CUADERNO VIa

DETERMINANTES Y SUS APLICACIONES

Miguel A. Sainz, Joan Serarols, Anna M. Pérez
Dep. de Informática y Matemática Aplicada
Universidad de Girona

RESUMEN: Se definen el determinante asociado a una matriz cuadrada mediante una suma de productos de elementos de la matriz con un signo asociado, dependiendo de ciertas características de las permutaciones de subíndices. Se obtiene el desarrollo de un determinante por los adjuntos de una línea, así como las principales propiedades y las aplicaciones a la solución de sistema lineales, cálculo de la matriz inversa,..., etc que se desarrollan con detalle.

VIa.1.- DETERMINANTE DE UNA MATRIZ CUADRADA

Consideremos el conjunto **N** de los números naturales ordenados por la relación menor o igual. Sea A un subconjunto de **N** del tipo $A = \{1,2,...,n\}$. Una ***permutación*** sobre A es cualquier n-pla formada por los elementos de A sin repetirse, de modo que dos permutaciones diferirán sólo en el orden de sus coordenadas. El número total de permutaciones sobre A es total $n! = n(n-1)...2\cdot 1$ ya que, en efecto, existen n posibilidades de elección de la primera coordenada pero, fijada ésta hay, $n-1$ posibilidades de elección de la segunda,..., fijadas las anteriores hay 2 posibilidades de elección de la penúltima coordenada y una sóla posibilidad para la última.

En una permutación dos elementos de A se dice que forman una ***inversión*** si el que está a la izquierda es mayor que el que está a la derecha, es decir, están en orden distinto del natural. El número de inversiones σ de una permutación se obtendrá contando las inversiones de cada uno de sus elementos con los que tiene a la derecha, para evitar así contar cada inversión dos veces. Una permutación es de ***clase par*** si tiene un número par de inversiones y de ***clase impar*** si tiene un número impar de inversiones. Por ejemplo, (4,3,1,2) es una permutación del conjunto $A = \{1,2,3,4\}$ en la que 3 forma inversión con 1 y con 2; esta permutación tiene 5 inversiones, es decir $\sigma = 5$, luego es de clase impar.

Si en una permutación se intercambian dos elementos contiguos, se obtiene otra permutación, de distinta clase, obviamente. Si se intercambian dos elementos cualesquiera se obtiene una permutación también de clase distinta, ya que si entre ambos existen otros h elementos, el intercambio entre ambos puede ser considerado como el resultado de $h+(h+1)$ intercambios entre elementos contiguos, por tanto un número impar de cambios de clase.

Las permutaciones de los subíndices de los elementos de una matriz juegan un papel importante en la siguiente definición. Llamaremos ***determinante de una matriz cuadrada*** $\mathbf{A} = (a_{ij}) \in M_{(n,n)}(K)$ a la suma de los productos que pueden formarse con n elementos de la

matriz tomando, de todas las maneras posibles, uno de cada fila y uno de cada columna y adjuntando a cada sumando el factor $(-1)^{\sigma_f+\sigma_c}$, siendo σ_f el número de inversiones de la permutación de los subíndices de fila y σ_c el número de inversiones de la permutación de los subíndices de columna de los elementos elegidos (este factor será +1 o –1 según que ambas permutaciones sean o no de la misma clase). En total habrá $n!$ sumandos pues el primer factor pude elegirse de n maneras, supongamos que se elige de la fila j_1, pero el segundo, fijado el primero, puede ser elegido de n–1 maneras, supongamos que se elige de la fila j_2,..., el último factor, fijados los anteriores puede elegirse de sólo una, supongamos que pertenece a la fila j_n. Lo denotaremos por det(**A**) o bien por $|\mathbf{A}|$ y, en el caso de que la matriz **A** esté explícitamente dada, mediante sus elementos. Así, siendo $(j_1,j_2,...,j_n)$ la permutación de los subíndices de fila,

$$\det(\mathbf{A}) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \,.\, a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \,.\, a_{2n} \\ \quad . \;.\; . \;.\; . \;.\; . \;.\; . \;.\; . \;.\; . \;.\; . \;.\; . \;.\; . \\ a_{n1} & a_{n2} \,.\, a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{\substack{(j_1,..,j_n) \text{ permutación de } (1,..,n) \text{ con } \sigma_f \text{ inversiones} \\ (k_1,..,k_n) \text{ permutación de } (1,..,n) \text{ con } \sigma_c \text{ inversiones}}} (-1)^{\sigma_f+\sigma_c}\, a_{j_1k_1}...a_{j_nk_n}$$

De esta definición se deducen las primeras propiedades de los determinantes que figuran en la Tabla VIa.1.1

TABLA VIa.1.1

Propiedades de los determinantes

1) $\det(\mathbf{A}) = \sum_{\substack{(i_1,..,i_n) \text{ permutación de} \\ (1,..,n) \text{ con } s \text{ inversiones}}} (-1)^s\, a_{i_11}...a_{i_nn}$

2) Una matriz y su transpuesta tienen el mismo determinante.

3) Si los elementos de una línea son suma de h sumandos, el determinante es suma de los h determinantes que se obtienen con los sumandos primeros,..., h-ésimos.

Demostraciones:

1) Podemos reordenar los factores dentro de cada sumando pues su producto no varía y el signo que acompaña al producto tampoco ya que cualquier reordenación hace que cambien o no de clase ambas permutaciones simultáneamente. Por ello, ordenando los factores por el subíndice de columna, queda en la forma

$$\det(\mathbf{A}) = \sum_{\substack{(i_1,..,i_n) \text{ permutación de} \\ (1,..,n) \text{ con } s \text{ inversiones}}} (-1)^s\, a_{i_11}...a_{i_nn}$$

es decir, el determinante de una matriz cuadrada es igual a la suma de los $n!$ productos que pueden formarse con n elementos de la matriz tomando, de todas las maneras posibles, uno de cada fila y uno de cada columna; cada sumando tiene un signo igual a $(-1)^s$, siendo s el número de inversiones de la permutación que forman los subíndices de fila, supuestos

ordenados los factores por los subíndices de columna.

2) Reordenando ahora por los subíndices de columna,

$$\det(\mathbf{A}) = \sum_{\substack{(i_1,..,i_n) \text{ permutación de} \\ (1,..,n) \text{ con } s \text{ inversiones}}} (-1)^s \, a_{i_1 1}...a_{i_n n} = \sum_{\substack{(j_1,..,j_n) \text{ permutación de} \\ (1,..,n) \text{ con } s \text{ inversiones}}} (-1)^s \, a_{1 j_1}...a_{n j_n} = \det(\mathbf{A}^t)$$

3) Si, por ejemplo, los elementos de la fila i son de la forma $a_{ij}^1+...+a_{ij}^h$ ($j = 1,...,n$), en cada uno de los $n!$ sumandos del desarrollo del determinante figura una de estas sumas, y puede aplicarse la propiedad distributiva obteniéndose el resultado que dice la propiedad.

Ejemplo VIa.1.1

El determinante de una matriz de orden 1 será igual al único elemento que la forma

$$|a_{11}| = a_{11}$$

Para el determinante de una matriz cuadrada de orden 2 tendremos

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = +a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12}$$

es decir, producto de los elementos de la que llamaremos diagonal principal, menos el producto de los elementos de la diagonal secundaria. Para una matriz de orden tres es

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}+a_{21}a_{32}a_{13}+a_{31}a_{12}a_{23}-a_{11}a_{32}a_{23}-a_{21}a_{12}a_{33}-a_{31}a_{22}a_{13}$$

por tanto la suma de los productos de los elementos de la diagonal principal y sus dos paralelas, menos la suma de los productos de los elementos de la diagonal secundaria y sus dos paralelas. Esta regla práctica de obtención de los determinantes de las matrices cuadradas de órdenes 2 y 3 se denomina ***regla de Sarrus***. Para matrices de orden superior a tres el cálculo de su determinante a partir de la definición es muy poco práctico, excepto en los importantes casos particulares siguientes:

Matrices triangulares:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & .. & 0 \\ a_{21} & a_{22} & .. & 0 \\ ..... & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & .. & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & .. & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & .. & a_{2n} \\ ..... & & & \\ 0 & 0 & .. & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}...a_{nn}$$

dado que el único sumando no nulo se obtiene con el elemento a_{11} de la primera fila, acompañado del elemento a_{22} de la segunda, ya que no puede formar producto con el a_{21} por ser de su misma columna,.. y del elemento a_{nn} de la

última fila. El mismo razonamiento si la matriz es triangular superior. Análogamente

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & .. & a_{1n} \\ . & . & . & . \\ 0 & a_{n-1\,2} & .. & a_{n-1n} \\ a_{n1} & a_{n2} & .. & a_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^{n(n-1)/2} a_{n1} a_{n-12} \ldots a_{1n}$$

dado que el único sumando distinto de 0 tiene como permutación de subíndices de fila la $(n,n-1,...,1)$ que tiene $n(n-1)/2$ inversiones.

Matriz diagonal:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & .. & 0 \\ 0 & a_{22} & .. & 0 \\ . & . & . & . \\ 0 & 0 & .. & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} \ldots a_{nn}$$

pues es triangular. En particular, para la matriz unidad **I** será $\det(\mathbf{I}) = 1$.

Matrices derivadas de la matriz unidad mediante transformaciones de fila:

$$\det(\mathbf{F}(i,j)) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & .. & 0 & .. & 0 & .. & 0 \\ 0 & 1 & .. & 0 & .. & 0 & .. & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & .. & 0 & .. & 1 & .. & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & .. & 1 & .. & 0 & .. & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & .. & 0 & .. & 0 & .. & 1 \end{vmatrix} = (-1)^{\sigma_f + \sigma_c} 1_{11} \cdot 1_{22} \cdot \ldots \cdot 1_{ij} \cdot \ldots \cdot 1_{ji} \cdot \ldots \cdot 1_{nn} = -1$$

(a cada factor 1 se le ha indicado sus subíndices de fila y columna), ya que tanto si i es menor o mayor que j las permutación de filas $(1,2,...,i,...,j,...n)$ y la columnas $(1,2,...,j,...,i,...n)$ son de clase distinta y la suma $\sigma_f + \sigma_c$ es impar.

$$\det(\mathbf{F}_\alpha(i)) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & .. & 0 & .. & 0 \\ 0 & 1 & .. & 0 & .. & 0 \\ . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & .. & \alpha & .. & 0 \\ . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & .. & 0 & .. & 1 \end{vmatrix} = \alpha$$

por ser una matriz diagonal.

$$\det(\mathbf{F}_\alpha(i,j)) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & . & . & 0 & . & . & 0 & . & . & 0 \\ 0 & 1 & . & . & 0 & . & . & 0 & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & . & . & 1 & . & . & \alpha & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & . & . & 0 & . & . & 1 & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & . & . & 0 & . & . & 0 & . & . & 1 \end{vmatrix} = 1$$

por ser una matriz triangular.

Matrices con una fila o columna de ceros: El determinante es cero pues en todos los sumandos del desarrollo entra como factor un elemento de esta fila o columna, con lo que todo sumando es 0.

De estos resultados se obtienen propiedades como las enunciadas en la Tabla VIa.1.2.

TABLA VIa.1.2

Propiedades de los determinantes (cont.)

4) Si **A** y **B** son matrices cuadradas, entonces $\det(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}) = \det(\mathbf{A})\cdot\det(\mathbf{B})$.

5) Si en un determinante se permutan dos filas, el determinante cambia de signo.

6) Si en un determinante se multiplica una fila por un escalar α, el determinante queda multiplicado por α.

7) Si a una fila se le suma otra multiplicada por un escalar, el determinante no varía.

Demostraciones:

4) Dejaremos sin demostrar esta primera propiedad, aunque sea el fundamento de las demás, dado que un enfoque correcto de la misma exigiría un marco distinto y más general de introducción de los determinantes. Las otras tres propiedades 5), 6) y 7), que expresan como influyen en un determinante las transformaciones elementales de fila (o columna) que se puedan hacer sobre la matriz, se basan en esta primera y en el hecho de que cualquier transformación elemental de fila es igual al producto por la izquierda de la matriz con la obtenida al aplicar a la matriz unidad la correspondiente transformación de filas. Así:

5) $\det(\mathbf{F}(i,j)\cdot\mathbf{A}) = \det(\mathbf{F}(i,j)) \cdot \det(\mathbf{A}) = -\det(\mathbf{A})$

6) $\det(\mathbf{F}_\alpha(i)\cdot\mathbf{A}) = \det(\mathbf{F}_\alpha(i)) \cdot \det(\mathbf{A}) = \alpha\det(\mathbf{A})$

7) $\det(\mathbf{F}_\alpha(i,j)\cdot\mathbf{A}) = \det(\mathbf{F}_\alpha(i,j)) \cdot \det(\mathbf{A}) = \det(\mathbf{A})$

Como $\det(\mathbf{A}) = \det(\mathbf{A}^t)$ en las propiedades anteriores podemos cambiar la palabra fila por la palabra columna y siguen siendo ciertas. De hecho, cuando esto ocurre, suele hablarse de línea en lugar de fila o columna.

Las propiedades 2), 3) y 4) permiten construir un método para el cálculo de un determinante consistente en aplicar sucesivas transformaciones elementales de fila sobre la matriz hasta reducirla a una matriz triangular, cuyo determinante se calcula de forma inmediata. Se denomina ***método de Gauss***, es de rápida aplicación y fácilmente programable.

Ejemplo VIa.1.2

El método de Gauss permite obtener el valor del siguiente determinante

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 4 & 2 \\ 3 & -1 & 1 & 5 & 3 \\ -2 & -5 & -1 & 3 & -5 \\ 4 & 3 & 2 & -1 & -4 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 3 & -1 & 1 & 5 & 3 \\ -2 & -5 & -1 & 3 & -5 \\ 4 & 3 & 2 & -1 & -4 \end{vmatrix} = \frac{-1}{2} \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & -5 & -7 & -2 & 0 \\ 0 & -4 & 2 & 7 & -3 \\ 0 & 1 & -4 & -9 & -8 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & -7 & -5 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & -4 & 7 & -3 \\ 0 & -4 & 1 & -9 & -8 \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -5 & 12 & 14 \\ 0 & 0 & -4 & 3 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{2\cdot 5\cdot 5} \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -5 & 12 & 14 \\ 0 & 0 & 0 & -33 & -91 \\ 0 & 0 & 0 & 7 & 14 \end{vmatrix} = \frac{1}{2\cdot 5\cdot 5\cdot 33} \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -5 & 12 & 14 \\ 0 & 0 & 0 & -33 & -91 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -175 \end{vmatrix} = -35$$

De acuerdo con este procedimiento de reducción a una matriz triangular, se obtienen las propiedades de la Tabla VIa.1.3

TABLA VIa.1.3

Propiedades de los determinantes (cont.)

8) $\det(\mathbf{A}) \neq 0$ equivale a que $\mathbf{A}$ es regular.

9) Si $\mathbf{A}$ es regular, entonces $\det(\mathbf{A}^{-1}) = 1/\det(\mathbf{A})$.

Demostraciones:

8) En efecto, si la matriz es regular, sus vectores fila son l.i. por lo que la matriz escalonada obtenida después de aplicar las transformaciones elementales de fila tiene sus *n* vectores filas l.i., es decir, los elementos de la diagonal son todos no nulos y el determinante es distinto de 0. Recíprocamente, si $\det(\mathbf{A}) \neq 0$ como el efecto de las transformaciones elementales de fila sobre el determinante es dejarlo igual, cambiarlo de signo o multiplicarlo por un escalar no nulo, la matriz escalonada final tiene también su determinante no nulo, luego sus filas son l.i. y, por ello, las filas de **A** son l.i., es decir, **A** es regular.

9) Si **A** es regular, existe $\mathbf{A}^{-1}$ y es $\mathbf{A}\cdot\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{I}$. Teniendo en cuenta que el determinante de la matriz unidad es 1, tendremos

$$\det(\mathbf{A}\cdot\mathbf{A}^{-1}) = 1 \;\Rightarrow\; \det(\mathbf{A})\cdot\det(\mathbf{A}^{-1}) = 1 \;\Rightarrow\; \det(\mathbf{A}^{-1}) = 1/\det(\mathbf{A})$$

por ser $\det(\mathbf{A}) \neq 0$ al ser **A** regular.

Si en una matriz cuadrada **A** de orden *n* se suprimen la fila y columna de un elemento a_{ij} se obtiene una submatriz $\mathbf{A}_{ij}$ cuadrada cuyo determinante multiplicado por $(-1)^{i+j}$ se denomina ***adjunto*** del elemento a_{ij} y se representa por A_{ij}.

Ejemplo VIa.1.3

En la matriz

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 2 & 7 \\ 3 & 1 & 0 & -1 & 9 \\ 4 & 2 & 0 & 0 & 6 \\ 5 & 3 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 5 & 2 & 8 \end{pmatrix}$$

el adjunto del elemento $a_{25} = 9$ es

$$A_{25} = (-1)^{2+5} \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 0 & 0 \\ 5 & 3 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 5 & 2 \end{vmatrix}$$

El signo asociado para definir el adjunto de un elemento a_{ij} es $(-1)^{i+j}$, cuyo resultado viene dado por la siguiente regla de signos

$$\begin{pmatrix} + & - & + & \cdots \\ - & + & - & \cdots \\ + & - & + & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & + \end{pmatrix}$$

El concepto de adjunto permite obtener las propiedades de la Tabla VIa.1.4:

TABLA VIa.1.4

Propiedades de los determinantes (cont.)

10) Todo determinante es igual a la suma de los productos de los elementos de una línea multiplicados por sus respectivos adjuntos.

11) La suma de los productos de los elementos de una línea por los adjuntos de una paralela, vale cero.

Demostraciones:

1) En efecto, si, por ejemplo, construimos la suma de los productos de los elementos de la fila i por sus adjuntos, tenemos

$$S = a_{i1}A_{i1}+...+a_{ij}A_{ij}+...+a_{in}A_{in}$$

Como cada uno de estos sumandos es, a su vez, una suma de $(n–1)!$ sumandos

$$a_{ij}A_{ij} = \sum_{\substack{(i_1,...,i_{j-1},i_{j+1},...,i_n) \text{ permutación de} \\ (1,...,j-1,j+1,...,n) \text{ con } s \text{ inversiones}}} a_{ij}\,(-1)^{i+j}\,(-1)^{s}\,a_{i_1 1}...a_{i_{j-1}j-1}a_{i_{j+1}j+1}...a_{i_n n}$$

y cada uno de ellos es un término del desarrollo de det (**A**), porque estan formados por n factores uno de cada fila y de cada columna de **A** con el signo $(–1)^s\,(–1)^{i+j} = (–1)^{s+i-1+j-1}$, donde $s+i–1$ coincide con el número de inversiones de la permutación de filas $(i,i_1,...,i_{j–1},i_{j+1},...,n)$ y $j–1$ con el número de inversiones de la permutación de columnas $(j,1,...,j–1,j+1,...,n)$. Tenemos así en total los $n\cdot(n–1)! = n!$ sumandos distintos de det(**A**).

11) Si la suma de los productos de los elementos de una línea por sus adjuntos es igual al determinante, la suma de los productos de los elementos de una línea por los adjuntos de una paralela, vale cero; en efecto, si en el determinante

$$\begin{vmatrix} a_{11} \,..\, a_{1i} \,..\, a_{1j} \,..\, a_{1n} \\ a_{21} \,..\, a_{2i} \,..\, a_{2j} \,..\, a_{2n} \\ .\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,. \\ a_{n1} \,..\, a_{ni} \,..\, a_{nj} \,..\, a_{nn} \end{vmatrix}$$

formamos la suma de los productos de los elementos de la columna i por los adjuntos de los elementos de la columna j

$$a_{1i}A_{1j}+a_{2i}A_{2j}+...+a_{ni}A_{nj}$$

el resultado es igual al determinante

$$\begin{vmatrix} a_{11} \,..\, a_{1i} \,..\, a_{1i} \,..\, a_{1n} \\ a_{21} \,..\, a_{2i} \,..\, a_{2i} \,..\, a_{2n} \\ .\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,. \\ a_{n1} \,..\, a_{ni} \,..\, a_{ni} \,..\, a_{nn} \end{vmatrix}$$

que es 0 por tener dos columnas iguales.

La aplicación de la propiedad 11) permite obtener un determinante mediante el denominado método de Laplace: el determinante de orden *n* lo reducimos al cálculo de la suma de productos de los elementos de una línea multiplicados por sus respectivos adjuntos, que son *n* determinantes de orden *n*−1. Si elegimos una línea con elementos iguales a 0, el número de determinantes a calcular es menor. Y si hacemos previas transformaciones elementales para conseguir que los elementos de una línea sean nulos, todos excepto uno de ellos, el determinante de orden *n* se reduce a un determinante de orden *n*−1 y, reiterando el proceso, podemos llegar hasta un determinante de orden 3 o de orden 2 y aplicar la regla de Sarrus.

Ejemplo VIa.1.4

Este proceso aplicado al determinante del ejemplo VIa.1.2 es:

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 4 & 2 \\ 3 & -1 & 1 & 5 & 3 \\ -2 & -5 & -1 & 3 & -5 \\ 4 & 3 & 2 & -1 & -4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & -2 & -4 \\ 3 & -1 & 1 & 3 & 1 \\ -2 & -5 & -1 & 5 & -3 \\ 4 & 3 & 2 & -5 & -8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -2 & -4 \\ 3 & -1 & 3 & 1 \\ -2 & -5 & 5 & -3 \\ 4 & 3 & -5 & -8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -2 & -4 \\ 5 & 0 & 1 & -3 \\ 8 & 0 & -5 & -23 \\ -2 & 0 & 1 & 4 \end{vmatrix} =$$

$$= -\begin{vmatrix} 5 & 1 & -3 \\ 8 & -5 & -23 \\ -2 & 1 & 4 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 5 & 1 & -3 \\ 33 & 0 & -38 \\ -7 & 0 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 33 & -38 \\ -7 & 7 \end{vmatrix} = -35$$

Ejercicios

VIa.1.-Calcular los siguientes determinantes:

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & 8 & 12 \\ 5 & 0 & 1 & 2 \\ 5 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 4 & 3 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 \\ 3 & 6 & 9 & 12 & 15 \\ 5 & 10 & 15 & 20 & 25 \\ 7 & 14 & 21 & 28 & 35 \\ 9 & 18 & 27 & 36 & 45 \end{vmatrix}$$

VIa.2.-Desarrollar los determinantes

$$\begin{vmatrix} 5 & 7 & 6 & 8 & 5 \\ 3 & \alpha_1 & 4 & 6 & 4 \\ 2 & 3 & \alpha_2 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 0 & \alpha_3 & 2 \\ 2 & 4 & 2 & 4 & \alpha_4 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 4 & 9 & 16 & 25 \\ 1 & 8 & 27 & 64 & 125 \\ 1 & 16 & 81 & 256 & 625 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2+a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2+a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2+a \end{vmatrix}$$

(para $\alpha_1 =$, $\alpha_2 =$, $\alpha_3 =$ y $\alpha_4 =$)

VIa.3.-Calcular

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & .. & 1 \\ -1 & 0 & 1 & .. & 1 \\ -1 & -1 & 0 & .. & 1 \\ .. & .. & .. & .. & .. \\ -1 & -1 & -1 & .. & 0 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & .. & 1 \\ -1 & 0 & 1 & .. & 1 \\ -1 & -1 & 0 & .. & 1 \\ .. & .. & .. & .. & .. \\ -1 & -1 & -1 & .. & 0 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & .. & 1 \\ 1 & 0 & 1 & .. & 1 \\ 1 & 1 & 0 & .. & 1 \\ .. & .. & .. & .. & .. \\ 1 & 1 & 1 & .. & 0 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 1 & n & n & .. & n \\ n & 2 & n & .. & n \\ n & n & 3 & .. & n \\ .. & .. & .. & .. & .. \\ n & n & n & .. & n \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & .. & a_{n-1} & a_n \\ -1 & x & 0 & .. & 0 & 0 \\ 0 & -1 & x & .. & 0 & 0 \\ .. & .. & .. & .. & .. & .. \\ 0 & 0 & 0 & .. & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & .. & -1 & x \end{vmatrix}$$

VIa.4.- Demostrar que

$$\begin{vmatrix} x & a & b & x \\ a & x & x & b \\ b & x & x & a \\ x & b & a & x \end{vmatrix} = (b-a)^2\left[(a+b)^2-4x^2\right]$$

VIa.5.- Calcular

$$\begin{vmatrix} p+q & q & q & .. & q \\ q & p+q & q & .. & q \\ .. & .. & .. & .. & .. \\ q & q & q & .. & p+q \end{vmatrix}$$

VIa.6.- Resolver en **R**, las ecuaciones

$$\begin{vmatrix} 1+x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+x & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1-x \end{vmatrix} = 81 \quad , \quad \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \\ x & x^2 & x^3 & 1 \\ x^2 & x^3 & 1 & x \\ x^3 & 1 & x & x^2 \end{vmatrix} = 512000$$

VIa.7.-Resolver las ecuaciones

$$\begin{vmatrix} x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & 1 & x \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & x \\ 1 & 1 & x & 1 \\ 1 & x & 1 & 1 \\ x & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} x^3 & 8 & 27 & -64 \\ x^2 & 4 & 9 & 16 \\ x & 2 & 3 & -4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} x & 2x+1 & 2x+1 \\ 2x+1 & 3x-1 & 4x \\ 3x-1 & 4x & 6x-1 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} x & a & a \\ a & x & a \\ a & a & x \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} x^3 & 3x^2 & 3x & 1 \\ x^2 & x^2+2x & 2x+1 & 1 \\ x & 2x+1 & x+2 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & .. & 1 \\ -1 & x & 1 & .. & 1 \\ -1 & -1 & x & .. & 1 \\ & & \cdots\cdots\cdots & & \\ -1 & -1 & -1 & .. & x \end{vmatrix} = 0$$

VIa.8.- Sea E el espacio vectorial de las matrices cuadradas de orden (2,2), con coeficientes en **R** y sea $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ un elemento de E. Se define la siguiente aplicación

$$f_{\mathbf{B}} : E \longrightarrow E$$
$$\mathbf{A} \longrightarrow f_{\mathbf{B}}(\mathbf{A}) = \mathbf{BA}$$

Probar que $f_{\mathbf{B}}$ es lineal y demostrar que el $\det(f_{\mathbf{B}}) = (\det(\mathbf{B}))^2$.

VIa.2.- CARACTERISTICA DE UNA MATRIZ

Dada una matriz cualquiera $\mathbf{A} \in M_{(m,n)}(K)$ se define como menor de orden h de **A** a cualquier determinante de orden h formado por h columnas de subíndices $1 \le c_1 < ... < c_h \le n$ y h filas de subíndices $1 \le f_1 < ... < f_h \le m$ de la matriz dada; obviamente el máximo orden de un menor es menor o igual que la menor de las dos dimensiones de la matriz. Llamamos ***característica*** de

la matriz **A** al orden del mayor menor no nulo que puede formarse con sus filas y columnas, es decir, el orden de la submatriz cuadrada de **A**, de mayor orden, entre las que tienen determinante no nulo.

Se verifica que para toda matriz $\mathbf{A}\in M_{(m,n)}(K)$ el rango es igual a la característica: en efecto, sea $\mathbf{A}\in M_{(m,n)}(K)$ tal que

$$\text{rang}(\mathbf{A}) = r \qquad\qquad \text{caract}(\mathbf{A}) = c$$

Veamos que $r \geq c$: por definición de característica existe un menor de orden c no nulo, cuyas filas y columnas podemos suponer que son las c primeras de la matriz **A** (lo cual siempre es posible conseguir mediante transformaciones elementales, que no varían el rango). La submatriz **B** de **A** formada por estas c primeras columnas tiene rango c, ya que sus primeras c filas forman un conjunto de vectores l.i., luego

$$r = \text{rang}(\mathbf{A}) \geq \text{rang}(\mathbf{B}) = c$$

Veamos que también se cumple $c \geq r$ y habremos completado el proceso de demostración: como rang(**A**) = r, en la matriz **A** hay r columnas l.i.; sea **C** la submatriz correspondiente a estas columnas; dado que rang(**C**) = rang($\mathbf{C}^t$), tendremos que en **C** hay r filas l.i., que nos determinarán un menor de orden r no nulo, que también es menor de **A**, por lo que su característica es, por lo menos r, es decir, $c \geq r$. De ambos resultados se obtiene $r = c$.

Ejemplo VI.7.2

Para la matriz

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 1 & 4 \\ 2 & 6 & 2 & 4 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

tenemos que

$$\det(\mathbf{A}) = 0$$

pues la 4ª columna es igual a la 2ª menos la 3ª. Como

$$\begin{vmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 2 & 6 & 2 \\ 3 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 3 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 6 & 2 \end{vmatrix} = 3 \cdot 4 = 12$$

es rang(**A**) = caract(**A**) = 3.

El cálculo de la característica de una matriz, puede plantearse de dos modos: empezando por el menor de mayor orden, o por los orden 2, cuyos valores son calculables inmediatamente. En cualquier caso su cálculo sería bastante largo; existe un modo de simplificar el proceso basado en el siguiente resultado:

"Si en una matriz cuadrada existe un menor de orden r distinto de 0 y todos los menores de orden r+1 que lo contienen son iguales a 0, entonces la característica de la matriz es r. Recíprocamente si la característica de la matriz es r, existe un menor de orden r distinto de cero y todos los menores de orden r+1 que lo contienen, si los hubiere, son 0".

En efecto, sean $f_1,\ldots,f_r$ $c_1,...,c_r$ las filas y columnas que forman el menor no nulo de orden r, por lo que el rango de la submatriz que forman es r y el conjunto de los vectores columna $\{c_1,...,c_r\}$ es l.i.; si a estas r columnas añadimos otra cualquiera c_i la submatriz formada por estas r+1 columnas $c_1,\ldots,c_r,c_i$ y las r filas $f_1,...,f_r$, ampliadas con el nuevo elemento de la columna c_i, tiene rango r, por tener un menor de orden r distinto de 0; todos los determinantes de orden r+1 formados por las columnas $c_1,...,c_r,c_i$ y las filas $f_1,...,f_r$ f_j ($j \neq 1,..,r$) son nulos, por hipótesis, por lo que la fila f_j es combinación lineal de las otras y la submatriz formada por las columnas $c_1,...,c_r,c_i$, y todas las filas tiene rango r; así c_i es combinación lineal de las demás y, como i es cualquiera, la matriz tiene rango r. El recíproco es inmediato a partir de la definición de característica.

Ejemplo VI.7.1

Para el cálculo de la característica de la matriz

$$\begin{pmatrix} 0 & 7 & 7 & -3 & 11 & 8 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 & 2 & 3 & -2 \\ -1 & 2 & 2 & -1 & 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

empezamos por un menor de orden dos no nulo $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} \neq 0$. Calculamos menores de orden tres que contengan a este menor de orden dos distinto de 0. Como

$$\begin{vmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \end{vmatrix} \neq 0$$

continuamos con los menores de orden cuatro que contienen a este menor de orden tres

$$\begin{vmatrix} 0 & 7 & 7 & -3 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 0 \quad \begin{vmatrix} 0 & 7 & 7 & 11 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 0 \quad \begin{vmatrix} 0 & 7 & 7 & 8 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 0 \quad \begin{vmatrix} 0 & 7 & 7 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

con lo que, según el resultado anterior, todo menor de orden cuatro es nulo y la característica de la matriz es 3.

Ejercicios

VI.43 .- Calcular el rango de las matrices

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & \alpha_1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & \alpha_1 & 4 \\ 1 & 1 & 0 & \alpha_1 \\ 2 & 1 & 4 & 5 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & 4 \\ 5 & 2 & -6 & 1 \\ -3 & -8 & 8 & 7 \\ -7 & -13 & 15 & 10 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} -1 & 4 & -2 & 5 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & -2 & 5 \\ 3 & 10 & -6 & 11 & 10 \end{pmatrix}$$

(para $\alpha_1 =$, $\alpha_2 =$, $\alpha_3 =$ y $\alpha_4 =$)

$$\begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & a \\ 1 & 1 & a & a^2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -1 & i & 1-2i \\ i & 1 & -2+i \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1+i & i & 2i \\ -i & 2-i & 1 & 2+i \\ 1-i & -1+i & 2i & 0 \\ -1 & -2i & 1+i & 2+i \end{pmatrix}$$

VI.44.- Sea el endomorfismo de $\mathbf{R}^3$ de matriz $\mathbf{M} = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 2 \\ 1 & a & a \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. Estudiar su rango según los valores de a Demostrar que para todo a el rango de $\mathbf{M}$ es dos.

VI.45 .- Hallar el rango de la matriz

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ a & 0 & a & 0 & a \\ 0 & a & 0 & a & 0 \\ a & a & a & a & a \end{pmatrix}$$

según los valores de $a \in \mathbf{R}$.

VI.8.-APLICACIONES DE LOS DETERMINANTES

Los determinantes son una herramienta muy útil en la resolución de algunos problemas, ya resueltos anteriormente mediante métodos matriciales, a los cuales proporcionan un enfoque distinto y en muchos casos más conveniente.

Supongamos un espacio vectorial E e.v.s. K referido a una base $(\boldsymbol{e}_1,...,\boldsymbol{e}_n)$ y sean los n vectores

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u}_1 &= a_{11}\boldsymbol{e}_1 + ... + a_{n1}\boldsymbol{e}_n \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \boldsymbol{u}_n &= a_{1n}\boldsymbol{e}_1 + ... + a_{nn}\boldsymbol{e}_n \end{aligned}$$

Averiguar si $(\boldsymbol{u}_1,...,\boldsymbol{u}_n)$ es una base de E es equivalente a que

$$\begin{vmatrix} a_{11} \,.\, a_{1n} \\ \,.\,.\,.\,.\,.\,.\,. \\ a_{n1} \,.\, a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0$$

que es la condición para que la matriz que forman las componentes de los vectores $\boldsymbol{u}_1,...,\boldsymbol{u}_n$ sea regular y, por tanto, que los vectores sean l.i..

Veamos un nuevo procedimiento de cálculo de la matriz inversa mediante determinantes. Sabemos que, según resultados anteriores, para una matriz cuadrada **A** de orden *n*

$$\mathbf{A} \text{ inversible} \;\Leftrightarrow\; \text{rang}(\mathbf{A}) = n \;\Leftrightarrow\; \det(\mathbf{A}) \neq 0$$

Supongamos una matriz de este tipo

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \,.\, a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \,.\, a_{2n} \\ \,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,. \\ a_{n1} & a_{n2} \,.\, a_{nn} \end{pmatrix}$$

Construyamos la matriz

$$\mathbf{A}^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} \,.\, A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} \,.\, A_{n2} \\ \,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,. \\ A_{1n} & A_{2n} \,.\, A_{nn} \end{pmatrix}$$

en la que A_{ij} es el adjunto de a_{ij} en **A**; esta matriz se denomina ***matriz adjunta*** de **A**. Si efectuamos el producto de ambas resulta

$$\mathbf{AA}^* = \begin{pmatrix} a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+..+a_{1n}A_{1n} & a_{11}A_{21}+a_{12}A_{22}+..+a_{1n}A_{2n} \;\,.\,. & a_{11}A_{n1}+a_{12}A_{n2}+..+a_{1n}A_{nn} \\ a_{21}A_{11}+a_{22}A_{12}+..+a_{2n}A_{1n} & a_{21}A_{21}+a_{22}A_{22}+..+a_{2n}A_{2n} \;\,.\,. & a_{21}A_{n1}+a_{22}A_{n2}+..+a_{2n}A_{nn} \\ \,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\

$$\mathbf{A}^* = \det(\mathbf{A})\,\mathbf{A}^{-1}\mathbf{I} \;\Rightarrow\; \mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det(\mathbf{A})}\,\mathbf{A}^*$$

es decir, la matriz inversa es igual a la matriz adjunta multiplicada por el inverso del determinante.

Ejemplo VI.8.1

Para la matriz

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

tenemos

$$\det(\mathbf{A}) = \begin{vmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = -7$$

luego es regular y tiene inversa. Como

$$\mathbf{A}^* = \begin{pmatrix} -2 & -4 & 3 \\ -3 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & -3 \end{pmatrix}$$

la inversa es

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 2/7 & 4/7 & -3/7 \\ 3/7 & -1/7 & -1/7 \\ -2/7 & 3/7 & 3/7 \end{pmatrix}$$

Ejemplo VI.8.2

Veremos a continuación un esbozo de como con la ayuda de una matriz inversible se pueden construir y descifrar claves (Criptografía) en la transmisión de mensajes. Si queremos enviar la siguiente información:

"LAS MATEMATICAS SON UTILES"

y no queremos que sea entendida por ningún posible interceptor, podemos realizar los siguiente pasos:

a) Asignamos a cada letra una de las 26 letras del alfabeto un número de orden que sea un elemento del conjunto $\mathbf{Z}/(26)$

A, B, C, D, E, ..., X, Y, Z
1, 2, 3, 4, 5, ..., 24, 25, 0

b) Agrupamos las letras de nuestro mensaje en grupos de n letras, para $n \in \mathbf{N}^*$; por ejemplo, para $n = 3$

LAS MAT EMA TIC ASS ONU TIL ESX

añadiendo la letra X para completar el último grupo.

c) Escribimos cada grupo de n letras como un vector de $\mathbf{R}^n$ tal que sus componentes sean los números asignados a cada una de ellas, según el apartado a). Construimos con estos vectores una matriz $\mathbf{A}$ de n filas y tantas columnas como grupos y de coeficientes en $\mathbf{Z}/(26)$. En nuestro ejemplo es

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 12 & 13 & 5 & 21 & 1 & 16 & 21 & 5 \\ 1 & 1 & 13 & 9 & 20 & 14 & 9 & 20 \\ 20 & 21 & 1 & 3 & 20 & 22 & 12 & 24 \end{pmatrix}$$

d) Construimos una matriz cuadrada $\mathbf{M} \in M_{(n,n)}(\mathbf{Z})$ inversible y tal que su determinante sea igual a ± 1 (matriz codificadora), para que los coeficientes de $\mathbf{M}^{-1}$ pertenezcan a $\mathbf{Z}$. En nuestro caso tomamos, por ejemplo

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{M}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

e) Multiplicando la matriz $\mathbf{M}$ por la matriz $\mathbf{A}$, obtenemos una nueva matriz $\mathbf{B}$, que proporciona el mensaje codificado. En nuestro caso es

$$\mathbf{B} = \mathbf{MA} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 12 & 13 & 5 & 21 & 1 & 16 & 21 & 5 \\ 1 & 1 & 13 & 9 & 20 & 14 & 9 & 20 \\ 20 & 21 & 1 & 3 & 20 & 22 & 12 & 24 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 21 & 22 & 14 & 12 & 40 & 36 & 21 & 44 \\ 53 & 56 & 20 & 36 & 61 & 74 & 54 & 73 \\ 115 & 121 & 49 & 63 & 161 & 168 & 108 & 185 \end{pmatrix}$$

Convirtiendo los elementos de $\mathbf{B}$ a elementos de $\mathbf{Z}/(26)$ tenemos la matriz

$$\mathbf{B}' = \begin{pmatrix} 21 & 22 & 14 & 12 & 14 & 10 & 21 & 18 \\ 1 & 4 & 20 & 10 & 9 & 22 & 2 & 21 \\ 11 & 17 & 23 & 11 & 5 & 12 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

que da el mensaje codificado alfabeticamente

21, 1,11,22, 4,17,14,20,23,12,10, 11,14, 9, 5,10,22,12,21, 2, 4,18,21, 3
T ,A, K, U, D, P, N, S, V, L, J, K, N, I, E, J, U, L, T, B, D,Q, T, C

El receptor adecuado del mensaje, construirá la matriz **B'**. Será conocedor de la matriz **M**, por lo cual podrá construir con facilidad la matriz $\mathbf{M}^{-1}$, obtener $\mathbf{A} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{B}'$ y a partir de ella escribir la información original.

Veamos a continuación como los determinantes fundamentan otro procedimiento para la resolución de sistemas de ecuaciones lineales. Recordemos los resultados básicos sobre compatibilidad de un sistema de ecuaciones lineales con *m* ecuaciones y *n* incógnitas. Escrito de forma matricial será

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$$

siendo **A** la matriz de los coeficientes, del tipo (*m*,*n*), **x** la matriz columna de las incógnitas, del tipo (*n*,1), y **b** la matriz columna formada por los términos independientes, del tipo (*m*,1). El sistema es compatible si y sólo si las matrices de coeficientes y la ampliada tienen el mismo rango, es decir,

$$\text{rang}(\mathbf{A}) = \text{rang}(\mathbf{A}|\mathbf{b}) = r$$

Si el rango común *r* es igual al número de incógnitas *n*, el sistema es determinado; si *r* es menor que *n* el sistema es indeterminado y, en este caso, la solución general es igual a una solución particular más cualquier combinación lineal de *n*−*r* soluciones l.i. del sistema homogéneo asociado **Ax** = **0**.

Vamos a estudiar la resolución de sistemas mediante determinantes, según el valor de *r*.

1º Caso : $r = n = m$ (sistema de Cramer)

El sistema tiene igual número de ecuaciones que de incógnitas, la matriz **A** es regular y según el Teorema de Rouché existe una única solución, que obtendremos teniendo en cuenta que:

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b} \;\Rightarrow\; \mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b} \;\Rightarrow\; \mathbf{x} = \frac{\mathbf{A}^{*}\mathbf{b}}{\det(\mathbf{A})}$$

es decir,

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . . \\ x_n \end{pmatrix} = \frac{1}{\det(\mathbf{A})} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} \,.\, . \, A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} \,.\, . \, A_{n2} \\ . \,.\, .\, .\, .\, .\, .\, .\, .\, .\, .\, . \\ A_{1n} & A_{2n} \,.\, . \, A_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ . . \\ b_n \end{pmatrix}$$

y desarrollando e igualando los elementos de las matrices resultantes en ambos miembros la

primera incógnita es

$$x_1 = \frac{A_{11}b_1 + A_{21}b_2 + .. + A_{n1}b_n}{\det(\mathbf{A})} = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & . & . & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & . & . & a_{2n} \\ . & . & . & . & . \\ b_n & a_{n2} & . & . & a_{nn} \end{vmatrix}}{\det(\mathbf{A})}$$

la segunda

$$x_2 = \frac{A_{12}b_1 + A_{22}b_2 + .. + A_{n2}b_n}{\det(\mathbf{A})} = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & . & . & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & . & . & a_{2n} \\ . & . & . & . & . \\ a_{n1} & b_n & . & . & a_{nn} \end{vmatrix}}{\det(\mathbf{A})}$$

y, así sucesivamente, para la última

$$x_n = \frac{A_{1n}b_1 + A_{2n}b_2 + .. + A_{nn}b_n}{\det(\mathbf{A})} = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & . & . & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & . & . & b_2 \\ . & . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & . & . & b_n \end{vmatrix}}{\det(\mathbf{A})}$$

Cada incógnita resulta ser igual a un cociente en el que el divisor es el determinante de los coeficientes del sistema y el dividendo es el determinante de la matriz resultante de sustituir en la matriz del sistema **A** la columna de coeficientes de la incógnita por los términos independientes.

Ejemplo VI.8.3

El sistema

$$\left.\begin{array}{l} 3x+2z = 1 \\ x+y+z = 1 \\ 2x+5z = 4 \end{array}\right\}$$

tiene tres ecuaciones , tres incógnitas y

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 5 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(\mathbf{A}) = 11 \Rightarrow \text{rang}(\mathbf{A}) = 3$$

siendo pues un sistema de Cramer cuya solución es

$$x=\frac{\begin{vmatrix}1&0&2\\1&1&1\\4&0&5\end{vmatrix}}{11}=\frac{-3}{11}\qquad y=\frac{\begin{vmatrix}3&1&2\\1&1&1\\2&4&5\end{vmatrix}}{11}=\frac{4}{11}\qquad z=\frac{\begin{vmatrix}3&0&1\\1&1&1\\2&0&4\end{vmatrix}}{11}=\frac{10}{11}$$

2º caso : $r=m<n$ o $r=n<m$ o $r<n$ y $r<m$

En primer lugar, cuando $r<m$, hay que probar la compatibilidad rango(**A**) = rango(**A**|**b**) = r. Si el sistema es compatible la solución general puede hallarse de acuerdo con el siguiente razonamiento: la matriz **A**|**b** contiene un menor de orden r cuyas filas indican las ecuaciones l.i. del sistema, que llamaremos ***ecuaciones principales***, de forma que las demás filas corresponden a ecuaciones que son combinación lineal de éstas, por lo que pueden ser suprimidas quedando como sistema equivalente el formado por las ecuaciones principales; las r columnas l.i. del menor distinto de cero que define el rango de **A** determinan las incógnitas, que llamaremos ***incógnitas principales***, de modo que pasando al segundo miembro los términos que contienen a las incógnitas no principales, formamos un sistema de Cramer cuya solución nos da la solución general del sistema. Por ejemplo si las filas y columnas del menor no nulo de **A** son las r primeras hemos reducido el sistema al

$$\begin{aligned}a_{11}x_1+\ldots+a_{1r}x_r &= b_1-a_{1r+1}x_{r+1}-\ldots-a_{1n}x_n\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ a_{r1}x_1+\ldots+a_{rr}x_r &= b_r-a_{rr+1}x_{r+1}-\ldots-a_{rn}x_n\end{aligned}$$

cuya solución expresará las incógnitas principales $x_1,\ldots,x_r$ en función de $x_{r+1},\ldots,x_n$.

Ejemplo VI.8.4

Para el sistema

$$\left.\begin{aligned}2x+3y-z &= 1\\ x+y+3z &= 7\\ 3x+4y+2z &= 8\\ x+2y-4z &= -6\end{aligned}\right\}$$

se verifica

$$\text{rang}(\mathbf{A})=\text{rang}\begin{pmatrix}2&3&-1\\1&1&3\\3&4&2\\1&2&-4\end{pmatrix}=2=\text{rang}\begin{pmatrix}2&3&-1&1\\1&1&3&7\\3&4&2&8\\1&2&-4&-6\end{pmatrix}$$

siendo distinto de 0 el menor

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$$

que señala como ecuaciones principales a las dos primeras y como incógnitas principales a x e y. El sistema es equivalente al formado por estas ecuaciones e incógnitas, es decir,

$$\left.\begin{aligned} 2x+3y &= 1+z \\ x+y &= 7-3z \end{aligned}\right\}$$

cuya solución es

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1+z & 3 \\ 7-3z & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}} = -10z+20 \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1+z \\ 1 & 7-3z \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}} = 7z-13$$

Caso particular interesante es el de un sistema homogéneo con n ecuaciones y n incógnitas tal que el rango de la matriz de coeficientes sea $n-1$, es decir,

$$\begin{aligned} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n &= 0 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n &= 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\ldots+a_{nn}x_n &= 0 \end{aligned}$$

con

$$\operatorname{rang}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \ldots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \ldots a_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \\ a_{n1} & a_{n2} \ldots a_{nn} \end{pmatrix} = n-1$$

Esto significa que existe un menor de orden $n-1$ distinto de cero que podemos suponer, sin pérdida de generalidad en el razonamiento, que está formado por las primeras $n-1$ filas y columnas; por ello, y según lo anterior, el sistema equivale al

$$\begin{aligned} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n-1}x_{n-1} &= -a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n-1}x_{n-1} &= -a_{2n}x_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ a_{n-11}x_1+a_{n-12}x_2+\ldots+a_{n-1n-1}x_{n-1} &= -a_{n-1n}x_n \end{aligned}$$

que es un sistema de Cramer, siendo la solución para x_1 el cociente

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} -a_{1n}x_n & a_{12} \ldots a_{1n-1} \\ -a_{2n}x_n & a_{22} \ldots a_{2n-1} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ -a_{n-1n}x_n & a_{n-12} \ldots a_{n-1n-1} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \ldots a_{1n-1} \\ a_{21} & a_{22} \ldots a_{2n-1} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n-11} & a_{n-12} \ldots a_{n-1n-1} \end{vmatrix}} = \frac{-x_n(-1)^{n-2}\begin{vmatrix} a_{12} & \ldots & a_{1n-1} & a_{1n} \\ a_{22} & \ldots & a_{2n-1} & a_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n-12} & \ldots & a_{n-1n-1} & a_{n-1n} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \ldots a_{1n-1} \\ a_{21} & a_{22} \ldots a_{2n-1} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n-11} & a_{n-12} \ldots a_{n-1n-1} \end{vmatrix}}$$

El determinante del denominador es A_{nn}, adjunto del elemento a_{nn} en la matriz de coeficientes del sistema y el numerador es A_{n1}, adjunto del elemento a_{n1} en la matriz del sistema. Podemos, por tanto, escribir

$$x_1 = \frac{x_n A_{n1}}{A_{nn}}$$

luego

$$\frac{x_1}{A_{n1}} = \frac{x_n}{A_{nn}}$$

si A_{n1} no es nulo (si $A_{n1} = 0$, entonces $x_1 = 0$ por lo que podemos escribir la solución en la forma anterior aunque A_{n1} sea nulo, interpretando que en este caso es nula la incógnita del numerador). Análogamente se obtienen las demás soluciones, que pueden escribirse en la forma

$$\frac{x_2}{A_{n2}} = \frac{x_n}{A_{nn}} \quad , \ldots , \quad \frac{x_{n-1}}{A_{nn-1}} = \frac{x_n}{A_{nn}}$$

o escribiéndolas conjuntamente

$$\frac{x_1}{A_{n1}} = \frac{x_2}{A_{n2}} = \ldots = \frac{x_{n-1}}{A_{nn-1}} = \frac{x_n}{A_{nn}}$$

es decir, valores proporcionales a los adjuntos de los elementos de la fila de la matriz que no forma parte del menor principal.

Ejemplo VI.8.5

El sistema de tres ecuaciones e incógnitas

$$\left.\begin{aligned} 2x+3y-z &= 0 \\ x+y+3z &= 0 \\ 2x+2y+6z &= 0 \end{aligned}\right\}$$

puede comprobarse que verifica rang(**A**) = 2, ya que

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 6 \end{vmatrix} = 0$$

siendo distinto de 0 el menor

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$$

Por ello, el sistema tiene por solución

$$\frac{x}{10} = \frac{y}{-7} = \frac{z}{-1}$$

Ejercicios

VI.45.- Demostrar que ((1,–1,α_1,0), (α_2,0,2,2), (0,–1,–3,α_3), (1,–1,0,α_4)) es una base de $\mathbf{R}^4$ y hallar la matriz del cambio de esta base a la base canónica, para $\alpha_1 =$, $\alpha_2 =$, $\alpha_3 =$, $\alpha_4 =$.

VI.46.- Hallar las inversas de las matrices siguientes:

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 6 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 0 \\ -3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 5 & -2 \\ 3 & 5 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -5 & -7 \end{pmatrix}$$

VI.47.- Discutir para los diferentes valores de $m \in \mathbf{R}$ el sistema

$$\left.\begin{array}{l} x+my+z = m+2 \\ x+y+mz = -2(m+1) \\ mx+y+z = m \end{array}\right\}$$

VI.48.- Discutir y resolver según los valores de k y m el sistema

$$\left.\begin{array}{r} x-2y = 3k+3m \\ x-y = 2k+2m+1 \\ mx+ky+5 = m^2-k^2-1 \\ kx+my+7 = k^2-m^2+13 \end{array}\right\}$$

VI.49.- Discutir según los valores de a y b, los sistemas

$$\left.\begin{array}{r} ax+y+z+t = a \\ x+ay+z+t = a \\ x+y+az+t = a \\ x+y+z+at = a \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{r} ax+by+z = 1 \\ x+aby+z = b \\ x+by+az = 1 \end{array}\right\}$$

VI.50.- Estudiar la compatibilidad de los sistemas lineales siguientes y resolver el segundo:

$$\left.\begin{array}{r} 2x+y-z = b_1 \\ x+2y+z = b_2 \\ 3x+y-2z = b_3 \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{r} ax+y+z = 1 \\ x+ay+z = a \\ x+y+az = a^2 \end{array}\right\}$$

VI.51.- Resolver, según los valores de los parámetros reales a, b, c, d el sistema

$$\left.\begin{array}{r} x+y+z = 1 \\ ax+by+cz = d \\ a^2x+b^2y+c^2z = d^2 \end{array}\right\}$$

Encontrar el valor de $P = a^3x+b^3y+c^3z$, si (x,y,z) es una solución del sistema anterior.

VI.52.- Bajo que condición el sistema sobre **R**

$$\left.\begin{array}{r} y+az+a^2t = 1 \\ x+a^2z+at = -1 \\ ax+a^2y+t = 1 \\ a^2x+ay+z = 1 \end{array}\right\}$$

posee solución única. Resuélvase en este caso concreto.

VI.53.- Hallar a y b para el siguiente sistema admita solución distinta de la trivial:

$$\left.\begin{array}{r} 2x-ay+bz = 0 \\ x-ay+z = 0 \\ 2bx+2y+3z = 0 \\ 3x-y+2z = 0 \end{array}\right\}$$

PROCEDIMIENTOS PRÁCTICOS BASICOS

Los procedimientos básicos que forman los elementos constructivos a partir de los cuales pueden abordarse los problemas que tratan sobre las materias desarrolladas en este Cuaderno, son los siguientes:

- Cálculo de determinante por el algoritmo de Gauss.
- Cálculo de determinante por la regla de Laplace.
- Cálculo de la característica de una matriz.
- Cálculo del rango por determinantes.
- Averiguar si *n* vectores de un e.v. de dimensión *n* forman una base
- Hallar la inversa de una matriz regular.
- Resolver un sistema lineal mediante determinantes.

EJERCICIOS DE RECAPITULACION

VI.54.- Calcular los siguientes determinantes:

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 & .. & 2n+1 \\ -1 & a & 0 & 0 & .. & 0 \\ 0 & -1 & a & 0 & .. & 0 \\ 0 & 0 & -1 & a & .. & 0 \\ . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & 0 & .. & a \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} a & b & * & * & .. & * \\ a & a & b & * & .. & * \\ a & a & a & b & .. & * \\ a & a & a & a & .. & * \\ . & . & . & . & . & . \\ a & a & a & a & .. & a \end{vmatrix}$$

donde los * denotan escalares cualquiera.

VI.55.- Resolver la ecuación

$$\begin{vmatrix} a+x & x & x & x \\ x & b+x & x & x \\ x & x & c+x & x \\ x & x & x & d+x \end{vmatrix} = 0$$

VI.56.- Demostrar que

$$\begin{vmatrix} x & a & b & c \\ a & x & c & b \\ b & c & x & a \\ c & b & a & x \end{vmatrix} = (x+a+b+c)\,(x+a-b-c)\,(x-a+b-c)\,(x-a-b+c)$$

VI.57.-Resolver las ecuaciones

$$\begin{vmatrix} x-1 & x^2-1 & x^3-1 \\ 2x-4 & x^2-4 & x^3-8 \\ 3x-9 & x^2-9 & x^3-27 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} a-x & b-x & c-x \\ a'-x & b'-x & c'-x \\ a''-x & b''-x & c''-x \end{vmatrix} = 0$$

VI.58.-Dada una matriz $\mathbf{A} \in M_{(n,n)}(K)$, considérese el endomorfismo

$$\begin{array}{rcl} f_{\mathbf{A}} : M_{(n,n)}(K) & \longrightarrow & M_{(n,n)}(K) \\ \mathbf{M} & \longrightarrow & f_{\mathbf{A}}(\mathbf{M}) = \mathbf{AM} \end{array}$$

Demostrar que $\det(f_{\mathbf{A}}) = (\det(\mathbf{A}))^n$. Lo mismo si $f_{\mathbf{A}}(\mathbf{M}) = \mathbf{MA}$. Si $f_{\mathbf{A}}(\mathbf{M}) = \mathbf{MA}-\mathbf{AM}$, demostrar que $\det(f_{\mathbf{A}}) = 0$.

BIBLIOGRAFIA

de Burgos J. (1988). *Curso de Algebra y Geometría*. Alhambra. Madrid.

Dixmier J. (1974). *Matemáticas Generales.* Editorial Aguilar. Madrid.

Godement R. (1974). *Algebra*. Tecnos. Madrid.

Hoffmann R., Kunze R. (1974). *Algebra Lineal*. Prentice. Madrid.

Lentin A., Rivaud J. (1973). *Algebra Moderna*. Aguilar. Madrid.

Noble B., Daniel J.W. (1988). *Applied Linear Algebra*. Prentice Hall. London.

Queysanne M. (1985) *Algebra*. Vicens-Vives. Barcelona.

Sainz M.A., Serarols J.L. Pérez A.M. (1994). *Álgebra*. Escuela Politécnica Superior. Gerona.

Sancho J. (1974). *Algebra lineal y geometría*. Universidad de Zaragoza.

Torregrosa J.R., Jordan C. (1987). *Algebra Lineal y sus aplicaciones*. McGraw-Hill. Madrid.

Xambó S. (1977). *Algebra Lineal y geometrias lineales*. EUNIBAR. Barcelona.