, $(\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2,\boldsymbol{u}_3)$ es base ortonormal, lo que se comprueba fácilmente.

Ejercicios

VI.1.- Estudiar si son bilineales o no las aplicaciones

a) $f : \mathbf{R}^2\times\mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}^3$ definida por $f((x,y),(z,t)) = (x+y,z-t,x-y+z+t)$

b) $g : \mathbf{R}^3\times\mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}$ definida por $g(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = xx'+yy'+3zz'-2xz'-2zx'$

c) $h : \mathbf{R}^2\times\mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}$ definida por $h((x,y),(z,t)) = xt-yz$

d) $t : \mathbf{R}\times\mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}^3$ definida por $t(x,y) = (x^2,xy,y^2)$

VI.2.- Expresar las siguientes formas bilineales como producto de matrices del tipo $\mathbf{x}^t\mathbf{A}\mathbf{y}$:

a) $f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = 2x_1y_1+3x_1y_2-4x_2y_1+x_2y_2$ con $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in\mathbf{R}^2$.

b) $f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = 5x_1y_1-x_2y_1+2x_2y_2$ con $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in\mathbf{R}^2$.

c) $f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = x_1y_1+x_1y_2-x_1y_3+2x_2y_1-x_2y_3$ con $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in\mathbf{R}^3$.

VI.3.- Sea f la forma bilineal sobre $\mathbf{R}^3$ cuya matriz asociada en la base canónica es

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Hallar dos vectores $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}$ de $\mathbf{R}^3$ tales que $f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \neq f(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x})$.

b) Hallar la matriz asociada a f respecto de la base ((1,1,0),(0,1,0),(1,1,1)) de $\mathbf{R}^3$.

VI.4.- En la base $B = ((1,0),(1,1))$, la matriz asociada a una forma bilineal es $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \alpha_3 & \alpha_4 \end{pmatrix}$.

para $\alpha_1 =$, $\alpha_2 =$, $\alpha_3 =$ y $\alpha_4 =$. Calcular la matriz asociada a dicha forma bilineal en la base $C = ((0,1),(1,2))$.

VI.5.- Sea E un espacio vectorial sobre K y sean ϕ, ψ dos formas lineales de E. Demostrar que la aplicación f de $E\times E$ en K definida por $f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \phi(\boldsymbol{x})\cdot\psi(\boldsymbol{y})$ es una forma bilineal.

VI.6.- Demostrar que, si f, g son dos formas bilineales simétricas sobre V e.v.s.K, tales que para todo $\boldsymbol{x}$ es $f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}) = g(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})$ entonces $f = g$. Probar que el resultado no es cierto cuando f y g no son simétricas.

VI.2.- FORMAS CUADRATICAS

Dada una forma bilineal $f\in \mathbb{L}_2(V,K)$ se define ***forma cuadrática*** f_c asociada a f como la aplicación

$$\begin{array}{rcl} f_c: V & \longrightarrow & K \\ \boldsymbol{x} & \longrightarrow & f_c(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}) \end{array}$$

La forma cuadrática f_c, al estar asociada a la forma bilineal f, viene definida por ella pero diferentes formas bilineales pueden definir la misma forma cuadrática; por ejemplo, si g es una forma bilineal alternada y definimos $h(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = g(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})+f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$, se verifica $h(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}) = g(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})+f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}) = 0+f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})$, con lo que $h_c = f_c$. Sin embargo, entre todas las formas bilineales asociadas a f_c existe una única forma bilineal s que es simétrica (y si en el cuerpo K la suma de un elemento no nulo consigo mismo es distinta de 0). En efecto, si s es la aplicación de V^2 en K definida por

$$s(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = (f_c(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})-f_c(\boldsymbol{x})-f_c(\boldsymbol{y}))/2$$

(siendo 2 el elemento 1+1) es una forma bilineal simétrica ya que al ser f bilineal

$$s(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = (f_c(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})-f_c(\boldsymbol{x})-f_c(\boldsymbol{y}))/2 = (f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y},\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})-f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})-f(\boldsymbol{y},\boldsymbol{y}))/2 = (f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})+f(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x}))/2$$
$$s(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x}) = (f(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x})+f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}))/2 = s(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$$

Como

$$s(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}) = (f_c(2\boldsymbol{x})-f_c(\boldsymbol{x})-f_c(\boldsymbol{x}))/2 = (4f_c(\boldsymbol{x})-f_c(\boldsymbol{x})-f_c(\boldsymbol{x}))/2 = f_c(\boldsymbol{x})$$

resulta que s está asociada a f_c . Además es única, pues cualquier otra forma bilineal simétrica g, asociada a f_c verificará

$$f_c(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) = g(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y},\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) = g(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})+2g(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})+g(\boldsymbol{y},\boldsymbol{y}) = f_c(\boldsymbol{x})+2g(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})+f_c(\boldsymbol{y}) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \quad g(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = (f_c(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})-f_c(\boldsymbol{x})-f_c(\boldsymbol{y}))/2 = s(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$$

A esta única aplicación bilineal simétrica s, asociada a la forma cuadrática f_c se le denomina ***forma polar*** de la forma cuadrática. Se define ***matriz de una forma cuadrática*** f_c, como la matriz de su forma polar, por lo tanto la matriz de una forma cuadrática siempre es simétrica.

Si V es de dimensión finita, $(\boldsymbol{e}_1,..,\boldsymbol{e}_n)$ es una base de V y $\mathbf{A} = (a_{ij})$ es la matriz de f en esta base, entonces

$$f_c(\boldsymbol{x}) = s(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}) = \mathbf{x}^t\mathbf{A}\mathbf{x} = \sum_{\substack{1\le i\le n \\ 1\le j\le n}} a_{ij}x_ix_j = a_{11}x_1^2+...+ a_{nn}x_n^2+2a_{12}x_1x_2+...+2a_{n-1\ n}x_{n-1}x_n$$

es decir, una forma cuadrática es un polinomio en n variables con todos sus términos de segundo grado. Si V es un espacio vectorial real, diremos que la forma cuadrática f_c es ***definida positiva*** si y sólo si

$$(\forall \boldsymbol{x}\in V)\ (\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0} \ \Rightarrow \ f_c(\boldsymbol{x}) > 0)$$

es decir, si el polinomio anterior tiene un valor numérico positivo cualesquiera que sean x_i y x_j, no simultáneamente nulos. Análogamente, diremos que la forma cuadrática f_c es ***definida negativa*** si y sólo si

$$(\forall \boldsymbol{x}\in V)\ (\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0} \ \Rightarrow \ f_c(\boldsymbol{x}) < 0)$$

Ejemplo VI.2.1

La forma cuadrática sobre $\mathbf{R}^2$, referida a la base canónica , dada por el polinomio

$$f_c(x,y) = x^2+y^2$$

tiene por matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

y es definida positiva pues si x e y no son simultáneamente nulos, x^2+y^2 es mayor que 0. La forma cuadrática definida por el polinomio

$$f_c(x,y) = x^2+y^2-6xy$$

tiene por matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$

y no es definida ya que

$$f_c(1,1) = -4 \qquad\qquad f_c(0,1) = 1.$$

Determinar si una forma cuadrática es definida, positiva o negativa, o no lo es, mediante su fórmula suele ser complicado; más adelante veremos procedimientos prácticos para ello.

Ejercicios

VI.7.- Sea $f((x_1,x_2),(y_1,y_2)) = \alpha_1x_1y_1+\alpha_2x_1y_2+\alpha_3x_2y_1+\alpha_4x_2y_2$, para $\alpha_1 =$, $\alpha_2 =$, $\alpha_3 =$ y $\alpha_4 =$.

a) Comprobar que f es una forma bilineal. ¿Es simétrica?. ¿Es alternada?.

b) Determinar su forma cuadrática asociada.

c) Expresar matricialmente f.

VI.8.- Determinar las formas cuadráticas representadas por los siguientes productos:

a) $\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

VI.9.- Consideremos la forma cuadrática sobre $\mathbf{R}^4$ definida por

$$q(x_1,x_2,x_3,x_4) = x_1^2+x_4^2+x_1x_2-4x_3x_4$$

Hallar la matriz de q en la base canónica de $\mathbf{R}^4$. Siendo f la forma polar de q, hállese $f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ para $\boldsymbol{x} = (1,1,1,1)$ e $\boldsymbol{y} = (0,0,-1,-1)$.

VI.10.- En la base canónica, una forma cuadrática $q(\boldsymbol{x})$ definida en $\mathbf{R}^2$ tiene la siguiente expresión:

$$q(\boldsymbol{x}) = 4x_1^2+3x_2^2-6x_1x_2$$

Determinar su nueva expresión cuando se toma como base la formada por los vectores $\boldsymbol{u}_1 = (1,1)$ y $\boldsymbol{u}_2 = (-1,1)$.

VI.11.- Probar que las formas cuadráticas

$$q_1(\boldsymbol{x}) = x_1^2+x_2^2+8x_1x_2 \qquad q_2(\boldsymbol{y}) = y_1^2-14y_2^2+2y_1y_2$$

son equivalentes, haciendo el cambio de variables

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

VI.12.- Dadas las siguientes formas cuadráticas:

a) $x^2+y^2+z^2+4xy+4xz+4yz$

b) $x^2+14yz-8xy$

c) $x^2-y^2-3z^2+4xy+6xz-8yz$

d) $2x^2+y^2+2z^2-4t^2+4xy-4xz-4yz+4yt$

definidas las tres primeras en $\mathbf{R}^3$ y la última en $\mathbf{R}^4$. Se pide expresarlas en forma matricial e indicar si están definidas en signo.

VI.13.- En $\mathbf{R}^2(x)$ se define la forma cuadrática $f_c(P(x)) = P(-1)^2+P(0)^2+P(1)^2$.

a) Calcular $f_c(a_1x^2+a_2x+a_3)$.

b) Hallar la expresión matricial respecto de la base $(x^2,x,1)$ de la forma polar asociada.

c) Demostrar que es definida positiva.

VI.3 .- PRODUCTO ESCALAR Y NORMA.

Sea V un espacio vectorial sobre el cuerpo real $\mathbf{R}$. Daremos el nombre de ***producto escalar*** a una forma bilineal simétrica cuya forma cuadrática asociada sea definida positiva, que representaremos por

$$\begin{aligned} <\cdot> : V\times V &\longrightarrow \mathbf{R} \\ (\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) &\longrightarrow <\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}> \end{aligned}$$

A la matriz de la forma bilineal la denominaremos ***matriz del producto escalar***. Un espacio vectorial sobre el cuerpo real en el que se ha definido un producto escalar se denomina ***espacio euclidiano***.

Ejemplo VI.3.1

En el espacio vectorial $\mathbf{R}^n$ la aplicación

$$\begin{aligned} \mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^n &\longrightarrow \mathbf{R} \\ (\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) &\longrightarrow <(x_1,...,x_n),(y_1,...,y_n)> = x_1y_1+...+x_ny_n \end{aligned}$$

define un producto escalar, que se denomina ***producto escalar ordinario*** de $\mathbf{R}^n$, ya que verifica las cinco condiciones que implican la definición. En efecto,

1) $<(x_1,...,x_n),(y_1,...,y_n)> = <(y_1,...,y_n),(x_1,...,x_n)>$
   ya que $x_1y_1+...+x_ny_n = y_1x_1+...+y_nx_n$
2) $<\alpha(x_1,...,x_n),(y_1, ..,y_n)> = \alpha<(x_1,...,x_n),(y_1,...,y_n)>$
   ya que $(\alpha x_1)y_1+...+(\alpha x_n)y_n = \alpha(x_1y_1+...+x_ny_n)$
3) $<(x_1,...,x_n)+(x_1',\ldots,x_n'),(y_1,...,y_n)> = <(x_1+x_1',\ldots,x_n+x_n'),(y_1,...,y_n)> =$
   $= (x_1+x_1')y_1+\ldots+(x_n+x_n')y_n = <(x_1,...,x_n),(y_1,...,y_n)>+<(x_1',\ldots,x_n'),(y_1,...,y_n)>$
4) $<(x_1,...,x_n),(x_1,...,x_n)> = x_1^2+\ldots+x_n^2 \geq 0$
5) $<(x_1,...,x_n),(x_1,...,x_n)> = 0 \iff x_1^2+\ldots+x_n^2 = 0 \iff x_1^2 = 0 \wedge ... \wedge x_n^2 = 0 \iff$
   $\iff x_1 = 0 \wedge ... \wedge x_n = 0 \iff (x_1,...,x_n) = (0,...,0)$

La matriz de este producto escalar respecto de la base canónica es la matriz unidad de orden n

$$\mathbf{A}_f = \mathbf{I}_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & . & . & 0 \\ 0 & 1 & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & . & . & 1 \end{pmatrix}$$

Si V es un espacio euclidiano, al ser el producto escalar sobre V una forma bilineal simétrica, la imagen del par de vectores $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{y}$ viene dada en forma matricial por

$$<\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}> = \begin{pmatrix} x_1 & . & . & x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} <\boldsymbol{e}_i,\boldsymbol{e}_j> \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ . \\ . \\ y_n \end{pmatrix} = \mathbf{x}^t\mathbf{A}\mathbf{y}$$

siendo $\mathbf{A} = (<\boldsymbol{e}_i,\boldsymbol{e}_j>)$ la matriz del producto escalar en la base de referencia; está formada por los

productos escalares de los pares de vectores de la base y será una matriz simétrica. Si la base de referencia es ortonormal, la matriz ($<\boldsymbol{e}_i,\boldsymbol{e}_j>$) es la matriz unidad $\mathbf{I}_n$ y el producto escalar de los dos vectores es

$$<\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}> = \begin{pmatrix} x_1 & . & . & x_n \end{pmatrix} \mathbf{I}_n \begin{pmatrix} y_1 \\ . \\ . \\ y_n \end{pmatrix} = \mathbf{x}^t\mathbf{y}$$

Mediante el producto escalar se define la norma de un vector, que corresponde a lo que intuitivamente se denomina longitud o módulo. Sea V un espacio vectorial sobre **R** en el que se ha definido un producto escalar, y sea $x \in V$; definimos la ***norma*** de $\boldsymbol{x}$, que representaremos por $\| \boldsymbol{x} \|$, como

$$\| \boldsymbol{x} \| = (<\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}>)^{1/2}$$

que existe, cualquiera que sea $\boldsymbol{x}$, pues

$$<\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}> \geq 0$$

Los vectores cuya norma es 1 reciben el nombre de vectores ***normalizados***.

En el Tabla VI.3.1 están las propiedades más importantes de la norma de un vector.

TABLA VI.3.1

Propiedades de la norma

1) $\| \boldsymbol{x} \| \geq 0$
2) $\| \boldsymbol{x} \| = 0$ equivale a $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$
3) $\| \alpha\boldsymbol{x} \| = |\alpha| \, \| \boldsymbol{x} \|$
4) $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$ implica $\left\| \dfrac{\pm 1}{\| \boldsymbol{x} \|} \boldsymbol{x} \right\| = 1$
5) $|<\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}>| \leq \| \boldsymbol{x} \| \cdot \| \boldsymbol{y} \|$ (desigualdad de Schwartz)
6) $|<\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}>| = \| \boldsymbol{x} \| \cdot \| \boldsymbol{y} \|$ equivale a $\{\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\}$ l.d.
7) $\| \boldsymbol{x}+\boldsymbol{y} \| \leq \| \boldsymbol{x} \| + \| \boldsymbol{y} \|$ (desigualdad triangular)

Demostraciones:

1) Obvia, pues por definición la norma es la raíz cuadrada positiva de $<\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}>$.

2) Aplicando propiedades del producto escalar, tenemos

$$\| \boldsymbol{x} \| = 0 \iff (<\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}>)^{1/2} = 0 \iff <\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}> = 0 \iff \boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$$

3) $\| \alpha\boldsymbol{x} \| = (<\alpha\boldsymbol{x},\alpha\boldsymbol{x}>)^{1/2} = (\alpha^2<\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}>)^{1/2} = (\alpha^2)^{1/2}(<\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}>)^{1/2} = |\alpha| \, \| \boldsymbol{x} \|$

4) Expresa esta propiedad que si multiplicamos un vector no nulo por el inverso de su norma se obtiene un vector proporcional a él, obviamente, y normalizado ya que, según 3)

$$\left\| \frac{\pm 1}{\| \boldsymbol{x} \|} \boldsymbol{x} \right\| = \frac{1}{\| \boldsymbol{x} \|} \| \boldsymbol{x} \| = 1$$

El proceso, basado en esta propiedad, de obtener a partir de un vector $\boldsymbol{x}$ otro proporcional a él y normalizado se denomina ***normalización*** del vector; existen únicamente dos vectores, opuestos entre si, como resultado de este proceso de normalización ya que si

$$\left. \begin{matrix} \boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0} \\ \| \boldsymbol{y} \| = 1 \\ \boldsymbol{y} = \alpha\boldsymbol{x} \end{matrix} \right| \iff \| \alpha\boldsymbol{x} \| = 1 \implies |\alpha| \, \| \boldsymbol{x} \| = 1 \Rightarrow |\alpha| = \frac{1}{\| \boldsymbol{x} \|} \implies \alpha = \pm \frac{1}{\| \boldsymbol{x} \|}$$

5) Si $\boldsymbol{u}$ es un vector normalizado cualquiera, como para todo vector $\boldsymbol{x} \in V$ es

$$<\boldsymbol{x} - <\boldsymbol{u},\boldsymbol{x}>\boldsymbol{u} \, , \, \boldsymbol{x} - <\boldsymbol{u},\boldsymbol{x}>\boldsymbol{u}> \geq 0$$

que equivale a que

$$<\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}> - <\boldsymbol{x} \, , <\boldsymbol{u},\boldsymbol{x}>\boldsymbol{u}> - <<\boldsymbol{u},\boldsymbol{x}>\boldsymbol{u} \, , \, \boldsymbol{x}> + <<\boldsymbol{u},\boldsymbol{x}>\boldsymbol{u} \, , <\boldsymbol{u},\boldsymbol{x}>\boldsymbol{u}> \geq 0 \iff$$

$$\iff \| \boldsymbol{x} \|^2 - <\boldsymbol{u},\boldsymbol{x}><\boldsymbol{x},\boldsymbol{u}> - <\boldsymbol{u},\boldsymbol{x}><\boldsymbol{u},\boldsymbol{x}> + <\boldsymbol{u},\boldsymbol{x}>^2 \| \boldsymbol{u} \|^2 \geq 0 \iff$$

$$\iff \| \boldsymbol{x} \|^2 - <\boldsymbol{u},\boldsymbol{x}>^2 \geq 0 \iff \| \boldsymbol{x} \|^2 \geq <\boldsymbol{u},\boldsymbol{x}>^2 \iff \| \boldsymbol{x} \| \geq |<\boldsymbol{u},\boldsymbol{x}>|$$

Sea ahora un vector $\boldsymbol{y} \neq \boldsymbol{0}$ por lo que, teniendo en cuenta que $\boldsymbol{y}/\| \boldsymbol{y} \|$ es un vector normalizado, sustituyendo $\boldsymbol{u}$ por $\boldsymbol{y} / \| \boldsymbol{y} \|$ en la desigualdad anterior, podemos escribir

$$\| \boldsymbol{x} \| \geq \left| <\frac{1}{\| \boldsymbol{y} \|} \boldsymbol{y},\boldsymbol{x}> \right| \iff \| \boldsymbol{x} \| \geq \frac{1}{\| \boldsymbol{y} \|} |<\boldsymbol{y},\boldsymbol{x}>| \iff |<\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}>| \leq \| \boldsymbol{x} \| \cdot \| \boldsymbol{y} \|$$

Si $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{0}$ se verifica la desigualdad pues $<\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}> = 0$ y $\| \boldsymbol{y} \| = 0$.

6) Si $\boldsymbol{u}$ es un vector normalizado, de acuerdo con el razonamiento anterior

$$|<\boldsymbol{u},\boldsymbol{x}>| = \| \boldsymbol{x} \| \cdot \| \boldsymbol{u} \| = \| \boldsymbol{x} \| \iff <\boldsymbol{x} - <\boldsymbol{u},\boldsymbol{x}>\boldsymbol{u} \, , \, \boldsymbol{x} - <\boldsymbol{u},\boldsymbol{x}>\boldsymbol{u}> = 0 \iff$$

$$\iff \boldsymbol{x} - <\boldsymbol{u},\boldsymbol{x}>\boldsymbol{u} = 0 \iff \boldsymbol{x} = <\boldsymbol{u},\boldsymbol{x}>\boldsymbol{u} \iff \boldsymbol{x} = \alpha\boldsymbol{u}$$

Para cualquier $\boldsymbol{y} \neq \boldsymbol{0}$, al ser $\boldsymbol{y}/\| \boldsymbol{y} \|$ un vector normalizado, tendremos

$$\boldsymbol{x} = \alpha \frac{1}{\| \boldsymbol{y} \|} \boldsymbol{y} = \frac{\alpha}{\| \boldsymbol{y} \|} \boldsymbol{y} \iff \{\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\} \text{ l.d.}$$

Si $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{0}$, la equivalencia es evidente.

7) Como

$$\| \boldsymbol{x}+\boldsymbol{y} \|^2 = \langle \boldsymbol{x}+\boldsymbol{y} , \boldsymbol{x}+\boldsymbol{y} \rangle = \langle \boldsymbol{x},\boldsymbol{x} \rangle + \langle \boldsymbol{x},\boldsymbol{y} \rangle + \langle \boldsymbol{y},\boldsymbol{x} \rangle + \langle \boldsymbol{y},\boldsymbol{y} \rangle = \| \boldsymbol{x} \|^2 + 2\langle \boldsymbol{x},\boldsymbol{y} \rangle + \| \boldsymbol{y} \|^2 \leq$$
$$\leq \| \boldsymbol{x} \|^2 + 2|\langle \boldsymbol{x},\boldsymbol{y} \rangle| + \| \boldsymbol{y} \|^2 \leq \| \boldsymbol{x} \|^2 + 2\| \boldsymbol{x} \| \cdot \| \boldsymbol{y} \| + \| \boldsymbol{y} \|^2 = (\| \boldsymbol{x} \| + \| \boldsymbol{y} \|)^2$$

sacando raíz cuadrada positiva, tenemos la propiedad.

Ejemplo VI.3.2

En $\mathbf{R}^n$ con el producto escalar ordinario, la norma de un vector es

$$\| (x_1,\ldots x_n) \| = (x_1^2+\ldots+x_n^2)^{1/2}$$

y, por ejemplo, en $\mathbf{R}^3$

$$\| (1,-4,8) \| = (1^2+(-4)^2+8^2)^{1/2} = 9$$

Si multiplicamos este vector por el inverso de su norma, 1/9 , tendremos el vector

$$(1/9,-4/9,2/9)$$

que es normalizado y proporcional a él; lo mismo que el opuesto

$$(-1/9,4/9,-2/9)$$

Los vectores de la base canónica de $\mathbf{R}^n$ con el producto escalar ordinario son normalizados ya que

$$\| (0,\ldots,0,1,0,\ldots,0) \| = (0^2+\ldots+0^2+1^2+0^2+\ldots+0^2)^{1/2} = 1$$

Ejercicios

VI.14.- Sea $f : \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{R}$. Siendo x e y dos vectores de $\mathbf{R}^n$, determinar si las aplicaciones que se dan a continuación son o no productos escalares:

a) $f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \left| \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \right|$

b) $f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{j=1}^{n} y_j$

c) $f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{x_i^2+y_i^2}$

d) $f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \sum_{i=1}^{n} (x_i-y_i)^2 - \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \sum_{i=1}^{n} y_i^2$

VI.15.- Demostrar que $(\mathbf{R}^3,\otimes)$ con

$$(x_1,x_2,x_3)\otimes(y_1,y_2,y_3) = x_1y_1-2x_1y_2-2x_2y_1+6x_2y_2+x_2y_3+x_3y_2+x_3y_3$$

es un espacio vectorial euclidiano.

VI.16.- En $\mathbf{R}^3$, para cualquier par de vectores $\boldsymbol{x} = (x_1,x_2,x_3)$ $\boldsymbol{y} = (y_1,y_2,y_3)$ se define

$$<\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}> = ax_1y_1+ax_2y_2+x_3y_3+x_1y_2+x_2y_1$$

Hallar la condición que ha de satisfacer el número real a para que sea un producto escalar.

VI.17.- Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbf{R}$ de dimensión n y sea $(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2,..., \boldsymbol{a}_n)$ una base de V. Demostrar que existe un producto escalar en V para el que esta base es ortonormal.

VI.18.- Sea $(V,<,>)$ un espacio vectorial euclidiano, pruébese que, para cualesquiera vectores $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}\in V$, se verifica

$$\| \boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}+\boldsymbol{z} \|^2 = \| \boldsymbol{x} \|^2+ \| \boldsymbol{y} \|^2+ \| z \|^2+2<\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}>+2<\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}>+2<\boldsymbol{z},\boldsymbol{x}>$$

VI.19.- Sea el espacio vectorial de los polinomios de grado dos con coeficientes reales sobre $\mathbf{R}$, y sea la l.c. sobre este espacio definida por

$$(a_2x^2+a_1x+a_0)\cdot(b_2x^2+b_1x+b_0) = (a_2+a_1+a_0)\cdot(b_2+b_1+b_0)$$

¿Es un producto escalar ?.

VI.20.- Sea $\mathbf{R}_3[x]$ el espacio vectorial de los polinomios con coeficientes reales sobre $\mathbf{R}$ y de grado menor o igual a tres. Demostrar que el producto

$$P(x)\cdot Q(x) = \int_0^1 P(x)\cdot Q(x)\, dx$$

es un producto escalar. Determinar la norma del polinomio x^2+2x+7.

VI.4.- ORTOGONALIDAD

El concepto de ortogonalidad de vectores respecto de una forma bilineal simétrica en el caso de un producto escalar tiene aplicaciones geométricas interesantes que se verán en el Capítulo dedicado a la Geometría. Sea V e.v.s. $\mathbf{R}$ euclidiano; dos vectores $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}$ de V son ***ortogonales respecto del producto escalar*** definido en V, lo que escribiremos

$$\boldsymbol{x} \perp \boldsymbol{y}$$

cuando su producto escalar es nulo, es decir

$$\boldsymbol{x} \perp \boldsymbol{y} \quad \text{si y sólo si} \quad <\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}> = 0$$

De la definición se deduce inmediatamente

a) Para todo $\boldsymbol{x} \in V$ es $\boldsymbol{0} \perp \boldsymbol{x}$, ya que $\langle \boldsymbol{0},\boldsymbol{x} \rangle = (0 \ldots 0)\ \mathbf{A}\mathbf{x} = 0$

b) $\boldsymbol{x} \perp \boldsymbol{y}$ equivale a $\boldsymbol{y} \perp \boldsymbol{x}$, ya que $\langle \boldsymbol{x},\boldsymbol{y} \rangle = \langle \boldsymbol{y},\boldsymbol{x} \rangle = 0$

c) $\boldsymbol{x} \perp \boldsymbol{y}$ equivale a $\alpha\boldsymbol{x} \perp \boldsymbol{y}$, ya que $\langle \alpha\boldsymbol{x},\boldsymbol{y} \rangle = \alpha \langle \boldsymbol{x},\boldsymbol{y} \rangle = 0$, para cualquier $\alpha \in \mathbf{R}^*$

d) $\boldsymbol{x} \perp \boldsymbol{y}$ equivale a $\| \boldsymbol{x}+\boldsymbol{y} \|^2 = \| \boldsymbol{x} \|^2 + \| \boldsymbol{y} \|^2$, ya que

$$\| \boldsymbol{x}+\boldsymbol{y} \|^2 = \langle \boldsymbol{x}+\boldsymbol{y},\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y} \rangle = \langle \boldsymbol{x},\boldsymbol{x} \rangle + 2\langle \boldsymbol{x},\boldsymbol{y} \rangle + \langle \boldsymbol{y},\boldsymbol{y} \rangle = \| \boldsymbol{x} \|^2 + \| \boldsymbol{y} \|^2$$

Un conjunto de vectores $A \subseteq V$ es ***ortogonal*** si y sólo si todos sus vectores son ortogonales entre sí; por ejemplo, el conjunto $\{\boldsymbol{x}_1,\ldots,\boldsymbol{x}_n\} \subseteq V$ será ortogonal si y sólo si

$$(\forall \boldsymbol{x}_i,\boldsymbol{x}_j \in \{\boldsymbol{x}_1,\ldots,\boldsymbol{x}_n\})\ (i \neq j \ \Rightarrow \ \langle \boldsymbol{x}_i,\boldsymbol{x}_j \rangle = 0)$$

Un conjunto $A \subseteq V$ es ***ortonormal*** si es ortogonal y todos sus vectores son normalizados; por ejemplo, el conjunto $\{\boldsymbol{x}_1,\ldots,\boldsymbol{x}_n\} \subseteq V$ será ortonormal si y sólo si

$$\langle \boldsymbol{x}_i,\boldsymbol{x}_j \rangle = \begin{cases} 0 & \text{para } i \neq j \\ 1 & \text{para } i = j \end{cases}$$

En particular, si un conjunto de vectores ortonormales forma una base de V, hablaremos de ***base ortonormal***. Una base formada por un vector normalizado se considera ortonornal

En la Tabla VI.4.1 figuran las propiedades más interesantes que se deducen de las definiciones precedentes.

TABLA VI.4.1

Propiedades de los conjuntos de vectores ortogonales

1) Si $\{\boldsymbol{x}_1,\ldots,\boldsymbol{x}_m\}$ ortogonal y ningún $\boldsymbol{x}_i$ es nulo, entonces $\{\boldsymbol{x}_1,\ldots,\boldsymbol{x}_m\}$ l.i.

2) $(\boldsymbol{e}_1,\ldots,\boldsymbol{e}_n)$ base ortonormal de V
$\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{e}_1+\ldots+x_n\boldsymbol{e}_n$
$\boldsymbol{y} = y_1\boldsymbol{e}_1+\ldots+y_n\boldsymbol{e}_n$
implican $\langle \boldsymbol{x},\boldsymbol{y} \rangle = x_1y_1+\ldots+x_ny_n$

3) Si V es un espacio vectorial euclidiano de dimensión finita, existe una base ortonormal de V

Demostraciones:

1) En efecto, si $\alpha_1\boldsymbol{x}_1+\ldots+\alpha_m\boldsymbol{x}_m = \boldsymbol{0}$ multiplicando escalarmente

$$\text{por } \boldsymbol{x}_1 : \ \langle \alpha_1\boldsymbol{x}_1+\ldots+\alpha_m\boldsymbol{x}_m \, , \boldsymbol{x}_1 \rangle = \langle \boldsymbol{0},\boldsymbol{x}_1 \rangle = 0 \ \Rightarrow \ \alpha_1 \langle \boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_1 \rangle = 0 \ \Rightarrow \ \alpha_1 = 0$$

$$\text{por } \boldsymbol{x}_2 : \ \langle \alpha_1\boldsymbol{x}_1+\ldots+\alpha_m\boldsymbol{x}_m \, , \boldsymbol{x}_2 \rangle = \langle \boldsymbol{0},\boldsymbol{x}_2 \rangle = 0 \ \Rightarrow \ \alpha_2 \langle \boldsymbol{x}_2,\boldsymbol{x}_2 \rangle = 0 \ \Rightarrow \ \alpha_2 = 0$$

. . . . . .

por $\boldsymbol{x}_m$: $\langle \alpha_1\boldsymbol{x}_1+\ldots+\alpha_m\boldsymbol{x}_m\ ,\ \boldsymbol{x}_m\rangle = \langle \boldsymbol{0},\boldsymbol{x}_m\rangle = 0 \ \Rightarrow\ \alpha_m\langle \boldsymbol{x}_m,\boldsymbol{x}_m\rangle = 0 \ \Rightarrow\ \alpha_m = 0$

luego forman un conjunto l.i.

2) Como $\langle \boldsymbol{e}_i,\boldsymbol{e}_j\rangle$ es 1 si $i = j$ y 0 si $i \neq j$, según hemos obtenido para la imagen de un par de vectores

$$\langle \boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\rangle = \sum_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le j\le n}} x_i y_j \langle \boldsymbol{e}_i,\boldsymbol{e}_j\rangle = x_1y_1+\ldots+x_ny_n$$

Esta propiedad expresa que si el espacio vectorial está referido a una base ortonormal el producto escalar de dos vectores toma una expresión muy sencilla, análoga a la del producto escalar ordinario de $\mathbf{R}^n$. Por ello, es conveniente averiguar si en un espacio vectorial V sobre $\mathbf{R}$ de dimensión finita, en el que se ha definido un producto escalar, es posible hallar una base ortonormal respecto a ese producto. Ello es posible según demuestra la propiedad 3).

3) Si $\dim(V) = 1$ y $(\boldsymbol{e})$ es una base de V, entonces $(\boldsymbol{e}/\|\boldsymbol{e}\|)$ es una base ortonormal. Si $\dim(V) = n$, sea $(\boldsymbol{e}_1,\ldots,\boldsymbol{e}_n)$ una base de V. Construimos los vectores

$\boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{e}_1$

$\boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{e}_2+\alpha_{21}\boldsymbol{v}_1$ tal que $\boldsymbol{v}_2 \perp \boldsymbol{v}_1$

. . . . . .

$\boldsymbol{v}_n = \boldsymbol{e}_n+\alpha_{n1}\boldsymbol{v}_1+\ldots+\alpha_{n\ n-1}\boldsymbol{v}_{n-1}$ tal que $\boldsymbol{v}_n \perp \boldsymbol{v}_1 \ \wedge\ \ldots\ \wedge\ \boldsymbol{v}_n \perp \boldsymbol{v}_{n-1}$

que forman un conjunto $\{\boldsymbol{v}_1,\ldots,\boldsymbol{v}_n\}$ ortogonal, con ningún vector nulo y por tanto l.i., luego forman base de V. Demostremos por inducción que los vectores $\boldsymbol{v}_i$ existen y son únicos. Sea

$$S = \{i\in\mathbf{N} \mid \boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{e}_1,\ \boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{e}_2+\alpha_{21}\boldsymbol{v}_1,\ldots,\ \boldsymbol{v}_i = \boldsymbol{e}_i+\alpha_{i1}\boldsymbol{v}_1+\ldots+\alpha_{ii-1}\boldsymbol{v}_{i-1} \text{ no nulos y ortogonales}\}$$

que contiene a 2, pues para que $\boldsymbol{v}_2 \perp \boldsymbol{v}_1$ basta hacer

$$0 = \langle \boldsymbol{v}_2,\boldsymbol{v}_1\rangle = \langle \boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{v}_1\rangle+\alpha_{21}\langle \boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_1\rangle \ \Rightarrow\ \alpha_{21} = \frac{-\langle \boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{v}_1\rangle}{\langle \boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_1\rangle}$$

por ser $\langle \boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_1\rangle = \langle \boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_1\rangle \neq 0$. Además es $\boldsymbol{v}_2 \neq \boldsymbol{0}$, pues en caso contrario $\boldsymbol{e}_2+\alpha_{21}\boldsymbol{e}_1 = \boldsymbol{0}$ y $\{\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2\}$ sería l.d.

$i\in S \ \Rightarrow\ i+1\in S$ pues al ser $\boldsymbol{v}_{i+1} = \boldsymbol{e}_{i+1}+\alpha_{i+11}\boldsymbol{v}_1+\ldots+\alpha_{i+1i}\boldsymbol{v}_i$ tendremos que para que sea $\boldsymbol{v}_{i+1} \perp \boldsymbol{v}_j$ $(j = 1,\ldots,i)$ basta hacer

$$0 = \langle \boldsymbol{v}_{i+1},\boldsymbol{v}_j\rangle = \langle \boldsymbol{e}_{i+1},\boldsymbol{v}_j\rangle+\alpha_{i+11}\langle \boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_j\rangle+\ldots+\alpha_{i+1i}\langle \boldsymbol{v}_i,\boldsymbol{v}_j\rangle =$$

$$= \langle \boldsymbol{e}_{i+1},\boldsymbol{v}_j\rangle+\alpha_{i+1j}\langle \boldsymbol{v}_j,\boldsymbol{v}_j\rangle \ \Rightarrow\ \alpha_{i+1j} = \frac{-\langle \boldsymbol{e}_{i+1},\boldsymbol{v}_j\rangle}{\langle \boldsymbol{v}_j,\boldsymbol{v}_j\rangle}$$

Además $\boldsymbol{v}_{i+1} \neq \boldsymbol{0}$, pues en caso contrario $\boldsymbol{e}_{i+1}+\alpha_{i+11}\boldsymbol{v}_1+\ldots+\alpha_{i+1\ i}\boldsymbol{v}_i = \boldsymbol{0}$ con lo que $\boldsymbol{e}_{i+1}$ sería c.l. de $\boldsymbol{v}_1,\ldots,\boldsymbol{v}_i$ y, por ello, de $\boldsymbol{e}_1,\ldots,\boldsymbol{e}_i$.

Así hemos construido un conjunto $\{\boldsymbol{v}_1,\ldots,\boldsymbol{v}_n\}$ que, al ser ortogonal y con todos sus vectores no nulos, será l.i., por lo que es una base ortogonal de V. La base ortonormal buscada será

$$\left(\frac{\boldsymbol{v}_1}{\|\boldsymbol{v}_1\|},\ldots,\frac{\boldsymbol{v}_n}{\|\boldsymbol{v}_n\|}\right)$$

Este proceso de obtener una base ortonormal partiendo de una base cualquiera de V se denomina ***proceso de ortonormalización de Gram-Schmidt*** que demuestra que todo espacio vectorial de dimensión finita posee una tal base.

Ejemplo VI.4.1

Apliquemos el proceso anterior para obtener una base ortonormal a partir de la base $((1,-1,1),(2,0,1),(1,1,1))$ de $\mathbf{R}^3$ suponiendo que el producto escalar es el ordinario; el primer vector de la base ortogonal será

$$\boldsymbol{v}_1 = (1,-1,1)$$

El segundo vector vendrá definido por las condiciones

$$\boldsymbol{v}_2 = (2,0,1)+\alpha_{21}(1,-1,1) \ \wedge \ \boldsymbol{v}_2 \perp \boldsymbol{v}_1$$

es decir,

$$0 = \langle \boldsymbol{v}_2,\boldsymbol{v}_1\rangle = 3+3\alpha_{21} \ \Rightarrow \ \alpha_{21} = -1 \ \Rightarrow \ \boldsymbol{v}_2 = (2,0,1)-(1,-1,1) = (1,1,0)$$

El tercer vector vendrá dado por

$$\boldsymbol{v}_3 = (1,1,1)+\alpha_{31}(1,-1,1)+\alpha_{32}(1,1,0) \ \wedge \ \boldsymbol{v}_3 \perp \boldsymbol{v}_1 \ \wedge \ \boldsymbol{v}_3 \perp \boldsymbol{v}_2$$

con lo cual

$$\left.\begin{array}{l} 0 = \langle \boldsymbol{v}_3,\boldsymbol{v}_1\rangle = 1+3\alpha_{31} \\ 0 = \langle \boldsymbol{v}_3,\boldsymbol{v}_2\rangle = 2+2\alpha_{32} \end{array}\right| \ \Rightarrow \ \left.\begin{array}{l} \alpha_{31} = -1/3 \\ \alpha_{32} = -1 \end{array}\right| \ \Rightarrow \ \boldsymbol{v}_3 = (-1/3,1/3,2/3)$$

luego una base ortogonal es $((1,-1,1),(1,1,0),(-1,1,2))$ y normalizándola obtenemos

$$\left(\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{-1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right),\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}},0\right),\left(\frac{-1}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{2}{\sqrt{6}}\right)\right)$$

Diremos que un vector $\boldsymbol{x}\in V$ es ***ortogonal a un subespacio*** A si $\boldsymbol{x}$ es ortogonal a todo vector de A; si A es un subespacio de dimensión finita se verifica que

"$\boldsymbol{x}$ ortogonal a A equivale a que $\boldsymbol{x}$ es ortogonal a los vectores de cualquier base de A"

En efecto, sea $(\boldsymbol{u}_1,\ldots,\boldsymbol{u}_n)$ una base de A. Tendremos

$$\boldsymbol{x} \text{ ortogonal a todo vector de } A \ \Rightarrow \ \boldsymbol{x} \perp \boldsymbol{u}_1,\ldots,\boldsymbol{x} \perp \boldsymbol{u}_n$$

Recíprocamente si

$$\boldsymbol{x} \perp \boldsymbol{u}_1 \ ,\ldots, \ \boldsymbol{x} \perp \boldsymbol{u}_n$$

para todo $\boldsymbol{u}\in A$ será

$$\boldsymbol{u} = \alpha_1\boldsymbol{u}_1+\ldots+\alpha_n\boldsymbol{u}_n \;\Rightarrow\; <\boldsymbol{x},\boldsymbol{u}> = <\boldsymbol{x},\alpha_1\boldsymbol{u}_1+\ldots+\alpha_n\boldsymbol{u}_n> = \alpha_1<\boldsymbol{x},\boldsymbol{u}_1>+\ldots+\alpha_n<\boldsymbol{x},\boldsymbol{u}_n> = 0$$

Diremos que A y B son ***subespacios ortogonales*** cuando todo vector de A es ortogonal a todo vector de B; si A y B son de dimensión finita se verifica que

"A ortogonal a B equivale a que los vectores de cualquier base de A son ortogonales a los vectores de otra base de B"

En efecto, sean $(\boldsymbol{u}_1,...,\boldsymbol{u}_p)$ base de A y $(\boldsymbol{v}_1,\ldots,\boldsymbol{v}_r)$ base de B. Si todo vector de A es ortogonal a todo vector de B, entonces

$$\boldsymbol{u}_1 \perp \boldsymbol{v}_1 \;,...,\; \boldsymbol{u}_1 \perp \boldsymbol{v}_r \;,...,\; \boldsymbol{u}_p \perp \boldsymbol{v}_1 \;,...,\; \boldsymbol{u}_p \perp \boldsymbol{v}_r$$

Recíprocamente, si se verifica lo anterior, para dos vectores cualesquiera

$$\boldsymbol{u} = \alpha_1\boldsymbol{u}_1+\ldots+\alpha_p\boldsymbol{u}_p\in A \qquad\qquad \boldsymbol{v} = \beta_1\boldsymbol{v}_1+\ldots+\beta_r\boldsymbol{v}_r\in B$$

será

$$<\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}> = \alpha_1\beta_1<\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{v}_1>+..+\alpha_1\beta_r<\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{v}_r>+\ldots+\alpha_p\beta_1<\boldsymbol{u}_p,\boldsymbol{v}_1>+..+\alpha_p\beta_r<\boldsymbol{u}_p,\boldsymbol{v}_r> \;\Rightarrow\; <\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}> = 0$$

Dado un subconjunto $X = \{\boldsymbol{x}_1,...\boldsymbol{x}_m\}\subseteq V$ el conjunto de vectores ortogonales a ellos forman un subconjunto que se denota por $X^{\perp}$ y verifica que es un subespacio de V. En efecto

$$\left.\begin{array}{l}(\forall \boldsymbol{x}\in X^{\perp})\ (\boldsymbol{x}\perp X)\\ (\forall \boldsymbol{y}\in X^{\perp})\ (\boldsymbol{y}\perp X)\\ (\forall \alpha\beta\in \mathbf{R})\end{array}\right| \Rightarrow \left|\begin{array}{l}<(\alpha\boldsymbol{x}+\beta\boldsymbol{y}),\boldsymbol{x}_1> = \alpha<\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}_1>+\beta<\boldsymbol{y},\boldsymbol{x}_1> = 0 \;\Rightarrow\; (\alpha\mathbf{x}+\beta\boldsymbol{y}) \perp \boldsymbol{x}_1\\ \quad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ <(\alpha\boldsymbol{x}+\beta\boldsymbol{y}),\boldsymbol{x}_m> = \alpha<\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}_m>+\beta<\boldsymbol{y},\boldsymbol{x}_m> = 0 \;\Rightarrow\; (\alpha\mathbf{x}+\beta\boldsymbol{y}) \perp \boldsymbol{x}_m\end{array}\right.$$

con lo que $\alpha\boldsymbol{x}+\beta\boldsymbol{y}\in X^{\perp}$

Dado un subespacio A de V, el conjunto de vectores de V ortogonales a los vectores de A se denomina ***subespacio ortogonal asociado*** al subespacio A y se representa por $A^{\perp}$. Si V es de dimensión finita se verifican las propiedades de la Tabla VI.4.2

TABLA VI.4.2

Propiedades de los subespacios ortogonales

1) $A\oplus A^{\perp} = V$

2) $\dim(A)+\dim(A^{\perp}) = \dim(V)$

3) Si B es subespacio ortogonal a A, entonces $B \subseteq A^{\perp}$

4) Si A y B son subespacios ortogonales, entonces $\dim(A)+\dim(B) \le \dim(V)$

Demostraciones:

1) En efecto, por un lado

$$\boldsymbol{x}\in A\cap A^{\perp} \;\Rightarrow\; \boldsymbol{x}\in A\wedge \boldsymbol{x}\in A^{\perp} \;\Rightarrow\; \boldsymbol{x}\perp\boldsymbol{x} \;\Rightarrow\; \langle \boldsymbol{x},\boldsymbol{x}\rangle = 0 \;\Rightarrow\; \boldsymbol{x}=\boldsymbol{0} \;\Rightarrow\; A\cap A^{\perp}=\{\boldsymbol{0}\}$$

y por otro lado, si $(\boldsymbol{u}_1,...,\boldsymbol{u}_m)$ es base de A el proceso de ortonormalización de Gram-Schmidt asegura la existencia de una base $(\boldsymbol{e}_1,\ldots,\boldsymbol{e}_m)$ ortogonal de A, que se puede completar para hallar una base de V

$$(\boldsymbol{e}_1,\ldots,\boldsymbol{e}_m,\boldsymbol{u}_{i\ m+1},\ldots,\boldsymbol{u}_{i\ n})$$

y el proceso de Gram-Schmidt vuelve a asegurar una base ortonormal

$$(\boldsymbol{e}_1,\ldots,\boldsymbol{e}_m,\boldsymbol{e}_{m+1},\ldots,\boldsymbol{e}_n)$$

esta vez para V, siendo, entonces $(\boldsymbol{e}_{m+1},\ldots,\boldsymbol{e}_n)$ base de $A^{\perp}$ pues forman un conjunto l.i. y

$$\boldsymbol{x}\in A^{\perp} \;\Rightarrow\; \boldsymbol{x}\in V \;\Rightarrow\; \boldsymbol{x}=\alpha_1\boldsymbol{e}_1+\ldots+\alpha_m\boldsymbol{e}_m+\alpha_{m+1}\boldsymbol{e}_{m+1}+\ldots+\alpha_n\boldsymbol{e}_n$$

y multiplicando escalarmente por $\boldsymbol{e}_1,\ldots,\boldsymbol{e}_m$ llegamos a

$$\alpha_1=\ldots=\alpha_m=0 \;\Rightarrow\; \boldsymbol{x}=\alpha_{m+1}\boldsymbol{e}_{m+1}+\ldots+\alpha_n\boldsymbol{e}_n$$

Por tanto

$$(\forall \boldsymbol{v}\in V)\ (\boldsymbol{v}=(\beta_1\boldsymbol{e}_1+\ldots+\beta_m\boldsymbol{e}_m)+(\beta_{m+1}\boldsymbol{e}_{m+1}+\ldots+\beta_n\boldsymbol{e}_n)=\boldsymbol{x}_1+\boldsymbol{x}_2) \quad , \quad \text{con } \boldsymbol{x}_1\in A \text{ y } \boldsymbol{x}_2\in A^{\perp}$$

2) Se deduce inmediatamente de la propiedad anterior.

3) Por definición de subespacio ortogonal.

4) Como $B\subseteq A^{\perp}$, entonces $\dim(A)+\dim(B)\le \dim(A)+\dim(A^{\perp})=\dim(V)$.

Ejemplo VI.4.2

Consideremos el subespacio $[(1,2,-1)]\subseteq \mathbf{R}^3$, referido éste a la base canónica. Definiendo un producto escalar f en $\mathbf{R}^3$ por la fórmula

$$f((x,y,z),(x',y',z'))=xx'+yy'+zz'$$

el subespacio ortogonal asociado vendrá dado por la condición

$$A^{\perp}=\{(x,y,z)\in\mathbf{R}^3 \mid f((x,y,z),(1,2,-1))=0\}$$

es decir, $x+2y-z=0$, resultando ser

$$x=-2y+z \;\Rightarrow\; [(1,2,-1)]^{\perp}=[(-2,1,0),(1,0,1)]$$

Para otro producto escalar g definido por

$$g((x,y,z),(x',y',z')) = xx' + 2xy' + 3xz' + 2yx' + yy' - yz' + 3zx' - zy'$$

el subespacio ortogonal asociado al mismo subespacio anterior, vendrá dado por

$$A^{\perp} = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \mid g((x,y,z),(1,2,-1)) = 0\}$$

es decir, $x + 4x - 3x + 2y + 2y + y + 3z - 2z = 0$, resultando

$$z = -2x - 5y \quad \Rightarrow \quad [(1,2,-1)]^{\perp} = [(1,0,-2),(0,1,-5)]$$

Vemos que, para un mismo vector el subespacio ortogonal asociado al subespacio generado por él, es distinto según sea el producto escalar que se defina.

Sea $\boldsymbol{x}$ un vector no nulo y A un subespacio de V. Llamaremos ***proyección ortogonal*** de $\boldsymbol{x}$ sobre A, que denotaremos por $\mathrm{pr}_A(\boldsymbol{x})$, al vector definido por las condiciones

1) $\mathrm{pr}_A(\boldsymbol{x}) \in A$
2) $(\boldsymbol{x} - \mathrm{pr}_A(\boldsymbol{x})) \perp A$

Según esta definición, tenemos que $\boldsymbol{x}' \in A$ es proyección de $\boldsymbol{x}$ sobre A si y sólo si $\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}'$ es ortogonal a A. Además el vector proyección de $\boldsymbol{x}$ sobre A es único pues si $\boldsymbol{x}'$ y $\boldsymbol{x}''$ son dos proyecciones de $\boldsymbol{x}$ sobre A tendremos que $\boldsymbol{x}' - \boldsymbol{x}'' \in A$ y además al verificarse que

$$(\forall \boldsymbol{v} \in A)(\langle(\boldsymbol{x}' - \boldsymbol{x}''),\boldsymbol{v}\rangle = \langle((\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}'') - (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}')),\boldsymbol{v}\rangle = \langle(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}''),\boldsymbol{v}\rangle - \langle(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}'),\boldsymbol{v}\rangle = 0)$$

es $\boldsymbol{x}' - \boldsymbol{x}'' \in A^{\perp}$, luego, según la propiedad 1) de los subespacios ortogonales:

$$\boldsymbol{x}' - \boldsymbol{x}'' = \boldsymbol{0} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{x}' = \boldsymbol{x}''$$

Si $\boldsymbol{x} \in A$, entonces $\mathrm{pr}_A(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}$ pues $\mathrm{pr}_A(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x} \in A$ y $\boldsymbol{x} - \mathrm{pr}_A(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0} \perp A$.

En el caso particular de ser A de dimensión 1, es decir, $A = [\boldsymbol{v}]$ tendremos que de

$$\mathrm{pr}_{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{x}) \in [\boldsymbol{v}] \ \wedge \ (\boldsymbol{x} - \mathrm{pr}_{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{x})) \perp [\boldsymbol{v}]$$

se deduce

$$\mathrm{pr}_{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{x}) = \alpha\boldsymbol{v} \quad \Rightarrow \quad \langle(\boldsymbol{x} - \alpha\boldsymbol{v}),\boldsymbol{v}\rangle = 0 \quad \Rightarrow \quad \langle\boldsymbol{x},\boldsymbol{v}\rangle - \alpha\langle\boldsymbol{v},\boldsymbol{v}\rangle = 0 \quad \Rightarrow \alpha = \frac{\langle\boldsymbol{x},\boldsymbol{v}\rangle}{\langle\boldsymbol{v},\boldsymbol{v}\rangle}$$

luego

$$\mathrm{pr}_{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{x}) = \frac{\langle\boldsymbol{x},\boldsymbol{v}\rangle}{\langle\boldsymbol{v},\boldsymbol{v}\rangle}\,\boldsymbol{v}$$

que se denomina proyección del vector $\boldsymbol{x}$ sobre el $\boldsymbol{v}$. Si $\boldsymbol{x} \perp \boldsymbol{v}$, entonces $\mathrm{pr}_{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}$.

Ejemplo VI.4.3

Sean en $\mathbf{R}^3$ e.v.s. $\mathbf{R}$ el vector $\boldsymbol{x} = (1,-2,1)$ y el subespacio $A = [(1,0,2),(-1,-1,1)]$

Calculemos $\mathrm{pr}_A(\boldsymbol{x})$

$$\mathrm{pr}_A(\boldsymbol{x}) \in A \;\Rightarrow\; \mathrm{pr}_A(\boldsymbol{x}) = \alpha_1(1,0,2)+\alpha_2(-1,-1,1) = (\alpha_1-\alpha_2,-\alpha_2,\, 2\alpha_1+\alpha_2)$$

$$(\boldsymbol{x}-\mathrm{pr}_A(\boldsymbol{x})) \perp A \;\Rightarrow\; (\boldsymbol{x}-\mathrm{pr}_A(\boldsymbol{x})) \perp (1,0,2) \;\wedge\; (\boldsymbol{x}-\mathrm{pr}_A(\boldsymbol{x})) \perp (-1,-1,1) \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{r} 1(1-\alpha_1+\alpha_2)+0(-2+\alpha_2)+2(1-2\alpha_1-\alpha_2) = 0 \\ -1(1-\alpha_1+\alpha_2)+(-1)(-2+\alpha_2)+1(1-2\alpha_1-\alpha_2) = 0 \end{array}\right| \Rightarrow \left|\begin{array}{l} \alpha_1 = 1/2 \\ \alpha_2 = 1/2 \end{array}\right.$$

luego $\mathrm{pr}_A(\boldsymbol{x}) = (0,-1/2,3/2)$. La proyección de $\boldsymbol{x}$ sobre el vector $\boldsymbol{v} = (1,2,5)$ es

$$\mathrm{pr}_{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{x}) = \frac{1-4+5}{1^2+2^2+5^2}\ (1,2,5) = (1/15,2/15,5/15)$$

Ejercicios

VI.21.-En un espacio vectorial euclidiano de dimensión cinco y respecto de una base ortonormal se consideran los vectores de componentes

$$\boldsymbol{a} = (1,2,0,-1,0) \qquad \boldsymbol{b} = (0,1,-1,1,0) \qquad \boldsymbol{c} = (0,\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$$

para $\alpha_1 =$, $\alpha_2 =$, $\alpha_3 =$ y $\alpha_4 =$. Descomponer $\boldsymbol{c}$ en suma de dos vectores: uno de ellos combinación lineal de $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$, y el otro ortogonal al subespacio $[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]$.

VI.22.- En el espacio euclidiano $\mathbf{R}^4$, con el producto escalar ordinario, demostrar que los vectores $\boldsymbol{v}_1 = (2,0,-1,-1)$ y $\boldsymbol{v}_2 = (2,2,2,2)$ son ortogonales y hallar otros dos vectores $\boldsymbol{v}_3$ y $\boldsymbol{v}_4$ que con los anteriores formen un conjunto ortogonal l.i.. Encontrar también un vector $\boldsymbol{w}$ ortogonal con $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$, y $\boldsymbol{v}_3$ y comprobar que es combinación lineal de $\boldsymbol{v}_3$ y $\boldsymbol{v}_4$.

VI.23.- Respecto del producto escalar ordinario, ortonormalizar el conjunto que forman los vectores $\boldsymbol{x} = (1,1,0,-1)$, $\boldsymbol{y} = (1,0,0,4)$ y $\boldsymbol{z} = (2,0,1,-1)$.

VI.24.- En el espacio $\mathbf{R}^4$ dotado del producto escalar ordinario, se considera el subespacio vectorial H engendrado por los vectores $\boldsymbol{v}_1 = (1,1,0,0)$ y $\boldsymbol{v}_2 = (0,1,-1,1)$. Determinar una base ortonormal de H y completarla hasta obtener una base de $\mathbf{R}^4$.

VI.25.- Sea $\mathbf{R}^3$ con el producto escalar ordinario. Se pide

a) Averiguar si los vectores $\boldsymbol{v}_1 = (1,1,1)$, $\boldsymbol{v}_2 = (1,2,-3)$ y $\boldsymbol{v}_3 = (5,-4,-1)$ son ortogonales. A partir de ellos, hallar una base ortonormal de $\mathbf{R}^3$.

b) Hallar los vectores normalizados que son ortogonales a los vectores $\boldsymbol{v}_1-\boldsymbol{v}_2$ y $\boldsymbol{v}_1+\boldsymbol{v}_3$.

c) Hallar los vectores ortogonales a $2\boldsymbol{v}_2+\boldsymbol{v}_3$ y que pertenezcan al subespacio vectorial engendrado por $\boldsymbol{v}_1-\boldsymbol{v}_2$ y $\boldsymbol{v}_1+\boldsymbol{v}_3$.

VI.26.- Sea $F = \{\boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^4 \mid x_1+x_2 = x_3+x_4\ ;\ 2x_1-x_2 = x_3\}$ un subespacio vectorial de $\mathbf{R}^4$ sobre

R con el producto escalar ordinario. Se pide

a) Hallar la dimensión y una base de F.

b) Descomponer el vector (1,–1,0,3) en un vector de F y otro de $F^{\perp}$.

c) Hallar una base ortonormal de $\mathbf{R}^4$, ($\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{d}$) tal que $\boldsymbol{b}$, y $\boldsymbol{c}$ pertenezcan a F.

VI.27.-En $\mathbf{R}^3$ se define el producto escalar

$$<(x_1,x_3,x_3),(y_1,y_2,y_3)> = 4x_1y_1+x_2y_2+x_2y_3+x_3y_2+4x_3y_3$$

y se considera el subespacio $[(1,\alpha_1,\alpha_2),(1,\alpha_3,\alpha_4)]$ para $\alpha_1 =$, $\alpha_2 =$, $\alpha_3 =$ y $\alpha_4 =$. Calcular:

a) su expresión matricial respecto de la base canónica y la expresión matricial de la restricción del producto escalar a V en la base ((1,–1,1),(1,1,1)),

b) una base ortonormal de V.

VI.28.- Sea ($\boldsymbol{e}_1$,$\boldsymbol{e}_2$,$\boldsymbol{e}_3$) una base de E, espacio vectorial sobre **R**, que verifica

$$\| \boldsymbol{e}_1 \| = 3 \ , \ \| \boldsymbol{e}_2 \| = 2 \ , \ \| \boldsymbol{e}_3 \| = 1 \ , \ <\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2> = 2 \ , \ <\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3> = 0 \ , \ <\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_3> = 1$$

a) Hallar la expresión matricial del producto escalar respecto de la base ($\boldsymbol{e}_1$,$\boldsymbol{e}_2$,$\boldsymbol{e}_3$) y de la base ($\boldsymbol{e}_1$,$\boldsymbol{e}_1$+$\boldsymbol{e}_2$,$\boldsymbol{e}_1$+$\boldsymbol{e}_2$+$\boldsymbol{e}_3$).

b) Calcular la norma del vector $\boldsymbol{v} = 2\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2-3\boldsymbol{e}_3$.

c) Calcular el ángulo que forman los vectores $\boldsymbol{u}_1 = \boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{e}_2$ y $\boldsymbol{u}_2 = 2\boldsymbol{e}_2-\boldsymbol{e}_3$.

d) Hallar una base ortonormal del subespacio [$\boldsymbol{u}_1$,$\boldsymbol{u}_2$].

VI.29.- Sea f una forma bilineal sobre $\mathbf{R}^3$ de matriz respecto de la base canónica $\begin{pmatrix} 4 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

a) Comprobar que f es un producto escalar.

b) Si $F = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \mid x-y+z = 0 \ , \ y+z = 0\}$, hallar $F^{\perp}$.

c) Hallar una base ortonormal de $\mathbf{R}^3$ respecto de este producto escalar.

VI.30.- Sobre el espacio vectorial de las funciones continuas en el intervalo [–1,1] se define el siguiente producto escalar:

$$<f,g> = \int_{-1}^{1} x^2 f(x)g(x)\ dx$$

Aplicando el método de ortogonalización de Gram-Schmidt al conjunto de polinomios $\{1,x,x^2\}$ hallar una base ortonormal para el espacio de polinomios $\mathbf{R}_2[x]$.

VI.31.- En el espacio vectorial de los polinomios de grado menor o igual que dos $\mathbf{R}_2(x)$ se define el producto escalar $\langle P(x),Q(x)\rangle = \int_{-1}^{1} P(x)Q(x)\,dx$. Se pide

a) Hallar su expresión matricial respecto de la base $(1,x,x^2)$ y también respecto de la base $(1-x,x+x^2,2x-x^2)$.

b) Hallar una base ortonormal de $\mathbf{R}_2(x)$ respecto de este producto escalar.

VI.32.-En el espacio vectorial $\mathbf{R}^4$, hallar las ecuaciones de la proyección ortogonal sobre el subespacio engendrado por los vectores $(0,\alpha_1,\alpha_2,1)$ y $(\alpha_3,\alpha_4,-1,0)$, para $\alpha_1 =$, $\alpha_2 =$, $\alpha_3 =$ y $\alpha_4 =$.

VI.5.- ANGULO DE DOS VECTORES

Sean dos vectores no nulos $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in V$; de acuerdo con la desigualdad de Schwartz (que figura en la Tabla VI.3.1), se verifica que

$$|\langle \boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\rangle| \leq \|\boldsymbol{x}\| \cdot \|\boldsymbol{y}\|$$

cumpliéndose la igualdad cuando $\{\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\}$ es l.d., con lo que

$$-1 \leq \frac{\langle \boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\rangle}{\|\boldsymbol{x}\| \cdot \|\boldsymbol{y}\|} \leq 1$$

por lo que tiene sentido el llamar ***ángulo no orientado*** formado por los vectores $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{y}$, que representaremos por $\angle(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$, al único número real del intervalo $[0,\pi]$ cuyo coseno es

$$\cos \angle(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \frac{\langle \boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\rangle}{\|\boldsymbol{x}\| \cdot \|\boldsymbol{y}\|}$$

Propiedades interesantes que se deducen de esta definición se enuncian en la Tabla VI.5.1

TABLA VI.5.1

Propiedades del ángulo no orientado

1) $\angle(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \angle(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x})$

2) $\angle(\alpha\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \begin{cases} \angle(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) & \text{si } \alpha > 0 \\ \pi - \angle(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) & \text{si } \alpha < 0 \end{cases}$

3) $\angle(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = 0$ equivale a $\boldsymbol{y} = \alpha\boldsymbol{x}$, con $\alpha > 0$

$\angle(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \pi$ equivale a $\boldsymbol{y} = \alpha\boldsymbol{x}$, con $\alpha < 0$

$\angle(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \pi/2$ equivale a $\boldsymbol{x} \perp \boldsymbol{y}$

4) $\langle \boldsymbol{x},\boldsymbol{y} \rangle = \| \boldsymbol{x} \| \cdot \| \boldsymbol{y} \| \cdot \cos \angle(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$

5) $\| \mathrm{pr}_{\boldsymbol{y}}(\boldsymbol{x}) \| = \| \boldsymbol{x} \| \cdot |\cos \angle(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})|$

6) $\boldsymbol{x} \perp \boldsymbol{y}$ equivale a $\mathrm{pr}_{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{x}$

Demostraciones:

1) Directamente de la definición de producto escalar

$$\cos \angle(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \frac{\langle \boldsymbol{x},\boldsymbol{y} \rangle}{\| \boldsymbol{x} \| \cdot \| \boldsymbol{y} \|} = \frac{\langle \boldsymbol{y},\boldsymbol{x} \rangle}{\| \boldsymbol{y} \| \cdot \| \boldsymbol{x} \|} = \cos \angle(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x}) \Rightarrow \angle(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \angle(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x})$$

2) Por las propiedades del producto escalar y de la norma tenemos

$$\cos \angle(\alpha\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \frac{\langle \alpha\boldsymbol{x},\boldsymbol{y} \rangle}{\| \alpha\boldsymbol{x} \| \cdot \| \boldsymbol{y} \|} = \frac{\alpha \langle \boldsymbol{x},\boldsymbol{y} \rangle}{|\alpha| \cdot \| \boldsymbol{x} \| \cdot \| \boldsymbol{y} \|}$$

si $\alpha > 0$, es igual a

$$\frac{\langle \boldsymbol{x},\boldsymbol{y} \rangle}{\| \boldsymbol{x} \| \cdot \| \boldsymbol{y} \|} = \cos \angle(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \Rightarrow \angle(\alpha\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \angle(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$$

y si $\alpha < 0$, es igual a

$$-\frac{\langle \boldsymbol{x},\boldsymbol{y} \rangle}{\| \boldsymbol{x} \| \cdot \| \boldsymbol{y} \|} = -\cos \angle(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \Rightarrow \angle(\alpha\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \pi - \angle(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$$

3) Usando la desigualdad de Schwartz, podemos escribir

$$\angle(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = 0 \Leftrightarrow \frac{\langle \boldsymbol{x},\boldsymbol{y} \rangle}{\| \boldsymbol{x} \| \cdot \| \boldsymbol{y} \|} = 1 \Leftrightarrow \langle \boldsymbol{x},\boldsymbol{y} \rangle = \| \boldsymbol{x} \| \cdot \| \boldsymbol{y} \| \wedge \{\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\} \text{ l.d.} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \langle \boldsymbol{x},\boldsymbol{y} \rangle > 0 \wedge \boldsymbol{y} = \alpha\boldsymbol{x} \Rightarrow \langle \alpha\boldsymbol{x},\boldsymbol{x} \rangle > 0 \Rightarrow \alpha \langle \boldsymbol{x},\boldsymbol{x} \rangle > 0 \Rightarrow \alpha > 0$$

y análogamente para los otros casos.

4) Se obtiene inmediatamente de la definición de ángulo. Esta propiedad se utiliza en matemática elemental para definir el producto escalar.

5) De acuerdo con el resultado obtenido para la proyección de un vector sobre otro tenemos:

$$\| \langle \boldsymbol{x},\boldsymbol{y} \rangle \| \quad |\langle \boldsymbol{x},\boldsymbol{y} \rangle| \quad |\langle \boldsymbol{x},\boldsymbol{y} \rangle| \quad |\langle \boldsymbol{x},\boldsymbol{y} \rangle|$$

$$\| \mathrm{pr}_{\boldsymbol{y}}(\boldsymbol{x}) \| = \left\| \frac{}{<\boldsymbol{y},\boldsymbol{y}>} \boldsymbol{y} \right\| = \frac{}{<\boldsymbol{y},\boldsymbol{y}>} \| \boldsymbol{y} \| = \frac{}{\| \boldsymbol{y} \|^2} \| \boldsymbol{y} \| = \frac{}{\| \boldsymbol{y} \|} =$$

$$= \| \boldsymbol{x} \| \frac{|<\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}>|}{\| \boldsymbol{x} \| \cdot \| \boldsymbol{y} \|} = \| \boldsymbol{x} \| \cdot |\cos \angle(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})|$$

6) Si $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{y}$ son ortogonales entonces

$$\mathrm{pr}_{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{x} \iff \frac{<\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y},\boldsymbol{x}>}{<\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}>} \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x} \iff <\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y},\boldsymbol{x}> = <\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}> \iff <\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}> = 0 \implies \boldsymbol{x} \perp \boldsymbol{y}$$

Ejercicios

VI.33.- Sea $f : \mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}$ definida por $f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = 2x_1y_1+x_1y_2+x_2y_1+x_2y_2$. Se pide

a) ¿Es un producto escalar en $\mathbf{R}^2$?.

b) Hallar $<\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}>$, $<\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}>$, $<\boldsymbol{y},\boldsymbol{y}>$ siendo $\boldsymbol{x} = (2,-2)$ $\boldsymbol{y} = (4,-3)$.

c) Comprobar que $<\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}>^2 \leq <\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}> \cdot <\boldsymbol{y},\boldsymbol{y}>$.

d) Comprobar $\sqrt{<\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y},\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}>} \leq \sqrt{<\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}>} + \sqrt{<\boldsymbol{y},\boldsymbol{y}>}$.

e) Si $\boldsymbol{x} = (2,-2)$ ¿cuál debe ser el vector $\boldsymbol{y}$ para que las desigualdades de los apartados c) y d) se conviertan en igualdades?.

f) Deducir de la expresión establecida en el apartado c) que $-1 \leq \cos(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \leq 1$. Indicar en que casos el coseno de dos vectores es igual a -1, 0, y 1.

g) Dado $\boldsymbol{x} = (2,-2)$, hallar los vectores normalizados que le son ortogonales.

h) Indicar si la base canónica de $\mathbf{R}^2$ es ortonormal para este producto escalar.

VI.34.- Calcular los ángulos y las normas de los vectores que determinan los lados del triángulo de vértices $(1,\alpha_1)$, (3,1) y $(1,\alpha_2)$. Lo mismo para el triángulo de vértices $(1,-4,\alpha_3)$), $(-2,1,\alpha_4)$ y (5,1,3), para $\alpha_1 =$, $\alpha_2 =$, $\alpha_3 =$, $\alpha_4 =$.

VI.6.- FORMAS *n*–LINEALES Y DETERMINANTES

Sea V e.v.s. K, de característica distinta de 2; una ***forma n-lineal*** es una aplicación

$$\begin{array}{rcl} f: & V^n & \longrightarrow K \\ & (\boldsymbol{x}_1,\ldots,\boldsymbol{x}_n) & \longrightarrow f(\boldsymbol{x}_1,\ldots,\boldsymbol{x}_n) \end{array}$$

tal que sea lineal respecto de todos los vectores componentes de la n-pla, es decir, para todo subíndice $1 \leq i \leq n$

$$f(\boldsymbol{x}_1,\ldots,\alpha\boldsymbol{x}_i,\ldots,\boldsymbol{x}_n) = \alpha f(\boldsymbol{x}_1,\ldots,\boldsymbol{x}_i,\ldots,\boldsymbol{x}_n)$$
$$\wedge$$
$$f(\boldsymbol{x}_1,\ldots,\boldsymbol{x}_i+\boldsymbol{x}_i',\ldots,\boldsymbol{x}_n) = f(\boldsymbol{x}_1,\ldots,\boldsymbol{x}_i,\ldots,\boldsymbol{x}_n)+ f(\boldsymbol{x}_1,\ldots,\boldsymbol{x}_i',\ldots,\boldsymbol{x}_n))$$

Supongamos que V es de dimensión n y $(\boldsymbol{e}_1,\ldots,\boldsymbol{e}_n)$ es una base de V; si los vectores $\boldsymbol{x}_i$ son

$$\begin{aligned}\boldsymbol{x}_1 &= x_{11}\boldsymbol{e}_1+\ldots+x_{n1}\boldsymbol{e}_n\\ &\cdots\cdots\cdots\\ \boldsymbol{x}_n &= x_{1n}\boldsymbol{e}_1+\ldots+x_{nn}\boldsymbol{e}_n\end{aligned}$$

aplicando las igualdades que definen a la forma n-lineal es fácil obtener, por inducción, que

$$f(\boldsymbol{x}_1,\ldots,\boldsymbol{x}_n) = \sum_{\substack{1\le i_1\le n\\ \cdots\\ 1\le i_n\le n}} x_{i_1 1}\ldots x_{i_n n}\, f(\boldsymbol{e}_{i_1},\ldots,\boldsymbol{e}_{i_n})$$

Una forma n-lineal es alternada si y sólo si para cualesquiera $1 \le i,j \le n$, $i \ne j$ se verifica

$$f(\boldsymbol{x}_1,\ldots,\boldsymbol{x}_i,\ldots,\boldsymbol{x}_j,\ldots,\boldsymbol{x}_n) = -f(\boldsymbol{x}_1,\ldots,\boldsymbol{x}_j,\ldots,\boldsymbol{x}_i,\ldots,\boldsymbol{x}_n)$$

es decir, es una forma n-lineal tal que aplicada a dos n-plas que se diferencien en una permutación de un par de vectores, cambia de signo. Las propiedades más interesantes de las formas n-lineales alternadas se exponen en la Tabla VI.6.1

TABLA VI.6.1

Propiedades de las formas n-lineales alternadas

1) Si $(i_1,\ldots,i_n)$ es una permutación de $(1,\ldots,n)$ de signatura $s(i)$

$$f(\boldsymbol{x}_{i_1},\ldots,\boldsymbol{x}_{i_n}) = s(i)\, f(\boldsymbol{x}_1,\ldots,\boldsymbol{x}_n)$$

2) f alternada equivale a que $(\forall i\in[1,n])\ (f(\boldsymbol{x}_1,\ldots,\boldsymbol{x}_i,\ldots,\boldsymbol{x}_i,\ldots,\boldsymbol{x}_n) = 0)$

3) Si $(\boldsymbol{e}_1,\ldots,\boldsymbol{e}_n)$ es una base de V, entonces

$$f(\boldsymbol{x}_1,\ldots,\boldsymbol{x}_n) = \Big(\sum_{\substack{(i_1,\ldots,i_n)\text{ permutación de}\\ (1,\ldots,n)\text{ de signatura }s(i)}} s(i)\, x_{i_1 1}\ldots x_{i_n n}\Big)\, f(\boldsymbol{e}_1,\ldots,\boldsymbol{e}_n)$$

4) $(\boldsymbol{e}_1,\ldots,\boldsymbol{e}_n)$ base de V; $f(\boldsymbol{e}_1,\ldots,\boldsymbol{e}_n) = 0$ implican $f = 0$

5) Si f no es la aplicación nula, entonces $f(\boldsymbol{x}_1,\ldots,\boldsymbol{x}_n) = 0$ equivale a $\{\boldsymbol{x}_1,\ldots,\boldsymbol{x}_n\}$ l.d.

Demostraciones:

1) Es inmediata teniendo en cuenta que cada inversión de dos vectores cambia el signo de la imagen, luego si la permutación $(i_1,...,i_n)$ tiene σ inversiones

$$f(\boldsymbol{x}_{i_1},\ldots,\boldsymbol{x}_{i_n}) = (-1)^{\sigma} f(\boldsymbol{x}_1,\ldots,\boldsymbol{x}_n) = s(i)\, f(\boldsymbol{x}_1,\ldots,\boldsymbol{x}_n)$$

2) Si f es alternada la imagen de cualquier n-pla con dos vectores iguales es 0, ya que si f es alternada

$$f(\boldsymbol{x}_1,\ldots,\boldsymbol{x}_i,\ldots,\boldsymbol{x}_j,\ldots,\boldsymbol{x}_n) = -f(\boldsymbol{x}_1,\ldots,\boldsymbol{x}_j,\ldots,\boldsymbol{x}_i,\ldots,\boldsymbol{x}_n)$$

y si $\boldsymbol{x}_i = \boldsymbol{x}_j$, entonces

$$f(\boldsymbol{x}_1,\ldots,\boldsymbol{x}_i,\ldots,\boldsymbol{x}_i,\ldots,\boldsymbol{x}_n) = -f(\boldsymbol{x}_1,\ldots,\boldsymbol{x}_i,\ldots,\boldsymbol{x}_i,\ldots,\boldsymbol{x}_n)$$

por lo que $f(\boldsymbol{x}_1,...,\boldsymbol{x}_i,...,\boldsymbol{x}_i,...,\boldsymbol{x}_n) = 0$.

Recíprocamente, si la imagen de cualquier n-pla con dos vectores iguales es 0, entonces la forma es alternada

$$\begin{aligned} 0 = f(\boldsymbol{x}_1,\ldots,\boldsymbol{x}_i+\boldsymbol{x}_j,\ldots,\boldsymbol{x}_j+\boldsymbol{x}_i,\ldots,\boldsymbol{x}_n) = \\ = f(\boldsymbol{x}_1,\ldots,\boldsymbol{x}_i,\ldots,\boldsymbol{x}_j,\ldots,\boldsymbol{x}_n)+f(\boldsymbol{x}_1,\ldots,\boldsymbol{x}_i,\ldots,\boldsymbol{x}_i,\ldots,\boldsymbol{x}_n)+ \\ +f(\boldsymbol{x}_1,\ldots,\boldsymbol{x}_j,\ldots,\boldsymbol{x}_j,\ldots,\boldsymbol{x}_n)+f(\boldsymbol{x}_1,\ldots,\boldsymbol{x}_j,\ldots,\boldsymbol{x}_i,\ldots,\boldsymbol{x}_n) = \\ = f(\boldsymbol{x}_1,\ldots,\boldsymbol{x}_i,\ldots,\boldsymbol{x}_j,\ldots,\boldsymbol{x}_n)+f(\boldsymbol{x}_1,\ldots,\boldsymbol{x}_j,\ldots,\boldsymbol{x}_i,\ldots,\boldsymbol{x}_n) \quad \Rightarrow \\ \Rightarrow \quad f(\boldsymbol{x}_1,\ldots,\boldsymbol{x}_j,\ldots,\boldsymbol{x}_i,\ldots,\boldsymbol{x}_n) = -f(\boldsymbol{x}_1,\ldots,\boldsymbol{x}_i,\ldots,\boldsymbol{x}_j,\ldots,\boldsymbol{x}_n) \end{aligned}$$

3) La expresión general de la imagen de una n-pla en una forma n-lineal, conocidas las componentes de los vectores, que hemos obtenido antes, es una suma de n^n sumandos, cada uno de ellos formado por un producto de las componentes por la imagen de una n-pla formada por vectores de la base; en el caso de forma alternada, si en ella existen dos vectores iguales la imagen es 0, el sumando es 0, quedando $n!$ sumandos no nulos correspondientes a las $n!$ permutaciones sin repetición de los vectores $(\boldsymbol{e}_1,\ldots,\boldsymbol{e}_n)$. El resultado es una suma de $n!$ sumandos

$$f(\boldsymbol{x}_1,\ldots,\boldsymbol{x}_n) = \sum_{(i_1,\ldots,i_n) \text{ permutación de } (1,\ldots,n)} x_{i_1 1}\ldots x_{i_n n}\, f(\boldsymbol{e}_{i_1},\ldots,\boldsymbol{e}_{i_n})$$

extendida a todas las permutaciones de $\{1,...,n\}$. Además, según la propiedad 1), tendremos

$$f(\boldsymbol{e}_{i_1},\ldots,\boldsymbol{e}_{i_n}) = s(i)\, f(\boldsymbol{e}_1,\ldots,\boldsymbol{e}_n)$$

luego

$$f(\boldsymbol{x}_1,\ldots,\boldsymbol{x}_n) = \sum_{\substack{(i_1,\ldots,i_n) \text{ permutación de} \\ (1,\ldots,n) \text{ de signatura } s(i)}} s(i)\, x_{i_1 1}\ldots x_{i_n n}\, f(\boldsymbol{e}_1,\ldots,\boldsymbol{e}_n)$$

4) A partir de 3), pues si $f(\boldsymbol{e}_1,\ldots,\boldsymbol{e}_n) = 0$, entonces la imagen de cualquier n-pla es 0.

5) Supongamos que f no es la aplicación nula y que

$$f(\boldsymbol{x}_1,\ldots,\boldsymbol{x}_n) = 0$$

Si $\{\boldsymbol{x}_1,\ldots,\boldsymbol{x}_n\}$ l.i., entonces $(\boldsymbol{x}_1,\ldots,\boldsymbol{x}_n)$ es una base de V y según la propiedad anterior f sería la aplicación nula. Recíprocamente, si $\{\boldsymbol{x}_1,\ldots,\boldsymbol{x}_n\}$ l.d. existe un vector $\boldsymbol{x}_i$ que será combinación lineal de los demás

$$\boldsymbol{x}_i = \alpha_1\boldsymbol{x}_1+\ldots+\alpha_{i-1}\boldsymbol{x}_{i-1}+\alpha_{i+1}\boldsymbol{x}_{i+1}+\ldots+\alpha_n\boldsymbol{x}_n$$

y al ser f n-lineal alternada, tendremos

$$\begin{aligned} f(\boldsymbol{x}_1,\ldots,\boldsymbol{x}_i,\ldots,\boldsymbol{x}_n) &= f(\boldsymbol{x}_1,\ldots,\alpha_1\boldsymbol{x}_1+\ldots+\alpha_{i-1}\boldsymbol{x}_{i-1}+\alpha_{i+1}\boldsymbol{x}_{i+1}+\ldots+\alpha_n\boldsymbol{x}_n,\ldots,\boldsymbol{x}_n) = \\ &= \alpha_1 f(\boldsymbol{x}_1,\ldots,\boldsymbol{x}_1,\ldots,\boldsymbol{x}_n)+\ldots+\alpha_{i-1}f(\boldsymbol{x}_1,\ldots,\boldsymbol{x}_{i-1},\boldsymbol{x}_{i-1},\ldots,\boldsymbol{x}_n) \\ &\quad +\alpha_{i+1}f(\boldsymbol{x}_1,\ldots,\boldsymbol{x}_{i+1},\boldsymbol{x}_{i+1},\ldots,\boldsymbol{x}_n)+\ldots+\alpha_n f(\boldsymbol{x}_1,\ldots,\boldsymbol{x}_n,\ldots,\boldsymbol{x}_n) = 0 \end{aligned}$$

Ejemplo VI.6.1

En el espacio vectorial K^3 sobre K referido a una base $(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3)$ sean los vectores

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x}_1 &= x_{11}\boldsymbol{e}_1+x_{21}\boldsymbol{e}_2+x_{31}\boldsymbol{e}_3 \\ \boldsymbol{x}_2 &= x_{12}\boldsymbol{e}_1+x_{22}\boldsymbol{e}_2+x_{32}\boldsymbol{e}_3 \\ \boldsymbol{x}_3 &= x_{13}\boldsymbol{e}_1+x_{23}\boldsymbol{e}_2+x_{33}\boldsymbol{e}_3 \end{aligned}$$

La imagen de la terna $(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\boldsymbol{x}_3)$ por una forma n-lineal alternada f sobre K^3, referida a la base dada, teniendo en cuenta que las permutaciones de $\{1,2,3\}$ son

Permutación	Inversiones	Signatura
1,2,3	0	+1
1,3,2	1	−1
2,1,3	1	−1
2,3,1	2	+1
3,1,2	2	+1
3,2,1	3	−1

será

$$\begin{aligned} f(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\boldsymbol{x}_3) &= (+1)x_{11}x_{22}x_{33}\,f(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3)+(-1)x_{11}x_{32}x_{23}\,f(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3)+ \\ &\quad +(-1)x_{21}x_{12}x_{33}\,f(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3)+(+1)x_{21}x_{32}x_{13}\,f(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3)+ \\ &\quad +(+1)x_{31}x_{12}x_{23}\,f(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3)+(-1)x_{31}x_{22}x_{13}\,f(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3) = \\ &= (x_{11}x_{22}x_{33}-x_{11}x_{32}x_{23}-x_{21}x_{12}x_{33}+x_{21}x_{32}x_{13}+x_{31}x_{12}x_{23}-x_{31}x_{22}x_{13})f(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3) \end{aligned}$$

Consideremos la forma n-lineal alternada sobre V tal que la imagen de la n-pla de la base $(\boldsymbol{e}_1,\ldots,\boldsymbol{e}_n)$ es igual a 1. Esta forma la denominaremos ***determinante*** en la base $(\boldsymbol{e}_1,\ldots,\boldsymbol{e}_n)$ y la denotaremos por el símbolo det, es decir,

$$\det(\boldsymbol{e}_1,\ldots,\boldsymbol{e}_n) = 1$$

Llamaremos ***determinante de n vectores*** $\boldsymbol{x}_1,...,\boldsymbol{x}_n \in V$, referido a la base $(\boldsymbol{e}_1,\ldots,\boldsymbol{e}_n)$ a la imagen de la n-pla $(\boldsymbol{x}_1,...,\boldsymbol{x}_n)$ por la forma determinante, que será igual a

$$\det(\boldsymbol{x}_1,...,\boldsymbol{x}_n) = \sum_{\substack{(i_1,..,i_n) \text{ permutación de} \\ (1,..,n) \text{ de signatura } s(i)}} s(i)\, x_{i_1 1}...x_{i_n n}$$

Ejemplo VI.6.2

En el espacio vectorial K^3 sobre K referido a una base $(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3)$ para los vectores

$$\begin{aligned}\boldsymbol{x}_1 &= x_{11}\boldsymbol{e}_1+x_{21}\boldsymbol{e}_2+x_{31}\boldsymbol{e}_3\\ \boldsymbol{x}_2 &= x_{12}\boldsymbol{e}_1+x_{22}\boldsymbol{e}_2+x_{32}\boldsymbol{e}_3\\ \boldsymbol{x}_3 &= x_{13}\boldsymbol{e}_1+x_{23}\boldsymbol{e}_2+x_{33}\boldsymbol{e}_3\end{aligned}$$

tendremos que, según el ejemplo anterior

$$\det(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\boldsymbol{x}_3) = (x_{11}x_{22}x_{33}-x_{11}x_{32}x_{23}-x_{21}x_{12}x_{33}+x_{21}x_{32}x_{13}+x_{31}x_{12}x_{23}-x_{31}x_{22}x_{13})$$

y así, para $\mathbf{R}^3$ referido a la base canónica tendremos, por ejemplo, que

$$\begin{aligned}&\det((1,-1,0),(2,3,5),(-2,4,-4)) =\\ &\qquad = 1\cdot3\cdot(-4)+(-1)\cdot5\cdot(-2)+0\cdot2\cdot4-1\cdot5\cdot4-(-1)\cdot2\cdot(-4)-0\cdot3\cdot(-2) = -30\end{aligned}$$

Llamaremos ***determinante de una matriz cuadrada*** $\mathbf{A}$ sobre K al determinante de los vectores columna $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,..,\boldsymbol{a}_n$, como vectores de K^n, e.v.s. K, referido a la base canónica; lo notaremos por $\det(\mathbf{A})$ o bien por $|\mathbf{A}|$ y, en el caso de que la matriz esté explícitamente dada, por

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \,.\, a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \,.\, a_{2n} \\ \cdots\cdots\cdots \\ a_{n1} & a_{n2} \,.\, a_{nn} \end{vmatrix}$$

con lo que

$$\det(\boldsymbol{a}_1,...,\boldsymbol{a}_n) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \,.\, a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \,.\, a_{2n} \\ \cdots\cdots\cdots \\ a_{n1} & a_{n2} \,.\, a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{\substack{(i_1,..,i_n) \text{ permutación de} \\ (1,..,n) \text{ de signatura } s(i)}} s(i)\, a_{i_1 1}...a_{i_n n}$$

y el determinante de una matriz cuadrada es igual a la suma de los $n!$ productos que pueden formarse con n elementos de la matriz tomando, de todas las maneras posibles, uno de cada fila y uno de cada columna; cada sumando tiene un signo igual a $s(i)$, signatura de la permutación de subíndices de fila, supuestos ordenados los factores por los subíndices de columna.

Ejemplo VI.6.3

El determinante de una matriz de orden 1 será igual al único elemento que la forma

$$|a_{11}| = a_{11}$$

Para el determinante de una matriz cuadrada de orden 2 tendremos

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = +a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12}$$

es decir, producto de los elementos de la que llamaremos diagonal principal, menos el producto de los elementos de la diagonal secundaria. Para una matriz de orden tres es

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}+a_{21}a_{32}a_{13}+a_{31}a_{12}a_{23}-a_{11}a_{32}a_{23}-a_{21}a_{12}a_{33}-a_{31}a_{22}a_{13}$$

por tanto la suma de los productos de los elementos de la diagonal principal y sus dos paralelas, menos la suma de los productos de los elementos de la diagonal secundaria y sus dos paralelas. Esta regla práctica de obtención de los determinantes de las matrices cuadradas de órdenes 2 y 3 se denomina ***regla de Sarrus***. Para matrices de orden superior a tres el cálculo de su determinante a partir de la definición es muy poco práctico, excepto en los casos particulares siguientes:

Matriz diagonal

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & .. & 0 \\ 0 & a_{22} & .. & 0 \\ & & \cdots & \\ 0 & 0 & .. & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}...a_{nn}$$

dado que el único sumando no nulo se obtiene con el elemento a_{11} de la primera fila, acompañado del elemento a_{22} de la segunda,..., y del elemento a_{nn} de la última fila. En particular, para la matriz unidad **I** será det(**I**) = 1.

Matrices triangulares

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & .. & 0 \\ a_{21} & a_{22} & .. & 0 \\ \cdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & .. & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & .. & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & .. & a_{2n} \\ & & \cdots & \\ 0 & 0 & .. & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}...a_{nn}$$

dado que el único sumando no nulo se obtiene con el elemento a_{11} de la primera fila, acompañado del elemento a_{22} de la segunda, ya que no puede formar producto con el a_{21} por ser de su misma columna,.. y del elemento a_{nn} de la última fila. Análogamente

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & .. & a_{1n} \\ ..... & & & \\ 0 & a_{n-1\,2} & .. & a_{n-1n} \\ a_{n1} & a_{n2} & .. & a_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^{n(n-1)/2} a_{1n}...a_{n-12}\, a_{n1}$$

dado que el único sumando distinto de 0 tiene como permutación de subíndices de fila la $(n,n-1,...,1)$ que tiene $n(n-1)/2$ inversiones.

Podríamos haber definido como determinante de una matriz cuadrada el determinante de sus vectores fila, aunque de hecho es lo mismo puesto que los determinantes de una matriz y su matriz transpuesta son iguales

$$\det(\mathbf{A}) = \det(\mathbf{A}^t)$$

En efecto, si a los elementos de $\mathbf{A}$ les llamamos a_{ij} y a'_{ij} a los de $\mathbf{A}^t$, tenemos que por definición de matriz transpuesta,

$$a_{ji} = a'_{ij}$$

luego según la definición de determinante y la conmutatividad del producto en K, reordenando los factores según el subíndice de fila, es decir, componiendo con la permutación inversa i^{-1}

$$\det(\mathbf{A}) = \sum_{\substack{(i_1,...,i_n)\text{ permutación de} \\ (1,..,n)\text{ de signatura } s(i)}} s(i)\, a_{i_1 1}...a_{i_n n} = \sum_{\substack{(i_1,...,i_n)\text{ permutación de} \\ (1,..,n)\text{ de signatura } s(i)}} s(i)\, a_{1 i_1^{-1}}...a_{n i_n^{-1}} =$$

$$= \sum_{\substack{(i_1^{-1},...,i_n^{-1})\text{ permutación de} \\ (1,..,n)\text{ de signaturas } (i^{-1})}} s(i^{-1})\, a_{i_1^{-1}\,1}...a_{i_n^{-1}\,n} = \det(\mathbf{A}^t)$$

dado que, una permutación y su inversa tienen la misma signatura.

A partir de esta propiedad, cualquier resultado cierto para el determinante de los vectores columna de una matriz será válido para el determinante de los vectores fila, por lo que en las siguientes propiedades de los determinantes se hablará de líneas, refiriéndose tanto a columnas como a filas. Estas propiedades se enuncian en la Tabla VI.6.2

TABLA VI.6.2

Propiedades de los determinantes

1) $\det(\mathbf{A}) \neq 0$ equivale a que $\mathbf{A}$ es regular

2) Un determinante con dos líneas paralelas iguales es 0

3) Un determinante con dos líneas paralelas proporcionales es 0

4) Un determinante con los elementos de una línea nulos es 0

5) $\det(\boldsymbol{x}_1,...,\boldsymbol{x}_i+\boldsymbol{x}'_i,...,\boldsymbol{x}_n) = \det(\boldsymbol{x}_1,...,\boldsymbol{x}_i,...,\boldsymbol{x}_n)+\det(\boldsymbol{x}_1,...,\boldsymbol{x}'_i,...,\boldsymbol{x}_n)$

6) $\det(\boldsymbol{x}_1,...,\alpha\boldsymbol{x}_i,...,\boldsymbol{x}_n) = \alpha\ \det(\boldsymbol{x}_1,...,\boldsymbol{x}_i,...,\boldsymbol{x}_n)$

7) Si en un determinante se permutan dos líneas paralelas, el determinante cambia de signo

8) Si a una línea se le suma otra paralela multiplicada por un escalar no nulo, el determinante no varía.

9) Si **A** y **B** son matrices cuadradas, entonces

$$\det(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}) = \det(\mathbf{B})\cdot\det(\mathbf{A})$$

10) Si **A** es inversible, entonces $\det(\mathbf{A}^{-1}) = 1/\det(\mathbf{A})$.

Demostraciones:

1) Por propiedades de las formas *n*-lineales alternadas: la imagen de una *n*-pla de vectores l.d. es igual a 0 y recíprocamente, si la forma *n*-lineal no es la forma nula (y det no lo es) si la imagen de una *n*-pla es 0, entonces los vectores forman un conjunto l.d..

Las propiedades 2) a 7) son consecuencia de 1) y de que el determinante es una forma *n*-lineal alternada, por lo que el determinante conserva la suma y el producto externo respecto de cualquier elemento de la *n*-pla (propiedades 5) y 6)) y que la imagen cambia de signo si intercambiamos dos vectores (propiedad 7)).

8) Razonando con los vectores columna, p.ej., tendremos, según las propiedades anteriores

$$\det(\boldsymbol{x}_1,...,\boldsymbol{x}_i+\alpha\boldsymbol{x}_j,...,\boldsymbol{x}_j,...,\boldsymbol{x}_n) = \det(\boldsymbol{x}_1,...,\boldsymbol{x}_i,...,\boldsymbol{x}_j,...,\boldsymbol{x}_n)+\det(\boldsymbol{x}_1,...,\alpha\boldsymbol{x}_j,...,\boldsymbol{x}_j,...,\boldsymbol{x}_n) =$$
$$= \det(\boldsymbol{x}_1,...,\boldsymbol{x}_i,...,\boldsymbol{x}_n)$$

9) En efecto, de acuerdo con el resultado de un producto de matrices

$$\mathbf{AB} = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21}+..+a_{1n}b_{n1} & a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22}+..+a_{1n}b_{n2} & .. & a_{11}b_{1p}+a_{12}b_{2p}+..+a_{1n}b_{np} \\ a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21}+..+a_{2n}b_{n1} & a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22}+..+a_{2n}b_{n2} & .. & a_{21}b_{1p}+a_{22}b_{2p}+..+a_{2n}b_{np} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1}b_{11}+a_{m2}b_{21}+..+a_{mn}b_{n1} & a_{m1}b_{12}+a_{m2}b_{22}+..+a_{mn}b_{n2} & .. & a_{m1}b_{1p}+a_{m2}b_{2p}+..+a_{mn}b_{np} \end{pmatrix}$$

tenemos que los vectores fila $\boldsymbol{p}_1,...,\boldsymbol{p}_n$ de **AB** son combinaciones de los vectores fila $\boldsymbol{b}_1,...,\boldsymbol{b}_n$ de **B**, ya que para $i = 1,...,n$ es

$$\boldsymbol{p}_i = a_{i1}\boldsymbol{b}_1+a_{i2}\boldsymbol{b}_2+...+a_{in}\boldsymbol{b}_n$$

Como el determinante de una matriz cuadrada es el determinante de sus vectores fila, de acuerdo con las propiedades de las formas *n*-lineales alternadas, tenemos

$$\det(\mathbf{AB}) = \det(\boldsymbol{p}_1,...,\boldsymbol{p}_n) = \Big(\sum_{\substack{(i1,..,i_n)\text{ permutación de}\\(1,..,n)\text{ de signatura }s(i)}} s(i)\, a_{i_1 1}...a_{i_n n}\Big)\ \det(\boldsymbol{b}_1,...,\boldsymbol{b}_n) = \det(\mathbf{A})\cdot\det(\mathbf{B})$$

10) Como por definición de matriz inversa es $\mathbf{A}\cdot\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{I}$, teniendo en cuenta la propiedad anterior y que el determinante de la matriz unidad es 1, tendremos

$$\det(\mathbf{A}\cdot\mathbf{A}^{-1}) = 1 \ \Rightarrow\ \det(\mathbf{A})\cdot\det(\mathbf{A}^{-1}) = 1 \ \Rightarrow\ \det(\mathbf{A}^{-1}) = 1/\det(\mathbf{A})$$

Como consecuencia inmediata de estas propiedades se deduce que las transformaciones elementales aplicadas a la matriz de un determinante la convierten en otra, cuyo determinante respecto al primero

a) cambia de signo si se permutan dos filas (o dos columnas),

b) si se multiplica una fila (o una columna) por un escalar no nulo, el determinante queda multiplicado por el escalar,

c) no varía si se suma una fila (o columna) otra fila (o columna) multiplicada por un escalar no nulo.

Estas propiedades nos permiten construir un método para el cálculo de un determinante consistente en aplicar sucesivas transformaciones elementales sobre su matriz hasta reducirla a una matriz triangular, cuyo determinante se calcula de forma inmediata. Se denomina ***método de Gauss***, es de rápida aplicación y fácilmente programable.

Ejemplo VI.6.4

El método de Gauss permite obtener el valor del siguiente determinante

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 & 2\\ 2 & 1 & 3 & 4 & 2\\ 3 & -1 & 1 & 5 & 3\\ -2 & -5 & -1 & 3 & -5\\ 4 & 3 & 2 & -1 & -4 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 & 2\\ 0 & 0 & 1 & 2 & 2\\ 3 & -1 & 1 & 5 & 3\\ -2 & -5 & -1 & 3 & -5\\ 4 & 3 & 2 & -1 & -4 \end{vmatrix} = \frac{-1}{2}\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 & 2\\ 0 & 0 & 1 & 2 & 2\\ 0 & -5 & -7 & -2 & 0\\ 0 & -4 & 2 & 7 & -3\\ 0 & 1 & -4 & -9 & -8 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 & 4 & 2\\ 0 & 1 & 0 & 2 & 2\\ 0 & -7 & -5 & -2 & 0\\ 0 & 2 & -4 & 7 & -3\\ 0 & -4 & 1 & -9 & -8 \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 & 4 & 2\\ 0 & 1 & 0 & 2 & 2\\ 0 & 0 & -5 & 12 & 14\\ 0 & 0 & -4 & 3 & -7\\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{2\cdot5\cdot5}\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 & 4 & 2\\ 0 & 1 & 0 & 2 & 2\\ 0 & 0 & -5 & 12 & 14\\ 0 & 0 & 0 & -33 & -91\\ 0 & 0 & 0 & 7 & 14 \end{vmatrix} = \frac{1}{2\cdot5\cdot5\cdot33}\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 & 4 & 2\\ 0 & 1 & 0 & 2 & 2\\ 0 & 0 & -5 & 12 & 14\\ 0 & 0 & 0 & -33 & -91\\ 0 & 0 & 0 & 0 & -175 \end{vmatrix} = -35$$

Si en una matriz cuadrada **A** de orden n se suprimen $n–h$ filas e igual número de columnas se obtiene una matriz de orden h cuyo determinante llamaremos ***menor*** de **A**. Para determinarlo basta conocer los subíndices $1 \le c_1 <...< c_h \le n$ de las columnas y los subíndices $1 \le f_1 <...< f_h \le n$ de las filas que lo forman. Si en la matriz **A** suprimimos las columnas $c_1,...,c_h$, y las filas $f_1,...,f_h$ se obtiene otra matriz cuadrada cuyo determinante se denomina ***menor complementario*** del anterior. Un menor se dice que es de ***clase par*** cuando la suma de los subíndices de las columnas y filas que lo forman

$$\sigma = c_1+..+c_p+f_1+..+f_p$$

es par, y análogamente se define la clase impar. Llamaremos ***signatura del menor*** a $(-1)^\sigma$, es decir, al resultado de elevar -1 a la suma de los índices de sus filas y de sus columnas, por lo que la signatura de un menor de clase par es 1 y -1 si es de clase impar. La signatura de un menor y la de su menor complementario es la misma, pues la suma de los subíndices de fila más los de columna de un menor más los subíndices de fila y columna de su menor complementario es igual a la suma de todos los subíndices de fila y columna de la matriz, es decir $2(1+2+...+n)$, que es un número par. Llamaremos ***adjunto*** del menor a su signatura por su menor complementario.

Ejemplo VI.6.5

En la matriz

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 2 & 7 \\ 3 & 1 & 0 & -1 & 9 \\ 4 & 2 & 0 & 0 & 6 \\ 5 & 3 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 5 & 2 & 8 \end{pmatrix}$$

los subíndices $f_1 = 1$, $f_2 = 2$, $c_1 = 2$, $c_2 = 4$ determinan el menor

$$\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}$$

cuya signatura es $(-1)^{1+2+2+4} = -1$, siendo, por tanto, de clase impar. Su menor complementario se obtiene suprimiento las filas 1ª y 2ª y las columnas 2ª y 4ª

$$\begin{vmatrix} 4 & 0 & 6 \\ 5 & -1 & 1 \\ 1 & 5 & 8 \end{vmatrix}$$

y su adjunto es, por tanto

$$-\begin{vmatrix} 4 & 0 & 6 \\ 5 & -1 & 1 \\ 1 & 5 & 8 \end{vmatrix}$$

Si elegimos como menor de orden 1 y formado por el elemento que está en la 2ª fila y 5ª columna, | 9 |, tenemos

$$\text{menor complementario: } \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 0 & 0 \\ 5 & 3 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 5 & 2 \end{vmatrix}, \text{ signatura: } (-1)^{2+5}, \text{ adjunto} = - \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 0 & 0 \\ 5 & 3 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 5 & 2 \end{vmatrix}$$

En general, la signatura del menor de orden 1 formado por el elemento a_{ij} es $(-1)^{i+j}$, luego las signaturas de estos menores de orden 1, según la posición que ocupan en la matriz, vendrán dadas por

$$\begin{pmatrix} + & - & + & - & \dots \\ - & + & - & + & \dots \\ + & - & + & - & \dots \\ - & + & - & + & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & + \end{pmatrix}$$

Estos conceptos nos permiten construir otro procedimiento para el cálculo de un determinante; se denomina ***regla de Laplace*** y se basa en el siguiente teorema:

"Todo determinante es igual a la suma de los productos de todos los menores de orden *h*, que se pueden formar con *h* líneas paralelas fijas, por sus adjuntos repectivos"

En efecto, demostraremos previamente que si multiplicamos un menor por su adjunto, el producto forma parte del desarrollo del determinante. Sea el determinante de orden *n*

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1h} & a_{1h+1} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{h1} & \dots & a_{hh} & a_{hh+1} & \dots & a_{hn} \\ a_{h+11} & \dots & a_{h+1h} & a_{h+1h+1} & \dots & a_{h+1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nh} & a_{nh+1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

y supongamos el menor M formado por las h primeras filas y las h primeras columnas, cuya signatura será $(-1)^{2(1+\dots+h)} = +1$, por lo que su adjunto es igual a su menor complementario M'. Un término cualquiera del producto de ambos tiene la forma

$$(-1)^{\sigma} a_{i_1 1} \dots a_{i_h h} \cdot (-1)^{\sigma'} a_{i_{h+1} h+1} \dots a_{i_n n}$$

siendo σ el número de inversiones de la permutación de filas $(i_1,\dots,i_h)$ del menor M y σ' el

número de inversiones de la permutación de filas $(i_{h+1},...,i_n)$ del menor M'. El número de inversiones de la permutación $(i_1,...,i_h,i_{h+1},...,i_n)$ es $\sigma+\sigma'$, ya que $(i_1,...,i_h)$ es una permutación de $(1,...,h)$ y $(i_{h+1},...,i_n)$ es una permutación de $(h+1,...,n)$, por lo que el producto anterior

$$(-1)^{\sigma+\sigma'} a_{i_1 1} \ldots a_{i_h h} \cdot a_{i_{h+1} h} \ldots a_{i_n n}$$

es un término del desarrollo del determinante D, es decir

$$D = M \cdot M' + \ldots$$

Si el menor M estuviera formado, en general, por las filas $f_1,...,f_h$ y las columnas $c_1,...,c_h$, podemos reducirlo al caso anterior llevando la fila f_1 al primer lugar,..., la fila f_h al lugar h, la columna c_1 a la primera,... y la columna c_h al lugar h, para lo cual habremos realizado los siguientes cambios de línea

$$(f_1-1)+...+(f_h-h)+(c_1-1)+...+(c_h-h) = (f_1+...+f_h)+(c_1+...+c_h)-2(1+...+h)$$

La relación entre D y el nuevo determinante obtenido D' es

$$D = (-1)^{(f_1+...+f_h)+(c_1+...+c_h)+2} D'$$

Aplicando el resultado anterior a D' tendremos

$$D = (-1)^{(f_1+...+f_h)+(c_1+...+c_h)+2} MM' + \ldots = (-1)^{(f_1+...+f_h)+(c_1+...+c_h)} MM' + \ldots$$

y teniendo en cuenta que el adjunto de M es

$$(-1)^{(f_1+...+f_h)+(c_1+...+c_h)} M'$$

resulta que, efectivamente, el producto de cualquier menor por su adjunto forma parte del desarrollo del determinante D. Si sumamos los productos de los $\binom{n}{h}$ distintos menores que pueden formarse con las h líneas paralelas fijas por sus adjuntos, el número total de sumandos es

$$\binom{n}{h} h!\,(n-h)! = n!$$

siendo todos ellos distintos al estar formados por distintos elementos de la matriz de D; por tanto, obtenemos así todos los términos del desarrollo del determinante D.

Ejemplo VI.6.6

Apliquemos la regla de Laplace para desarrollar el determinante del ejemplo VII.5.3

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 4 & 2 \\ 3 & -1 & 1 & 5 & 3 \\ -2 & -5 & -1 & 3 & -5 \\ 4 & 3 & 2 & -1 & -4 \end{vmatrix}$$

utilizando los menores que pueden formarse con las columnas 3ª y 5ª. El determinante será igual a

$$(-1)^{11}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} 3 & -1 & 5 \\ -2 & -5 & 3 \\ 4 & 3 & -1 \end{vmatrix} + (-1)^{12}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ -2 & -5 & 3 \\ 4 & 3 & -1 \end{vmatrix} + (-1)^{13}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -5 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 3 & -1 & 5 \\ 4 & 3 & -1 \end{vmatrix} +$$

$$+ (-1)^{14}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -4 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 3 & -1 & 5 \\ -2 & -5 & 3 \end{vmatrix} + (-1)^{13}\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} 0 & 0 & 2 \\ -2 & -5 & 3 \\ 4 & 3 & -1 \end{vmatrix} + (-1)^{14}\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -1 & -5 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 5 \\ 4 & 3 & -1 \end{vmatrix} +$$

$$+ (-1)^{15}\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -4 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 5 \\ -2 & -5 & 3 \end{vmatrix} + (-1)^{15}\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -5 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \\ 4 & 3 & -1 \end{vmatrix} + (-1)^{16}\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -4 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \\ -2 & -5 & 3 \end{vmatrix} +$$

$$+ (-1)^{17}\begin{vmatrix} -1 & -5 \\ 2 & -4 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & -1 & 5 \end{vmatrix} = -(-4)\cdot 48+1\cdot 58-(-3)\cdot 47+(-8)\cdot(-43)-7\cdot 28+(-13)\cdot 26-$$

$$-(-16)\cdot(-34)-(-2)\cdot 4+(-10)\cdot(-16)-14\cdot(-10) = -35$$

Si aplicamos la regla de Laplace con $h = 1$, es decir, fijando tan solo una línea, el determinante es igual a la suma de los productos obtenidos multiplicando todos los elementos de ésta por sus adjuntos respectivos. Así, el determinante de orden n lo reducimos al cálculo de n determinantes de orden $n-1$; si elegimos una línea con elementos iguales a 0, el número de determinantes a calcular es menor; si hacemos transformaciones elementales previas para conseguir que los elementos de una línea sean nulos, excepto uno de ellos, el determinante de orden n se reduce a un determinante de orden $n-1$ y, reiterando el proceso, podemos llegar hasta un determinante de orden 3 o de orden 2 y aplicar la regla de Sarrus.

Ejemplo VI.6.7

Este proceso aplicado al determinante del ejemplo anterior es:

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 4 & 2 \\ 3 & -1 & 1 & 5 & 3 \\ -2 & -5 & -1 & 3 & -5 \\ 4 & 3 & 2 & -1 & -4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & -2 & -4 \\ 3 & -1 & 1 & 3 & 1 \\ -2 & -5 & -1 & 5 & -3 \\ 4 & 3 & 2 & -5 & -8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -2 & -4 \\ 3 & -1 & 3 & 1 \\ -2 & -5 & 5 & -3 \\ 4 & 3 & -5 & -8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -2 & -4 \\ 5 & 0 & 1 & -3 \\ 8 & 0 & -5 & -23 \\ -2 & 0 & 1 & 4 \end{vmatrix} =$$

$$= -\begin{vmatrix} 5 & 1 & -3 \\ 8 & -5 & -23 \\ -2 & 1 & 4 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 5 & 1 & -3 \\ 33 & 0 & -38 \\ -7 & 0 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 33 & -38 \\ -7 & 7 \end{vmatrix} = -35$$

Si la suma de los productos de los elementos de una línea por sus adjuntos es igual al determinante, la suma de los productos de los elementos de una línea por los adjuntos de una paralela, vale cero; en efecto, si en el determinante

$$\begin{vmatrix} a_{11} \,.\, a_{1i} \,.\, a_{1j} \,.\, a_{1n} \\ a_{21} \,.\, a_{2i} \,.\, a_{2j} \,.\, a_{2n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1} \,.\, a_{ni} \,.\, a_{nj} \,.\, a_{nn} \end{vmatrix}$$

formamos la suma de los productos de los elementos de la columna i por los adjuntos de los elementos de la columna j

$$a_{1i}A_{1j}+a_{2i}A_{2j}+...+a_{ni}A_{nj}$$

el resultado es igual al determinante

$$\begin{vmatrix} a_{11} \,.\, a_{1i} \,.\, a_{1i} \,.\, a_{1n} \\ a_{21} \,.\, a_{2i} \,.\, a_{2i} \,.\, a_{2n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1} \,.\, a_{ni} \,.\, a_{ni} \,.\, a_{nn} \end{vmatrix}$$

que es 0 por tener dos columnas iguales.

Ejercicios

VI.35.-Calcular los siguientes determinantes:

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & 8 & 12 \\ 5 & 0 & 1 & 2 \\ 5 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 4 & 3 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 \\ 3 & 6 & 9 & 12 & 15 \\ 5 & 10 & 15 & 20 & 25 \\ 7 & 14 & 21 & 28 & 35 \\ 9 & 18 & 27 & 36 & 45 \end{vmatrix}$$

VI.36.-Desarrollar los determinantes

$$\begin{vmatrix} 5 & 7 & 6 & 8 & 5 \\ 3 & \alpha_1 & 4 & 6 & 4 \\ 2 & 3 & \alpha_2 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 0 & \alpha_3 & 2 \\ 2 & 4 & 2 & 4 & \alpha_4 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 4 & 9 & 16 & 25 \\ 1 & 8 & 27 & 64 & 125 \\ 1 & 16 & 81 & 256 & 625 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \end{vmatrix}$$

(para $\alpha_1 =$, $\alpha_2 =$, $\alpha_3 =$ y $\alpha_4 =$)

$$\begin{vmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2+a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2+a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2+a \end{vmatrix}$$

VI.37.-Calcular

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & .. & 1 \\ -1 & 0 & 1 & .. & 1 \\ -1 & -1 & 0 & .. & 1 \\ & & .... & & \\ -1 & -1 & -1 & .. & 0 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & .. & 1 \\ -1 & 0 & 1 & .. & 1 \\ -1 & -1 & 0 & .. & 1 \\ & & .... & & \\ -1 & -1 & -1 & .. & 0 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & .. & 1 \\ 1 & 0 & 1 & .. & 1 \\ 1 & 1 & 0 & .. & 1 \\ & & ..... & & \\ 1 & 1 & 1 & .. & 0 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 1 & n & n & .. & n \\ n & 2 & n & .. & n \\ n & n & 3 & .. & n \\ & & ..... & & \\ n & n & n & .. & n \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & .. & a_{n-1} & a_n \\ -1 & x & 0 & .. & 0 & 0 \\ 0 & -1 & x & .. & 0 & 0 \\ & & ..... & & & \\ 0 & 0 & 0 & .. & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & .. & -1 & x \end{vmatrix}$$

VI.38.- Demostrar que

$$\begin{vmatrix} x & a & b & x \\ a & x & x & b \\ b & x & x & a \\ x & b & a & x \end{vmatrix} = (b-a)^2 \left[(a+b)^2 - 4x^2 \right]$$

VI.39.- Calcular

$$\begin{vmatrix} p+q & q & q & .. & q \\ q & p+q & q & .. & q \\ . & . & . & . & . \\ q & q & q & .. & p+q \end{vmatrix}$$

siendo n el orden del determinante

VI.40.- Resolver en $\mathbf{R}$, las ecuaciones

$$\begin{vmatrix} 1+x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+x & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1-x \end{vmatrix} = 81 \quad , \quad \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \\ x & x^2 & x^3 & 1 \\ x^2 & x^3 & 1 & x \\ x^3 & 1 & x & x^2 \end{vmatrix} = 512000$$

VI.41.-Resolver las ecuaciones

$$\begin{vmatrix} x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & 1 & x \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & x \\ 1 & 1 & x & 1 \\ 1 & x & 1 & 1 \\ x & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} x^3 & 8 & 27 & -64 \\ x^2 & 4 & 9 & 16 \\ x & 2 & 3 & -4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} x & 2x+1 & 2x+1 \\ 2x+1 & 3x-1 & 4x \\ 3x-1 & 4x & 6x-1 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} x & a & a \\ a & x & a \\ a & a & x \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} x^3 & 3x^2 & 3x & 1 \\ x^2 & x^2+2x & 2x+1 & 1 \\ x & 2x+1 & x+2 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & .. & 1 \\ -1 & x & 1 & .. & 1 \\ -1 & -1 & x & .. & 1 \\ . & . & . & . & . \\ -1 & -1 & -1 & .. & x \end{vmatrix} = 0$$

VI.42.- Sea E el espacio vectorial de las matrices cuadradas de orden (2,2), con coeficientes en $\mathbf{R}$ y sea $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ un elemento de E. Se define la siguiente aplicación

$$\begin{aligned} f_{\mathbf{B}} : E &\longrightarrow E \\ \mathbf{A} &\longrightarrow f_{\mathbf{B}}(\mathbf{A}) = \mathbf{BA} \end{aligned}$$

a) Probar que $f_{\mathbf{B}}$ es lineal.

b) Demostrar que el $\det(f_{\mathbf{B}}) = (\det(\mathbf{B}))^2$.

VI.7.- CARACTERISTICA DE UNA MATRIZ

Generalizando los conceptos anteriores, dada una matriz cualquiera $\mathbf{A}\in M_{(m,n)}(K)$ se define como menor de orden h de **A** a cualquier determinante de orden h formado por h columnas de subíndices $1 \le c_1 <...<c_h \le n$ y h filas de subíndices $1 \le f_1 <...<f_h \le m$ de la matriz dada; obviamente el máximo orden de un menor es menor o igual que la menor de las dos dimensiones de la matriz. Llamamos ***característica*** de la matriz **A** al orden del mayor menor no nulo que puede formarse con sus filas y columnas, es decir, el orden de la submatriz cuadrada de **A**, de mayor orden, entre las que tienen determinante no nulo.

Se verifica que para toda matriz $\mathbf{A}\in M_{(m,n)}(K)$ el rango es igual a la característica: en efecto, sea $\mathbf{A}\in M_{(m,n)}(K)$ tal que

$$\text{rang}(\mathbf{A}) = r \qquad\qquad \text{caract}(\mathbf{A}) = c$$

Veamos que $r \ge c$: por definición de característica existe un menor de orden c no nulo, cuyas filas y columnas podemos suponer que son las c primeras de la matriz **A** (lo cual siempre es posible conseguir mediante transformaciones elementales, que no varían el rango). La submatriz **B** de **A** formada por estas c primeras columnas tiene rango c, ya que sus primeras c filas forman un conjunto de vectores l.i., luego

$$r = \text{rang}(\mathbf{A}) \ge \text{rang}(\mathbf{B}) = c$$

Veamos que también se cumple $c \ge r$ y habremos completado el proceso de demostración: como $\text{rang}(\mathbf{A}) = r$, en la matriz **A** hay r columnas l.i.; sea **C** la submatriz correspondiente a estas columnas; dado que $\text{rang}(\mathbf{C}) = \text{rang}(\mathbf{C}^t)$, tendremos que en **C** hay r filas l.i., que nos determinarán un menor de orden r no nulo, que también es menor de **A**, por lo que su característica es, por lo menos r, es decir, $c \ge r$. De ambos resultados se obtiene $r = c$.

Ejemplo VI.7.2

Para la matriz

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 1 & 4 \\ 2 & 6 & 2 & 4 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

tenemos que

$$\det(\mathbf{A}) = 0$$

pues la 4ª columna es igual a la 2ª menos la 3ª. Como

$$\begin{vmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 2 & 6 & 2 \\ 3 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 3 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 6 & 2 \end{vmatrix} = 3 \cdot 4 = 12$$

es

$$\text{rang}(\mathbf{A}) = \text{caract}(\mathbf{A}) = 3$$

El cálculo de la característica de una matriz, puede plantearse de dos modos: empezando por el menor de mayor orden, o por los orden 2, cuyos valores son calculables inmediatamente. En cualquier caso su cálculo sería bastante largo; existe un modo de simplificar el proceso basado en el siguiente resultado:

"Si en una matriz cuadrada existe un menor de orden r distinto de 0 y todos los menores de orden r+1 que lo contienen son iguales a 0, entonces la característica de la matriz es r. Recíprocamente si la característica de la matriz es r, existe un menor de orden r distinto de cero y todos los menores de orden r+1 que lo contienen, si los hubiere, son 0".

En efecto, sean $f_1,...,f_r$ $c_1,...,c_r$ las filas y columnas que forman el menor no nulo de orden r, por lo que el rango de la submatriz que forman es r y el conjunto de los vectores columna $\{c_1,...,c_r\}$ es l.i.; si a estas r columnas añadimos otra cualquiera c_i la submatriz formada por estas r+1 columnas $c_1,...,c_r,c_i$ y las r filas $f_1,...,f_r$, ampliadas con el nuevo elemento de la columna c_i, tiene rango r, por tener un menor de orden r distinto de 0; todos los determinantes de orden r+1 formados por las columnas $c_1,...,c_r,c_i$ y las filas $f_1,...,f_r$ f_j ($j \neq 1,..,r$) son nulos, por hipótesis, por lo que la fila f_j es combinación lineal de las otras y la submatriz formada por las columnas $c_1,...,c_r,c_i$, y todas las filas tiene rango r; así c_i es combinación lineal de las demás y, como i es cualquiera, la matriz tiene rango r. El recíproco es inmediato a partir de la definición de característica.

Ejemplo VI.7.1

Para el cálculo de la característica de la matriz

$$\begin{pmatrix} 0 & 7 & 7 & -3 & 11 & 8 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 & 2 & 3 & -2 \\ -1 & 2 & 2 & -1 & 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

empezamos por un menor de orden dos no nulo

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} \neq 0$$

Calculamos menores de orden tres que contengan a este menor de orden dos distinto de 0. Como

$$\begin{vmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \end{vmatrix} \neq 0$$

continuamos con los menores de orden cuatro que contienen a este menor de orden tres

$$\begin{vmatrix} 0 & 7 & 7 & -3 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 0 & 7 & 7 & 11 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 0 & 7 & 7 & 8 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 0 & 7 & 7 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

con lo que, según el resultado anterior, todo menor de orden cuatro es nulo y la característica de la matriz es 3.

Ejercicios

VI.43 .- Calcular el rango de las matrices

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & \alpha_1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & \alpha_1 & 4 \\ 1 & 1 & 0 & \alpha_1 \\ 2 & 1 & 4 & 5 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & 4 \\ 5 & 2 & -6 & 1 \\ -3 & -8 & 8 & 7 \\ -7 & -13 & 15 & 10 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} -1 & 4 & -2 & 5 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & -2 & 5 \\ 3 & 10 & -6 & 11 & 10 \end{pmatrix}$$

(para $\alpha_1 =$, $\alpha_2 =$, $\alpha_3 =$ y $\alpha_4 =$)

$$\begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & a \\ 1 & 1 & a & a^2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -1 & i & 1-2i \\ i & 1 & -2+i \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1+i & i & 2i \\ -i & 2-i & 1 & 2+i \\ 1-i & -1+i & 2i & 0 \\ -1 & -2i & 1+i & 2+i \end{pmatrix}$$

VI.44.- Sea el endomorfismo de $\mathbf{R}^3$ de matriz $\mathbf{M} = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 2 \\ 1 & a & a \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. Estudiar su rango según los valores de a Demostrar que para todo a el rango de **M** es dos.

VI.45 .- Hallar según los valores de $a \in \mathbf{R}$ el rango de la matriz

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ a & 0 & a & 0 & a \\ 0 & a & 0 & a & 0 \\ a & a & a & a & a \end{pmatrix}$$

VI.8.-APLICACIONES DE LOS DETERMINANTES

Los determinantes son una herramienta muy útil en la resolución de dos problemas, vistos anteriormente: el cálculo de la matriz inversa y la resolución de sistemas de ecuaciones lineales.

Sabemos que, según resultados anteriores, para una matriz cuadrada **A** de orden *n*

$$\mathbf{A} \text{ inversible} \iff \text{rang}(\mathbf{A}) = n \iff \det(\mathbf{A}) \neq 0$$

Supongamos una matriz de este tipo

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \,.\, a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \,.\, a_{2n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1} & a_{n2} \,.\, a_{nn} \end{pmatrix}$$

Construyamos la matriz

$$\mathbf{A}^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} \,.\, A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} \,.\, A_{n2} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ A_{1n} & A_{2n} \,.\, A_{nn} \end{pmatrix}$$

en la que A_{ij} es el adjunto de a_{ij} en **A**; esta matriz se denomina ***matriz adjunta*** de **A**. Si efectuamos el producto de ambas resulta

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^* = \begin{pmatrix} a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+..+a_{1n}A_{1n} & a_{11}A_{21}+a_{12}A_{22}+..+a_{1n}A_{2n} \;..\; a_{11}A_{n1}+a_{12}A_{n2}+..+a_{1n}A_{nn} \\ a_{21}A_{11}+a_{22}A_{12}+..+a_{2n}A_{1n} & a_{21}A_{21}+a_{22}A_{22}+..+a_{2n}A_{2n} \;..\; a_{21}A_{n1}+a_{22}A_{n2}+..+a_{2n}A_{nn} \\ \cdots\cdots\cdots\

Ejemplo VI.8.1

Para la matriz

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

tenemos

$$\det(\mathbf{A}) = \begin{vmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = -7$$

luego es regular y tiene inversa. Como

$$\mathbf{A}^* = \begin{pmatrix} -2 & -4 & 3 \\ -3 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & -3 \end{pmatrix}$$

la inversa es

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 2/7 & 4/7 & -3/7 \\ 3/7 & -1/7 & -1/7 \\ -2/7 & 3/7 & 3/7 \end{pmatrix}$$

Ejemplo VI.8.2

Veremos a continuación un esbozo de como con la ayuda de una matriz inversible se pueden construir y descifrar claves (Criptografía) en la transmisión de mensajes. Si queremos enviar la siguiente información:

"LAS MATEMATICAS SON UTILES"

y no queremos que sea entendida por ningún posible interceptor, podemos realizar los siguiente pasos:

a) Asignamos a cada letra una de las 26 letras del alfabeto un número de orden que sea un elemento del conjunto $\mathbf{Z}/(26)$

A, B, C, D, E, ..., X, Y, Z
1, 2, 3, 4, 5, ..., 24, 25, 0

b) Agrupamos las letras de nuestro mensaje en grupos de n letras, para $n \in \mathbf{N}^*$; por ejemplo, para $n = 3$

LAS MAT EMA TIC ASS ONU TIL ESX

añadiendo la letra X para completar el último grupo.

c) Escribimos cada grupo de n letras como un vector de $\mathbf{R}^n$ tal que sus componentes sean los números asignados a cada una de ellas, según el apartado a). Construimos con estos vectores una matriz $\mathbf{A}$ de n filas y tantas columnas como grupos y de coeficientes en $\mathbf{Z}/(26)$. En nuestro ejemplo es

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 12 & 13 & 5 & 21 & 1 & 16 & 21 & 5 \\ 1 & 1 & 13 & 9 & 20 & 14 & 9 & 20 \\ 20 & 21 & 1 & 3 & 20 & 22 & 12 & 24 \end{pmatrix}$$

d) Construimos una matriz cuadrada $\mathbf{M} \in M_{(n,n)}(\mathbf{Z})$ inversible y tal que su determinante sea igual a ± 1 (matriz codificadora), para que los coeficientes de $\mathbf{M}^{-1}$ pertenezcan a $\mathbf{Z}$. En nuestro caso tomamos, por ejemplo

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{M}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

e) Multiplicando la matriz $\mathbf{M}$ por la matriz $\mathbf{A}$, obtenemos una nueva matriz $\mathbf{B}$, que proporciona el mensaje codificado. En nuestro caso es

$$\mathbf{B} = \mathbf{M}\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 12 & 13 & 5 & 21 & 1 & 16 & 21 & 5 \\ 1 & 1 & 13 & 9 & 20 & 14 & 9 & 20 \\ 20 & 21 & 1 & 3 & 20 & 22 & 12 & 24 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 21 & 22 & 14 & 12 & 40 & 36 & 21 & 44 \\ 53 & 56 & 20 & 36 & 61 & 74 & 54 & 73 \\ 115 & 121 & 49 & 63 & 161 & 168 & 108 & 185 \end{pmatrix}$$

y el mensaje codificado es

21,53,115,22,56,121,14,20,49,12,36,63,40,61,161,36,74,168,21,54,108,44,73,185

El receptor adecuado del mensaje, será conocedor de la matriz $\mathbf{M}$, por lo cual podrá construir con facilidad la matriz $\mathbf{B}$, obtener $\mathbf{A} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{B}$ y a partir de ella escribir la información original. Si en lugar de expresar el mensaje codificado numéricamente, queremos expresarlo en letras del alfabeto, basta convertir los elementos de $\mathbf{B}$ a elementos de $\mathbf{Z}/(26)$; en el ejemplo

$$\mathbf{B}' = \begin{pmatrix} 21 & 22 & 14 & 12 & 14 & 10 & 21 & 18 \\ 1 & 4 & 20 & 10 & 9 & 22 & 2 & 21 \\ 11 & 17 & 23 & 11 & 5 & 12 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

y el mensaje codificado es

21, 1,11,22, 4,17,14,20,23,12,10, 11,14, 9, 5,10,22,12,21, 2, 4,18,21, 3
T ,A, K, U, D, P, N, S, V, L, J, K, N, I, E, J, U, L, T, B, D,Q, T, C

Análogamente al caso anterior el receptor, conocedor de la matriz codificadora **M**, a partir del mensaje recibido construye **B**' y obtiene $\mathbf{A} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{B}'$, es decir el mensaje original.

Recordemos los resultados básicos sobre compatibilidad de un sistema de ecuaciones lineales con *m* ecuaciones y *n* incógnitas. Escrito de forma matricial será

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$$

siendo **A** la matriz de los coeficientes, del tipo (*m*,*n*), **x** la matriz columna de las incógnitas, del tipo (*n*,1), y **b** la matriz columna formada por los términos independientes, del tipo (*m*,1). El sistema es compatible si y sólo si las matrices de coeficientes y la ampliada tienen el mismo rango, es decir,

$$\text{rang}(\mathbf{A}) = \text{rang}(\mathbf{A}|\mathbf{b}) = r$$

Si el rango común *r* es igual al número de incógnitas *n*, el sistema es determinado; si *r* es menor que *n* el sistema es indeterminado y, en este caso, la solución general es igual a una solución particular más cualquier combinación lineal de *n*–*r* soluciones l.i. del sistema homogéneo asociado.

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$$

Vamos a estudiar la resolución de sistemas mediante determinantes, según el valor de *r*.

1º Caso : $r = n = m$ (sistema de Cramer)

El sistema tiene igual número de ecuaciones que de incógnitas, la matriz **A** es regular y según el Teorema de Rouché existe una única solución, que obtendremos teniendo en cuenta que:

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b} \;\Rightarrow\; \mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b} \;\Rightarrow\; \mathbf{x} = \frac{\mathbf{A}^{*}\mathbf{b}}{\det(\mathbf{A})}$$

es decir,

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ .. \\ x_n \end{pmatrix} = \frac{1}{\det(\mathbf{A})} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} .. A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} .. A_{n2} \\ ..... \\ A_{1n} & A_{2n} .. A_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ .. \\ b_n \end{pmatrix}$$

y desarrollando e igualando los elementos de las matrices resultantes en ambos miembros la primera incógnita es

$$x_1 = \frac{A_{11}b_1 + A_{21}b_2 + .. + A_{n1}b_n}{\det(\mathbf{A})} = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & . & . & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & . & . & a_{2n} \\ . & . & . & . & . \\ b_n & a_{n2} & . & . & a_{nn} \end{vmatrix}}{\det(\mathbf{A})}$$

la segunda

$$x_2 = \frac{A_{12}b_1 + A_{22}b_2 + .. + A_{n2}b_n}{\det(\mathbf{A})} = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & . & . & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & . & . & a_{2n} \\ . & . & . & . & . \\ a_{n1} & b_n & . & . & a_{nn} \end{vmatrix}}{\det(\mathbf{A})}$$

y, así sucesivamente, para la última

$$x_n = \frac{A_{1n}b_1 + A_{2n}b_2 + .. + A_{nn}b_n}{\det(\mathbf{A})} = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & . & . & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & . & . & b_2 \\ . & . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & . & . & b_n \end{vmatrix}}{\det(\mathbf{A})}$$

Cada incógnita resulta ser igual a un cociente en el que el divisor es el determinante de los coeficientes del sistema y el dividendo es el determinante de la matriz resultante de sustituir en la matriz del sistema **A** la columna de coeficientes de la incógnita por los términos independientes.

Ejemplo VI.8.3

El sistema

$$\left.\begin{aligned} 3x+2z &= 1 \\ x+y+z &= 1 \\ 2x+5z &= 4 \end{aligned}\right\}$$

tiene tres ecuaciones , tres incógnitas y

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 5 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(\mathbf{A}) = 11 \Rightarrow \text{rang}(\mathbf{A}) = 3$$

siendo pues un sistema de Cramer cuya solución es

$$x=\frac{\begin{vmatrix}1&0&2\\1&1&1\\4&0&5\end{vmatrix}}{11}=\frac{-3}{11}\qquad y=\frac{\begin{vmatrix}3&1&2\\1&1&1\\2&4&5\end{vmatrix}}{11}=\frac{4}{11}\qquad z=\frac{\begin{vmatrix}3&0&1\\1&1&1\\2&0&4\end{vmatrix}}{11}=\frac{10}{11}$$

2º caso : $r=m<n$ o $r=n<m$ o $r<n$ y $r<m$

En primer lugar, cuando $r<m$, hay que probar la compatibilidad rang(**A**) = rang(**A**|**b**) = r. Si el sistema es compatible la solución general puede hallarse de acuerdo con el siguiente razonamiento: la matriz **A**|**b** contiene un menor de orden r cuyas filas indican las ecuaciones l.i. del sistema, que llamaremos ***ecuaciones principales***, de forma que las demás filas corresponden a ecuaciones que son combinación lineal de éstas, por lo que pueden ser suprimidas quedando como sistema equivalente el formado por las ecuaciones principales; las r columnas l.i. del menor distinto de cero que define el rango de **A** determinan las incógnitas, que llamaremos ***incógnitas principales***, de modo que pasando al segundo miembro los términos que contienen a las incógnitas no principales, formamos un sistema de Cramer cuya solución nos da la solución general del sistema. Por ejemplo si las filas y columnas del menor no nulo de **A** son las r primeras hemos reducido el sistema al

$$\begin{aligned}a_{11}x_1+\ldots+a_{1r}x_r &= b_1-a_{1r+1}x_{r+1}-\ldots-a_{1n}x_n\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ a_{r1}x_1+\ldots+a_{rr}x_r &= b_r-a_{rr+1}x_{r+1}-\ldots-a_{rn}x_n\end{aligned}$$

cuya solución expresará las incógnitas principales $x_1,\ldots,x_r$ en función de $x_{r+1},\ldots,x_n$.

Ejemplo VI.8.4

Para el sistema

$$\left.\begin{aligned}2x+3y-z &= 1\\ x+y+3z &= 7\\ 3x+4y+2z &= 8\\ x+2y-4z &= -6\end{aligned}\right\}$$

se verifica

$$\text{rang}(\mathbf{A})=\text{rang}\begin{pmatrix}2&3&-1\\1&1&3\\3&4&2\\1&2&-4\end{pmatrix}=2=\text{rang}\begin{pmatrix}2&3&-1&1\\1&1&3&7\\3&4&2&8\\1&2&-4&-6\end{pmatrix}$$

siendo distinto de 0 el menor

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$$

que señala como ecuaciones principales a las dos primeras y como incógnitas principales a x e y. El sistema es equivalente al formado por estas ecuaciones e incógnitas, es decir,

$$\left.\begin{aligned} 2x+3y &= 1+z \\ x+y &= 7-3z \end{aligned}\right\}$$

cuya solución es

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1+z & 3 \\ 7-3z & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}} = -10z+20 \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1+z \\ 1 & 7-3z \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}} = 7z-13$$

Caso particular interesante es el de un sistema homogéneo con n ecuaciones y n incógnitas tal que el rango de la matriz de coeficientes sea $n-1$, es decir,

$$\begin{aligned} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n &= 0 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n &= 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\ldots+a_{nn}x_n &= 0 \end{aligned}$$

con

$$\operatorname{rang}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \ldots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \ldots a_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \\ a_{n1} & a_{n2} \ldots a_{nn} \end{pmatrix} = n-1$$

Esto significa que existe un menor de orden $n-1$ distinto de cero que podemos suponer, sin pérdida de generalidad en el razonamiento, que está formado por las primeras $n-1$ filas y columnas; por ello, y según lo anterior, el sistema equivale al

$$\begin{aligned} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n-1}x_{n-1} &= -a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n-1}x_{n-1} &= -a_{2n}x_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ a_{n-11}x_1+a_{n-12}x_2+\ldots+a_{n-1n-1}x_{n-1} &= -a_{n-1n}x_n \end{aligned}$$

que es un sistema de Cramer, siendo la solución para x_1 el cociente

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} -a_{1n}x_n & a_{12} \ldots a_{1n-1} \\ -a_{2n}x_n & a_{22} \ldots a_{2n-1} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ -a_{n-1n}x_n & a_{n-12} \ldots a_{n-1n-1} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \ldots a_{1n-1} \\ a_{21} & a_{22} \ldots a_{2n-1} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n-11} & a_{n-12} \ldots a_{n-1n-1} \end{vmatrix}} = \frac{-x_n(-1)^{n-2}\begin{vmatrix} a_{12} & \ldots & a_{1n-1} & a_{1n} \\ a_{22} & \ldots & a_{2n-1} & a_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n-12} & \ldots & a_{n-1n-1} & a_{n-1n} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \ldots a_{1n-1} \\ a_{21} & a_{22} \ldots a_{2n-1} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n-11} & a_{n-12} \ldots a_{n-1n-1} \end{vmatrix}}$$

El determinante del denominador es A_{nn}, adjunto del elemento a_{nn} en la matriz de coeficientes del sistema y el numerador es A_{n1}, adjunto del elemento a_{n1} en la matriz del sistema. Podemos, por tanto, escribir

$$x_1 = \frac{x_n A_{n1}}{A_{nn}}$$

luego

$$\frac{x_1}{A_{n1}} = \frac{x_n}{A_{nn}}$$

si A_{n1} no es nulo (si $A_{n1} = 0$, entonces $x_1 = 0$ por lo que podemos escribir la solución en la forma anterior aunque A_{n1} sea nulo, interpretando que en este caso es nula la incógnita del numerador). Análogamente se obtienen las demás soluciones, que pueden escribirse en la forma

$$\frac{x_2}{A_{n2}} = \frac{x_n}{A_{nn}} \quad , \ldots , \quad \frac{x_{n-1}}{A_{nn-1}} = \frac{x_n}{A_{nn}}$$

o escribiéndolas conjuntamente

$$\frac{x_1}{A_{n1}} = \frac{x_2}{A_{n2}} = \ldots = \frac{x_{n-1}}{A_{nn-1}} = \frac{x_n}{A_{nn}}$$

es decir, valores proporcionales a los adjuntos de los elementos de la fila de la matriz que no forma parte del menor principal.

Ejemplo VI.8.5

El sistema de tres ecuaciones e incógnitas

$$\left.\begin{aligned} 2x+3y-z &= 0 \\ x+y+3z &= 0 \\ 2x+2y+6z &= 0 \end{aligned}\right\}$$

puede comprobarse que verifica rang(**A**) = 2, ya que

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 6 \end{vmatrix} = 0$$

siendo distinto de 0 el menor

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$$

Por ello, el sistema tiene por solución

$$\frac{x}{10} = \frac{y}{-7} = \frac{z}{-1}$$

Ejercicios

VI.45.- Demostrar que $((1,-1,\alpha_1,0), (\alpha_2,0,2,2), (0,-1,-3,\alpha_3), (1,-1,0,\alpha_4))$ es una base de $\mathbf{R}^4$ y hallar la matriz del cambio de esta base a la base canónica, para $\alpha_1 =$, $\alpha_2 =$, $\alpha_3 =$, $\alpha_4 =$.

VI.46.- Hallar las inversas de las matrices siguientes:

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 6 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 0 \\ -3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 5 & -2 \\ 3 & 5 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -5 & -7 \end{pmatrix}$$

VI.47.- Discutir para los diferentes valores de $m \in \mathbf{R}$ el sistema

$$\left.\begin{array}{l} x+my+z = m+2 \\ x+y+mz = -2(m+1) \\ mx+y+z = m \end{array}\right\}$$

VI.48.- Discutir y resolver según los valores de k y m el sistema

$$\left.\begin{array}{r} x-2y = 3k+3m \\ x-y = 2k+2m+1 \\ mx+ky+5 = m^2-k^2-1 \\ kx+my+7 = k^2-m^2+13 \end{array}\right\}$$

VI.49.- Discutir según los valores de a y b, los sistemas

$$\left.\begin{aligned} ax+y+z+t &= a \\ x+ay+z+t &= a \\ x+y+az+t &= a \\ x+y+z+at &= a \end{aligned}\right\} \qquad \left.\begin{aligned} ax+by+z &= 1 \\ x+aby+z &= b \\ x+by+az &= 1 \end{aligned}\right\}$$

VI.50.- Estudiar la compatibilidad de los sistemas lineales siguientes y resolver el segundo:

$$\left.\begin{aligned} 2x+y-z &= b_1 \\ x+2y+z &= b_2 \\ 3x+y-2z &= b_3 \end{aligned}\right\} \qquad \left.\begin{aligned} ax+y+z &= 1 \\ x+ay+z &= a \\ x+y+az &= a^2 \end{aligned}\right\}$$

VI.51.- Resolver, según los valores de los parámetros reales a, b, c, d el sistema

$$\left.\begin{aligned} x+y+z &= 1 \\ ax+by+cz &= d \\ a^2x+b^2y+c^2z &= d^2 \end{aligned}\right\}$$

Encontrar el valor de $P = a^3x+b^3y+c^3z$, si (x,y,z) es una solución del sistema anterior.

VI.52.- Bajo que condición el sistema sobre **R**

$$\left.\begin{aligned} y+az+a^2t &= 1 \\ x+a^2z+at &= -1 \\ ax+a^2y+t &= 1 \\ a^2x+ay+z &= 1 \end{aligned}\right\}$$

posee solución única. Resuélvase en este caso concreto. Hallar a y b para el siguiente sistema admita solución distinta de la trivial:

$$\left.\begin{aligned} 2x-ay+bz &= 0 \\ x-ay+z &= 0 \\ 2bx+2y+3z &= 0 \\ 3x-y+2z &= 0 \end{aligned}\right\}$$

PROCEDIMIENTOS PRÁCTICOS BASICOS

Los procedimientos básicos que forman los elementos constructivos a partir de los cuales pueden abordarse los problemas que tratan sobre las materias desarrolladas en este Cuaderno, son los siguientes:

- Relación matriz-fórmula en una forma bilineal.
- Imagen matricial de un par de vectores en una forma bilineal.
- Matrices de una forma bilineal en bases distintas.
- Relación matriz-fórmula en una form cuadrática
- Averiguar si una forma cuadrática es definida.
- Averiguar si una aplicación de $V \times V$ en $\mathbf{R}$ es un producto escalar.
- Hallar el producto escalar de dos vectores.
- Hallar la norma de un vector.
- Hallar una base ortonormal de un espacio euclidiano.
- Averiguar si dos subespacios son ortogonales.
- Hallar el subespacio ortogonal a un subespacio dado.
- Proyectar un vector sobre un subespacio.
- Hallar el ángulo de dos vectores.
- Cálculo de determinante por el algoritmo de Gauss.
- Cálculo de determinante por la regla de Laplace.
- Cálculo de la característica de una matriz.
- Cálculo del rango por determinantes.
- Averiguar si n vectores de un e.v. de dimensión n forman una base
- Hallar la inversa de una matriz regular.
- Resolver un sistema lineal mediante determinantes.

EJERCICIOS DE RECAPITULACION

VI.53.- Si $f : E\times E \longrightarrow \mathbf{R}$ es una forma bilineal, probar que g, definida por

$$g(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})+f(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x})$$

es también bilineal. ¿Es g simétrica?.

VI.54.- Sea la forma bilineal $f : \mathbf{R}^2\times\mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}$, cuya matriz es la base canónica es

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Si definimos el conjunto anulador N de f como el conjunto de vectores $\boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^2$ tales que

$$(\forall \boldsymbol{y}\in \mathbf{R}^2)\ (f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = 0)$$

hallar N, una base de N y comprobar que N coincide con los vectores del núcleo del endomorfismo cuya matriz en la base canónica es **A**.

b) Sea la nueva base de $\mathbf{R}^2$ formada por el vector (1,0) y por un vector de E de la base del anulador. Hallar la matriz de f en esta nueva base.

c) ¿Es f definida positiva?.

VI.55.- Sea la matriz

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

asociada a un endomorfismo f de $\mathbf{R}^3$ referido a una base ortonormal $(\boldsymbol{e})$. Definimos en $\mathbf{R}^3$ dos formas bilineales

$$f_1(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \langle \boldsymbol{x}, f(\boldsymbol{y})\rangle \qquad\qquad f_2(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \langle f(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{y}\rangle$$

$\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{y}$ son dos vectores expresados en la base ortonormal $(\boldsymbol{e})$. Hallar las matrices asociadas a f_1 y a f_2 en dicha base. Comprobar que $f_1 = f_2$. ¿Cómo ha de ser la matriz **A** para que se verifique la condición anterior?.

VI.56.- Sea V un espacio vectorial real. Si $\langle,\rangle$ y $(|)$ son dos productos escalares en V; averiguar si las aplicaciones de V^2 en $\mathbf{R}$ definidas por

$$(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \longrightarrow \langle \boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\rangle+(\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{y}) \qquad\qquad (\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \longrightarrow k\,\langle \boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\rangle \ \text{ con } \ k\in\mathbf{R}^+$$

son productos escalares.

VI.57.- Si V es un e.v.s. $\mathbf{R}$ de dimensión 1, hallar todos los productos escalares en V.

VI.58.- Sea V el espacio vectorial sobre $\mathbf{R}$ de las funciones reales de variable real de la forma

$$f(x) = ae^{-x}+be^{-2x}+ce^{-3x} \qquad \text{con} \quad a,b,c\in\mathbf{R}$$

Definimos en V la siguiente operación

$$\langle f,g\rangle = \int_0^{\infty} f(x)\, g(x)\, dx$$

a) Demostrar que se ha definido un producto escalar.

b) Dado el conjunto $M = \{f\in V \mid f(x) = ae^{-x}+be^{-3x} \text{ con } a,b\in\mathbf{R}\}$, demostrar que es un subespacio vectorial de V y hallar una base ortonormal para M.

c) Expresar la función $g(x) = e^{-x}-2e^{-3x}$ en la base anterior y calcular su norma .

d) Hallar el subespacio ortogonal asociado al subespacio engendrado por e^{-3x}.

VI.59.- Sea $(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3)$ una base de E, espacio vectorial sobre $\mathbf{R}$, que verifica

$$\|\boldsymbol{e}_1\| = 1 \ , \ \|\boldsymbol{e}_2\| = 2 \ , \ \|\boldsymbol{e}_3\| = 2 \ , \ \boldsymbol{e}_1\perp\boldsymbol{e}_2 \ , \ \boldsymbol{e}_2\perp\boldsymbol{e}_3 \ , \ \angle(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_3) = 60^\circ$$

a) Hallar la expresión matricial del producto escalar respecto de la base $(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3)$.

b) Calcular el ángulo que forman los vectores $\boldsymbol{u}_1 = \boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{e}_2$ y $\boldsymbol{u}_2 = 2\boldsymbol{e}_2-\boldsymbol{e}_3$.

d) Hallar una base ortonormal del subespacio $[\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2]$.

VI.60.- Calcular los siguientes determinantes:

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 & .. & 2n+1 \\ -1 & a & 0 & 0 & .. & 0 \\ 0 & -1 & a & 0 & .. & 0 \\ 0 & 0 & -1 & a & .. & 0 \\ \multicolumn{6}{c}{\dots\dots\dots\dots\dots\dots} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & .. & a \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} a & b & * & * & .. & * \\ a & a & b & * & .. & * \\ a & a & a & b & .. & * \\ a & a & a & a & .. & * \\ \multicolumn{6}{c}{\dots\dots\dots\dots\dots\dots} \\ a & a & a & a & .. & a \end{vmatrix}$$

donde los * denotan escalares cualquiera.

VI.61.- Resolver la ecuación

$$\begin{vmatrix} a+x & x & x & x \\ x & b+x & x & x \\ x & x & c+x & x \\ x & x & x & d+x \end{vmatrix} = 0$$

VI.62.- Demostrar que

$$\begin{vmatrix} x & a & b & c \\ a & x & c & b \\ b & c & x & a \\ c & b & a & x \end{vmatrix} = (x+a+b+c)\,(x+a-b-c)\,(x-a+b-c)\,(x-a-b+c)$$

VI.63.-Resolver las ecuaciones

$$\begin{vmatrix} x-1 & x^2-1 & x^3-1 \\ 2x-4 & x^2-4 & x^3-8 \\ 3x-9 & x^2-9 & x^3-27 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} a-x & b-x & c-x \\ a'-x & b'-x & c'-x \\ a''-x & b''-x & c''-x \end{vmatrix} = 0$$

VI.64.-Dada una matriz $\mathbf{A} \in M_{(n,n)}(K)$, considérese el endomorfismo

$$\begin{aligned} f_{\mathbf{A}} : M_{(n,n)}(K) &\longrightarrow M_{(n,n)}(K) \\ \mathbf{M} &\longrightarrow f_{\mathbf{A}}(\mathbf{M}) = \mathbf{AM} \end{aligned}$$

Demostrar que $\det(f_{\mathbf{A}}) = (\det(\mathbf{A}))^n$. Lo mismo si $f_{\mathbf{A}}(\mathbf{M}) = \mathbf{MA}$. Si $f_{\mathbf{A}}(\mathbf{M}) = \mathbf{MA}-\mathbf{AM}$, demostrar que $\det(f_{\mathbf{A}}) = 0$.

BIBLIOGRAFIA

de Burgos J. (1988). *Curso de Algebra y Geometría*. Alhambra. Madrid.

Dixmier J. (1974). *Matemáticas Generales.* Editorial Aguilar. Madrid.

Godement R. (1974). *Algebra*. Tecnos. Madrid.

Hoffmann R., Kunze R. (1974). *Algebra Lineal*. Prentice. Madrid.

Lentin A., Rivaud J. (1973). *Algebra Moderna*. Aguilar. Madrid.

Noble B., Daniel J.W. (1988). *Applied Linear Algebra*. Prentice Hall. London.

Queysanne M. (1985) *Algebra*. Vicens-Vives. Barcelona.

Sainz M.A., Serarols J.L. Pérez A.M. (1994). *Álgebra*. Escuela Politécnica Superior. Gerona.

Sancho J. (1974). *Algebra lineal y geometría*. Universidad de Zaragoza.

Torregrosa J.R., Jordan C. (1987). *Algebra Lineal y sus aplicaciones*. McGraw-Hill. Madrid.

Xambó S. (1977). *Algebra Lineal y geometrias lineales*. EUNIBAR. Barcelona.