CUADERNO VII

FORMAS CANONICAS DE LOS ENDOMORFISMOS

Miguel A. Sainz, Joan Serarols, Anna M. Pérez
Dep. de Informática y Matemática Aplicada
Universidad de Girona

RESUMEN: La matriz asociada a un endomorfismo *f* depende de la base de referencia del espacio vectorial. Por esto cabe preguntarse si existirá alguna base respecto de la cual la matriz de *f* sea lo más simple posible. Obviamente las matrices más simples son la matriz nula y la matriz unidad, que no serán matrices de *f* salvo en los casos particulares de que *f* sea la aplicación nula o la idéntica; exceptuadas éstas, las matrices más simples son las diagonales y vamos a resolver el problema de la diagonalización de un endomorfismo, es decir, cuándo y cómo puede encontrarse una base respecto de la cual la matriz **D** de *f* sea diagonal. Veremos que no en todos los casos el problema de la diagonalización tiene solución, por lo que para situaciones más generales buscaremos otras matrices simples como las triangulares y la denominada forma de Jordan.

VII.1 .- VALORES Y VECTORES PROPIOS DE UN ENDOMORFISMO

Sea *f* un endomorfismo de *V*, e.v.s. $K = \mathbf{R}$ o $\mathbf{C}$, de dimensión *n*, que respecto de una base dada ($\boldsymbol{e}$), tiene de matriz **A** y vamos a averiguar cuándo y cómo puede encontrarse una base respecto de la cual la matriz **D** de *f* sea diagonal. La relación entre ambas matrices es

$$\mathbf{D} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{M}$$

siendo **M** la matriz del cambio de base. Por ello, diagonalizar una matriz cuadrada **A** es encontrar una matriz regular **M** tales que el producto $\mathbf{M}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{M}$ sea una matriz diagonal. Cuando el problema tenga solución diremos que el endomorfismo, o la matriz, es diagonalizable y en tal caso, si ($\boldsymbol{x}$) es la base de *V* respecto de la cual la matriz de *f* es

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & .. & 0 \\ 0 & \lambda_2 & .. & 0 \\ . & . & . & . \\ 0 & 0 & .. & \lambda_n \end{pmatrix}$$

será

$$f(\boldsymbol{x}_1) = \lambda_1\boldsymbol{x}_1 + 0\cdot\boldsymbol{x}_2 + \ldots + 0\cdot\boldsymbol{x}_n$$

$$f(\boldsymbol{x}_2) = 0\cdot\boldsymbol{x}_1 + \lambda_2\boldsymbol{x}_2 + \ldots + 0\cdot\boldsymbol{x}_n$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$f(\boldsymbol{x}_n) = 0\cdot\boldsymbol{x}_1 + 0\cdot\boldsymbol{x}_2 + \ldots + \lambda_n\boldsymbol{x}_n$$

es decir, los vectores de la base son soluciones de la ecuación

$$f(\boldsymbol{x}) = \lambda \boldsymbol{x}$$

que es la clave del problema. Caractericemos sus soluciones.

Diremos que un vector $\boldsymbol{x} \in V$ es ***vector propio de un endomorfismo*** f si y sólo si existe un escalar $\lambda \in K$ tales que $f(\boldsymbol{x}) = \lambda \boldsymbol{x}$.

Diremos que un escalar $\lambda \in K$ es ***valor propio de un endomorfismo*** f si y sólo si existe un vector $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$ tales que $f(\boldsymbol{x}) = \lambda \boldsymbol{x}$.

Así pues las soluciones de la ecuación anterior se denominan vectores y valores propios de f, están entre sí asociados y cumplen las propiedades que se enuncian en la Tabla VII.1.1

TABLA VII.1.1

Propiedades de los vectores y valores propios

1) $\boldsymbol{0}$ es vector propio asociado a cualquier valor propio.

2) Un vector propio $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$ tiene un único valor propio asociado.

3) Si λ es un valor propio, el conjunto de vectores propios

$$V(\lambda) = \{\boldsymbol{x} \in V \mid f(\boldsymbol{x}) = \lambda \boldsymbol{x}\}$$

asociados a él es un subespacio de V con $\dim(V(\lambda)) \geq 1$.

4) Si λ es un valor propio de f, entonces

$$V(\lambda) = \mathrm{Nuc}(f - \lambda I_V)$$

5) El subespacio $V(\lambda)$ es invariante por f.

6) Si λ_1 y λ_2 son valores propios distintos, entonces

$$V(\lambda_1) \cap V(\lambda_2) = \{\boldsymbol{0}\}$$

7) Si $\lambda_1,...,\lambda_r$ son valores propios distintos, $\boldsymbol{x}_1 \in V(\lambda_1)$ ... $\boldsymbol{x}_r \in V(\lambda_r)$ y $\boldsymbol{x}_1 ... \boldsymbol{x}_r$ son distintos de $\boldsymbol{0}$, entonces $\{\boldsymbol{x}_1,...,\boldsymbol{x}_r\}$ es l.i.

8) Si $\lambda_1,...,\lambda_r$ son valores propios distintos, entonces

$$V(\lambda_1) \oplus ... \oplus V(\lambda_r)$$

9) Si $\dim(V) = n$, f tiene como máximo n valores propios.

Demostraciones:

1) En efecto, para cualquier $\lambda \in K$ se cumple que

$$f(\boldsymbol{0}) = \boldsymbol{0} = \lambda \boldsymbol{0}$$

2) Si el vector propio $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$ tuviera dos valores propios asociados, sería

$$\left.\begin{array}{l} f(\boldsymbol{x}) = \lambda_1 \boldsymbol{x} \\ f(\boldsymbol{x}) = \lambda_2 \boldsymbol{x} \end{array}\right| \Rightarrow \quad (\lambda_1 - \lambda_2)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = \lambda_2$$

3) El conjunto

$$V(\lambda) = \{\boldsymbol{x} \in V \mid f(\boldsymbol{x}) = \lambda \boldsymbol{x}\}$$

es un subespacio de V ya que para cualesquiera $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 \in V(\lambda)$ y $\alpha, \beta \in K$, se verifica

$$f(\alpha \boldsymbol{x}_1 + \beta \boldsymbol{x}_2) = \alpha f(\boldsymbol{x}_1) + \beta f(\boldsymbol{x}_2) = \alpha(\lambda \boldsymbol{x}_1) + \beta(\lambda \boldsymbol{x}_2) = \lambda(\alpha \boldsymbol{x}_1 + \beta \boldsymbol{x}_2)$$

es decir, $\alpha \boldsymbol{x}_1 + \beta \boldsymbol{x}_2$ es un vector propio asociado a λ, luego

$$\alpha \boldsymbol{x}_1 + \beta \boldsymbol{x}_2 \in V(\lambda)$$

Además $\dim(V(\lambda)) \geq 1$, pues por definición de valor propio, existe un vector $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{x} \in V$ tal que $\boldsymbol{x} \in V(\lambda)$.

4) En efecto, si $\boldsymbol{x} \in V(\lambda)$ es

$$f(\boldsymbol{x}) = \lambda \boldsymbol{x} \;\Leftrightarrow\; f(\boldsymbol{x}) = \lambda I_V(\boldsymbol{x}) \;\Leftrightarrow\; f(\boldsymbol{x}) - \lambda I_V(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0} \;\Leftrightarrow\; (f - \lambda I_V)(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0} \;\Leftrightarrow\; \boldsymbol{x} \in \mathrm{Nuc}(f - \lambda I_V)$$

5) En efecto, para cualquier $\boldsymbol{x} \in V(\lambda)$ es $f(\boldsymbol{x}) = \lambda \boldsymbol{x} \in V(\lambda)$.

6) Si los subespacios asociados a ambos valores propios distintos, $V(\lambda_1)$ y $V(\lambda_2)$, tienen algún vector común $\boldsymbol{x}$, será

$$\boldsymbol{x} \in V(\lambda_1) \cap V(\lambda_2) \;\Rightarrow\; f(\boldsymbol{x}) = \lambda_1 \boldsymbol{x} \;\wedge\; f(\boldsymbol{x}) = \lambda_2 \boldsymbol{x} \;\Rightarrow\; (\lambda_1 - \lambda_2)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} \;\Rightarrow\; \boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$$

7) Por inducción sobre r : para $r = 1$ sea $\boldsymbol{x} \in V(\lambda)$ con $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$, luego $\{\boldsymbol{x}\}$ l.i. y la proposición es cierta. Supongámosla ahora válida para el caso de $r-1$ valores propios distintos dos a dos, y demostraremos que se cumple para r; sea

$$\beta_1 \boldsymbol{x}_1 + \ldots + \beta_r \boldsymbol{x}_r = \boldsymbol{0} \;\Rightarrow\; f(\beta_1 \boldsymbol{x}_1 + \ldots + \beta_r \boldsymbol{x}_r) = \boldsymbol{0} \;\Rightarrow\; \beta_1 \lambda_1 \boldsymbol{x}_1 + \ldots + \beta_r \lambda_r \boldsymbol{x}_r = \boldsymbol{0}$$

Por otro lado si multiplicamos la ecuación de la independencia lineal por λ_1, que lo consideramos distinto de cero (si así no fuera, bastaría permutar el orden de los valores propios dados), y la restamos de la última igualdad anterior:

$$\beta_2(\lambda_2 - \lambda_1)\boldsymbol{x}_2 + \ldots + \beta_r(\lambda_r - \lambda_1)\boldsymbol{x}_r = \boldsymbol{0}$$

que es una combinación lineal de $(r-1)$ vectores propios no nulos asociados a valores

propios distintos dos a dos; según la hipótesis de inducción formarán un conjunto l.i., lo que implica que

$$\left.\begin{array}{r} \beta_2(\lambda_2-\lambda_1) = 0 \\ \cdots\cdots\cdots \\ \beta_r(\lambda_r-\lambda_1) = 0 \end{array}\right| \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} \beta_2 = 0 \\ \cdots\cdots \\ \beta_r = 0 \end{array}$$

pues para todo $i \neq j$ es $\lambda_i \neq \lambda_j$ por hipótesis. Sustituyendo estos valores en la ecuación de la independencia lineal, se obtiene

$$\beta_1 \boldsymbol{x}_1 = \boldsymbol{0} \quad \Rightarrow \quad \beta_1 = 0$$

al ser, por hipótesis, $\boldsymbol{x}_1 \neq \boldsymbol{0}$. Así todos los coeficientes de la combinación lineal son nulos y el conjunto es l.i.

8) Inmediato a partir de 6)

9) Por reducción al absurdo, si existieran más de n valores propios distintos, eligiendo un vector no nulo de cada uno de sus subespacios de vectores propios asociados, tendríamos, según la propiedad 7), más de n vectores l.i. lo que no es posible en un e.v. de dimensión n.

Las propiedades anteriores de los vectores y valores propios caracterizan suficientemente a las soluciones de la ecuación básica

$$f(\boldsymbol{x}) = \lambda \boldsymbol{x}$$

estando ahora en situación de resolverla. Primero hallaremos los escalares solución, los valores propios, y después los vectores propios. Si $(\boldsymbol{e}_1,\ldots,\boldsymbol{e}_n)$ es una base de V, respecto de la cual la matriz de f es

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

de razonamientos análogos a los anteriores, tenemos

λ valor propio de f $\Leftrightarrow$ existe $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$ tal que $(f-\lambda I_V)(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x})-\lambda \boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ $\Leftrightarrow$ $\mathrm{Nuc}(f-\lambda I_V) \neq \{\boldsymbol{0}\}$

lo que equivale a que

$$\det(\mathbf{A}-\lambda \mathbf{I}) = \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & \ldots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

El desarrollo de este determinante, como suma de los productos de elementos de cada fila y columna, dará una ecuación polinómica en λ que se denomina ***ecuación característica*** y cuyas soluciones son los valores propios. El polinomio cuyos coeficientes son los mismos que los de la ecuación característica se denomina ***polinomio característico*** (p.c.). Su término

independiente, al coincidir con el valor numérico del polinomio en 0, es el determinante de la matriz **A** y el término de mayor grado procederá del producto

$$(a_{11}-\lambda)...(a_{nn}-\lambda) = (-1)^n\lambda^n+(-1)^{n-1}(a_{11}+...+a_{nn})\lambda^{n-1}+...$$

no habiendo ningún otro sumando del desarrollo del determinante que dé un término con λ^{n-1} (porque estaría formado por $n-1$ factores del tipo $(a_{ii}-\lambda)$ a los que forzosamente debiera acompañar como n–ésimo factor el binomio $(a_{jj}-\lambda)$ restante, al no poder existir en un sumando dos elementos de la misma fila o columna). Así pues la ecuación y el polinomio característicos son respectivamente

$$(-1)^n\lambda^n+(-1)^{n-1}(a_{11}+...+a_{nn})\lambda^{n-1}+...+\det(\mathbf{A}) = 0$$

$$(-1)^n x^n+(-1)^{n-1}(a_{11}+...+a_{nn})x^{n-1}+...+\det(\mathbf{A}) = 0$$

Si referimos V a otra base, respecto de la cual la matriz de f fuera **B** se verifica que

$$\mathbf{B} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{M}$$

siendo **M** la matriz del cambio de base, de donde

$$\det(\mathbf{B}-\lambda\mathbf{I}) = \det(\mathbf{M}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{M}-\lambda\mathbf{I}) = \det(\mathbf{M}^{-1}\cdot(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})\cdot\mathbf{M}) = \det(\mathbf{M}^{-1})\cdot\det(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})\cdot\det(\mathbf{M}) =$$

$$= (\det(\mathbf{M}))^{-1}\cdot\det(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})\cdot\det(\mathbf{M}) = \det(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})$$

es decir, la ecuación característica y el polinomio característico de f son independientes de la base respecto de la cual expresemos su matriz; por ello, también lo serán sus coeficientes y raíces, es decir, en un cambio de base son invariantes: el polinomio característico, la ecuación característica, la suma de los elementos de la diagonal, que se denomina ***traza de la matriz***, su determinante y los valores propios. De acuerdo con las relaciones existentes entre raíces y coeficientes en un polinomio, la suma de los valores propios es igual a la traza de la matriz.

Ejemplo VII.1.1

Calculemos valores y vectores propios del endomorfismo de $\mathbf{R}^3$ cuya matriz respecto de la base canónica es

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Los valores propios son las soluciones de la ecuación característica

$$\det(\mathbf{A}-\lambda\,\mathbf{I}) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 & 0 \\ -1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3+4\lambda^2-5\lambda+2 = 0$$

que tiene como raíces 1 doble y 2 simple. Calculemos los vectores propios asociados a cada valor propio: para $\lambda = 1$ tenemos

$$f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x} \iff \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{x} \iff (\mathbf{A}-1\mathbf{I})\mathbf{x} = \mathbf{0} \iff \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

que da lugar a un sistema homogéneo de rango 1 y, por ello, equivalente a la ecuación

$$2x_1+2x_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = -x_2 \quad \Rightarrow \quad V(1) = [(1,-1,0),(0,0,1)]$$

que es el subespacio de vectores propios asociados. Para $\lambda = 2$:

$$f(\boldsymbol{x}) = 2\boldsymbol{x} \iff \mathbf{A}\mathbf{x} = 2\mathbf{x} \iff (\mathbf{A}-2\mathbf{I})\mathbf{x} = \mathbf{0} \iff \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

que da lugar a un sistema homogéneo de rango 2 y, por ello, su solución es

$$\frac{x_1}{-2} = \frac{x_2}{1} = \frac{x_3}{0} \quad \Rightarrow \quad V(2) = \left[(-2,1,0)\right]$$

Sea λ_1 una raíz de la ecuación característica, es decir, un valor propio. Se define como ***dimensión del valor propio*** λ_1 la dimensión del subespacio $V(\lambda_1)$ de vectores propios asociados. Si el orden de multiplicidad de λ_1 como raíz de la ecuación característica es k, se verifica que

$$\dim(V(\lambda_1)) \leq k$$

En efecto, sea $(\boldsymbol{e}_1,\ldots,\boldsymbol{e}_n)$ una base de V y $(\boldsymbol{u}_1,\ldots,\boldsymbol{u}_h)$ una base de $V(\lambda_1)$; según el teorema de Steinitz los h vectores de la base $(\boldsymbol{u})$ pueden sustituir a h vectores de la base $(\boldsymbol{e})$, supongamos que a los h primeros, de manera que el resultado $(\boldsymbol{u}_1,\ldots,\boldsymbol{u}_h,\boldsymbol{e}_{h+1},\ldots,\boldsymbol{e}_n)$ es una base de V. Respecto de ella la matriz de f, de acuerdo con que

$$\begin{array}{lll}
f: & V & \longrightarrow V \\
& \boldsymbol{u}_1 & \longrightarrow f(\boldsymbol{u}_1) = \lambda_1\boldsymbol{u}_1 = \lambda_1\boldsymbol{u}_1+\ldots+0\boldsymbol{u}_h+0\boldsymbol{e}_{h+1}+\ldots+0\boldsymbol{e}_n \\
& \ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
& \boldsymbol{u}_h & \longrightarrow f(\boldsymbol{u}_h) = \lambda_1\boldsymbol{u}_h = 0\boldsymbol{u}_1+\ldots+\lambda_1\boldsymbol{u}_h+0\boldsymbol{e}_{h+1}+\ldots+0\boldsymbol{e}_n \\
& \boldsymbol{e}_{h+1} & \longrightarrow f(\boldsymbol{e}_{h+1}) = a_{1\,h+1}\boldsymbol{u}_1+\ldots+a_{h\,h+1}\boldsymbol{u}_h+a_{h+1h+1}\boldsymbol{e}_{h+1}+\ldots+a_{n\,h+1}\boldsymbol{e}_n \\
& \ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
& \boldsymbol{e}_n & \longrightarrow f(\boldsymbol{e}_n) = a_{1\,n}\boldsymbol{u}_1+\ldots+a_{h\,n}\boldsymbol{u}_h+a_{h+1n}\boldsymbol{e}_{h+1}+\ldots+a_{n\,n}\boldsymbol{e}_n
\end{array}$$

será de la forma

$$\mathbf{A} = \left(\begin{array}{c|c} \lambda_1\mathbf{I}_h & \mathbf{A}' \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{A}'' \end{array}\right)$$

cuya ecuación característica desarrollando el determinante de $\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I}$ por la regla de Laplace, es

$$(\lambda_1-\lambda)^h \det(\mathbf{A}''-\lambda\mathbf{I}) = 0$$

que tiene por raíz λ_1 con multiplicidad h, como mínimo, que es la dimensión de $V(\lambda_1)$.

Con los resultados obtenidos hasta aquí sabemos calcular los valores propios de un endomorfismo f de un espacio vectorial V de dimensión finita sobre un cuerpo K, en el caso de que existan, y los subespacios de los vectores propios asociados, estando ahora en condiciones de resolver el problema de su diagonalización.

Ejercicios

VII.1.- Sea $\boldsymbol{u} = (u_1,u_2,u_3)$ un vector no nulo de $\mathbf{R}^3$ y sea la aplicación

$$\begin{array}{rcl} f: \quad \mathbf{R}^3 & \longrightarrow & \mathbf{R}^3 \\ (x_1,x_2,x_3) & \longrightarrow & f(x_1,x_2,x_3) = (u_2x_3-u_3x_2,u_3x_1-u_1x_3,u_1x_2-u_2x_1) \end{array}$$

Demostrar que es un endomorfismo, hallar su matriz respecto a la base canónica de $\mathbf{R}^3$ determinando las bases de Nuc(f) e Im(f) y la dimensión de estos subespacios. Hallar los valores y los vectores propios de la aplicación.

VII.2.- Sabiendo que f es un endomorfismo de $\mathbf{R}^3$ diagonalizable que admite como vectores propios $(-1,2,2),(2,2,-1),(2,-1,2)$ y que $f(5,2,5) = (0,0,7)$. Hallar los valores propios de f y su ecuación matricial.

VII.3.- Sea f un endomorfismo de $\mathbf{R}^3$ que tiene por valores propios 1, 2 y -1; y por vectores propios $(1,1,1),(0,1,2),(1,2,1)$ respectivamente. Hallar la matriz de f respecto de la base anterior y de la base canónica de $\mathbf{R}^3$.

VII.4.- Sea $(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3)$ una base del espacio vectorial E sobre $\mathbf{R}$. Dado el endomorfismo

$$\begin{array}{rcl} f: E & \longrightarrow & E \\ \boldsymbol{e}_1 & \longrightarrow & -\boldsymbol{e}_1+3\boldsymbol{e}_2-3\boldsymbol{e}_3 \\ \boldsymbol{e}_2 & \longrightarrow & 2\boldsymbol{e}_2 \\ \boldsymbol{e}_3 & \longrightarrow & -3\boldsymbol{e}_1+3\boldsymbol{e}_2-\boldsymbol{e}_3 \end{array}$$

Si $(\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2,\boldsymbol{u}_3)$ es una base de E formada por los vectores propios de f, hallar las componentes de los vectores $\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2,\boldsymbol{u}_3$ respecto a la base $(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3)$.

VII.5 .- Demostrar que si $h \neq 0$ es valor propio de $\mathbf{A}$, h^n lo es de $\mathbf{A}^n$ y los vectores propios correspondientes son los mismos y que si $\mathbf{A}$ es regular, $1/h$ es valor propio de $\mathbf{A}^{-1}$.

VII.2 .- DIAGONALIZACION DE UN ENDOMORFISMO

Tres resultados expresan las condiciones para la solución del problema. El primero es una condición necesaria y suficiente y expresa que f es diagonalizable si y sólo si existe una base de V formada por vectores propios. En efecto, si $(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2...,\boldsymbol{x}_n)$ es una base de V formada por

vectores propios la matriz de *f* respecto de ella se obtiene de

$$\begin{aligned} f: V &\longrightarrow V \\ \boldsymbol{x}_1 &\longrightarrow f(\boldsymbol{x}_1) = \lambda_1\boldsymbol{x}_1 = \lambda_1\boldsymbol{x}_1+0\boldsymbol{x}_2+\ldots+0\boldsymbol{x}_n \\ \boldsymbol{x}_2 &\longrightarrow f(\boldsymbol{x}_2) = \lambda_2\boldsymbol{x}_2 = 0\boldsymbol{x}_1+\lambda_2\boldsymbol{x}_2+\ldots+0\boldsymbol{x}_n \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \boldsymbol{x}_n &\longrightarrow f(\boldsymbol{x}_n) = \lambda_n\boldsymbol{x}_n = 0\boldsymbol{x}_1+0\boldsymbol{x}_2+\ldots+\lambda_n\boldsymbol{x}_n \end{aligned}$$

resultando como matriz de *f* la matriz diagonal

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & .. & 0 \\ 0 & \lambda_2 & .. & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & .. & \lambda_n \end{pmatrix}$$

y recíprocamente.

Por tanto, si V está referido a una base ($\boldsymbol{e}$) respecto de la cual la matriz de f es $\mathbf{A}$, si encontramos una base ($\boldsymbol{x}$) formada por vectores propios, la matriz de f será una matriz diagonal $\mathbf{D}$ y la relación entre ambas será

$$\mathbf{D} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{M}$$

de acuerdo con la relación entre matrices en un cambio de base, siendo $\mathbf{D}$ la matriz diagonal formada por los valores propios, y $\mathbf{M}$ la matriz del cambio de base, cuyas columnas están formadas por las componentes respecto de la base ($\boldsymbol{e}$) de los vectores propios de f.

Ejemplo VII.2.1

Estudiemos la diagonalización del endomorfismo del ejemplo VII.1.1, de matriz

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Sus valores propios eran 1 doble y 2 simple y sus valores propios asociados formaban los subespacios

$$V(1) = [(1,-1,0),(0,0,1)] \qquad V(2) = [(-2,1,0)]$$

luego el endomorfismo es diagonalizable en la base formada por los vectores propios ((1,−1,0),(0,0,1),(−2,1,0)) siendo la expresión de su diagonalización

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Para la matriz

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

encontramos

$$\det(\mathbf{B}-\lambda\,\mathbf{I}) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 3 \\ 0 & 2-\lambda & 2 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2(2-\lambda) = 0$$

que tiene por raíces los valores propios 1 doble y 2 simple; calculemos sus vectores propios asociados: para $\lambda = 1$ tenemos

$$f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x} \;\Leftrightarrow\; \mathbf{B}\mathbf{x} = \mathbf{x} \;\Leftrightarrow\; (\mathbf{B}-1)\mathbf{x} = \mathbf{0} \;\Leftrightarrow\; \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

que da lugar a un sistema homogéneo de rango 2 y, por ello, su solución es

$$\frac{x_1}{1} = \frac{x_2}{0} = \frac{x_3}{0} \quad \Rightarrow \quad V(1) = [(1,0,0)]$$

Para $\lambda = 2$:

$$f(\boldsymbol{x}) = 2\boldsymbol{x} \;\Leftrightarrow\; \mathbf{B}\mathbf{x} = 2\mathbf{x} \;\Leftrightarrow\; (\mathbf{B}-2)\mathbf{x} = \mathbf{0} \;\Leftrightarrow\; \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

que da lugar a un sistema homogéneo de rango 2 y, por ello, su solución es

$$\frac{x_1}{2} = \frac{x_2}{1} = \frac{x_3}{0} \quad \Rightarrow \quad V(2) = [(2,1,0)]$$

Sin embargo no podemos encontrar tres vectores propios que formen un conjunto l.i., luego no existe una base de vectores propios y el endomorfismo no es diagonalizable.

El segundo resultado es una condición suficiente para que el endomorfismo sea diagonalizable y es consecuencia directa del primero. Si f tiene n valores propios $\lambda_1,...,\lambda_n$ distintos en K, entonces f es diagonalizable. En efecto, según la propiedad 7) de la Tabla VII.1.1 de propiedades de los vectores propios, podemos elegir un vector propio distinto de $\boldsymbol{0}$, asociado a cada valor propio

$$\boldsymbol{x}_1 \in V(\lambda_1)\ ,...,\ \boldsymbol{x}_n \in V(\lambda_n)$$

de manera que formen un conjunto l.i.; por esta razón, $(\boldsymbol{x}_1,...,\boldsymbol{x}_n)$ es una base de V formada por vectores propios y, de acuerdo con el resultado anterior, f es diagonalizable.

El tercer resultado completa las condiciones para que un endomorfismo f de un espacio vectorial V sobre K de dimensión n, sea diagonalizable. Es condición necesaria y suficiente para que f sea diagonalizable que la ecuación característica tenga las n raíces en el cuerpo K y que el orden de multiplicidad de cada raíz λ_i sea igual a $\dim(V(\lambda_i))$. En efecto:

Directo : Si f es diagonalizable, entonces existe una base de V formada por vectores propios de f, tal que la matriz de f en esta base será:

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & .. & 0 \\ 0 & \lambda_2 & .. & 0 \\ . & . & . & . \\ 0 & 0 & .. & \lambda_n \end{pmatrix}$$

siendo $\lambda_i \in K$ los valores propios de f. Dado que la ecuación característica es la misma en cualquier base de referencia, será

$$(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)...(\lambda-\lambda_n) = 0$$

cuyas raíces son los n elementos $\lambda_1,...,\lambda_n$, puede que algunos iguales entre sí, del cuerpo K. Agrupando los binomios iguales en esta ecuación tenemos

$$(\lambda-\lambda_1)^{\alpha_1}...(\lambda-\lambda_i)^{\alpha_i} = 0$$

con $\alpha_1+...+\alpha_i = n$. Como para todo $j = 1,..,i$

$$1 \le \dim(V(\lambda_j) \le \alpha_j$$

al existir una base de V formada por vectores propios y ser $V(\lambda_1),...,V(\lambda_i)$ disjuntos

$$\dim(V(\lambda_1))+...+\dim(V(\lambda_i)) = \dim(V) = n$$

De las tres relaciones se deduce inmediatamente que $\dim(V(\lambda_j)) = \alpha_j$.

Recíproco: Si para todo $j = 1,..,i$ es $\lambda_j \in K$ al ser $\alpha_1+...+\alpha_i = n$ y $\dim(V(\lambda_j)) = \alpha_j$, se verifica que

$$\dim(V(\lambda_1)\oplus...\oplus V(\lambda_i)) = n$$

por lo tanto la reunión de las bases de $V(\lambda_j)$ constituye una base de V formada por vectores propios de f y f es entonces diagonalizable.

Observemos que al ser los valores propios invariantes respecto a cualquier cambio de base, la matriz diagonal **D** no depende de la base inicial, en el sentido de que es la misma cualquiera que sea la base de partida que da la matriz inicial del endomorfismo.

Ejercicios

VII.6.- Determinar los valores y vectores propios de de la matriz

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Determinar una matriz regular **T**, tal que $\mathbf{T}^{-1}\mathbf{AT}$ sea diagonal y calcular $\mathbf{T}^{-1}$ verificando la exactitud de los cálculos.

VII.7.- Resolver la ecuación matricial $\mathbf{X}^{-1}\mathbf{BX} = \mathbf{C}$ con

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}$$

VII.8.- Dadas las matrices

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & \alpha_1 & \alpha_2 \\ -2 & 1 & -1 \\ -2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & \alpha_3 & 1 \\ 0 & 1 & \alpha_4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

para $\alpha_1 =$, $\alpha_2 =$, $\alpha_3 =$, $\alpha_4 =$. Estudiar, en su caso, la diagonalización. Indicar la matriz diagonal y la del cambio de base.

VII.9.- Dada la matriz

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -4 & -6 & 0 \\ 3 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Hallar la matriz del cambio de base que la transforma en diagonal y hallar ésta.

VII.10.- Sea la matriz

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Hallar sus valores propios. Demostrar que es diagonalizable y determinar una matriz de cambio sencilla que permita la diagonalización. Diagonalizar $\mathbf{A}^2$ y $\mathbf{A}^{-1}$.

VII.11.- Sea f un endomorfismo de matriz asociada en una cierta base de $\mathbf{R}^4$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

a) Hallar el polinomio característico.

b) ¿Es f diagonalizable?.

c) En caso afirmativo, hallar una base en la que f diagonaliza, así como la matriz asociada en esta base.

VII.12.- Sea E el subespacio vectorial engendrado por las funciones [1,sen,cos] sobre $\mathbf{R}$. Se considera el endomorfismo

$$\begin{aligned} \Phi : E &\longrightarrow E \\ f &\longrightarrow \Phi(f) = f' \end{aligned}$$

Hallar

a) Nuc (Φ).

b) Rango de Φ.

c) Matriz de Φ en la base (3 sen x,4 cos x,6).

d) Estudiar su diagonalización.

VII.13.- Siendo $(\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2,\boldsymbol{u}_3,\boldsymbol{u}_4)$ una base del espacio vectorial E sobre $\boldsymbol{R}$, consideremos el siguiente endomorfismo definido por

$$\begin{aligned} f(\boldsymbol{u}_1) &= \alpha_1\boldsymbol{u}_2 \\ f(\boldsymbol{u}_2) &= \boldsymbol{u}_1 + a\boldsymbol{u}_3 \\ f(\boldsymbol{u}_3) &= \boldsymbol{u}_1 + \alpha_2\boldsymbol{u}_2 - \boldsymbol{u}_3 \\ f(\boldsymbol{u}_4) &= \boldsymbol{u}_1 + \alpha_3\boldsymbol{u}_2 + \boldsymbol{u}_3 + \alpha_4\boldsymbol{u}_4 \end{aligned}$$

para $\alpha_1 =$, $\alpha_2 =$, $\alpha_3 =$, $\alpha_4 =$.

a) Clasificar el endomorfismo según los valores de a y, cuando sea biyectivo, calcular las antiimágenes de los vectores cuyas componentes respecto de la base $(\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2,\boldsymbol{u}_3,\boldsymbol{u}_4)$ son $(1,-1,1,-1)$ y $(2,-2,2,-2)$.

c) ¿Para que valores de a es diagonalizable el endomorfismo?.

VII.14.- La matriz $\mathbf{M} = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ b & 2 & 1/2 \\ c & -1 & 1/2 \end{pmatrix}$

tiene como vectores propios (1,1,0), (−1,0,2) y (0,1,−1). Calcular la matriz **M** y sus valores propios.

VII.15.- Dada la matriz

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} a & m & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ con } a,\ m \in \mathbf{R} \text{ y } m \neq 0$$

estudiar su diagonalización para los distintos valores de *a*.

VII.16.- Estudiar según los valores de *a* y *b* la diagonalización del endomorfismo de $\mathbf{R}^4$ que tiene por matriz asociada en la base canónica

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b \end{pmatrix}$$

VII.17.- Hallar α para que sea diagonalizable la matriz

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} -1/2 & \alpha\sqrt{2} & 3/2 \\ -\sqrt{2}/2 & 1 & \sqrt{2}/2 \\ 1/2 & \alpha\sqrt{2}/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

Hallar una base ortonormal de $\mathbf{R}^3$ a partir de la base formada por sus vectores propios.

VII.18.- Estudiar, según los valores reales de α la diagonalización de las matrices

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1+\alpha & -\alpha & \alpha \\ 2+\alpha & -\alpha & \alpha-1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2-\alpha \\ 0 & 1 & \alpha \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Para los valores de α que las hacen diagonalizables hállese su forma diagonal **D** y la matriz regular **P** tal que $\mathbf{D} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP}$.

VII.19.- Estudiar la diagonalización de la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 & 0 \\ a' & b & 2 & 0 \\ a'' & b' & c & 2 \end{pmatrix}$

VII.3 .- POTENCIA DE UNA MATRIZ DIAGONALIZABLE

El cálculo de la potencia de una matriz diagonal es simple ya que se verifica que

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & .. & 0 \\ . & . & . \\ 0 & .. & \lambda_n \end{pmatrix}^k = \begin{pmatrix} \lambda_1^{\,k} & .. & 0 \\ . & . & . \\ 0 & .. & \lambda_n^{\,k} \end{pmatrix}$$

En efecto por inducción sobre k, para $k = 1$ es evidente y si es cierto para k, entonces

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & .. & 0 \\ . & . & . \\ 0 & .. & \lambda_n \end{pmatrix}^{k+1} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & .. & 0 \\ . & . & . \\ 0 & .. & \lambda_n \end{pmatrix}^{k} \begin{pmatrix} \lambda_1 & .. & 0 \\ . & . & . \\ 0 & .. & \lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1^{\,k+1} & .. & 0 \\ . & . & . \\ 0 & .. & \lambda_n^{\,k+1} \end{pmatrix}$$

Si una matriz **A** es diagonalizable existirá una matriz regular **M** tal que

$$\mathbf{D} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{M}$$

es una matriz diagonal; despejando y calculando la potencia tenemos

$$\mathbf{A}^k = (\mathbf{M}\mathbf{D}\mathbf{M}^{-1})^k = (\mathbf{M}\mathbf{D}\mathbf{M}^{-1})\,(\mathbf{M}\mathbf{D}\mathbf{M}^{-1})\,...\,(\mathbf{M}\mathbf{D}\mathbf{M}^{-1}) = \mathbf{M}\mathbf{D}^k\mathbf{M}^{-1}$$

y el cálculo de la potencia se reduce al caso de matriz diagonal.

Ejemplo VII.3.1

Según vimos en el Ejemplo VII.2.1, la matriz

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

es diagonalizable, siendo

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

es decir

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1}$$

por lo que, según lo anterior, es, por ejemplo

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^6 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}^6 \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 127 & 126 & 0 \\ -63 & 62 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Veamos ahora dos aplicaciones del cálculo de la potencia de una matriz diagonalizable, una para el cálculo del término general de una sucesión y otra en el estudio de algunos modelos matemáticos utilizados en Biología que describen dinámicas de poblaciones.

Sea $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ una sucesión en **R** definida en forma recurrente por

$$x_n = ax_{n-1}+bx_{n-2}$$

siendo $n \geq 2$ y a y b dos números reales; esta sucesión queda determinada conociendo sus dos primeros términos x_0 y x_1. Para hallar el término general de esta sucesión, debemos escribirla en la forma

$$\begin{aligned} x_n &= ax_{n-1}+by_{n-1} \\ y_n &= x_{n-1} \end{aligned}$$

que puede expresarse en forma matricial mediante

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{n-1} \\ y_{n-1} \end{pmatrix}$$

Si

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \mathbf{X}_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} \quad , \quad \mathbf{X}_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$$

la igualdad anterior da lugar a $\mathbf{X}_n = \mathbf{A}\mathbf{X}_{n-1}$, $\mathbf{X}_{n-1} = \mathbf{A}\mathbf{X}_{n-2}$,..., $\mathbf{X}_2 = \mathbf{A}\mathbf{X}_1$, de donde sustituyendo sucesivamente se obtiene

$$\mathbf{X}_n = \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{X}_1$$

Si **A** es una matriz diagonalizable existen una matriz regular **M** y una matriz diagonal **D**

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

tales que $\mathbf{A} = \mathbf{M}\mathbf{D}\mathbf{M}^{-1}$. En este caso

$$\mathbf{A}^{n-1} = \mathbf{M}\mathbf{D}^{n-1}\mathbf{M}^{-1} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{X}_n = \mathbf{M} \begin{pmatrix} \lambda_1^{n-1} & 0 \\ 0 & \lambda_2^{n-1} \end{pmatrix} \mathbf{M}^{-1}\mathbf{X}_0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} x_n \\ x_{n\text{-}1} \end{pmatrix} = \mathbf{M} \begin{pmatrix} \lambda_1^{n-1} & 0 \\ 0 & \lambda_2^{n-1} \end{pmatrix} \mathbf{M}^{-1} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_0 \end{pmatrix}$$

expresión que permite hallar el término general x_n de la sucesión.

Ejemplo VII.3.2

Una sucesión de este tipo es la llamada sucesión de Fibonacci para la que $a = b = 1$ y $x_0 = x_1 = 1$, es decir

$$x_n = x_{n-1}+x_{n-2}$$

de forma que cada término es la suma de los dos anteriores; los primeros términos son (1,1,2,3,5,8,13,21,34,...). Escrita la fórmula en forma matricial es

$$\mathbf{X}_n = \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{X}_1$$

con

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \mathbf{X}_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} \quad , \quad \mathbf{X}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

La matriz **A** es diagonalizable pues sus valores propios son distintos

$$\lambda_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad , \quad \lambda_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

cuyos subespacios de vectores propios asociados son

$$V(\lambda_1) = [(\lambda_1,1)] \quad \text{y} \quad V(\lambda_2) = [(\lambda_2,1)]$$

La matriz **M** es, entonces

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

y la potencia (n–1)-ésima de **A** es

$$\mathbf{A}^{n-1} = \mathbf{M}\mathbf{D}^{n-1}\mathbf{M}^{-1} = \frac{1}{\lambda_1-\lambda_2}\begin{pmatrix} \lambda_1^{\,n}-\lambda_2^{\,n} & \lambda_1\lambda_2(\lambda_2^{\,n-1}-\lambda_1^{\,n-1}) \\ \lambda_1^{\,n-1}-\lambda_2^{\,n-1} & \lambda_1\lambda_2(\lambda_2^{\,n-2}-\lambda_1^{\,n-2}) \end{pmatrix}$$

Como

$$\mathbf{X}_n = \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{X}_1 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} x_n \\ x_{n-1} \end{pmatrix} = \frac{1}{\lambda_1-\lambda_2}\begin{pmatrix} \lambda_1^{\,n}-\lambda_2^{\,n} & \lambda_1\lambda_2(\lambda_2^{\,n-1}-\lambda_1^{\,n-1}) \\ \lambda_1^{\,n-1}-\lambda_2^{\,n-1} & \lambda_1\lambda_2(\lambda_2^{\,n-2}-\lambda_1^{\,n-2}) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Al ser $\lambda_1\lambda_2 = -1$, el valor del término general x_n de la sucesión de Fibonacci resulta

ser igual a

$$x_n = \frac{\lambda_1^{n+1} - \lambda_2^{n+1}}{\lambda_1 - \lambda_2}$$

Veamos el planteamiento y resolución de algunos modelos matemáticos simples que describen la dinámica que los procesos de nacimiento y muerte inducen sobre una población. Consideraremos, en primer lugar, un modelo muy sencillo en el que la población, en un período de tiempo de longitud t, es proporcional a la población del período anterior, con una constante de proporcionalidad fija k. Si p_0 es el número de individuos de la población en el período inicial, un intervalo de tiempo $[t_0,t_1]$ de longitud t y p_1 es el número de individuos de la población en el siguiente período, el intervalo de tiempo $[t_1,t_2]$ (con $t_2 = t_1+t$), y p_n es el número de individuos de la población en el intervalo $[t_{n-1},t_n]$ con $(t_n = t_0+nt)$, entonces

$$p_1 = kp_0 \wedge p_2 = kp_1 \wedge ... \wedge p_n = kp_{n-1} \quad \Rightarrow \quad p_n = k^n p_0$$

Un modelo de este tipo podría presentarse en el caso en el que las generaciones (cada período es una generación) sean distintas, es decir, cada individuo de cada generación, produce k descendientes y después muere. Si $k = 1$, la población permanece constante si $k > 1$, la población aumenta y si $0 < k < 1$, la población decrece.

También tendríamos una población que se correspondería con este modelo, si consideramos que el incremento de individuos en cada período es igual al número de individuos del período anterior multiplicado por una constante. Si $B(i)$ es el número de nacimientos, $D(i)$ el número de muertes y p_i el número de individuos en la generación i, si hacemos

$b = B(i)/p_i$, fracción de nacimientos por individuo de la población en la generación i

$d = D(i)/p_i$, fracción de defunciones por individuo de dicha población en la generación i

Si suponemos b y d constantes para todas las generaciones, tenemos entonces

$$p_{i+1} - p_i = (b-d)p_i \quad \Rightarrow \quad p_{i+1} = (1+b-d)p_i$$

que es un modelo del tipo anterior para $k = 1+b-d$. A la constante $1+b-d$ se la denomina ***parámetro de Malthus***, en honor a Robert Malthus, y a este modelo, modelo de Malthus. Vemos que es un caso muy especial, pues no es lógico que b y d, no dependan de la generación concreta en que nos situemos.

Otro modelo sencillo se presenta cuando tenemos dos poblaciones en competencia X e Y. Sean

X_i = número de individuos de la población X en el intervalo de tiempo $[t_{i-1},t_i]$ con $t_i = t_0+it$.

Y_i = número de individuos de la población Y en el intervalo de tiempo $[t_{i-1},t_i]$ con $t_i = t_0+it$.

Si consideramos que la población X se comporta según el modelo de Malthus

$$X_{i+1} = kX_i \quad \text{con} \quad k = 1+b_x-d_x$$

y análogamente para la población Y

$$Y_{i+1} = k'X_i \quad \text{con} \quad k' = 1+b_y-d_y$$

pero que en lugar de considerar cada población independientemente las suponemos ahora en competencia, en la cual, los individuos de la población Y son depredadores de los individuos de la población X, siendo

α = número de presas consumidas por cada individuo de la población Y en el intervalo $[t_{i-1},t_i]$

β = número de predadores producidos por presa consumida en el intervalo $[t_{i-1},t_i]$

se cumple que

$$X_{i+1} = kX_i-\alpha Y_i$$

$$Y_{i+1} = k'Y_i+\beta X_i$$

Expresemos este sistema en forma matricial

$$\begin{pmatrix} X_{i+1} \\ Y_{i+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & -\alpha \\ \beta & k' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_i \\ Y_i \end{pmatrix}$$

Si (X_0,Y_0) es el vector que representa la situación inicial, es decir

X_0 = número de individuos de la población X en el instante t_0,

Y_0 = número de individuos de la población Y en el instante t_0,

y si

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} k & -\alpha \\ \beta & k' \end{pmatrix}$$

entonces

$$\begin{pmatrix} X_n \\ Y_n \end{pmatrix} = \mathbf{A}^n \begin{pmatrix} X_0 \\ Y_0 \end{pmatrix}$$

Si la matriz $\mathbf{A}$ es diagonalizable con valores propios λ_1, λ_2, y vectores propios $(\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2)$, es

$$\mathbf{A} = \mathbf{MDM}^{-1} \qquad \text{y} \qquad \mathbf{A}^n = \mathbf{M} \begin{pmatrix} \lambda_1^{\,n} & 0 \\ 0 & \lambda_2^{\,n} \end{pmatrix} \mathbf{M}^{-1}$$

por tanto

$$\begin{pmatrix} X_n \\ Y_n \end{pmatrix} = \mathbf{M} \begin{pmatrix} \lambda_1^{\,n} & 0 \\ 0 & \lambda_2^{\,n} \end{pmatrix} \mathbf{M}^{-1} \begin{pmatrix} X_0 \\ Y_0 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{M}^{-1} \begin{pmatrix} X_n \\ Y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1^{\,n} & 0 \\ 0 & \lambda_2^{\,n} \end{pmatrix} \mathbf{M}^{-1} \begin{pmatrix} X_0 \\ Y_0 \end{pmatrix}$$

Como $\mathbf{M}^{-1}\begin{pmatrix} X_n \\ Y_n \end{pmatrix}$ son las componentes del vector (X_n,Y_n) expresado en la nueva base ($\boldsymbol{u}$), existen a_1 y $a_2 \in \mathbf{R}$ tales que

$$(X_n,Y_n) = a_1\boldsymbol{u}_1+a_2\boldsymbol{u}_2 \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{M}^{-1}\begin{pmatrix} X_n \\ Y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$$

y, análogamente, como $\mathbf{M}^{-1}\begin{pmatrix} X_0 \\ Y_0 \end{pmatrix}$ son las son las componentes del vector (X_0,Y_0) expresado en la nueva base ($\boldsymbol{u}$), existen $b_1,b_2 \in \mathbf{R}$ tales que

$$(X_0,Y_0) = b_1\boldsymbol{u}_1+b_2\boldsymbol{u}_2 \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{M}^{-1}\begin{pmatrix} X_0 \\ Y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

De todo ello deducimos que

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1^{\,n} b_1 \\ \lambda_2^{\,n} b_2 \end{pmatrix}$$

Si estamos en el caso en el que $\lambda_1 \neq \lambda_2$, por ejemplo $|\lambda_1| > |\lambda_2|$, entonces

$$a_1\boldsymbol{u}_1+a_2\boldsymbol{u}_2 = \lambda_1^{\,n}\left(b_1\boldsymbol{u}_1+ \frac{\lambda_2^{\,n}}{\lambda_1^{\,n}} b_2\boldsymbol{u}_2\right) \quad \text{y} \quad \lim_{n \to +\infty} \frac{\lambda_2^{\,n}}{\lambda_1^{\,n}} = 0$$

por lo que

$$\mathbf{M}^{-1}\begin{pmatrix} X_n \\ Y_n \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} \lambda_1^{\,n} b_1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} X_n \\ Y_n \end{pmatrix} \approx \mathbf{M}\begin{pmatrix} \lambda_1^{\,n} b_1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda_1^{\,n} b_1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} X_n \\ Y_n \end{pmatrix} = \lambda_1^{\,n} b_1 \begin{pmatrix} u_{11} \\ u_{21} \end{pmatrix} = \lambda_1^{\,n} b_1 \boldsymbol{u}_1$$

Es decir para valores de n suficientemente grandes el vector de población es proporcional al vector propio asociado al valor propio de mayor valor absoluto.

Ejemplo VII.3.3

Para las poblaciones en competencia dadas por

$$X_{i+1} = 1'4\ X_i - 0'2\ Y_i$$

$$Y_{i+1} = 0'4\ X_i + 0'8\ Y_i$$

tenemos

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1'4 & -0'2 \\ 0'4 & 0'8 \end{pmatrix} \Rightarrow \lambda_1 = 1'2\ ,\ \lambda_2 = 1 \Rightarrow \boldsymbol{u}_1 = (1,1)\ ,\ \boldsymbol{u}_2 = (1,2) \Rightarrow \mathbf{M} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

luego

$$\begin{pmatrix} X_n \\ Y_n \end{pmatrix} = 1'2^n b_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

y vemos que con el paso del tiempo, ambas poblaciones viven en una situación de equilibrio, creciendo en la misma proporción, si b_1 es positivo.

Ejercicios

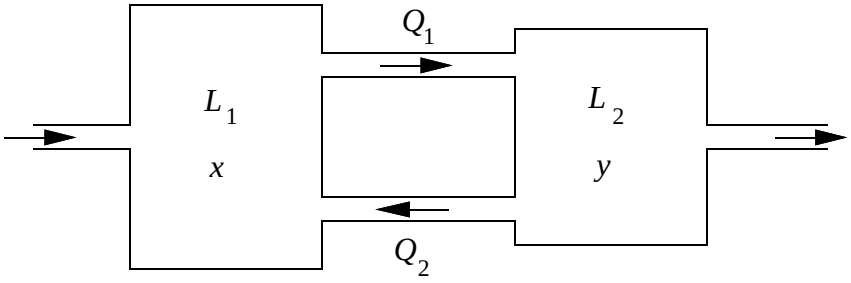
VII.20.- Dada la matriz

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{pmatrix}$$

a) Resolver si es posible la ecuación $\mathbf{A} = \mathbf{SDS}^{-1}$ siendo $\mathbf{D}$ una matriz diagonal.

b) Demostrar $\mathbf{A}^n = \mathbf{SD}^n\mathbf{S}^{-1}$ con $n \in \mathbf{N}$ y hallar $\mathbf{A}^{15}$.

VII.21.- Dos tanques, de volúmenes L_1 y L_2 (en litros), conteniendo solución salina se conectan entre ellos y el exterior según indica la figura



El líquido del primer tanque se bombea al segundo a un régimen de caudal constante Q_1 (en litros por minuto), asímismo hay un bombeo del segundo al primero con un caudal constante de Q_2. Se supone que $Q_1 \geq Q_2$, que cada tanque siempre está lleno y que la mezcla es completa. Suponiendo que al comienzo del experimento las masas de sal en cada tanque son x_0 e y_0, las masas de sal (en gramos) en un instante k dependen de las masas de sal existentes en el instante anterior $k-1$, según indican las ecuaciones del modelo discreto

$$x_k = x_{k-1} - Q_1 x_{k-1}/L_1 + Q_2 y_{k-1}/L_2 + (Q_1 - Q_2)c$$

$$y_k = y_{k-1} + Q_1 x_{k-1}/L_1 - Q_2 y_{k-1}/L_2 - (Q_1 - Q_2)y_{k-1}/L_2$$

siendo c la concentración de sal que lleva el líquido (en gramos litro) que, procedente del exterior, entra en el primer tanque. Se pide

1) Interpretar físicamente los sumandos de cada ecuación.

2) Demostrar que para $Q_1 = Q_2$ el modelo tiene por expresión matricial $\mathbf{x}_k = \mathbf{A}^k\mathbf{x}_0$, siendo $\mathbf{x}_k$ la matriz de contenido de sal en los depósitos. Para $x_0 = 6$, $y_0 = 0$, $L_1 = 3$, $L_2 = 1'5$, $Q_1 = 0'9$ y $Q_2 = 0'9$ hallar la matriz $\mathbf{A}$, la masa de sal en cada depósito a los 5 minutos y la masa de sal en ambos depósitos cuando el tiempo se hace grande.

3) Demostrar que para $Q_1 > Q_2$ la forma matricial es $\mathbf{x}_k = \mathbf{A}^k\mathbf{x}_0 + (\mathbf{A}^{k-1}+\ldots+\mathbf{A}+\mathbf{I})\mathbf{C}$. Para $x_0 = 6$, $y_0 = 0$, $L_1 = 3$, $L_2 = 2$, $Q_1 = 1'2$, $Q_2 = 0'4$ y $c = 0'3$ hallar las matrices $\mathbf{A}$ y $\mathbf{C}$, la concentración de sal en el agua de salida al cabo de 5 minutos y la masa de sal en ambos depósitos cuando el tiempo se hace grande.

VII.4 .- DIAGONALIZACION DE LAS MATRICES REALES SIMETRICAS.

Sea V un espacio euclidiano, con un producto escalar $<,>$ y referido a una base ortonormal $(\boldsymbol{u}_1,\ldots,\boldsymbol{u}_n)$. Sea $\mathbf{A}$ una matriz simétrica y f el endomorfismo de V que respecto a la base $(\boldsymbol{u}_1,\ldots,\boldsymbol{u}_n)$ tiene por matriz $\mathbf{A}$. Dada la simetría de $\mathbf{A}$ se tiene que

$$(\forall \boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in V)\ (<\boldsymbol{x},f(\boldsymbol{y})> = \mathbf{x}^t(\mathbf{A}\mathbf{y}) = \mathbf{x}^t\mathbf{A}^t\mathbf{y} = (\mathbf{A}\mathbf{x})^t\mathbf{y} = <f(\boldsymbol{x}),\boldsymbol{y}>)$$

En estas condiciones se verifican las propiedades que se exponen en la Tabla VII.4.1

TABLA VII .4.1

Propiedades de las matrices reales simétricas

1) $\mathbf{A}$ real y simétrica, admite n valores propios reales.

2) $\mathbf{A}$ real y simétrica, admite al menos un vector propio.

3) Si $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{y}$ vectores propios de f asociados a valores propios distintos, entonces $\boldsymbol{x} \perp \boldsymbol{y}$.

4) $\boldsymbol{x}$ vector propio de f implica $(\forall \boldsymbol{y}\in V)\ (\boldsymbol{y}\perp\boldsymbol{x} \Rightarrow f(\boldsymbol{y})\perp\boldsymbol{x})$.

Demostraciones:

1) El polinomio característico de f es de grado n y tiene n raíces en $\mathbf{C}$, al ser algebraicamente cerrado. Supongamos que $\lambda\in\mathbf{C}$ es una de éllas, es decir, λ es valor propio de $\mathbf{A}$, y $\boldsymbol{x}$ uno de sus vectores propios asociados distinto de $\boldsymbol{0}$; tendremos

$$\boldsymbol{x} = (x_1,\ldots,x_n) \quad \text{con} \quad x_i\in\mathbf{C} \quad \wedge \quad \mathbf{A}\mathbf{x}=\lambda\mathbf{x}$$

Sea $\overline{\boldsymbol{x}} = (\overline{x_1},\ldots,\overline{x_n})$ cuyas componentes son los complejos conjugados de las componentes

de $\boldsymbol{x}_0$. Tendremos

$$\overline{\mathbf{x}}^{\,t}\mathbf{A}\mathbf{x} = \lambda\overline{\mathbf{x}}^{\,t}\mathbf{x} = \lambda\sum_{i=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\overline{x_i}\,x_i = \lambda\,\|x_i\|^2$$

y como

$$\overline{\mathbf{x}}^{\,t}\mathbf{A}\mathbf{x} = \left(\overline{x_1}\ \ldots\ \overline{x_n}\right)\begin{pmatrix}\sum_{i=1}^{n}a_{1i}x_i\\ \ldots\ldots\\ \sum_{i=1}^{n}a_{ni}x_i\end{pmatrix} = \sum_{j=1}^{n}\overline{x_j}\sum_{i=1}^{n}a_{ji}x_i = \sum_{i,j=1}^{n}a_{ji}\overline{x_j}\,x_i$$

su conjugado coincide con él, ya que por ser **A** una matriz real simétrica

$$\overline{\sum_{i,j=1}^{n}a_{ji}\overline{x_j}x_i} = \sum_{i,j=1}^{n}a_{ji}x_j\overline{x_i} = \sum_{i,j=1}^{n}a_{ji}\overline{x_j}\,x_i$$

por lo que es un número real. Así obtenemos para el valor propio

$$\lambda = \frac{\sum_{i,j=1}^{n}a_{ji}\overline{x_j}\,x_i}{\sum_{i=1}^{n}\|x_i\|^2} \in \mathbf{R}$$

2) Si el polinomio característico de f tiene, como hemos visto, n raíces reales, iguales o distintas, como mínimo admitirá una sola raíz real de multiplicidad n, valor propio de h que tendrá asociado un vector propio.

3) Como $\langle h(\boldsymbol{x}),\boldsymbol{y}\rangle = \langle \boldsymbol{x},h(\boldsymbol{y})\rangle$, si $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{y}$ son vectores propios asociados a valores propios λ y μ distintos,tendremos

$$\left.\begin{array}{l}\langle f(\boldsymbol{x}),\boldsymbol{y}\rangle = \langle\lambda\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\rangle = \lambda\langle\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\rangle\\ \langle \boldsymbol{x},f(\boldsymbol{y})\rangle = \langle\boldsymbol{x},\mu\boldsymbol{y}\rangle = \mu\langle\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\rangle\end{array}\right| \quad \Rightarrow\ (\lambda-\mu)\langle\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\rangle = 0 \ \Rightarrow\ \langle\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\rangle = 0 \ \Rightarrow \boldsymbol{x}\perp\boldsymbol{y}$$

4) $\langle \boldsymbol{x},f(\boldsymbol{y})\rangle = \langle f(\boldsymbol{x}),\boldsymbol{y}\rangle = \lambda\langle\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\rangle = \lambda\cdot 0 = 0$

Consideremos una nueva base $(\boldsymbol{e}_1,\ldots,\boldsymbol{e}_n)$ de V construida de la siguiente manera: $\boldsymbol{e}_1$ es un vector propio de f que esté normalizado y $(\boldsymbol{e}_2,\ldots,\boldsymbol{e}_n)$ una base ortonormal de $[\boldsymbol{e}_1]^{\perp}$. Respecto de esta base la matriz **B** de f es una matriz simétrica ya que si **M** es la matriz del cambio de la base $(\boldsymbol{u}_1,\ldots,\boldsymbol{u}_n)$ a la base $(\boldsymbol{e}_1,\ldots,\boldsymbol{e}_n)$ es

$$\mathbf{B} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{M} = \mathbf{M}^t\mathbf{A}\mathbf{M} = \mathbf{M}^t\mathbf{A}^t(\mathbf{M}^t)^t = (\mathbf{M}^t\mathbf{A}\mathbf{M})^t = \mathbf{B}^t$$

Como $f(\boldsymbol{e}_1) = \lambda\boldsymbol{e}_1$ y, debido a la propiedad 4) de la tabla anterior, si $\boldsymbol{y}\in[\boldsymbol{e}_2,\ldots,\boldsymbol{e}_n]$, entonces

$f(\boldsymbol{y}) \in [\boldsymbol{e}_2,...,\boldsymbol{e}_n]$, la matriz **B** es

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & . . & 0 \\ 0 & & & \\ . . & & \mathbf{A'} & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$$

siendo **A'** una matriz también simétrica.

Todos estos resultados anteriores conducen a la importante propiedad de que si **A** es una matriz real simétrica, existe una base ortonormal respecto de la cual **A** diagonaliza. En efecto, por inducción sobre el orden *n* de **A**:

Si $n = 1$, como todo conjunto unitario es ortogonal, si $\boldsymbol{e}_1$ es una base de V entonces $<\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_1> \neq 0$ y si definimos

$$\boldsymbol{v}_1 = \frac{1}{<\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_1>} \boldsymbol{e}_1$$

entonces $(\boldsymbol{v}_1)$ es una base ortonormal de vectores propios.

Si es cierta la propiedad para $(n-1)$, entonces la restricción de f a $[\boldsymbol{e}_1]^{\perp}$ diagonaliza en una base $(\boldsymbol{v}_2,...,\boldsymbol{v}_n)$ ortonormal, por lo que

$$(\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\ldots,\boldsymbol{v}_n)$$

es una base ortonormal de V en la cual f diagonaliza, por ser $\boldsymbol{u}_1$ ortogonal a $\boldsymbol{u}_2,...,\boldsymbol{u}_n$ al pertenecer a $[\boldsymbol{e}_1]^{\perp}$.

Ejemplo VII.4.1

Sea un endomorfismo de $\mathbf{R}^2$ cuya matriz respecto de la base canónica es la matriz simétrica $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. Su ecuación característica es

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 \\ -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 4\lambda + 2 = 0$$

Sus valores propios son

$$\lambda_1 = 2+\sqrt{2} \qquad\qquad \lambda_2 = 2-\sqrt{2}$$

y sus vectores propios

$$V(2+\sqrt{2}) = [(1,1-\sqrt{2})] \quad \text{con} \quad \boldsymbol{v}_1 = (1,1-\sqrt{2}) \text{ vector propio}$$

$$V(2-\sqrt{2}) = [(1,1+\sqrt{2})] \quad \text{con} \quad \boldsymbol{v}_2 = (1,1+\sqrt{2}) \text{ vector propio}$$

Ambos subespacios son ortogonales, pues los valores propios son distintos. La base

$$\left(\frac{\boldsymbol{v}_1}{\| \boldsymbol{v}_1 \|}, \frac{\boldsymbol{v}_2}{\| \boldsymbol{v}_2 \|} \right) = \left(\left(\frac{1}{\sqrt{4-2\sqrt{2}}}, \frac{1-\sqrt{2}}{\sqrt{4-2\sqrt{2}}} \right), \left(\frac{1}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}}, \frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}} \right) \right)$$

es efectivamente ortonormal y, en ella, la matriz toma la forma diagonal

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 2-\sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{4-2\sqrt{2}}} & \frac{1}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}} \\ \frac{1-\sqrt{2}}{\sqrt{4-2\sqrt{2}}} & \frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}} \end{pmatrix}^t \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{4-2\sqrt{2}}} & \frac{1}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}} \\ \frac{1-\sqrt{2}}{\sqrt{4-2\sqrt{2}}} & \frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}} \end{pmatrix}$$

Observación : Si partimos de un endomorfismo f que tiene por matriz la matriz simétrica **A** respecto de una base ($\boldsymbol{u}$) que no es ortonormal, respecto del producto escalar definido en V, entonces no podemos seguir el proceso anterior. Ahora bien, si definimos en V otro producto escalar g tal que $g(\boldsymbol{e}_i,\boldsymbol{e}_j) = \delta_{ij}$, según el razonamiento expuesto antes, encontraremos una base (ortonormal respecto de g) respecto de la cual **A** diagonaliza, como matriz de un endomorfismo y como matriz de una forma cuadrática.

Ejemplo VII.4.2

Sea $\mathbf{R}^2$ referido a la base canónica con el producto escalar g_1 de matriz

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Efectivamente esta matriz define un producto escalar ya que, por ejemplo

$$g_1(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x^2+2xy+2y^2 = (x+y)^2+y^2 > 0 \quad \text{si } (x,y) \neq (0,0)$$

Como $g_1((1,0),(0,1)) = 1$ la base no es ortonormal respecto de este producto escalar y sin embargo si lo es respecto del producto escalar ordinario. Sea la matriz simétrica

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Según hemos probado, existe una base de vectores propios ($\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2$) de V, ortonormal respecto a g_2 que diagonaliza a **A**, tanto como matriz de una aplicación lineal como matriz de una forma cuádratica. En efecto los valores propios de **A** son:

$$\begin{vmatrix} -\lambda & -1 \\ -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2-\lambda-1 = 0 \;\Rightarrow\; \lambda_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \;\wedge\; \lambda_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

y como vectores propios asociados $\boldsymbol{v}_1 = (-1, \frac{1+\sqrt{5}}{2})$ y $\boldsymbol{v}_2 = (-1, \frac{1-\sqrt{5}}{2})$ que son ortogonales, por ser asociados a valores propios distintos, por lo que basta normalizarlos para obtener la base de vectores propios, ortonormal respecto g_2, buscada

$$\boldsymbol{v}_1 = \left(\frac{-1}{\sqrt{1+\lambda_1^2}}, \frac{\lambda_1}{\sqrt{1+\lambda_1^2}} \right) \qquad \boldsymbol{v}_2 = \left(\frac{-1}{\sqrt{1+\lambda_2^2}}, \frac{\lambda_2}{\sqrt{1+\lambda_2^2}} \right)$$

respecto de la cual

$$\mathbf{M}^t\mathbf{A}\mathbf{M} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{M} = \mathbf{D} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \quad \text{siendo} \quad \mathbf{M} = \begin{pmatrix} \frac{-1}{\sqrt{1+\lambda_1^2}} & \frac{-1}{\sqrt{1+\lambda_2^2}} \\ \frac{\lambda_1}{\sqrt{1+\lambda_1^2}} & \frac{\lambda_2}{\sqrt{1+\lambda_2^2}} \end{pmatrix}$$

Se observa que $\boldsymbol{v}_1$ y $\boldsymbol{v}_2$ no son ortogonales respecto g_1, en efecto:

$$\boldsymbol{u}_1 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \boldsymbol{u}_2 = \begin{pmatrix} \frac{-1}{\sqrt{1+\lambda_1^2}} & \frac{\lambda_1}{\sqrt{1+\lambda_1^2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{-1+\lambda_2}{\sqrt{1+\lambda_2^2}} \\ \frac{-1+2\lambda_2}{\sqrt{1+\lambda_2^2}} \end{pmatrix} = \frac{1-\lambda_2-\lambda_1+2\lambda_1\lambda_2}{\sqrt{1+\lambda_1^2}\sqrt{1+\lambda_2^2}} \neq 0$$

Así pues, dada una matriz simétrica si la base en la que viene expresada es ortonormal, respecto del producto escalar definido, existe una base de vectores propios ortonormal, respecto de la cual diagonaliza. Si, como en este último ejemplo, la base de origen no es ortonormal, existe la base de vectores propios respecto de la cual diagonaliza, pero no es ortonormal.

VII.5.- SIGNO DE UNA FORMA CUADRATICA

Como aplicación de la diagonalización de una matriz real simétrica, veamos la denominada regla de Silvester para estudiar el signo de una forma cuadrática. Recordemos que una forma cuadrática f_c, definida en V e.v.s. $\mathbf{R}$, es definida positiva si y sólo si se verifica que $(\forall \boldsymbol{x} \in V)$ $(\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0} \;\Rightarrow\; f_c(\boldsymbol{x}) > 0)$. (Análogamente definida negativa). Estudiaremos el signo de una forma cuadrática f_c, cuya matriz es $\mathbf{A} = (a_{ij}) \in M_{(n,n)}(\mathbf{R})$ simétrica. Un resultado previo necesario es el siguiente:

"Si $(\forall \boldsymbol{x}\in \mathbf{R}^n)\ (\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0} \ \Rightarrow\ \mathbf{x}^t\mathbf{A}\mathbf{x} > 0)$, entonces existen matrices

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} 1 & .. & 0 & 0 \\ t_{21} & .. & 0 & 0 \\ ..... & & & \\ t_{n\text{-}11} & .. & 1 & 0 \\ t_{n1} & .. & t_{nn\text{-}1} & 1 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{D} = \begin{pmatrix} d_1 & .. & 0 \\ ..... & & \\ 0 & .. & d_n \end{pmatrix}$$

tales que

$$\mathbf{A} = \mathbf{L}\mathbf{D}\mathbf{L}^t \qquad d_1 = a_{11} \qquad d_k = \det(\mathbf{A}_k)/\det(\mathbf{A}_{k\text{-}1}) \ \text{ (para } k = 2,...,n)$$

siendo $\mathbf{A}_k$ la submatriz de $\mathbf{A}$ formada por las k primeras filas y k primeras columnas".

Demostración:

Tengamos en cuenta, en primer lugar que

1) Si existen $\mathbf{L}$ y $\mathbf{D}$ y se definen las matrices $\mathbf{L}_k$ y $\mathbf{D}_k$ de forma análoga a $\mathbf{A}_k$, es simple comprobar que

$$(\forall k\in \{1,...,n-1\})\ (\mathbf{A}_k = \mathbf{L}_k\mathbf{D}_k\mathbf{L}_k^t)$$

2) Las matrices $\mathbf{A}_k$ definen formas cuadráticas definidas positivas, es decir, se cumple que

$$(\forall k\in \{1,...,n-1\})\ (\forall \boldsymbol{x}\in \mathbf{R}^k)\ (\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0} \ \Rightarrow\ \mathbf{x}^t\mathbf{A}_k\mathbf{x} > 0)$$

pues si $\mathbf{x}^t\mathbf{A}_k\mathbf{x} \leq 0$ tomando $\boldsymbol{x}' = (x_1,...,x_k,0,...,0)\in \mathbf{R}^n$ sería $\mathbf{x}'^t\mathbf{A}\mathbf{x}' = \mathbf{x}^t\mathbf{A}_k\mathbf{x} \leq 0$ lo que va contra la hipótesis sobre la matriz $\mathbf{A}$.

3) Los cocientes d_k son positivos pues si para algún i fuera $d_i \leq 0$, con el vector $\boldsymbol{x}_i = (0,..,1,..,0)$ tendríamos $\mathbf{x}^t_i\mathbf{D}_k\mathbf{x}_i = d_i \leq 0$

$$0 \geq \mathbf{x}^t_i\mathbf{D}_k\mathbf{x}_i = \mathbf{x}^t_i\mathbf{L}^{-1}{}_k\mathbf{L}_k\mathbf{D}_k\mathbf{L}^t{}_k(\mathbf{L}^t{}_k)^{-1}\mathbf{x}_i = \mathbf{y}^t\mathbf{A}_k\mathbf{y}$$

para $\mathbf{y} = (\mathbf{L}^t{}_k)^{-1}\mathbf{x}_i$, que es distinto de $\boldsymbol{0}$ pues $\boldsymbol{x}_i \neq \boldsymbol{0}$, lo cual es una contradicción con la hipótesis sobre $\mathbf{A}$.

Demostremos ahora el resultado por inducción sobre el orden n de $\mathbf{A}$:

Si $n = 1$ es trivial. Si $n = 2$, entonces

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ b/a & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & (ac\text{-}b^2)/a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & b/a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

con lo que si $a = d_1$ y $\dfrac{ac-b^2}{a} = d_2$ vemos que se cumple $d_1 = a$ y $d_2 = \det(\mathbf{A}_2)/\det(\mathbf{A}_1)$.

Supongamos la afirmación cierta para $k = (n-1)$ y veamos que se cumple para el caso $k = n$. Aplicando la hipótesis de inducción a $\mathbf{A}_{n\text{-}1}$ se cumplirá que existen $\mathbf{L}_{n\text{-}1}$ y $\mathbf{D}_{n\text{-}1}$ tales que

$\mathbf{A}_{n-1} = \mathbf{L}_{n-1}\mathbf{D}_{n-1}\mathbf{L}_{n-1}^{t}$ $\qquad$ $d_1 = a_{11}$ $\qquad$ $d_k = \det(\mathbf{A}_k)/\det(\mathbf{A}_{k-1})$ (para $k = 2,...,n-1$)

Planteemos ahora la ecuación cuyas incógnitas son $t_1,...,t_{n-1}$, y d_n

$$\mathbf{A} = \left(\begin{array}{c|c} \mathbf{L}_{n-1} & \mathbf{0} \\ \hline t_1 \;\; .. \;\; t_{n-1} & 1 \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} \begin{matrix} d_1 & .. & 0 \\ 0 & .. & d_{n-1} \end{matrix} & \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} \\ \hline \begin{matrix} 0 & .. & 0 \end{matrix} & d_n \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} \mathbf{L}_{n-1}^{t} & \begin{matrix} t_1 \\ t_{n-1} \end{matrix} \\ \hline \mathbf{0} & 1 \end{array}\right) =$$

y efectuando el producto por bloques, se obtiene

$$\mathbf{A} = \left(\begin{array}{c|c} \mathbf{L}_{n-1}\mathbf{D}_{n-1}\mathbf{L}_{n-1}^{t} & \mathbf{L}_{n-1}\mathbf{D}_{n-1}\mathbf{T}^{t} \\ \hline \mathbf{T}\mathbf{D}_{n-1}\mathbf{L}_{n-1}^{t} & \mathbf{T}\mathbf{D}_{n-1}\mathbf{T}^{t}+d_n \end{array}\right)$$

donde $\mathbf{T} = (t_1,...,t_{n-1}) \;\Rightarrow\; \mathbf{T}\mathbf{D}_{n-1}\mathbf{L}_{n-1}^{t} = (\, a_{n1} \;\; a_{n2} \;\; .. \;\; a_{nn-1} \,)$. El sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} d_1 t_1 &= a_{n1} && \text{y como } d_1 = a_{11} > 0, \text{ existe } t_1 \\ d_1 t_{21} t_1 + d_2 t_2 &= a_{n2} && \text{y como } d_2 \neq 0, \text{ existe } t_2 \\ &\cdots\cdots\cdots

$$\begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1/2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3/4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Planteamos el sistema cuyas incógnitas son t_1, t_2 y d_3

$$\begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 2 \\ 1/2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 \\ t_1 & t_2 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3/4 & 0 \\ 0 & 0 & d_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & t_1 \\ 0 & 1 & t_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & t_1 \\ 1/2 & 1 & t_1/2+3t_2/4 \\ t_1 & t_1/2+3t_2/4 & t_1^2+3t_2^2/4+d_3 \end{pmatrix}$$

lo que da

$$\begin{array}{rcl} t_1 = 2 & & t_1 = 2 \\ t_1/2+3t_2/4 = 0 & \Rightarrow & t_2 = -4/3 \\ t_1^2+3t_2^2/4+d_3 = 7 & & d_3 = 5/3 \end{array}$$

Luego las matrices **L** y **D** tales que $\mathbf{A} = \mathbf{L}\mathbf{D}\mathbf{L}^t$ son

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 \\ 2 & -4/3 & 1 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{D} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3/4 & 0 \\ 0 & 0 & 5/3 \end{pmatrix}$$

Vamos a demostrar a partir de este resultado anterior el método denominado ***Regla de Silvester***, para estudiar el signo de una forma cuadrática. En las hipótesis anteriores, son equivalentes las proposiciones:

1) **A** es la matriz de una forma cuadrática definida positiva.

2) Todos los n valores propios λ_i de **A**, cumplen que $\lambda_i > 0$.

3) Todas las matrices $\mathbf{A}_k$ tienen determinante positivo.

4) Todos los d_i son positivos, para todo $i = 1,...,n$.

Demostración:

1) implica 2): Si $\boldsymbol{x}_i \in V(\lambda_i)$ y $\boldsymbol{x}_i \neq \boldsymbol{0}$, entonces $\mathbf{x}_i^t \mathbf{A} \mathbf{x}_i = \mathbf{x}_i^t \lambda_i \mathbf{x}_i = \lambda_i \| \boldsymbol{x}_i \|^2 > 0 \Rightarrow \lambda_i > 0$

2) implica 1): Existe una base en la cual **A** diagonaliza como aplicación lineal y como forma cuadrática, luego para un vector cualquiera $\boldsymbol{x} = (x_1,...,x_n) \in \mathbf{R}^n$

$$f_c(\boldsymbol{x}) = \mathbf{x}^t \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \mathbf{x} = \lambda_1 x_1^2 + \ldots + \lambda_n x_n^2 > 0$$

por ser $\lambda_i > 0$ para todo $i = 1,...,n$.

1) implica 3): Hemos visto anteriormente que $\mathbf{A}_k$ es la matriz de una forma cuadrática definida positiva, luego todos sus valores propios son positivos, por lo que $\det(\mathbf{A}_k) > 0$

3) implica 4): Sabemos que para todo $k = 2,...,n$ es $d_1 = a_{11} > 0$ y $d_k = \det(\mathbf{A}_k)/\det(\mathbf{A}_{k-1})$, luego $d_k > 0$

4) implica 1): Observemos que si en la demostración del resultado previo en vez de suponer **A** definida positiva suponemos $d_i > 0$, para $i = 1,...,n-1$, obtenemos el mismo resultado. Por tanto $\mathbf{A} = \mathbf{L}\mathbf{D}\mathbf{L}^t$ y como $\mathbf{y} = \mathbf{x}^t\mathbf{L}$ y $d_i > 0$, tendremos

$$\mathbf{x}^t\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{x}^t\mathbf{L}\mathbf{D}\mathbf{L}^t\mathbf{x} = d_1y_1^2+...+d_ny_n^2 > 0$$

Análogamente se deduce que son equivalentes:

1) **A** es la matriz de una forma cuadrática definida negativa

2) Todos los n valores propios λ_i de **A**, cumplen que $\lambda_i < 0$

3) $(-1)^k \det(\mathbf{A}_k) > 0$

4) Todos los d_i satisfacen $d_i < 0$, para todo $i = 1,...,n$.

Ejemplo VII.5.2

Para la forma cuadrática definida sobre $\mathbf{R}^3$, que tiene por matriz la anterior

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 2 \\ 1/2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

estudiamos su signo, para lo cual hallamos

$$\det(\mathbf{A}_1) = 1 > 0$$

$$\det(\mathbf{A}_2) = \begin{vmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1 \end{vmatrix} = 3/4 > 0$$

$$\det(\mathbf{A}_3) = \begin{vmatrix} 1 & 1/2 & 2 \\ 1/2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 7 \end{vmatrix} = 5/4 > 0$$

de lo que se deduce que la forma cuadrática es definida positiva.

VII.6 .- REDUCCION DE MATRICES A FORMA TRIANGULAR

Si un endomorfismo f no tiene suficientes vectores propios como para formar una base, no existe ninguna base de V respecto de la cual la matriz de f es diagonal. No obstante, si la ecuación característica tiene sus n raíces pertenecientes a K, lo cual ocurrirá, p.ej., si K es algebraicamente cerrado, existe una base respecto de la cual la matriz de f es triangular. Se demuestra por inducción; en efecto: para $n = 1$ es trivial y supongamos el resultado cierto para los endomorfismos de espacios vectoriales sobre K de dimensión $n-1$; sea $(\boldsymbol{e}_1,...,\boldsymbol{e}_n)$ la base de V respecto de la cual la matriz de f es $\mathbf{A}$ y $\lambda_1,...,\lambda_n$ las raíces de la ecuación característica. Existe un vector $\boldsymbol{u}_1 \in V$, no nulo, tal que

$$f(\boldsymbol{u}_1) = \lambda_1 \boldsymbol{u}_1$$

por lo que $\{\boldsymbol{u}_1\}$ es l.i. y puede sustituir a un vector de la base $(\boldsymbol{e})$, supongamos al primero para fijar ideas, de forma que $(\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{e}_2,...,\boldsymbol{e}_n)$ es base de V. La matriz de f en esta base será:

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & b_{12} & .. & b_{1n} \\ 0 & b_{22} & .. & b_{2n} \\ .. & .. & .. & .. \\ 0 & b_{n2} & .. & b_{nn} \end{pmatrix} = \mathbf{Q}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{Q}$$

siendo $\mathbf{Q}$ la matriz del cambio de la base $(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,...,\boldsymbol{e}_n)$ a la $(\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{e}_2,...,\boldsymbol{e}_n)$. Su ecuación característica es

$$\det(\mathbf{B}-\lambda\mathbf{I}) = 0 \iff \begin{vmatrix} \lambda_1-\lambda & b_{12} & .. & b_{1n} \\ 0 & b_{22}-\lambda & .. & b_{2n} \\ .. & .. & .. & .. \\ 0 & b_{n2} & .. & b_{nn}-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

que por hipótesis, tiene sus raíces en K. Sea F el subespacio de V generado por los vectores $\boldsymbol{e}_2,...,\boldsymbol{e}_n$ que al formar un conjunto l.i. hace que $\dim(F) = n-1$, y sea la aplicación

$$\begin{aligned} g : F &\longrightarrow F \\ \boldsymbol{e}_2 &\longrightarrow g(\boldsymbol{e}_2) = f(\boldsymbol{e}_2) - b_{12}\boldsymbol{u}_1 \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \boldsymbol{e}_n &\longrightarrow g(\boldsymbol{e}_n) = f(\boldsymbol{e}_n) - b_{1n}\boldsymbol{u}_1 \end{aligned}$$

cuya matriz respecto de la base $(\boldsymbol{e}_2,...,\boldsymbol{e}_n)$ es, como puede comprobarse fácilmente

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} b_{22} & b_{23} & .. & b_{2n} \\ b_{32} & b_{33} & .. & b_{3n} \\ .. & .. & .. & .. \\ b_{n2} & b_{n3} & .. & b_{nn} \end{pmatrix}$$

de ecuación característica

$$\det(\mathbf{C}-\lambda\mathbf{I}) = 0 \iff \begin{vmatrix} b_{22}-\lambda & b_{23} & .. & b_{2n} \\ b_{32} & b_{33}-\lambda & .. & b_{3n} \\ ..... & & & \\ b_{n2} & b_{n3} & .. & b_{nn}-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

y sus raíces son los valores propios de **B**, excepto una vez λ_1, y, por ello, elementos de K. Por hipótesis de inducción, hay una base $(\boldsymbol{w}_2,...,\boldsymbol{w}_n)$ de F

$$\boldsymbol{w}_2 = p_{22}\boldsymbol{e}_2+...+p_{n2}\boldsymbol{e}_n$$
$$.....$$
$$\boldsymbol{w}_n = p_{2n}\boldsymbol{e}_2+...+p_{nn}\boldsymbol{e}_n$$

tal que, respecto de ella, la matriz de g es triangular

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} c_{22} & c_{23} & .. & c_{2n} \\ 0 & c_{33} & .. & c_{3n} \\ ... & ..... & & \\ 0 & 0 & .. & c_{nn} \end{pmatrix}$$

Por construcción de F es $V = [\boldsymbol{u}_1] \oplus F$ y la matriz de f en la base $(\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{w}_2,...,\boldsymbol{w}_n)$ es triangular ya que

$f(\boldsymbol{u}_1) = \lambda_1\boldsymbol{u}_1 = \lambda_1\boldsymbol{u}_1+0\cdot\boldsymbol{w}_2+...+0\cdot\boldsymbol{w}_n$

$f(\boldsymbol{w}_2) = f(p_{22}\boldsymbol{e}_2+..+p_{n2}\boldsymbol{e}_n) = p_{22}f(\boldsymbol{e}_2)+..+p_{n2}f(\boldsymbol{e}_n) = p_{22}(g(\boldsymbol{e}_2)+b_{12}\boldsymbol{u}_1)+..+p_{n2}(g(\boldsymbol{e}_n)+b_{1n}\boldsymbol{u}_1)=$
$= (p_{22}b_{12}+..+p_{n2}b_{1n})\boldsymbol{u}_1+p_{22}g(\boldsymbol{e}_2)+..+p_{n2}g(\boldsymbol{e}_n) = (p_{22}b_{12}+..+p_{n2}b_{1n})\boldsymbol{u}_1+g(p_{22}\boldsymbol{e}_2+..+p_{n2}\boldsymbol{e}_n)=$
$= (p_{22}b_{12}+..+p_{n2}b_{1n})\boldsymbol{u}_1+g(\boldsymbol{w}_2) = (p_{22}b_{12}+...+p_{n2}b_{1n})\boldsymbol{u}_1+c_{22}\boldsymbol{w}_2+0\cdot\boldsymbol{w}_3+...+0\cdot\boldsymbol{w}_n$

razonando de forma igual para los demás vectores de la base.

Siguiendo la idea de esta demostración puede deducirse un procedimiento práctico para triangulizar una matriz $\mathbf{A} = (a_{ij})$. Conocido un valor propio λ_1 y un vector propio asociado $\boldsymbol{u}_1$, formamos la matriz cuadrada $\mathbf{Q}_1$ de orden n, regular y cuya primera columna sean las componentes del vector $\boldsymbol{u}_1$, que tendrá alguna componente no nula u_{i1}; las demás columnas son tales que el menor complementario de esta componente sea el determinante de la matriz unidad $\mathbf{I}_{n-1}$ y la fila en la que está se completa con ceros con lo cual $\mathbf{Q}_1$ es la matriz del cambio de la base $(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,...,\boldsymbol{e}_n)$ a la $(\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{e}_2,...,\boldsymbol{e}_n)$. Tendremos así

$$\mathbf{Q}_1^{-1}\mathbf{A}\mathbf{Q}_1 = \begin{pmatrix} \lambda_1 & b_{12} & ... & b_{1n} \\ 0 & b_{22} & ... & b_{2n} \\ ..... & & & \\ 0 & b_{n2} & ... & b_{nn} \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|c} \lambda_1 & \mathbf{B}_1 \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{A}_1 \end{array}\right)$$

Reiteramos el proceso para la matriz $\mathbf{A}_1$, de orden $n-1$; conocido un valor propio λ_2 , que lo es

también de **A**, y un vector propio asociado $\boldsymbol{u}_2$, formamos la matriz cuadrada $\mathbf{Q}_2$ de orden $n-1$, cuya primera columna sean las componentes del vector $\boldsymbol{u}_2$, y las demás columnas construidas de modo análogo al anterior, es decir, a partir de una componente no nula completar con el determinante de la matriz $\mathbf{I}_{n-2}$ y ceros. Tendremos

$$\mathbf{Q}_2^{-1}\mathbf{A}_1\mathbf{Q}_2 = \begin{pmatrix} \lambda_2 & b'_{23} & \ldots & b'_{2n} \\ 0 & b'_{33} & \ldots & b'_{3n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & b'_{n3} & \ldots & b'_{nn} \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|c} \lambda_2 & \mathbf{B}_2 \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{A}_2 \end{array}\right)$$

Repetimos el proceso $n-1$ veces, hasta obtener

$$\mathbf{Q} = \mathbf{Q}_1 \begin{pmatrix} \mathbf{I}_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{Q}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{I}_2 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{Q}_3 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} \mathbf{I}_{n-2} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{Q}_{n-1} \end{pmatrix}$$

siendo $\mathbf{I}_r$ (para $r = 1,..,n-2$) la matriz unidad de orden r, de modo que $\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{Q}$ es una matriz triangular.

Ejemplo VII.6.1

Para la matriz

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -1 & -4 \\ 2 & 0 & 5 & -4 \\ -1 & 1 & -2 & 3 \\ -1 & 4 & -1 & 6 \end{pmatrix}$$

se procede como sigue. Los valores propios de **A** son $\lambda = 1$ (triple) y $\lambda = 2$ (simple) y los subespacios de vectores propios $V(1) = [(3,6,-4,-5)]$ y $V(2) = [(2,3,-2,-3)]$, como fácilmente puede comprobarse. Planteamos una matriz

$$\mathbf{Q}_1 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & 1 & 0 \\ -5 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

para la cual se obtiene

$$\mathbf{Q}_1^{-1} = \begin{pmatrix} 1/3 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 4/3 & 0 & 1 & 0 \\ 5/3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{Q}_1^{-1}\mathbf{A}\mathbf{Q}_1 = \begin{pmatrix} 1 & -4/3 & -1/3 & -4/3 \\ 0 & 8 & 7 & 4 \\ 0 & -13/3 & -10/3 & -7/3 \\ 0 & -8/3 & -8/3 & -2/3 \end{pmatrix}$$

La matriz $\mathbf{A}_1$ será

$$\mathbf{A}_1 = \begin{pmatrix} 8 & 7 & 4 \\ -13/3 & -10/3 & -7/3 \\ -8/3 & -8/3 & -2/3 \end{pmatrix}$$

que tiene como valor propio a $\lambda = 1$, siendo el subespacio de vectores propios

$$V(1) = [(1,-1,0)]$$

por lo que si construimos la matriz

$$\mathbf{Q}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

será

$$\mathbf{Q}_2^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{Q}_2^{-1}\mathbf{A}_1\mathbf{Q}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 4 \\ 0 & 11/3 & 5/3 \\ 0 & -8/3 & -2/3 \end{pmatrix}$$

con lo que

$$\mathbf{A}_2 = \begin{pmatrix} 11/3 & 5/3 \\ -8/3 & -2/3 \end{pmatrix}$$

que tiene como valor propio a $\lambda = 1$, siendo su subespacio de vectores propios

$$V(1) = [(5,-8)]$$

Formamos ahora la matriz

$$\mathbf{Q}_3 = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ -8 & 1 \end{pmatrix}$$

para la cual

$$\mathbf{Q}_3^{-1} = \begin{pmatrix} 1/5 & 0 \\ 8/5 & 1 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{Q}_3^{-1}\mathbf{A}_2\mathbf{Q}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1/3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

La matriz del cambio de base que trianguliza a **A** es

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & 1 & 0 \\ -5 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -8 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & -1 & 5 & 0 \\ -5 & 0 & -8 & 1 \end{pmatrix}$$

ya que efectivamente

$$\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 9 & -4/3 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

es una matriz triangular.

Este proceso de triangulación puede simplificarse si efectuamos una diagonalización parcial previa y después triangulizamos la parte de matriz no diagonalizada. Sean $\lambda_1,\ldots,\lambda_k$ los distintos valores propios de **A**, sean $\dim(V(\lambda_i) = r_i$ y $(\boldsymbol{u}_{i1},\ldots,\boldsymbol{u}_{ir_i})$ una base de vectores propios de $V(\lambda_i)$ (para $i = 1,\ldots,k$) y sea $s = r_1+\ldots+r_k$. De acuerdo con el teorema de Steinitz los s vectores $\boldsymbol{u}_{ij}$ pueden sustituir a s vectores de la base $(\boldsymbol{e}_1,\ldots,\boldsymbol{e}_n)$ de V de modo que el resultado

$$(\boldsymbol{u}_{11},\ldots,\boldsymbol{u}_{1r_1},\ldots,\boldsymbol{u}_{k1},\ldots,\boldsymbol{u}_{kr_k},\boldsymbol{e}'_{s+1},\ldots,\boldsymbol{e}'_n)$$

es otra base de V. La matriz de f en esta base es

$$\mathbf{A}_1 = \left(\begin{array}{ccc|c} \lambda_1 & & & \\ & \ddots & & \mathbf{C}' \\ & & \lambda_k & \\ \hline 0 & & & \mathbf{C} \end{array}\right)$$

Si el p.c. de f tiene todas sus raíces en K, el p.c. de la matriz **C** también tiene todas sus raíces en K, por lo que existen $n–s$ vectores que forman una base de K^{n-s} respecto de la cual la matriz **C** es triangular; si **V** la matriz cuyas columnas son las componentes de estos $n–s$ vectores respecto de la base $(\boldsymbol{e}'_{s+1},\ldots,\boldsymbol{e}'_n)$ tendremos

$$\mathbf{T}_\mathbf{C} = \mathbf{V}^{-1}\mathbf{C}\mathbf{V}$$

siendo $\mathbf{T}_\mathbf{C}$ la matriz triangular. La matriz

$$\mathbf{M} = \left(\begin{array}{c|c} \mathbf{I}_s & 0 \\ \hline 0 & \mathbf{V} \end{array}\right)$$

trianguliza la matriz $\mathbf{A}_1$. En efecto

$$\mathbf{T} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{A}_1\mathbf{M} = \left(\begin{array}{c|c} \mathbf{I}_s & 0 \\ \hline 0 & \mathbf{V} \end{array}\right)^{-1} \left(\begin{array}{ccc|c} \lambda_1 & & & \\ & \ddots & & \mathbf{C}' \\ & & \lambda_k & \\ \hline 0 & & & \mathbf{C} \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|c} \mathbf{I}_s & 0 \\ \hline 0 & \mathbf{V} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} \lambda_1 & & & \\ & \ddots & & \mathbf{C}'\mathbf{V} \\ & & \lambda_k & \\ \hline 0 & & & \mathbf{V}^{-1}\mathbf{C}\,\mathbf{V} \end{array}\right)$$

es decir

$$\mathbf{T} = \left(\begin{array}{ccc|c} \lambda_1 & & & \\ & \ddots & & \mathbf{C}'' \\ & & \lambda_k & \\ \hline & \mathbf{0} & & \mathbf{T_C} \end{array}\right)$$

Desde un punto de vista práctico el proceso a seguir que este razonamiento justifica es

1) Hallar la base $(\boldsymbol{u}_{11},\ldots,\boldsymbol{u}_{1r_1},\ldots,\boldsymbol{u}_{k1},\ldots,\boldsymbol{u}_{kr_k},\boldsymbol{e}'_{s+1},\ldots,\boldsymbol{e}'_n)$.
2) Calcular la matriz $\mathbf{A}_1$.
3) Triangulizar la matriz **C**.
4) Construir la matriz **M** y hallar la matriz triangular **T**.

Ejemplo VII.6.2

Para la matriz del ejemplo anterior VII.8.1

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -1 & -4 \\ 2 & 0 & 5 & -4 \\ -1 & 1 & -2 & 3 \\ -1 & 4 & -1 & 6 \end{pmatrix}$$

al ser los valores propios $\lambda_1 = 1$, triple y $\lambda_2 = 2$, simple, con $V(1) = [(3,6,-4,-5)]$ y $V(2) = [(2,3-2,-3)]$ la base resultado de sustituir dos vectores de la base canónica por (3,6,−4,−5) y (2,3−2,−3) es ((3,6,−4,−5),(2,3−2,−3),(0,0,1,0),(0,0,0,1)).Haciendo el cambio de base calculamos la matriz

$$\mathbf{A}_1 = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & 0 \\ 6 & 3 & 0 & 0 \\ -4 & -2 & 1 & 0 \\ -5 & -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & -4 & -1 & -4 \\ 2 & 0 & 5 & -4 \\ -1 & 1 & -2 & 3 \\ -1 & 4 & -1 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & 0 \\ 6 & 3 & 0 & 0 \\ -4 & -2 & 1 & 0 \\ -5 & -3 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 13/3 & 4/3 \\ 0 & 2 & -7 & -4 \\ \hline 0 & 0 & 4/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & -1/3 & 2/3 \end{array}\right)$$

y las matrices $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 4/3 & 1/3 \\ -1/3 & 2/3 \end{pmatrix}$ y $\mathbf{C}' = \begin{pmatrix} 13/3 & 4/3 \\ -7 & -4 \end{pmatrix}$.

Triangulizamos **C** calculando sus valores y vectores propios

$$\begin{vmatrix} 4/3-\lambda & 1/3 \\ -1/3 & 2/3-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0 \;\Rightarrow\; \lambda = 1 \text{ doble y } V(1) = [(1,-1)]$$

con lo que

$$\mathbf{Q}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{T_C} = \mathbf{Q}_1^{-1}\mathbf{C}\mathbf{Q}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1/3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Como

$$\mathbf{V} = \mathbf{Q}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{C}'' = \mathbf{C}'\mathbf{V} = \begin{pmatrix} 13/3 & 4/3 \\ -7 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4/3 \\ -3 & -4 \end{pmatrix}$$

La matriz del cambio de base que triangulariza a $\mathbf{A}_1$ es $\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ ya que

$$\mathbf{T} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{A}_1\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 13/3 & 4/3 \\ 0 & 2 & -7 & -4 \\ 0 & 0 & 4/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & -1/3 & 2/3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 4/3 \\ 0 & 2 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

por lo que la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ triangulariza **A**.

VII.7.- FORMA DE JORDAN

Si los valores propios no pertenecen al cuerpo *K*, el endomorfismo no es diagonalizable ni triangulizable por lo que es conveniente investigar nuevas formas matriciales simples. Las más sencillas podrían ser aquellas que en sus filas o columnas presentan no más de dos elementos distintos de cero. Estas matrices existen y recibirán el nombre de matrices de Jordan.

Sea *V* e.v.s. *K* y *f* un endomorfismo de *V*. La aplicación de *K*[*X*], que es el anillo de los polinomios sobre *K*, en End(*V*), que es el anillo de los endomorfismos de *V*, en la que la imagen de un polinomio $P(X) = a_0+a_1X+...+a_nX^n$ es el endomorfismo

$$P(f) = a_0+a_1f+...+a_nf^n$$

(donde f^n es la aplicación compuesta $f\circ f\circ ..\overset{n}{\circ} f$) es compatible con la suma y producto ya que para todo par de polinomios $P,Q\in K[X]$

$$(P+Q)(f) = P(f)+Q(f) \qquad\qquad (PQ)(f) = P(f)\circ Q(f)$$

Se trata pues de un morfismo que hace que el conjunto de endomorfismos que son combinación lineal de potencias de *f* sea un subanillo de End(*f*), conmutativo y de integridad. El núcleo de este morfismo está formado por los polinomios cuya imagen es la aplicación nula; si un

polinomio $P(X)$ pertenece a este núcleo se le denomina ***polinomio anulador*** (p.a.) de f ya que, en este caso

$$P(f) = a_0+a_1f+...+a_nf^n = 0_V$$

El polinomio nulo es, obviamente p.a. de f y también lo es el polinomio característico (p.c.) tal como asegura el ***teorema de Hamilton-Cayley***:

"Si $P_c(\lambda)$ es el polinomio característico de un endomorfismo f de V, entonces es también polinomio anulador de f, es decir, $P_c(f) = 0_V$"

En efecto, al polinomio λ va asociada la aplicación f y para cualquier vector de la base es

$$f(\boldsymbol{e}_i) = a_{1i}\boldsymbol{e}_1+...+ a_{ni}\boldsymbol{e}_n$$

Sea la matriz $\mathbf{B}(\lambda) = \mathbf{A}-\lambda\mathbf{I}$ y su matriz adjunta $\mathbf{B}^*(\lambda)$ con lo que

$$\mathbf{B}^*(\lambda)\mathbf{B}(\lambda) = \det(\mathbf{B}(\lambda))\ \mathbf{I}_n$$

Como

$$\mathbf{B}(f)\begin{pmatrix}\boldsymbol{e}_1\\ \dots\\ \boldsymbol{e}_n\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}(a_{11}-f)(\boldsymbol{e}_1)+\dots+a_{1n}\boldsymbol{e}_n\\ \dots\dots\dots\dots\dots\\ a_{n1}\boldsymbol{e}_1+\dots+(a_{n1}-f)(\boldsymbol{e}_n)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\boldsymbol{0}\\ \dots\\ \boldsymbol{0}\end{pmatrix}$$

tenemos para todo $i = 1,...,n$

$$P_c(f)(\boldsymbol{e}_i) = \mathbf{B}^*(f)\mathbf{B}(f)(\boldsymbol{e}_i) = \boldsymbol{0}$$

luego $P_c(f)$ es la aplicación nula.

Veamos ahora unas importantes propiedades que relacionan los núcleos de los endomorfismos definidos por los polinomios de $K[X]$. Sea $P(X)$ un polinomio, $P(f)$ el endomorfismo que define y $\mathrm{Nuc}(P(f))$ su núcleo.

Lema 1.- El subespacio $\mathrm{Nuc}(P(f))$ es invariante por f.

En efecto, para cualquier vector $\boldsymbol{x}\in \mathrm{Nuc}(P(f))$ es

$$P(f)(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0} \ \Rightarrow\ \boldsymbol{0} = f(P(f)(\boldsymbol{x})) = P(f)(f(\boldsymbol{x}))$$

luego $f(\boldsymbol{x})\in \mathrm{Nuc}(P(f))$, es decir, $f(\mathrm{Nuc}(P(f))) \subseteq \mathrm{Nuc}(P(f))$.

Lema 2.- Si $P(X)$ es divisor de otro polinomio $Q(X)$, entonces $\mathrm{Nuc}(P(f)) \subseteq \mathrm{Nuc}(Q(f))$.

En efecto, si $Q = PC$, entonces para cualquier $\boldsymbol{x}\in \mathrm{Nuc}(P(f))$ es

$$Q(f)(\boldsymbol{x}) = C(f)(P(f)(\boldsymbol{x})) = C(f)(\boldsymbol{0}) = \boldsymbol{0}$$

luego $\boldsymbol{x}\in \mathrm{Nuc}(Q(f))$.

Lema 3.- Sea P un polinomio anulador de f y sea

$$P = P_1^{n_1}...P_k^{n_k}$$

su descomposición en factores primos. Si $U_i = \mathrm{Nuc}(P_i^{n_i}(f))$, entonces

$$V = U_1 \oplus ... \oplus U_k$$

Por inducción sobre k. Para $k = 2$, como P es un p.a. de f si su descomposición factorial es $P = Q_1Q_2$, siendo Q_1 y Q_2 polinomios primos entre sí, por propiedades de la divisibilidad existen otros dos polinomios B_1 y B_2 tales que

$$B_1Q_1+B_2Q_2 = 1 \quad \Rightarrow \quad (\forall \boldsymbol{u} \in V)\ (\boldsymbol{u} = (B_1Q_1)(f)(\boldsymbol{u})+(B_2Q_2)(f)(\boldsymbol{u}))$$

Como $(B_1Q_1)(f)(\boldsymbol{u}) \in \mathrm{Nuc}(Q_2(f))$, ya que

$$(Q_2(B_1Q_1))(f)(\boldsymbol{u}) = (B_1(Q_1Q_2))(f)(\boldsymbol{u}) = B_1(f)(\boldsymbol{0}) = \boldsymbol{0}$$

y $(B_2Q_2)(f)(\boldsymbol{u}) \in \mathrm{Nuc}(Q_1(f))$, según demuestra un razonamiento análogo, entonces se verifica que $\mathrm{Nuc}(Q_1(f)) \cap \mathrm{Nuc}(Q_2(f)) = \{\boldsymbol{0}\}$ pues si $\boldsymbol{u} \in \mathrm{Nuc}(Q_1(f)) \cap \mathrm{Nuc}(Q_2(f))$ sería $Q_1(f)(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{0}$ y $Q_2(f)(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{0}$ por lo que

$$\boldsymbol{u} = (B_1Q_1)(f)(\boldsymbol{u})+(B_2Q_2)(f)(\boldsymbol{u}) = B_1(Q_1(f)(\boldsymbol{u}))+B_2(Q_2(f)(\boldsymbol{u})) = \boldsymbol{0}$$

Así tenemos que $V = \mathrm{Nuc}(Q_1(f)) \oplus \mathrm{Nuc}(Q_2(f))$, luego el resultado es válido para $k = 2$. Supongámoslo válido para k–1; si $Q = P_2^{n_2}...P_k^{n_k}$, entonces $P = P_1^{n_1}Q$ y, por el resultado anterior, es $V = \mathrm{Nuc}(P_1^{n_1}(f)) \oplus \mathrm{Nuc}(Q(f))$. Como un p.a. de la restricción $f_{\mathrm{Nuc}(Q(f))}$ es Q, que se descompone en k–1 factores primos, podemos aplicar la hipótesis de inducción al subespacio $\mathrm{Nuc}(Q(f))$ obteniéndose

$$\mathrm{Nuc}(Q(f)) = F_2' \oplus \ldots \oplus F_k'$$

siendo $F_i' = \mathrm{Nuc}(P_i^{n_i}(f)) \cap \mathrm{Nuc}(Q(f))$. Pero al ser $F_i' = \mathrm{Nuc}(P_i^{n_i}(f))$ ya que

$$\boldsymbol{x} \in \mathrm{Nuc}(P_i^{n_i}(f)) \ \Rightarrow\ P_i^{n_i}(f)(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0} \ \Rightarrow\ Q(f)(\boldsymbol{x}) = (P_2^{n_2}...P_{i\text{-}1}^{n_{i\text{-}1}}P_{i+1}^{n_{i+1}}...P_k^{n_k})(f)(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}$$

es

$$\mathrm{Nuc}(Q(f)) = \mathrm{Nuc}(P_2^{n_2}(f)) \oplus ... \oplus \mathrm{Nuc}(P_k^{n_k}(f))$$

y el Lema queda demostrado.

Observación : En particular si la descomposición factorial del p.c. es $P_c = P_1^{n_1}...P_k^{m_k}$, entonces

$$V = \mathrm{Nuc}(P_1^{m_1}(f)) \oplus ... \oplus \mathrm{Nuc}(P_k^{m_k}(f))$$

y este lema, junto con el Lema 1, reducen el estudio de un endomorfismo sobre un espacio arbitrario al estudio del endomorfismo en un espacio en el que el polinomio característico es una potencia de un polinomio primo.

Sea V e.v.s. K que sea o el cuerpo $\mathbf{R}$ o un cuerpo algebraicamente cerrado, p.ej. el cuerpo $\mathbf{C}$, por lo que todo polinomio primo es de grado 1 o 2; sea $(\boldsymbol{e}_1,...,\boldsymbol{e}_n)$ una base de V y f un endomorfismo de V cuya matriz respecto de la base es $\mathbf{A} = (a_{ij})$ y, de acuerdo con la observación del Lema 3, cuyo p.c. sea potencia de un polinomio primo

$$P_c(\lambda) = P^m(\lambda)$$

siendo P un polinomio unitario de grado igual a 1 o 2. Consideremos los núcleos de los endomorfismos definidos por las sucesivas potencias de P que, de acuerdo con el teorema de Hamilton-Cayley y el Lema 2, verificarán

$$\{\boldsymbol{0}\} = \mathrm{Nuc}(P^0(f)) \subseteq \mathrm{Nuc}(P^1(f)) \subseteq ... \subseteq \mathrm{Nuc}(P^m(f)) = V$$

Sea s el menor número natural tal que $\mathrm{Nuc}(P^s(f)) = \mathrm{Nuc}(P^m(f))$, lo que equivale a que $s \leq m$ y $\mathrm{Nuc}(P^{s-1}(f)) \subset \mathrm{Nuc}(P^s(f))$.

Lema 4.- Sea el polinomio primo $P(x) \in \mathbf{R}(x)$. La relación binaria sobre $\mathbf{R}(x)$ definida por

$$A(x)\ \mathrm{R}\ B(x) \text{ si y sólo si } A(x)-B(x) \text{ es múltiplo de } P(x)$$

es de equivalencia y el conjunto cociente $\mathbf{K} = \mathbf{R}(x)/\mathrm{R}$ es un cuerpo para las operaciones

$$<A(x)>+<B(x)> = <A(x)+B(x)> \quad \text{y} \quad <A(x)>\cdot<B(x)> = <A(x)\cdot B(x)>$$

En efecto, demostrar que la relación es de equivalencia es inmediato, al igual que las condiciones de cuerpo para $(\mathbf{K},+,\cdot)$. La clase nula está formada por los múltiplos de $P(x)$.

Lema 5.- Si V es e.v.s. $\mathbf{R}$, $P(x)$ es un polinomio anulador de V y $P(x)$ es primo, entonces V es también un espacio vectorial sobre el cuerpo $\mathbf{K}$.

En efecto, la operación externa $<A(x)>\boldsymbol{u} = A(f)(\boldsymbol{u})$ está bien definida, pues

$$A_1(x), A_2(x) \in <A(x)> \ \Rightarrow\ A_1(x) = A_2(x)+M(x)P(x) \ \Rightarrow\ A_1(f)(\boldsymbol{u}) = A_2(f)(\boldsymbol{u})$$

y las propiedades de espacio vectorial, correspondientes a esta operación, son inmediatas.

Lema 6.- Si $P(x) = a_0+a_1x+a_2x^2$ es un polinomio anulador de V e.v.s. $\mathbf{R}$ y $P(x)$ es primo, para todo $\boldsymbol{u} \in V$ el subespacio $[\boldsymbol{u}]$ de V e.v.s. $\mathbf{K}$ es igual al subespacio $[\boldsymbol{u},f(\boldsymbol{u})]$ de V e.v.s. $\mathbf{R}$.

En efecto,

$$[\boldsymbol{u}] = \{<A(x)>(\boldsymbol{u}) \mid <A(x)> \in \mathbf{K}\} = \{(A(f)+M(f)P(f))(\boldsymbol{u}) \mid A(x) \in \mathbf{R}(x)\ ,\ \mathrm{gr}(A(x)) \leq 1\}$$
$$= \{A(f)(\boldsymbol{u}) \mid A(x) \in \mathbf{R}(x)\ ,\ \mathrm{gr}(A(x)) \leq 1\} = \{(a+bf)(\boldsymbol{u}) \mid a,b \in \mathbf{R}\} = [\boldsymbol{u},f(\boldsymbol{u})]$$

Veamos a continuación el teorema que proporciona la base para la forma de Jordan de un endomorfismo f sobre un espacio vectorial V cuando el polinomio característico es potencia de un polinomio primo, es decir, cuando $V = \mathrm{Nuc}(P^s(f))$.

Teorema.- Existen vectores $\boldsymbol{u}_{11},...,\boldsymbol{u}_{1k_1},..,\boldsymbol{u}_{21},...,\boldsymbol{u}_{2k_2},..,\boldsymbol{u}_{s1},...,\boldsymbol{u}_{sk_s}$ tales que

$$
\begin{array}{r}
(\ \boldsymbol{u}_{11} \ , \ P(f)(\boldsymbol{u}_{11}) \quad ,..., \ P^{s-2}(f)(\boldsymbol{u}_{11}) \quad , \quad P^{s-1}(f)(\boldsymbol{u}_{11}), \\
f(\boldsymbol{u}_{11}), f(P(f)(\boldsymbol{u}_{11})) \ ,..., \ f(P^{s-2}(f)(\boldsymbol{u}_{11})) \ , \ f(P^{s-1}(f)(\boldsymbol{u}_{11})), \\
. \ . \\
\boldsymbol{u}_{1k_1} \ , \ P(f)(\boldsymbol{u}_{1k_1}) \quad ,..., \ P^{s-2}(f)(\boldsymbol{u}_{1k_1}) \quad , \quad P^{s-1}(f)(\boldsymbol{u}_{1k_1}), \\
f(\boldsymbol{u}_{1k_1}), f(P(f)(\boldsymbol{u}_{1k_1})),..., \ f(P^{s-2}(f)(\boldsymbol{u}_{1k_1})), \ f(P^{s-1}(f)(\boldsymbol{u}_{1k_1})), \\
\boldsymbol{u}_{21} \quad ,..., \quad P^{s-3}(f)(\boldsymbol{u}_{21}), \quad P^{s-2}(f)(\boldsymbol{u}_{21}), \\
f(\boldsymbol{u}_{21}) \quad ,..., \ f(P^{s-3}(f)(\boldsymbol{u}_{21})), \ f(P^{s-2}(f)(\boldsymbol{u}_{21})), \\
. \ . \\
\boldsymbol{u}_{2k_2} \quad ,..., \quad P^{s-3}(f)(\boldsymbol{u}_{2k_2}), \quad P^{s-2}(f)(\boldsymbol{u}_{2k_2}), \\
f(\boldsymbol{u}_{2k_2}) \quad ,..., \ f(P^{s-3}(f)(\boldsymbol{u}_{2k_2})), \ f(P^{s-2}(f)(\boldsymbol{u}_{2k_2})), \\
. \ . \\
\boldsymbol{u}_{s-11} \quad , \quad P(f)(\boldsymbol{u}_{s-11}), \\
f(\boldsymbol{u}_{s-11}) \quad , \quad f(P(f)(\boldsymbol{u}_{s-11})), \\
. \ . \\
\boldsymbol{u}_{s-1k_{s-1}} \quad , \quad P(f)(\boldsymbol{u}_{s-1k_{s-1}}), \\
f(\boldsymbol{u}_{s-1k_{s-1}}), \quad f(P(f)(\boldsymbol{u}_{s-1k_{s-1}})), \\
\boldsymbol{u}_{s1}, \\
f(\boldsymbol{u}_{s1}), \\
. \ . \ . \ . \\
\boldsymbol{u}_{sk_s}, \\
f(\boldsymbol{u}_{sk_s}))
\end{array}
\qquad (1)
$$

si P es un polinomio primo de grado 2, o

$$
\begin{array}{r}
(\boldsymbol{u}_{11} \ , \quad P(f)(\boldsymbol{u}_{11}),..., \ P^{s-2}(f)(\boldsymbol{u}_{11}), \ P^{s-1}(f)(\boldsymbol{u}_{11}), \\
. \ . \\
\boldsymbol{u}_{1k_1}, P(f)(\boldsymbol{u}_{1k_1}),..., \ P^{s-2}(f)(\boldsymbol{u}_{1k_1}), P^{s-1}(f)(\boldsymbol{u}_{1k_1}), \\
\boldsymbol{u}_{21} \ ,..., \quad P^{s-3}(f)(\boldsymbol{u}_{21}), \ P^{s-2}(f)(\boldsymbol{u}_{21}), \\
. \ . \\
\boldsymbol{u}_{2k_2},..., \ P^{s-3}(f)(\boldsymbol{u}_{2k_2}), P^{s-2}(f)(\boldsymbol{u}_{2k_2}), \\
. \ . \\
\boldsymbol{u}_{s-11} \ , \quad P(f)(\boldsymbol{u}_{s-11}), \\
. \ . \\
\boldsymbol{u}_{s-1k_{s-1}} , P(f)(\boldsymbol{u}_{s-1k_{s-1}}), \\
\boldsymbol{u}_{s1}, \\
. \ . \ . \\
\boldsymbol{u}_{sk_s})
\end{array}
\qquad (2)
$$

si P es un polinomio primo de grado 1, verifican

a) forman una base de V

b) los vectores que están en cada una de las columnas $i = 1,2,...,s$ de estos cuadros son vectores tales que la suma del subespacio $\text{Nuc}(P^{s-i}(f))$ con el subespacio que generan es directa e igual a $\text{Nuc}(P^{s-i+1}(f))$.

En efecto, vamos a demostrar el teorema por inducción sobre s, es decir, el menor número natural tal que $\text{Nuc}(P^s(f)) = \text{Nuc}(P^m(f))$

Para $s = 1$ es $\text{Nuc}(P(f)) = V$ y entonces P es un polinomio anulador de V. Según el Lema 5, V es también un espacio vectorial sobre el cuerpo cociente $\mathbf{K}$; sea $(\boldsymbol{u}_1,...,\boldsymbol{u}_k)$ una base. Obviamente los vectores $\boldsymbol{u}_1,f(\boldsymbol{u}_1),...,\boldsymbol{u}_k,f(\boldsymbol{u}_k)$ pertenecen a $\text{Nuc}(P(f))$. Además, de acuerdo con el Lema 6

$$V = [\boldsymbol{u}_1]\oplus...\oplus[\boldsymbol{u}_k] = [\boldsymbol{u}_1,f(\boldsymbol{u}_1)]\oplus...\oplus[\boldsymbol{u}_k,f(\boldsymbol{u}_k)]$$

y $(\boldsymbol{u}_1,f(\boldsymbol{u}_1),...,\boldsymbol{u}_k,f(\boldsymbol{u}_k))$ es una base de V ya que generan V y son l.i. pues

$$\alpha_1\boldsymbol{u}_1+\beta_1f(\boldsymbol{u}_1)+...+\alpha_k\boldsymbol{u}_k+\beta_kf(\boldsymbol{u}_k) = \boldsymbol{0} \;\Rightarrow\; (\alpha_1+\beta_1f)(\boldsymbol{u}_1)+...+(\alpha_k+\beta_kf)(\boldsymbol{u}_k) = \boldsymbol{0}$$

y como $\boldsymbol{u}_1,...,\boldsymbol{u}_k$ son vectores l.i. de V e.v.s.$\mathbf{K}$ es $(\alpha_1+\beta_1x) = ... = (\alpha_k+\beta_kx) = <0>$, es decir, son múltiplos de P. Al ser de grado 2 deben ser $\alpha_1 = \beta_1 = ... = \alpha_k = \beta_k = 0$.

Supongamos el teorema cierto para s–1. Como el subespacio $P(f)(V)$ tiene como polinomio anulador a $P^{s-1}(x)$ existen $\boldsymbol{w}_{11},...,\boldsymbol{w}_{1k_1},..,\boldsymbol{w}_{21},...,\boldsymbol{w}_{2k_2},..,\boldsymbol{w}_{s-11},...,\boldsymbol{w}_{s-1k_{s-1}}$ que verifican las conclusiones del teorema. Por ello, y para $i = 1,...,s$–1 y $j = 1,...,k_{s-1}$, sean los vectores $\boldsymbol{u}_{ij}$ de V tales que $\boldsymbol{w}_{ij} = P(f)(\boldsymbol{u}_{ij})$, sea A el conjunto que forman $\boldsymbol{u}_{ij}$, $f(\boldsymbol{u}_{ij})$, $P(f)(\boldsymbol{u}_{ij})$, $f(P(f)(\boldsymbol{u}_{ij}))$,..., $P^{s-1}(f)(\boldsymbol{u}_{ij})$, $f(P^{s-1}(f)(\boldsymbol{u}_{ij}))$ y sea U el subespacio que generan. Se verifica:

a) A es l.i. ya que si en la ecuación de la independencia lineal de todos sus vectores aplicamos $P^{s-1}(f)$ a ambos miembros se obtiene, despues de eliminar los vectores nulos,

$$\alpha_1P^{s-1}(f)(\boldsymbol{u}_1)+\beta_1f(P^{s-1}(f)(\boldsymbol{u}_1))+...+\alpha_kP^{s-1}(f)(\boldsymbol{u}_k)+\beta_kf(P^{s-1}(f)((\boldsymbol{u}_k)) = \boldsymbol{0} \;\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\; P^{s-2}(f)(\alpha_1\boldsymbol{w}_1+\beta_1f(\boldsymbol{w}_1)+...+\alpha_k\boldsymbol{w}_k+\beta_kf(\boldsymbol{w}_k)) = \boldsymbol{0} \;\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\; \alpha_1\boldsymbol{w}_1+\beta_1f(\boldsymbol{w}_1)+...+\alpha_k\boldsymbol{w}_k+\beta_kf(\boldsymbol{w}_k)) = \boldsymbol{0} \;\Rightarrow\; \alpha_1 = \beta_1 =...= \alpha_k = \beta_k = 0$$

teniendo en cuenta la hipótesis de inducción. Sustituyendo estos escalares en la ecuación de la independencia lineal y hallando la imagen de ambos miembros por $P^{s-2}(f)$, y sucesivamente por $P^{s-3}(f)$,..., $P(f)$, se prueba que todos los escalares son nulos.

b) Son iguales los subespacios $P(f)(V) = P(f)(U)$, por construcción del subespacio U.

c) $V = U+\text{Nuc}(P(f))$ ya que para cualquier vector $\boldsymbol{x}\in V$ es

$$P(f)(\boldsymbol{x})\in P(f)(V) = P(f)(U) \;\Rightarrow\; (\exists\boldsymbol{y}\in U)\,(P(f)(\boldsymbol{x}) = P(f)(\boldsymbol{y}) \;\Rightarrow\; \boldsymbol{x}–\boldsymbol{y}\in \text{Nuc}(P(f)))$$

y $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}+(\boldsymbol{x}–\boldsymbol{y})$.

d) Si G es el subespacio suplementario de $\text{Nuc}(P(f))\cap U$ respecto de $\text{Nuc}(P(f))$, es decir, el

subespacio generado por los vectores l.i. que completan una base de Nuc($P(f)$)$\cap U$ hasta una base de Nuc($P(f)$), tenemos Nuc($P(f)$) = (Nuc($P(f)$)$\cap U$)$\oplus G$.

e) Se verifica que $V = U \oplus G$. En efecto, por una parte para cualquier $\boldsymbol{x} \in V$ es $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}+\boldsymbol{z}$, con $\boldsymbol{y} \in U$ y $\boldsymbol{z} \in$ Nuc($P(f)$); por d), será $\boldsymbol{z} = \boldsymbol{z}_1+\boldsymbol{z}_2$ con $\boldsymbol{z}_1 \in$ Nuc($P(f)$)$\cap U$ y $\boldsymbol{z}_2 \in G$ lo que implica que $\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{y}+\boldsymbol{z}_1)+\boldsymbol{z}_2$ con $\boldsymbol{y}+\boldsymbol{z}_1 \in U$ y $\boldsymbol{z}_2 \in G$; además si existiera algún vector $\boldsymbol{t} \in U \cap G$, sería $\boldsymbol{t} \in U$ y $\boldsymbol{t} \in G \subseteq$ Nuc($P(f)$) y por construcción de G, $\boldsymbol{t} = \boldsymbol{0}$.

f) Al ser $G \subseteq$ Nuc($P(f)$), es $P(x)$ polinomio anulador de G y G es espacio vectorial sobre el cuerpo cociente **K**; sea $(\boldsymbol{u}_{s1},...,\boldsymbol{u}_{sk_s})$ una base. Obviamente los vectores $\boldsymbol{u}_{s1}$, $f(\boldsymbol{u}_{s1})$,..., $\boldsymbol{u}_{sk_s}$, $f(\boldsymbol{u}_{sk_s})$ pertenecen a Nuc($P(f)$) y, por el razonamiento hecho en el caso $s = 1$, forman una base de G como espacio vectorial sobre **R**.

Todo ello demuestra el teorema para el caso gr(P) = 2. Observemos que

$$\text{Nuc}(P^{s-1}(f)) \oplus [\boldsymbol{u}_{11},...,\boldsymbol{u}_{1k_1}, f(\boldsymbol{u}_{11}),...,f(\boldsymbol{u}_{1k_1})] = \text{Nuc}(P^{s}(f))$$

luego

$$2k_1 = \dim(\text{Nuc}(P^s(f))) - \dim(\text{Nuc}(P^{s-1}(f)))$$

y análogamente

$$\text{Nuc}(P^{s-2}(f)) \oplus [\boldsymbol{u}_{21}, f(\boldsymbol{u}_{21}),...,\boldsymbol{u}_{2k_2}, f(\boldsymbol{u}_{2k_2})] \oplus$$
$$\oplus [P(f)(\boldsymbol{u}_{11}),...,P(f)(\boldsymbol{u}_{1k_1}),P(f)(f(\boldsymbol{u}_{11})),...,P(f)(f(\boldsymbol{u}_{1k_1}))] = \text{Nuc}(P^{s-1}(f))$$

luego

$$2k_1+2k_2 = \dim(\text{Nuc}(P^{s-1}(f))) - \dim(\text{Nuc}(P^{s-2}(f)))$$

y así sucesivamente.

En el caso gr(P) = 1, los razonamientos siguen siendo válidos, pero más simples pues no hay que considerar los vectores de la forma $f(P^k(f)(\boldsymbol{u}_{ij}))$. Además

$$\text{Nuc}(P^{s-1}(f)) \oplus [\boldsymbol{u}_{11},...,\boldsymbol{u}_{1k_1}] = \text{Nuc}(P^{s}(f))$$

de donde

$$k_1 = \dim(\text{Nuc}(P^s(f))) - \dim(\text{Nuc}(P^{s-1}(f)))$$

y análogamente

$$\text{Nuc}(P^{s-2}(f)) \oplus [\boldsymbol{u}_{21},...,\boldsymbol{u}_{2k_2}] \oplus [P(f)(\boldsymbol{u}_{11}),...,P(f)(\boldsymbol{u}_{1k_1})] = \text{Nuc}(P^{s-1}(f))$$

de donde

$$k_1+k_2 = \dim(\text{Nuc}(P^{s-1}(f))) - \dim(\text{Nuc}(P^{s-2}(f)))$$

y así sucesivamente.

Calculemos la correspondiente matriz de Jordan, para cada caso, es decir la matriz de f en la base cuya existencia demuestra el teorema.

Si el grado de $P(X)$ es igual a 2, es decir, si $P(\lambda) = \lambda^2+a_1\lambda+a_0$, la matriz de f tendrá por columnas las imágenes de los vectores; como $f^2 = P(f)–a_0–a_1f$, será

$$f^2(P^{k-1}(f)(\boldsymbol{u}_{ij})) = P^{k-1}(f)(f^2(\boldsymbol{u}_{ij})) = P^{k-1}(f)((P(f)–a_0–a_1f)(\boldsymbol{u}_{ij})) =$$
$$= –a_0P^{k-1}(f)(\boldsymbol{u}_{ij})–a_1P^{k-1}(f)(f(\boldsymbol{u}_{ij}))+P^k(f)(\boldsymbol{u}_{ij})$$

para $k = 1...,s$ y la matriz estará formada por k_1 submatrices o "cajas" del tipo

$$\mathbf{J}_1 = \begin{pmatrix} 0 & –a_0 & & & & & \\ 1 & –a_1 & & & & & \\ & & 1 & 0 & –a_0 & & \\ & & & 1 & –a_1 & & \\ & & & & & \cdots & \\ & & & & & 1 & 0 & –a_0 \\ & & & & & & 1 & –a_1 \end{pmatrix} \qquad (3)$$

de orden $(2s,2s)$, por k_2 "cajas" de orden $(2(s–1),2(s–1))$ y, así sucesivamente, si llamamos r al número de naturales k_i distintos de cero, tendremos hasta k_r "cajas" de orden $(2(s–r+1),2(s–r+1))$. Observemos que cada dos filas de vectores de la base (1) han definido una caja.

Si grado de $P(x)$ es igual a 1, es decir, si $P(\lambda) = \lambda+a$, como $f = P(f)–a$, será para $k = 1,...,s$

$$f(P^{k-1}(f)(\boldsymbol{u}_{ij})) = P^{k-1}(f)(f(\boldsymbol{u}_{ij})) = P^{k-1}(f)((P(f)–a)(\boldsymbol{u}_{ij})) = –aP^{k-1}(f)(\boldsymbol{u}_{ij}))+P^k(f)(\boldsymbol{u}_{ij})$$

la matriz estará formada por k_1 submatrices o "cajas" del tipo

$$\mathbf{J}_1 = \begin{pmatrix} –a & & & \\ 1 & –a & & \\ & \cdots & & \\ & & 1 & –a \end{pmatrix} \qquad (4)$$

de orden (s,s), por k_2 "cajas" de orden $(s–1,s–1)$ y, así sucesivamente, si llamamos r al número de naturales k_i distintos de cero, tendremos hasta k_r "cajas" de orden $(s–r+1,s–r+1)$. Observemos asímismo como cada fila de vectores de la base (2) ha definido una caja.

En ambos caso obtenemos como matriz de Jordan

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} \mathbf{J}_1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & \mathbf{J}_1 & & & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & & & \mathbf{J}_r & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & \mathbf{J}_r \end{pmatrix} \qquad (5)$$

con cajas del tipo (3) o (4).

Procedimiento práctico

Restringiremos el procedimiento de obtención de la matriz de Jordan y la base asociada como si el p.c. fuera $P^m(x)$, con grad$P(x)$ igual a 1 o 2.

Consideremos dimNuc$P^0(f)$, dimNuc$P^1(f)$,...,dimNuc$P^m(f)$ y sea s el mayor número natural tal que $s \le m$ y dimNuc$P^s(f)$–dimNuc$P^{s-1}(f) \neq 0$. Si k_1 es el número natural tal que

$$\text{dimNuc}P^s(f)-\text{dimNuc}P^{s-1}(f) = k_1 \cdot \text{grad}P(x)$$

la forma de Jordan contendrá k_1 submatrices, o "cajas", del tipo

$$\mathbf{J}_1 = \begin{pmatrix} -a & & & \\ 1 & -a & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & -a \end{pmatrix} \qquad \text{si } P(x) = x+a$$

de orden (s,s), o bien

$$\mathbf{J}_1 = \begin{pmatrix} 0 & -a_0 & & & & & \\ 1 & -a_1 & & & & & \\ & & 1 & 0 & -a_0 & & \\ & & & 1 & -a_1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & 1 & 0 & -a_0 \\ & & & & & & 1 & -a_1 \end{pmatrix} \qquad \text{si } P(x) = x^2+a_1x+a_0$$

de orden $(2s,2s)$. Para construir la base, hallamos vectores $\boldsymbol{u}_{11},\ldots,\boldsymbol{u}_{1k_1}$ tales que pertenezcan a Nuc$P^s(f)$–Nuc$P^{s-1}(f)$ que sean l.i. y sea l.i. el conjunto

$$\{\boldsymbol{u}_{11}\ ,\quad P(f)(\boldsymbol{u}_{11}),\ldots,\ P^{s-2}(f)(\boldsymbol{u}_{11}),\ P^{s-1}(f)(\boldsymbol{u}_{11}),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\boldsymbol{u}_{1k_1},\ P(f)(\boldsymbol{u}_{1k_1}),\ldots,\ P^{s-2}(f)(\boldsymbol{u}_{1k_1}),\ P^{s-1}(f)(\boldsymbol{u}_{1k_1})\}$$

si $P(x) = x+a$, o bien

$$\{\quad \boldsymbol{u}_{11}\ ,\ P(f)(\boldsymbol{u}_{11})\quad ,\ldots,\ P^{s-2}(f)(\boldsymbol{u}_{11})\quad ,\quad P^{s-1}(f)(\boldsymbol{u}_{11}),$$
$$f(\boldsymbol{u}_{11}),\ f(P(f)(\boldsymbol{u}_{11}))\ ,\ldots,\ f(P^{s-2}(f)(\boldsymbol{u}_{11}))\ ,\ f(P^{s-1}(f)(\boldsymbol{u}_{11})),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\boldsymbol{u}_{1k_1}\ ,\ P(f)(\boldsymbol{u}_{1k_1})\quad ,\ldots,\ P^{s-2}(f)(\boldsymbol{u}_{1k_1})\quad ,\quad P^{s-1}(f)(\boldsymbol{u}_{1k_1}),$$
$$f(\boldsymbol{u}_{1k_1}),\ f(P(f)(\boldsymbol{u}_{1k_1})),\ldots,\ f(P^{s-2}(f)(\boldsymbol{u}_{1k_1})),\ f(P^{s-1}(f)(\boldsymbol{u}_{1k_1}))\}$$

si $P(x) = x^2+a_1x+a_0$.

Se reitera el proceso, es decir, si $\dim\mathrm{Nuc}P^{s-1}(f)-\dim\mathrm{Nuc}P^{s-2}(f) \neq 0$ y k_2 es el número natural, mayor o igual que 0, tal que

$$\dim\mathrm{Nuc}P^{s-1}(f)-\dim\mathrm{Nuc}P^{s-2}(f) = (k_1+k_2)\cdot\mathrm{grad}P(x)$$

k_2 es el número de submatrices, o "cajas" $\mathbf{J}_2$, del tipo anterior pero de orden $(s-1,s-1)$, si $\mathrm{grad}(P(x)) = 1$, o de orden $(2(s-1),2(s-1))$, si $\mathrm{grad}(P(x)) = 2$ y se hallan vectores $\boldsymbol{u}_{21},\ldots,\boldsymbol{u}_{2k_2}$ tales que pertenezcan a $\mathrm{Nuc}P^{s-1}(f)-\mathrm{Nuc}P^{s-2}(f)$ de modo que sean linealmente independientes con los vectores anteriores y sea también l.i. el conjunto

$$\{\boldsymbol{u}_{21}\ ,\ P(f)(\boldsymbol{u}_{21}),\ldots,\ P^{s-3}(f)(\boldsymbol{u}_{21}),\ P^{s-2}(f)(\boldsymbol{u}_{21}),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\boldsymbol{u}_{2k_2},\ P(f)(\boldsymbol{u}_{2k_2}),\ldots,\ P^{s-3}(f)(\boldsymbol{u}_{2k_2}),\ P^{s-2}(f)(\boldsymbol{u}_{2k_2})\}$$

si $P(x) = x+a$, o bien

$$\{\quad \boldsymbol{u}_{21}\ ,\quad P(f)(\boldsymbol{u}_{21})\ ,\ldots,\quad P^{s-3}(f)(\boldsymbol{u}_{21})\ ,\quad P^{s-2}(f)(\boldsymbol{u}_{21}),$$
$$f(\boldsymbol{u}_{21}),\ f(P(f)(\boldsymbol{u}_{21})),\ldots,\ f(P^{s-3}(f)(\boldsymbol{u}_{21})),\ f(P^{s-2}(f)(\boldsymbol{u}_{21})),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\boldsymbol{u}_{2k_2}\ ,\ P(f)(\boldsymbol{u}_{2k_2})\ ,\ldots,\ P^{s-3}(f)(\boldsymbol{u}_{2k_2})\ ,\quad P^{s-2}(f)(\boldsymbol{u}_{2k_2}),$$
$$f(\boldsymbol{u}_{2k_2}),\ f(P(f)(\boldsymbol{u}_{2k_2})),\ldots,\ f(P^{s-3}(f)(\boldsymbol{u}_{2k_2})),\ f(P^{s-2}(f)(\boldsymbol{u}_{2k_2}))\}$$

si $P(x) = x^2+a_1x+a_0$. Así sucesivamente hasta obtener la matriz de Jordan (3) o (4) y completar su correspondiente base (1) o (2).

Ejemplo VII.7.1.

Supongamos un espacio vectorial V, un endomorfismo f y un polinomio P de grado 1

tal que los núcleos de los endomorfismos que definen sus potencias sean tales que

$$\{\boldsymbol{0}\} = \mathrm{Nuc}(P^0(f)) \subset \mathrm{Nuc}(P^1(f)) \subset \mathrm{Nuc}(P^2(f)) \subset \mathrm{Nuc}(P^3(f)) \subset \mathrm{Nuc}(P^4(f)) \subset \mathrm{Nuc}(P^5(f)) = V$$

y sus dimensiones sean tales que

$$\begin{aligned}
&k_1 = \dim(\mathrm{Nuc}(P^5(f)))-\dim(\mathrm{Nuc}(P^4(f))) = 2 && \Rightarrow\ k_1 = 2\\
&k_1+k_2 = \dim(\mathrm{Nuc}(P^4(f)))-\dim(\mathrm{Nuc}(P^3(f))) = 3 && \Rightarrow\ k_2 = 1\\
&k_1+k_2+k_3 = \dim(\mathrm{Nuc}(P^3(f)))-\dim(\mathrm{Nuc}(P^2(f))) = 3 && \Rightarrow\ k_3 = 0\\
&k_1+k_2+k_3+k_4 = \dim(\mathrm{Nuc}(P^2(f)))-\dim(\mathrm{Nuc}(P^1(f))) = 6 && \Rightarrow\ k_4 = 3\\
&k_1+k_2+k_3+k_4+k_5 = \dim(\mathrm{Nuc}(P^1(f)))-\dim(\mathrm{Nuc}(P^0(f))) = 6 && \Rightarrow\ k_5 = 0
\end{aligned}$$

La forma de Jordan para la matriz de f tendrá 2 "cajas" de orden (5,5), 1 "caja" de orden (4,4), 0 "cajas" de orden (3,3), 3 "cajas" de orden (2,2) y 0 "cajas" de orden (1,1). Completando cada $\mathrm{Nuc}(P^i(f))$ con vectores suficientes hasta formar $\mathrm{Nuc}(P^{i+1}(f))$ tendremos

$$\mathrm{Nuc}(P^4(f))\oplus[\boldsymbol{u}_{11},\boldsymbol{u}_{12}] = \mathrm{Nuc}(P^5(f))$$
$$\mathrm{Nuc}(P^3(f))\oplus[P(f)(\boldsymbol{u}_{11}),P(f)(\boldsymbol{u}_{12}),\boldsymbol{u}_{21}] = \mathrm{Nuc}(P^4(f))$$
$$\mathrm{Nuc}(P^2(f))\oplus[P^2(f)(\boldsymbol{u}_{11}),P^2(f)(\boldsymbol{u}_{12}),P(f)(\boldsymbol{u}_{21})] = \mathrm{Nuc}(P^3(f))$$
$$\mathrm{Nuc}(P^1(f))\oplus[P^3(f)(\boldsymbol{u}_{11}),P^3(f)(\boldsymbol{u}_{12}),P^2(f)(\boldsymbol{u}_{21}),\boldsymbol{u}_{41},\boldsymbol{u}_{42},\boldsymbol{u}_{43}] = \mathrm{Nuc}(P^2(f))$$
$$\mathrm{Nuc}(P^0(f))\oplus[P^4(f)(\boldsymbol{u}_{11}),P^4(f)(\boldsymbol{u}_{12}),P^3(f)(\boldsymbol{u}_{21}),P(f)(\boldsymbol{u}_{41}),P(f)(\boldsymbol{u}_{42}),P(f)(\boldsymbol{u}_{43})] = \mathrm{Nuc}(P^1(f))$$

y la base asociada a la forma de Jordan será

$$\begin{aligned}
&(\boldsymbol{u}_{11},P(f)(\boldsymbol{u}_{11}),P^2(f)(\boldsymbol{u}_{11}),P^3(f)(\boldsymbol{u}_{11}),P^4(f)(\boldsymbol{u}_{11}),\\
&\ \boldsymbol{u}_{12},P(f)(\boldsymbol{u}_{12}),P^2(f)(\boldsymbol{u}_{12}),P^3(f)(\boldsymbol{u}_{12}),P^4(f)(\boldsymbol{u}_{12}),\\
&\ \boldsymbol{u}_{21},P(f)(\boldsymbol{u}_{21}),P^2(f)(\boldsymbol{u}_{21}),P^3(f)(\boldsymbol{u}_{21}),\\
&\ \boldsymbol{u}_{41},P(f)(\boldsymbol{u}_{41}),\boldsymbol{u}_{42},P(f)(\boldsymbol{u}_{42}),\boldsymbol{u}_{43},P(f)(\boldsymbol{u}_{43}))
\end{aligned}$$

Ejemplo VII.7.2.

Para el endomorfismo de matriz

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0\\ -6 & 1 & 1 & 1\\ 6 & -2 & -2 & -1\\ 6 & -2 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

tenemos $P_c(x) = (x+1)^4$, $P(x) = x+1$. Las dimensiones de los núcleos son

$$\dim \mathrm{Nuc}(f+1)^0 = 0\ ,\ \dim \mathrm{Nuc}(f+1) = 3$$
$$\dim \mathrm{Nuc}(f+1)^2 = \dim \mathrm{Nuc}(f+1)^3 = \dim \mathrm{Nuc}(f+1)^4 = 4$$

y como dim Nuc$(f+1)^2$–dim Nuc$(f+1)$ = 1 es s = 2. Al ser grad$P(x)$ = 1, es k_1 = 1 y tenemos la caja

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Hallamos un vector $\boldsymbol{u}_{11}$ tal que pertenezca a Nuc$(f+1)^2$ y no pertenezca a Nuc$(f+1)$; como $\boldsymbol{u}_{11}$ = (0,0,1,0)$\in$ Nuc$(f+1)^2$ = $\mathbf{R}^4$ y $(f+1)(0,0,1,0)$ = (0,1,–1,–1) $\neq$ (0,0,0,0) tenemos dos vectores para la base de Jordan: (0,0,1,0) y (0,1,–1,–1).

Como dim Nuc$(f+1)^1$–dim Nuc$(f+1)^0$ = 3, grad$P(x)$ = 1 y k_1 = 1, es k_2 = 2 y tendremos dos cajas del tipo

$$(-1)$$

Hallamos dos vectores $\boldsymbol{u}_{21}$ y $\boldsymbol{u}_{22}$ tales que pertenezcan a Nuc$(f+1)$ y no pertenezca a Nuc$(f+1)^0$; como $\boldsymbol{u}_{21}$ = (0,0,–1,1) $\boldsymbol{u}_{22}$ = (1,2,1,1) pertenecen a Nuc$(f+1)$, no pertenecen a Nuc$(f+1)^0$ = Nuc I = {(0,0,0,0)} y son l.i. con los vectores anteriores, tenemos como matriz de Jordan

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & & \\ 1 & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}$$

y la base de Jordan es

$$((0,0,1,0),\ (0,1,-1,-1),(0,0,-1,1),(1,2,1,1))$$

Ejemplo VII.7.3.

Para el endomorfismo de matriz

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

tenemos $P_c(x) = (x^2+2)^2$, $P(x) = x^2+2$. Las dimensiones de los núcleos son

$$\dim \text{Nuc}(f^2+2)^0 = 0\ ,\ \dim \text{Nuc}(f^2+2) = 2\ ,\ \dim \text{Nuc}(f^2+2)^2 = 4$$

y como dim Nuc$(f^2+2)^2$–dim Nuc(f^2+2) = 2 es s = 2. Al ser grad$P(x)$ = 2, es k_1 = 1 y tenemos la única caja

$$\begin{pmatrix} 0 & -2 & & \\ 1 & 0 & & \\ & 1 & 0 & -2 \\ & & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Hallamos un vector $\boldsymbol{u}_{11}$ tal que pertenezca a Nuc$(f^2+2)^2$ y no pertenezca a Nuc(f^2+2); como $\boldsymbol{u}_{11} = (1,0,0,0) \in \text{Nuc}(f^2+2)^2 = \mathbf{R}^4$, $(f^2+2)(1,0,0,0) = (-1,1,0,-1) \neq (0,0,0,0)$, $f(1,0,0,0) = (0,-1,0,0)$ y $f((f^2+2)(1,0,0,0)) = (1,0,1,0)$ son l.i, tenemos como base de Jordan

$$((1,0,0,0),(0,-1,0,0),\ (-1,1,0,-1),(1,0,1,0))$$

Si el polinomio característico P_c tiene otros factores primos, se desarrolla el proceso anterior para cada uno de ellos. La forma de Jordan final se construye alineando por la diagonal todas las matrices **J** obtenidas y completando con 0 el resto de los elementos de las filas y columnas de la matriz resultante. La base asociada es la unión de todas las bases obtenidas para cada uno de los factores primos de P_c.

Ejemplo VII.7.4.

Para el endomorfismo de $\mathbf{R}^7$ cuya matriz respecto de la base canónica sea

$$\begin{pmatrix} 5 & -4 & 4 & 3 & 0 & -4 & 1 \\ -13 & 28 & 0 & -13 & -4 & -2 & -9 \\ -40 & 77 & -10 & -42 & -12 & 7 & -23 \\ -12 & 21 & 0 & -8 & -3 & -2 & -8 \\ -19 & 49 & 1 & -26 & -7 & -4 & -14 \\ -24 & 45 & -6 & -24 & -7 & 4 & -14 \\ -13 & 22 & -5 & -12 & -2 & 4 & -6 \end{pmatrix}$$

tenemos $P_c(x) = -(x^2+2)^2(x-2)^3$ que tiene dos factores primos en su descomposición. Siguiendo lo anterior, desarrollaremos el proceso para cada uno de los dos factores $P_{c1} = (x-2)^3$ y $P_{c2}(x) = -(x^2+2)^2$.

Para $P_{c1}(x) = (x-2)^3$ es $P(x) = x-2$. Las dimensiones de los núcleos son

$$\dim \text{Nuc}(f-2)^0 = 0\ ,\ \dim \text{Nuc}(f-2) = 2\ ,\ \dim \text{Nuc}(f-2)^2 = 3\ ,\ \dim \text{Nuc}(f-2)^3 = 3$$

y como $\dim \text{Nuc}(f-2)^2 - \dim \text{Nuc}(f-2) = 1$ es $s = 2$; al ser grad$P(x) = 1$ tenemos $k_1 = 1$ y $k_2 = 1$. Así el primer bloque de la matriz de Jordan correspondiente a este factor primo del polinomio característico es

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Para buscar la base de Jordan, hallemos un vector $\boldsymbol{u}_{11}$ tal que pertenezca a Nuc$(f-2)^2$ y no pertenezca a Nuc$(f-2)$; p.ej. puede ser el $\boldsymbol{u}_{11} = (0,0,-1,2,-4,0,-1)$ para el cual es $(f-2)(\boldsymbol{u}_{11}) = (1,-1,-1,0,-3,0,-3)$. Hallemos ahora un vector $\boldsymbol{u}_{21}$ tal que pertenezca a Nuc$(f-2)$ y no pertenezca a Nuc$(f-2)^0$; p.ej. puede ser el $\boldsymbol{u}_{21} = (0,1,0,1,1,0,1)$ que es l.i. con los anteriores.

Para el otro factor primo $P_{c2}(x) = -(x^2+2)^2$ es $P(x) = x^2+2$. Las dimensiones de los núcleos son

$$\dim \text{Nuc}(f^2+2)^0 = 0 \text{ , } \dim \text{Nuc}(f^2+2) = 2 \text{ , } \dim \text{Nuc}(f^2+2)^2 = 4$$

y como $\dim \text{Nuc}(f^2+2)^2 - \dim \text{Nuc}(f^2+2) = 2$ es $s = 2$. Al ser $\text{grad}P(x) = 2$, es $k_1 = 1$ y tenemos una única caja de modo que el segundo bloque de la matriz de Jordan correspondiente a este factor primo será

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Para completar la base de Jordan, en primer lugar hallemos un $\boldsymbol{v}_{11}$ tal que pertenezca a Nuc$(f^2+2)^2$ y no pertenezca a Nuc(f^2+2); p.ej. puede ser el $\boldsymbol{v}_{11} = (1,0,0,0,0,-2,-1)$. Tenemos que $f(\boldsymbol{v}_{11}) = (12,0,-31,0,3,-18,-15)$, $(f^2+2)(\boldsymbol{v}_{11}) = (-5,3,13,3,2,11,9)$ y $f(f^2+2)(\boldsymbol{v}_{11}) = (-11,-1,21,-1,-7,9,16)$. Estos vectores completan la base de Jordan.

$$((1,0,0,0,0,-2,-1),(-5,3,13,3,2,11,9),(12,0,-31,0,3,-18,-15),$$
$$(-11,-1,21,-1,-7,9,16),(0,0,-1,2,-4,0,-1),(1,-1,-1,0,-3,0,-3),(0,1,0,1,1,0,1))$$

respecto de la cual el endomorfismo tiene por matriz

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Ejercicios

VII.22.- Hallar la forma de Jordan y la base asociada para las matrices

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -1 & 3 & -11 & -9 \\ 0 & -2 & 10 & 7 \\ -1 & 1 & -8 & -6 \\ 2 & -1 & 12 & 9 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -6 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & -2 & -2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & -2 & -1 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

PROCEDIMIENTOS PRÁCTICOS BASICOS

Los procedimientos básicos que forman los elementos constructivos a partir de los cuales pueden abordarse los problemas que tratan sobre las materias desarrolladas en este Cuaderno, son los siguientes:

- Hallar valores y vectores propios de un endomorfismo.
- Diagonalizar una matriz.
- Hallar la potencia de una matriz diagonalizable.
- Triangular una matriz.
- Hallar la forma de Jordan y la base de Jordan.

EJERCICIOS DE RECAPITULACION

VII.23.- Sea $P_3(X)$ el espacio vectorial de los polinomios de grado menor o igual a tres con coeficientes reales. Sea $f: P_3(X) \longrightarrow P_3(X)$ definida por $f(p(X)) = \beta p(X)+p'(X)$ con $\beta \in \mathbf{R}$.

a) Probar que f es una aplicación lineal.

b) Hallar Nuc(f) e Im(f) según los distintos valores de β.

c) Para $\beta = 1$ hallar la matriz asociada a f en la base canónica y en la base formada por los polinomios $(2, X+1, X^2-1, X^3+1)$.

d) Estudiar la diagonalización de f.

VII.24.- Sea $E = M_{(2,2)}(\mathbf{R})$

a) Comprobar que $<\mathbf{A},\mathbf{B}>$ = traza $(\mathbf{B}^t\mathbf{A})$ es un producto escalar en E.

b) Verificar que

$$B = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right)$$

es una base de E. Aplicar el método de Gramm-Schmidt para obtener a partir de B una base ortonormal de E.

c) Sea $f: E \longrightarrow E$
$\mathbf{A} \longrightarrow f(\mathbf{A}) = \mathbf{AM}+\mathbf{MA}$

con $\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$. Hallar la matriz de f en la base ortonormal del apartado anterior, razonar si es diagonalizable y en caso afirmativo hallar una base ortonormal de vectores propios.

VII.25.- Probar que si **A** y **B** son dos matrices del mismo orden y **A** es regular, entonces **AB** y **BA** tienen el mismo polinomio característico.

VII.26.- Sea **A** una matriz cuadrada regular idempotente. Demostrar que no admite más valor propio que el 1.

VII.27.- Sea $f: \mathbf{R}^4 \longrightarrow \mathbf{R}^4$
$(x,y,z,t) \longrightarrow (4z,4t,4x,4y)$

Hallar una base ortonormal de $\mathbf{R}^4$ en la que la matriz asociada a f sea diagonal. Determinar esta matriz.

VII.28.- Sea E un espacio vectorial sobre $\mathbf{C}$ de dimensión cuatro; f un endomorfismo de E, y sea $(\boldsymbol{u},f(\boldsymbol{u}),f^{\,2}(\boldsymbol{u}),f^{\,3}(\boldsymbol{u}))$ una base de E. Sabiendo que $f^{\,4}(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{u}$, hallar la matriz asociada a f en dicha base. Demostrar que f es diagonalizable y obtener la matriz diagonal asociada.

VII.29.- Calcular los valores propios y vectores propios de la matriz:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -\sqrt{2} \\ 2 & 4 & 2\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & 2\sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}$$ y diagonalizarla.

VII.30.- Diagonalizar los siguientes endomorfismos:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 8 \\ 3 & -1 & 6 \\ -2 & 0 & -5 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad (\mathbf{A}+\mathbf{I})$$

VII.31.- Sea $f : \mathbf{R}^4 \longrightarrow \mathbf{R}^4$ un endomorfismo definido por $f(x,y,z,t) = (x,2x,x,x+ay)$. Estudiar su diagonalización según los valores de a, y obtener su forma diagonal asi como la base respecto de la cual tiene matriz diagonal.

VII.32.- Hallar el rango de la matriz

$$\begin{pmatrix} a & -1 & d \\ b & 0 & e \\ c & 1 & f \end{pmatrix}$$

sabiendo que admite como vectores propios $(0,1,-1),(1,2,0),(-2,0,1)$.

VII.33.- Sea $B = (\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3)$ la base canónica de $\mathbf{R}^3$, y sea $U = \{\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2,\boldsymbol{u}_3\}$ el conjunto de vectores:

$$\boldsymbol{u}_1 = (4,1,1) \quad \boldsymbol{u}_2 = (5,2,1) \quad \boldsymbol{u}_3 = (3,1,1)$$

y sea f la aplicación lineal de $\mathbf{R}^3$ en $\mathbf{R}^3$ tal que:

$$f(\boldsymbol{u}_1) = \boldsymbol{u}_1,\ f(\boldsymbol{u}_2) = -\boldsymbol{u}_2,\ f(\boldsymbol{u}_3) = \boldsymbol{0}$$

a) Probar que U es una base de $\mathbf{R}^3$ y calcular la matriz de paso de B a U y su inversa.

b) Calcular la matriz de f en las bases B y U.

c) Calcular las bases del núcleo y de la imagen de f.

d) Diagonalizar la matriz $\mathbf{A}$ de la aplicación f. Calcular $\mathbf{A}^n$.

VII.34.- Hallar la forma de Jordan y la base asociada para las matrices

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & -1 & 0 & 0 \\ 7 & 1 & 2 & 1 \\ -17 & -6 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

BIBLIOGRAFIA

de Burgos J. (1988). *Curso de Algebra y Geometría*. Alhambra. Madrid.

Dixmier J. (1974). *Matemáticas Generales.* Editorial Aguilar. Madrid.

Godement R. (1974). *Algebra*. Tecnos. Madrid.

Hoffmann R., Kunze R. (1974). *Algebra Lineal*. Prentice. Madrid.

Lentin A., Rivaud J. (1973). *Algebra Moderna*. Aguilar. Madrid.

Noble B., Daniel J.W. (1988). *Applied Linear Algebra*. Prentice Hall. London.

Puerta F. (1986). *Algebra lineal*. Marcombo. Barcelona.

Queysanne M. (1985) *Algebra*. Vicens-Vives. Barcelona.

Sainz M.A., Serarols J.L. Pérez A.M. (1994). *Álgebra*. Escuela Politécnica Superior. Gerona.

Strang G. (1982). *Algebra Lineal y sus aplicaciones.* Fondo Educativo Interamericano. Méjico.

Torregrosa J.R., Jordan C. (1987). *Algebra Lineal y sus aplicaciones*. McGraw-Hill. Madrid.

Xambó S. (1977). *Algebra Lineal y geometrias lineales*. EUNIBAR. Barcelona.