CUADERNO VIII

GEOMETRIA AFIN Y EUCLIDEA

Miguel A. Sainz, Joan Serarols, Anna M. Pérez
Dep. de Informática y Matemática Aplicada
Universidad de Girona

RESUMEN: Las herramientas desarrolladas por el álgebra lineal van a ser utilizadas en la geometría, es decir, en el estudio de relaciones entre ciertos conjuntos de puntos denominados figuras geométricas. Se empezará definiendo el espacio marco, el espacio afín, y los distintos los tipos de figuras que se van a considerar. Mediante un sistema de referencia podrán atribuirse objetos algebraicos, *n*-plas y ecuaciones, a los objetos geométricos y mediante su estudio resolver típicos problemas gemétricos como incidencia, paralelismo, perpendicularidad y distancias. Se particularizarán los resultados generales al espacio euclídeo de dimensión tres.

VIII.1.- ESPACIO AFIN

De un modo aproximado puede entenderse por Geometría el estudio de las relaciones entre figuras contenidas en un espacio. Vamos a estructurar matemáticamente estos conceptos empezando por el espacio base de nuestro estudio al que denominamos ***espacio afín*** y que definiremos como un objeto matemático compuesto por

a) Un conjunto no vacío E, cuyos elementos denominaremos ***puntos*** y representaremos mediante letras latinas mayúsculas P, Q, ...

b) Un espacio vectorial de dimensión finita V sobre el cuerpo real $\mathbf{R}$ cuyos elementos, como es usual denominaremos ***vectores*** y representaremos por $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$,...

c) Una ley de composición

$$\begin{aligned} + : E\times V &\longrightarrow E \\ (P,\boldsymbol{u}) &\longrightarrow P+\boldsymbol{u} \end{aligned}$$

denominada suma de punto más vector, siendo el resultado un punto, que verifica los axiomas:

A_1) Todo par de puntos P y Q determinan un único vector que sumado a P da Q, es decir

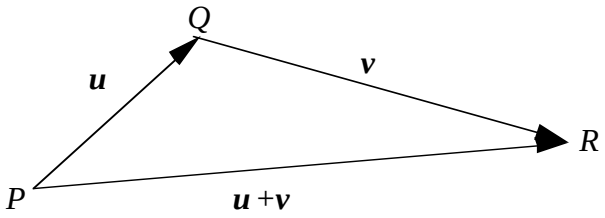
$$(\forall P,Q\in E)\ (\ \exists \boldsymbol{u}\in V \text{ único})\ (P+\boldsymbol{u} = Q)$$

y se representa por $\boldsymbol{u} = \overrightarrow{PQ}$ dando a P el nombre de origen del vector y a Q el de extremo.

A_2) $(\forall P\in E)\ (\forall \boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\in V)\ ((P+\boldsymbol{u})+\boldsymbol{v} = P+(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}))$

El espacio afín así definido lo denotaremos por (E,V); llamaremos ***dimensión del espacio afín*** a la del espacio vectorial asociado a él.

La definición anterior viene sugerida por las propiedades de lo que en la geometría intuitiva del espacio físico ordinario se denomina vector: un objeto determinado por dos puntos P y Q, llamados origen y extremo. Un vector puede ser aplicado a un punto P dando por resultado otro



punto Q y dos vectores, $\boldsymbol{u}$ de origen P y extremo Q , $\boldsymbol{v}$ de origen Q y extremo R, dan como suma el vector $\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}$ de origen P y extremo R, según la denominada ***regla del paralelogramo*** para sumar vectores. Esta regla está implícita en la definición de espacio afín, siendo una de sus consecuencias.

Las propiedades más inmediatas que se deducen de la definición son las siguientes:

1) $(\forall P,Q,R\in E)\ (\overrightarrow{PR} = \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR})$. En efecto, sean $\boldsymbol{u} = \overrightarrow{PQ}$, $\boldsymbol{v} = \overrightarrow{QR}$; por A_1 tendremos

$$P+\boldsymbol{u} = Q,\ Q+\boldsymbol{v} = R$$

de donde

$$R = Q+\boldsymbol{v} = (P+\boldsymbol{u})+\boldsymbol{v} = P+(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v})$$

lo que significa, según A_1, que $\overrightarrow{PR} = \boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}$ con lo que

$$\overrightarrow{PR} = \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR}$$

2) $(\forall P\in E)\ (\overrightarrow{PP} = \boldsymbol{0})$. En efecto, haciendo $Q = P$ en la igualdad antes demostrada tendremos

$$\overrightarrow{PR} = \overrightarrow{PP} + \overrightarrow{PR}$$

luego $\overrightarrow{PP}$ es el elemento neutro de la suma de vectores, es decir,

$$\overrightarrow{PP} = \boldsymbol{0}$$

3) $(\forall P,Q\in E)\ (\overrightarrow{QP} = -\overrightarrow{PQ})$. En efecto, haciendo en la primera igualdad $R = P$ resulta

$$\overrightarrow{PP} = \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QP}$$

y como $\overrightarrow{PP} = \mathbf{0}$, entonces $\overrightarrow{QP} = -\overrightarrow{PQ}$.

Al contrario de la geometría desarrollada axiomáticamente por Euclides, y mejorada desde el punto de vista del rigor por Hilbert, no vamos a partir de las nociones primarias de punto recta y plano y definir sus primeras relaciones mediante axiomas, sino que con los elementos básicos que intervienen en la noción de espacio afín, puntos y vectores, definiremos las figuras que serán los elementos geométricos, mediante igualdades vectoriales, que darán lugar a ecuaciones lineales en cuanto introduzcamos una base de referencia en el espacio vectorial asociado. Por ello toda la teoría anterior de sistemas de ecuaciones podrá aplicarse al estudio de relaciones entre figuras, y la clave para ello es el sistema de referencia afín.

VIII.2.- SISTEMA DE REFERENCIA AFIN

Un ***sistema de referencia afin*** es un objeto constituído por un punto O, denominado origen, y una base $(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,...,\boldsymbol{e}_n)$ de V y que denotaremos por $(O; \boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,...,\boldsymbol{e}_n)$.

Sea un punto cualquiera $X \in E$; según el axioma A_1 existe y es único el vector $\overrightarrow{OX}$, que podrá ser expresado de forma única como combinación lineal de los vectores de la base de V

$$\overrightarrow{OX} = x_1\boldsymbol{e}_1+x_2\boldsymbol{e}_2+...+x_n\boldsymbol{e}_n$$

A los escalares de esta combinación lineal se les denominan ***coordenadas*** de X respecto el sistema de referencia que se denota por

$$X(x_1,x_2,...,x_n)$$

Recíprocamente, cualquier n-pla de números reales son las componentes, respecto de la base elegida, de un vector de V, que sumado al punto O da un punto X. Así existe una biyección entre los puntos de E y las n-plas de números reales que son sus coordenadas.

La igualdad anterior puede escribirse, según vimos al estudiar la representación matricial de un vector, en la muy útil forma matricial

$$X = O+(\boldsymbol{e}_1\ \boldsymbol{e}_2\ ..\ \boldsymbol{e}_n)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ .. \\ x_n \end{pmatrix}$$

o más brevemente

$$X = O+\mathbf{ex}$$

Las coordenadas del origen O son (0,0,...,0) ya que

$$\overrightarrow{OO} = \mathbf{0} = 0\cdot\mathbf{e}_1+0\cdot\mathbf{e}_2+\ldots+0\cdot\mathbf{e}_n$$

Las componentes de un vector $\overrightarrow{PQ}$ en función de las coordenadas de su origen y extremo se obtienen muy fácilmente; en efecto, si $P(p_1,p_2,\ldots,p_n)$ y $Q(q_1,q_2,\ldots,q_n)$, entonces

$$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PO} + \overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP} = (q_1-p_1)\mathbf{e}_1+\ldots+(q_n-p_n)\mathbf{e}_n$$

dando como resultado las diferencias entre las coordenadas del extremo y las del origen del vector.

De las identidades $q_1 = p_1+(q_1-p_1),\ldots,\ q_n = p_n+(q_n-p_n)$ se deduce que si $Q = P+\overrightarrow{PQ}$, las coordenadas de Q se obtienen sumando a las de P las componentes del vector $\overrightarrow{PQ}$.

Ejemplo VII.2.1

> En un espacio afín $(E,\mathbf{R}^3)$ con el sistema de referencia $(O;(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1))$, si al punto $P(5,-1,2)$ le aplicamos el vector $\boldsymbol{u} = (2,3,-5)$ obtenemos el punto Q de coordenadas $(5,-1,2)+(2,3,-5) = (7,2,-3)$.

Fijado un sistema de referencia, las coordenadas de un punto son únicas, pero variarán si cambiamos de sistema de referencia. Obtengamos que relación existe entre las coordenadas de un mismo punto $X\in E$ al referirlo a dos sistemas distintos. Sean:

$(O;\ \mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_n)$ el sistema antiguo

$X(x_1,\ldots,x_n)$ coordenadas de X en el sistema antiguo

$(P;\ \mathbf{u}_1,\ldots,\mathbf{u}_n)$ sistema nuevo

$X(y_1,\ldots,y_n)$ coordenadas de X en el sistema nuevo

Supongamos que $P(p_1,\ldots,p_n)$ son las coordenadas de P respecto el sistema antiguo y que las componentes de los vectores $\mathbf{u}_i$ de la nueva base en función de los $\mathbf{e}_i$ de la base antigua son

$$\begin{gathered}\mathbf{u}_1 = a_{11}\mathbf{e}_1+\ldots+a_{n1}\mathbf{e}_n\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\\ \mathbf{u}_n = a_{1n}\mathbf{e}_1+\ldots+a_{nn}\mathbf{e}_n\end{gathered}$$

que en forma matricial puede escribirse

$$\begin{pmatrix}\mathbf{u}_1 & \mathbf{u}_2 & \ldots & \mathbf{u}_m\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \ldots & \mathbf{e}_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn}\end{pmatrix} \iff \mathbf{u} = \mathbf{eM}$$

Como $P(p_1,\ldots,p_n)$ significa que $P = O+\mathbf{ep}$, entonces

$$O+\mathbf{ex} = X = P+\mathbf{uy} = O+\mathbf{ep}+\mathbf{eMy} = O+\mathbf{e}(\mathbf{p}+\mathbf{My})$$

de donde

$$\mathbf{x} = \mathbf{p}+\mathbf{M}\mathbf{y}$$

o bien, como **M** es inversible, por ser la matriz de cambio de base

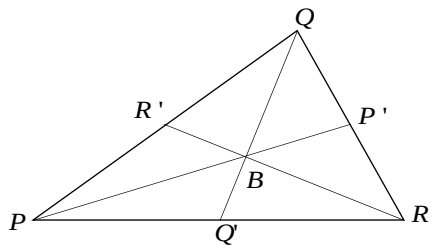
$$\mathbf{y} = \mathbf{M}^{-1}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{p})$$

es decir,

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ .. \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & .. & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & .. & a_{2n} \\ & & .... & \\ a_{n1} & a_{n2} & .. & a_{nn} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} x_1-p_1 \\ x_2-p_2 \\ .. \\ x_n-p_n \end{pmatrix}$$

Ejemplo VIII.2.2

Sea un triángulo P,Q,R, los puntos medios de sus lados sean P',Q' y R' y el baricentro B.



Si elegimos como sistema de referencia $(P; \overrightarrow{PQ},\overrightarrow{PR})$ tendremos

$Q(1,0)$ pues $\overrightarrow{PQ} = 1\cdot\overrightarrow{PQ} + 0\cdot\overrightarrow{PR}$

$Q'(0,1/2)$ pues $\overrightarrow{PQ'} = 1/2\cdot\overrightarrow{PR} = 0\cdot\overrightarrow{PQ} + 1/2\cdot\overrightarrow{PR}$

$P'(1/2,1/2)$ pues $\overrightarrow{PP'} = \overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{QP'} = \overrightarrow{PQ}+1/2\overrightarrow{QR} = \overrightarrow{PQ}+1/2\cdot(\overrightarrow{PR}-\overrightarrow{PQ}) = 1/2\cdot\overrightarrow{PQ}+1/2\cdot\overrightarrow{PR}$

$B(1/3,1/3)$ pues $\overrightarrow{PB} = 2/3\cdot\overrightarrow{PP'} = 2/3\cdot(1/2\cdot\overrightarrow{PQ} + 1/2\cdot\overrightarrow{PR}) = 1/3\cdot\overrightarrow{PQ} + 1/3\cdot\overrightarrow{PR}$

Si tomamos como sistema de referencia $(B; \overrightarrow{BP},\overrightarrow{BQ})$ será

$Q(0,1)$ pues $\overrightarrow{BQ} = 0\cdot\overrightarrow{BP} + 1\cdot\overrightarrow{BQ}$

$P'(-1/2,0)$ pues $\overrightarrow{BP'} = -1/2\cdot\overrightarrow{BP} + 0\cdot\overrightarrow{BQ}$

Comprobemos las fórmulas generales de cambio de sistema de referencia en el punto P' en los dos sistemas anteriores. Sean

$(P; \overrightarrow{PQ},\overrightarrow{PR})$ sistema antiguo

$P'(1/2,1/2)$ respecto del sistema antiguo

$(B; \overrightarrow{BP}, \overrightarrow{BQ})$ sistema nuevo con: $B(1/3,1/3)$

$\overrightarrow{BP} = (0-1/3,0-1/3) = (-1/3,-1/3)$

$\overrightarrow{BQ} = (1-1/3,1-1/3) = (2/3,-1/3)$

$P'(-1/2,0)$ respecto del sistema nuevo. En efecto, se tiene

$$\begin{pmatrix}1/2\\1/2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1/3\\1/3\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-1/3 & 2/3\\-1/3 & -1/3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1/2\\0\end{pmatrix}$$

Ejercicios

VIII.1 .- Sean P, Q y R los vértices de un triángulo y P', Q' y R' los puntos medios de sus lados. Sea B el baricentro del triángulo. Hallar las coordenadas de los puntos P, Q, R, P', Q', R' y B respecto a los sistemas de referencia

1) $(P;\overrightarrow{PQ},\overrightarrow{PR})$ 2) $(B;\overrightarrow{BQ},\overrightarrow{BR})$

VIII.2 .- Hallar las coordenadas del punto $Q(-1,2,8)$ del espacio afín de dimensión 3 en el sistema de referencia de origen $(\alpha_1,\alpha_2,1)$ y cuyos ejes son los vectores $(1,-1,\alpha_3),(1,0,2),(2,-2,\alpha_4)$, para $\alpha_1 =$, $\alpha_2 =$, $\alpha_3 =$, $\alpha_4 =$. Hallar los puntos que tienen las mismas coordenadas en el sistema nuevo que en el antiguo.

VIII.3 .- En el plano afín real E_2 sea el sistema de referencia $(O;\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2)$; se considera otro sistema de referencia $(O';\boldsymbol{e}_1',\boldsymbol{e}_2')$ de modo que el nuevo origen es el punto $O'(1,1)$; el punto $A(0,1)$ pasa a tener por coordenadas (2,3) y el punto $B(1,0)$ pasa a tener $(1,-1)$. Hallar $\boldsymbol{e}_1',\boldsymbol{e}_2'$ asi como las nuevas coordenadas de $P(2,3)$.

VIII.4 .- Sea la referencia ortonormal $(O;\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3)$ del espacio afín euclídeo. Se define una segunda referencia ortonormal $(O;\boldsymbol{e}_1',\boldsymbol{e}_2',\boldsymbol{e}_3')$ por

$\boldsymbol{e}_1'$ proporcional al (1,1,1), con una constante de proporcionalidad positiva,

$\boldsymbol{e}_2'$ combinación lineal de $\boldsymbol{e}_1$ y $\boldsymbol{e}_2$, con componente positiva respecto de $\boldsymbol{e}_1$,

$\boldsymbol{e}_3'$ completa una base ortonormal.

Dar las fórmulas de cambio de coordenadas en los dos sentidos.

VIII.5 .- Hallar las coordenadas del baricentro de un triángulo en E_3.

VIII.3.- FIGURAS GEOMETRICAS DEL ESPACIO AFIN

Daremos el nombre de figuras a subconjuntos de puntos del espacio afín y sobre el estudio de sus relaciones y propiedades se ocupa la geometría afín. Vamos a definir las figuras más importantes

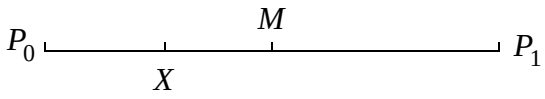
1) ***Segmento*** de extremos los puntos P_0 y P_1 es el conjunto

$$\overline{P_0P_1} = \{X \in E \mid X = P_0 + \lambda\overrightarrow{P_0P_1} \text{ con } \lambda \in [0,1]\}$$

o de forma equivalente, según el axioma A_1

$$\overrightarrow{P_0X} = \lambda\overrightarrow{P_0P_1}$$

Desde el punto de vista de la geometría intuitiva un segmento $\overline{P_0P_1}$ es el conjunto de puntos comprendidos "entre" P_0 y P_1, lo que se corresponde con la definición anterior, ya que si hacemos $\lambda = 0$, entonces $X = P_0$, y si $\lambda = 1$, entonces $X = P_1$.



Los puntos del segmento distintos de los extremos se denominan ***puntos interiores***. El punto

$$M = P_0 + \frac{1}{2}\overrightarrow{P_0P_1}$$

se denomina ***punto medio*** del segmento.

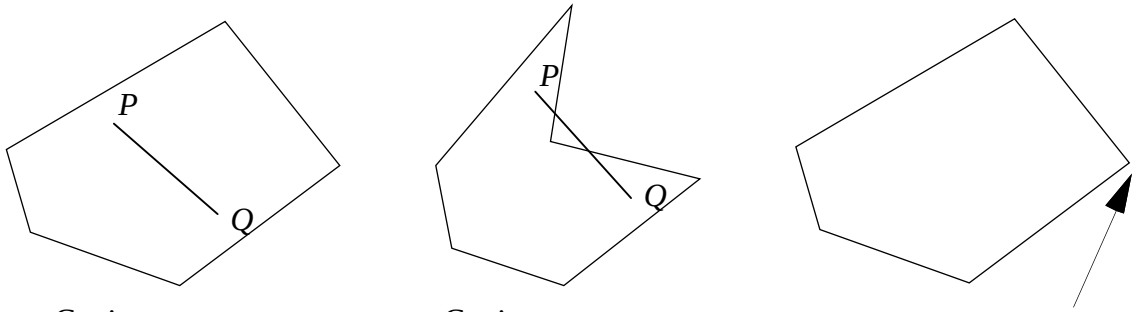
2) Un conjunto de puntos T del espacio afín se denomina ***convexo*** si verifica la propiedad de contener al segmento que determinan dos cualesquiera de sus puntos, es decir

$$T \text{ convexo si y sólo si } (\forall P,Q \in T)\ (\overline{PQ} \subseteq T)$$

La intersección de conjuntos convexos $A_1,...,A_n$ es también un conjunto convexo ya que, en efecto si no fuera un conjunto convexo existirían dos puntos P y Q de $A_1 \cap ... \cap A_n$ tales que

$$\overline{PQ} \not\subset A_1 \cap ... \cap A_n \ \Rightarrow\ (\exists i \in [1,n])\ (\overline{PQ} \not\subset A_i)$$

y A_i no sería convexo. Diremos que P es un ***punto extremo*** de T si ningún segmento contenido en T tiene a P como punto interior. Intuitivamente es

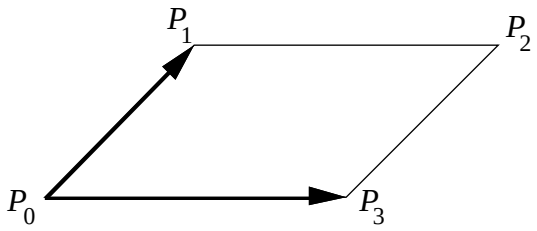


Conjunto convexo Conjunto no convexo Punto extremo

3) m-***paralelepípedo*** determinado por los puntos P_0, P_1,..., P_m (con $m \leq \dim(E)$) es el conjunto

$$K(P_0; \overrightarrow{P_0P_1},...,\overrightarrow{P_0P_m}) = \{X \in E \mid X = P_0+\lambda_1\overrightarrow{P_0P_1}+...+\lambda_m\overrightarrow{P_0P_m} \text{ con } \lambda_1,...,\lambda_m \in [0,1]\}$$

siendo la generalización a *m* dimensiones de un segmento, que es un 1-paralelepípedo. Un 2-paralelepípedo es lo que en geometría intuitiva se entiende por un paralelogramo



correspondiendo el punto P_1 a $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 0$
" " P_2 a $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 1$
" " P_3 a $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 1$.

Si los vectores $\{\overrightarrow{P_0P_1},...,\overrightarrow{P_0P_m}\}$ forman un conjunto l.i. el *m*-paralelepípedo se denomina ***no degenerado*** de dimensión *m*, y si son l.d. forman un paralelepípedo degenerado que es igual a otro paralelepípedo no degenerado de dimensión inferior. Los puntos $P_0,...,P_m$ se denominan ***vértices*** y los vectores $\overrightarrow{P_0P_1},...,\overrightarrow{P_0P_m}$ definen las ***aristas***. Si en la definición de *m*-paralelepípedo hacemos $\lambda_i = 0$ el conjunto resultante

$$K_i = \{X \in E \mid X = P_0+\lambda_1\overrightarrow{P_0P_1}+...+\lambda_{i-1}\overrightarrow{P_0P_{i-1}}+\lambda_{i+1}\overrightarrow{P_0P_{i+1}}+...+\lambda_m\overrightarrow{P_0P_m},\ \lambda_1,...,\lambda_m \in [0,1]\}$$

es un (*m*–1)-paralelepípedo que se denomina ***cara*** de *K*. En el caso de un 2-paralelepípedo las caras son segmentos y en el caso de un 1-paralelepípedo, es decir un segmento, la cara es un punto. Análogamente, si hacemos un $\lambda_i = 1$ el conjunto resultante

$$\{X \in E \mid X = P_0+\lambda_1\overrightarrow{P_0P_1}+...+\lambda_{i-1}\overrightarrow{P_0P_{i-1}}+\overrightarrow{P_0P_{i+1}}+\lambda_{i+1}\overrightarrow{P_0P_{i+1}}+...+\lambda_m\overrightarrow{P_0P_m},\ \lambda_1,...,\lambda_m \in [0,1]\}$$

es un (*m*–1)-paralelepípedo, ya que haciendo $Q = P_0+\overrightarrow{P_0P_{i+1}}$ tenemos

$$\{X \in E \mid X = Q+\lambda_1\overrightarrow{P_0P_1}+...+\lambda_{i-1}\overrightarrow{P_0P_{i-1}}+\lambda_{i+1}\overrightarrow{P_0P_{i+1}}+...+\lambda_m\overrightarrow{P_0P_m},\ \lambda_1,...,\lambda_m \in [0,1]\}$$

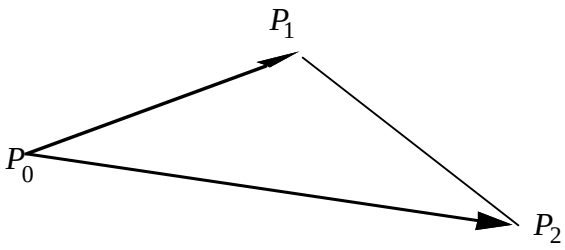
que también se denomina ***cara***. Así un *m*-paralelepípedo tiene 2*m* caras.

4) Un *m*-***simplex*** de vértices $P_0,P_1,...,P_m$ es el conjunto

$$S(P_0; \overrightarrow{P_0P_1},...,\overrightarrow{P_0P_m}) =$$

$$= \{X \in E \mid P_0+\lambda_1\overrightarrow{P_0P_1}+...+\lambda_m\overrightarrow{P_0P_m} \text{ con } \lambda_1,...,\lambda_m \geq 0 \text{ y } \lambda_1+...+\lambda_m \leq 1\}$$

Si $m = 1$ el 1-simplex es, obviamente, un segmento. El caso de 2-simplex corresponde a lo que en geometría intuitiva se denomina triángulo de vértices P_0, P_1 y P_2



correspondiendo

el vértice P_1 a $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 0$
el vértice P_2 a $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 1$
la arista P_1P_2 a $\lambda_1+\lambda_2 = 1$
la arista P_0P_1 a $\lambda_1 \leq 1, \lambda_2 = 0$
La arista P_0P_2 a $\lambda_1 = 0, \lambda_2 \leq 1$

Si los vectores $\{\overrightarrow{P_0P_1},\overrightarrow{P_0P_2},...,\overrightarrow{P_0P_m}\}$ son l.i., el m-simplex se denomina ***no degenerado*** de dimensión m, y si son l.d. forman un simplex degenerado que es igual a otro simplex no degenerado de dimensión inferior. Si hacemos un $\lambda_i = 0$, el conjunto resultante

$$S_i = \{X\in E \mid X = P+\lambda_1\overrightarrow{P_0P_1}+...+\lambda_{i-1}\overrightarrow{P_0P_{i-1}}+\lambda_{i+1}\overrightarrow{P_0P_{i+1}}+...+\lambda_m\overrightarrow{P_0P_m}$$
$$\text{con } \lambda_1,...,\lambda_m \geq 0 \text{ y } \lambda_1+...+\lambda_m \leq 1\}$$

es un (m–1)-simplex que se denomina ***cara*** de S, teniendo un m-simplex, m caras.

5) Si $\{\boldsymbol{v}_1,...,\boldsymbol{v}_m\}$ es un conjunto linealmente independiente de vectores de V, llamamos ***variedad lineal*** de dimensión m que pasa por el punto P y tiene a $\boldsymbol{v}_1,...,\boldsymbol{v}_m$ como ***vectores directores*** al conjunto de puntos

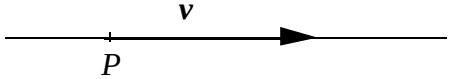
$$F = \{X\in E \mid X = P+\lambda_1\boldsymbol{v}_1+\lambda_2\boldsymbol{v}_2+...+\lambda_m\boldsymbol{v}_m \text{ con } \lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_m\in \mathbf{R}\}$$

o, equivalentemente

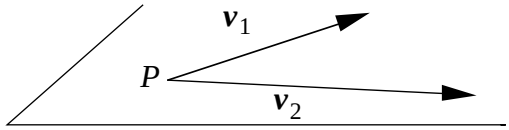
$$F = \{X\in E \mid \overrightarrow{PX} = \lambda_1\boldsymbol{v}_1+\lambda_2\boldsymbol{v}_2+....+\lambda_m\boldsymbol{v}_m \text{ con } \lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_m\in \mathbf{R}\}$$

Si $m = 0$ tenemos la variedad lineal de dimensión 0 que se denomina ***punto***. Si $m = 1$, es una variedad lineal de dimensión 1 que se denomina ***recta***. Si $m = 2$, es una variedad lineal de 2 dimensiones se denomina ***plano***. Si $m > 2$, la variedad lineal se denomina ***hiperplano***. Si $m = n$, entonces $(\boldsymbol{v}_1,...,\boldsymbol{v}_m)$ es una base de V con lo que $\lambda_1\boldsymbol{v}_1+...+\lambda_m\boldsymbol{v}_m$ es cualquier vector de V y, por consiguiente, $F = E$.

Estas variedades lineales no son más que una abstracción de lo que en geometría elemental se denomina recta que pasa por un punto y tiene una dirección determinada



como conjunto de puntos X que con P determinan un vector proporcional a $\boldsymbol{v}$, o plano



como conjunto de puntos que con P determinan vectores que pueden "descomponerse" en las direcciones $\boldsymbol{v}_1$ y $\boldsymbol{v}_2$.

De la definición de variedad lineal se deducen las siguientes propiedades:

a) $P \in F$, pues $P = P + 0\cdot\boldsymbol{v}_1 + ... + 0\cdot\boldsymbol{v}_m$

b) Si U es el subespacio $[\boldsymbol{v}_1,...,\boldsymbol{v}_m]$, entonces $F = P+U$, pues si X es un punto de F

$$X \in F \Leftrightarrow X = P + \boldsymbol{u}\ , \text{ con } \boldsymbol{u} \in U$$

Al subespacio U generado por los vectores directores se le denomina ***subespacio director*** de F.

c) Si $(\boldsymbol{v}_1,...,\boldsymbol{v}_m)$ y $(\boldsymbol{u}_1,...,\boldsymbol{u}_m)$ son dos bases de U, entonces según lo anterior

$$F = P + [\boldsymbol{v}_1,...,\boldsymbol{v}_m] = P + [\boldsymbol{u}_1,...,\boldsymbol{u}_m]$$

lo cual quiere decir que para definir la variedad podemos tomar como vectores directores cualquier base del subespacio director U.

d) $Q \in F$ si y sólo si $\overrightarrow{PQ} \in U$, ya que $Q \in F$ equivale a $\overrightarrow{PQ} = \lambda_1\boldsymbol{v}_1 + ... + \lambda_m\boldsymbol{v}_m$.

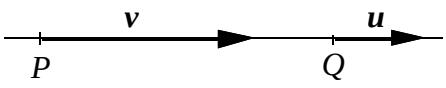
e) Si $Q \in F$ entonces las variedades lineales $F = P+U$ y $F' = Q+U$ coinciden. En efecto, si $Q \in F$, entonces

$$\overrightarrow{PQ} = \boldsymbol{u} \in U \Leftrightarrow Q = P + \boldsymbol{u}$$

por lo que

$$\begin{aligned} X \in P + [\boldsymbol{v}_1,...,\boldsymbol{v}_m] \ &\Leftrightarrow\ \overrightarrow{PX} \in [\boldsymbol{v}_1,...,\boldsymbol{v}_m] \ \Leftrightarrow\ \overrightarrow{PX} = \lambda_1\boldsymbol{v}_1 + ... + \lambda_m\boldsymbol{v}_m \ \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow\ \overrightarrow{QX} = \overrightarrow{PX} - \overrightarrow{PQ} = \lambda_1\boldsymbol{v}_1 + ... + \lambda_m\boldsymbol{v}_m - \boldsymbol{u} \ \Leftrightarrow\ \overrightarrow{QX} \in [\boldsymbol{v}_1,...,\boldsymbol{v}_m] \ \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow\ X \in Q + [\boldsymbol{v}_1,\ldots,\boldsymbol{v}_m] \end{aligned}$$

Esta propiedad significa que cualquier punto de la variedad sirve para definirla; es decir, junto con la propiedad d) tenemos que una variedad viene definida cuando conozcamos un punto cualquiera de élla y una base cualquiera de su subespacio director. En geometría intuitiva significa que la recta r que pasa por P y tiene como dirección $\boldsymbol{v}$ es la misma que la recta que pasa por Q y tiene como dirección $\boldsymbol{u}$.



Las variedades lineales son las figuras más importantes y nuestro estudio lo centraremos en éllas, aunque veamos asímismo algunas propiedades de las otras figuras.

VIII.4.- ECUACIONES DE UNA VARIEDAD LINEAL

Sea (E,V) un espacio afín con un sistema de referencia $(O;\boldsymbol{e}_1,...,\boldsymbol{e}_n)$; sea la variedad lineal F que pasa por P y tiene como vectores directores $\boldsymbol{v}_1,...,\boldsymbol{v}_m$. Respecto a $(O;\boldsymbol{e}_1,...,\boldsymbol{e}_n)$ tendremos

Coordenadas de $P(p_1,...,p_n) \Leftrightarrow P = O+\mathbf{ep}$

Coordenadas de $X(x_1,...,x_n) \Leftrightarrow X = O+\mathbf{ex}$

Componentes de $\boldsymbol{v}_1,...,\boldsymbol{v}_m$: $\boldsymbol{v}_1 = a_{11}\boldsymbol{e}_1+...+a_{n1}\boldsymbol{e}_n$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$\boldsymbol{v}_m = a_{1m}\boldsymbol{e}_1+...+a_{nm}\boldsymbol{e}_n$

De acuerdo con la definición de variedad lineal

$$X\in F \Leftrightarrow X = P+\lambda_1\boldsymbol{v}_1+...+\lambda_m\boldsymbol{v}_m \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = p_1+a_{11}\lambda_1+...+a_{1m}\lambda_m \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_n = p_n+a_{n1}\lambda_n+...+a_{nm}\lambda_m \end{cases}$$

que se denominan ***sistema de ecuaciones paramétricas*** de la variedad lineal, a la que representan en el sentido de que dado el punto $X(x_1,...,x_n)$

$$X\in F \text{ si y sólo si } x_1,...,x_n \text{ es una solución del sistema}$$

es decir, existen unos parámetros $\lambda_1,...,\lambda_m$ tales que las n igualdades son ciertas.

Particularizando estos resultados al espacio afín de 3 dimensiones $(E,\mathbf{R}^3)$ con el sistema de referencia $(O;(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1))$ tendremos

$m = 1$: recta r que pasa por $P(p_1,p_2,p_3)$ y tiene como vector director $\boldsymbol{v} = (a_1,a_2,a_3)$

$$\begin{aligned} x_1 &= p_1+a_1\lambda \\ x_2 &= p_2+a_2\lambda \\ x_3 &= p_3+a_3\lambda \end{aligned}$$

siendo los puntos de r las soluciones del sistema. Así, por ejemplo

$$\begin{aligned} x_1 &= 3\lambda \\ x_2 &= 4 \\ x_3 &= 2-5\lambda \end{aligned}$$

es una recta que pasa por $P(0,4,2)$ y tiene como vector director $\boldsymbol{v} = (3,0,-5)$. Si queremos hallar puntos de la recta, basta asignar valores a λ: para $\lambda = 0$ obtenemos el punto (0,4,2), para $\lambda = 1$ el punto (3,4,–3). El punto (6,4,–8) pertenece a la recta pues

$$\begin{aligned} 6 &= 3\lambda \\ 4 &= 4 \\ -8 &= 2-5\lambda \end{aligned}$$

tiene como solución $\lambda = 2$. Sin embargo (2,7,4) no pertenece a la recta.

$m = 2$: Plano π que pasa por $P(p_1,p_2,p_3)$ y tiene como vectores directores $\boldsymbol{v}_1 = (a_{11},a_{21},a_{31})$ y $\boldsymbol{v}_2 = (a_{12},a_{22},a_{32})$ es

$$\begin{aligned} x_1 &= p_1+a_{11}\lambda_1+a_{12}\lambda_2 \\ x_2 &= p_2+a_{21}\lambda_1+a_{22}\lambda_2 \\ x_3 &= p_3+a_{31}\lambda_1+a_{32}\lambda_2 \end{aligned}$$

Así, por ejemplo

$$\begin{aligned} x_1 &= 3\lambda-\mu \\ x_2 &= 5-6\mu \\ x_3 &= 2-\lambda+\mu \end{aligned}$$

son las ecuaciones paramétricas del plano que pasa por $P(0,5,2)$ y tiene como vectores directores $\boldsymbol{v}_1 = (3,0,-1)$ y $\boldsymbol{v}_2 = (-1,-6,1)$; el punto $Q(1,-7,3)$ es del plano pues

$$\begin{aligned} 1 &= 3\lambda-\mu \\ -7 &= 5-6\mu \\ 3 &= 2-\lambda+\mu \end{aligned}$$

tiene como solución $\lambda = 1$, $\mu = 2$; sin embargo el punto (1,0,2) no pertenece a π.

Otra forma de representar la variedad lineal es mediante un sistema de ecuaciones lineales en el que no interviene ningún parámetro. Según la definición de variedad el conjunto de vectores directores $\{\boldsymbol{v}_1,...,\boldsymbol{v}_m\}$ es l.i. por lo que

$$X\in F \;\Leftrightarrow\; \overrightarrow{PX} = \lambda_1\boldsymbol{v}_1+\lambda_2\boldsymbol{v}_2+...+\lambda_m\boldsymbol{v}_m \;\Leftrightarrow\; \operatorname{rang}\begin{pmatrix} x_1-p_1 & a_{11} & a_{12} \,..\, a_{1m} \\ x_2-p_2 & a_{21} & a_{22} \,..\, a_{2m} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_n-p_n & a_{n1} & a_{n2} \,..\, a_{nm} \end{pmatrix} = m$$

luego existe un determinante de orden m, distinto de 0 y todos los $n-m$ determinantes de orden $m+1$ que lo contienen son nulos. Desarrollando éstos por los elementos de su última columna obtenemos un sistema de $n-m$ ecuaciones lineales con n incógnitas cuyas soluciones son puntos de la variedad lineal, y se denomina ***sistema de ecuaciones cartesianas*** de la variedad.

Particularicemos este resultado al caso de recta y plano en el espacio afín de dimensión tres $(E,\mathbf{R}^3)$ con el sistema de referencia $(O;(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1))$.

$m = 1$: Recta r que pasa por $P(p_1,p_2,p_3)$ y tiene como vector director $\boldsymbol{v} = (a_1,a_2,a_3)$

$$X(x_1,x_2,x_3) \in r \quad \Leftrightarrow \quad \operatorname{rang}\begin{pmatrix} x_1-p_1 & a_1 \\ x_2-p_2 & a_2 \\ x_3-p_3 & a_3 \end{pmatrix} = 1 \quad \text{y sea por ejemplo } \ a_1 \neq 0$$

$$\begin{vmatrix} x_1-p_1 & a_1 \\ x_2-p_2 & a_2 \end{vmatrix} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a_1(x_2-p_2) = a_2(x_1-p_1)$$

$$\begin{vmatrix} x_1-p_1 & a_1 \\ x_3-p_3 & a_3 \end{vmatrix} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a_1(x_3-p_3) = a_3(x_1-p_1)$$

Si fuesen $a_2 \neq 0$ y $a_3 \neq 0$ tendríamos

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{x_1-p_1}{a_1} = \dfrac{x_2-p_2}{a_2} \\[2ex] \dfrac{x_1-p_1}{a_1} = \dfrac{x_3-p_3}{a_3} \end{array}\right| \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x_1-p_1}{a_1} = \frac{x_2-p_2}{a_2} = \frac{x_3-p_3}{a_3}$$

Si fuesen $a_2 = 0$ y $a_3 \neq 0$ tendríamos

$$\left.\begin{array}{l} a_1(x_2-p_2) = 0 \\[2ex] \dfrac{x_1-p_1}{a_1} = \dfrac{x_3-p_3}{a_3} \end{array}\right| \quad \Leftrightarrow \quad \left|\begin{array}{l} x_2 = p_2 \\[2ex] \dfrac{x_1-p_1}{a_1} = \dfrac{x_3-p_3}{a_3} \end{array}\right.$$

lo cual también puede expresarse en la forma

$$\frac{x_1-p_1}{a_1} = \frac{x_2-p_2}{0} = \frac{x_3-p_3}{a_3}$$

entendiendo que si un denominador es cero, lo es también el numerador; así si fuesen $a_2 = 0$, $a_3 = 0$ tendríamos

$$\left.\begin{array}{ll} a_1(x_2-p_2) = 0 & x_2 = p_2 \\ a_1(x_3-p_3) = 0 & x_3 = p_3 \end{array}\right| \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x_1-p_1}{a_1} = \frac{x_2-p_2}{0} = \frac{x_3-p_3}{0}$$

En resumen, en el espacio afín $(E,\mathbf{R}^3)$ referido a la base canónica una recta viene determinada por un sistema de ecuaciones lineales que puede escribirse en la forma

$$\frac{x_1-p_1}{a_1}=\frac{x_2-p_2}{a_2}=\frac{x_3-p_3}{a_3}$$

siendo a_1, a_2 y a_3 las componentes del vector director de la recta, con algún $a_i \neq 0$ por lo menos, y p_1, p_2 y p_3 las coordenadas de un punto de la misma. Los puntos de la recta tienen por coordenadas las soluciones del sistema anterior.

$m = 2$: Plano π que pasa por $P(p_1,p_2,p_3)$ y tiene como vectores directores $\boldsymbol{v}_1 = (a_{11},a_{21},a_{31})$ y $\boldsymbol{v}_2 = (a_{12},a_{22},a_{32})$

$$X(x_1,x_2,x_3)\in\pi \;\Leftrightarrow\; \operatorname{rang}\begin{pmatrix} x_1-p_1 & a_{11} & a_{12} \\ x_2-p_2 & a_{21} & a_{22} \\ x_3-p_3 & a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} = 2 \;\Leftrightarrow\; \begin{vmatrix} x_1-p_1 & a_{11} & a_{12} \\ x_2-p_2 & a_{21} & a_{22} \\ x_3-p_3 & a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = 0 \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\; \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}(x_1-p_1) - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}(x_2-p_2) + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}(x_3-p_3) = 0 \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\; A_1x_1+A_2x_2+A_1x_3+A_4 = 0$$

con algún A_1, A_2 o A_3 distinto de cero, por formar los vectores directores un conjunto l.i.. Así, un plano en el espacio afín de dimensión 3 viene dado por una ecuación lineal

$$A_1x_1+A_2x_2+A_3x_3+A_4 = 0$$

con algún coeficiente distinto de cero, de forma que un punto del espacio afín pertenece π si y sólo si sus coordenadas son soluciones de esta ecuación, y recíprocamente.

Resumiendo, hemos obtenido que dada una variedad lineal F de dimensión m de un espacio afín (E,V) de dimensión n, existe un sistema compatible de $n-m$ ecuaciones lineales con n incógnitas que verifica la propiedad

$$x_1,...,x_n \text{ solución del sistema } \text{ equivale a } X(x_1,...,x_n)\in F$$

Se verifica asimismo el resultado recíproco, es decir, dado un sistema compatible $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ con n incógnitas y $\operatorname{rang}(\mathbf{A}) = m$, existe una variedad lineal F de dimensión $n-m$ que verifica la anterior propiedad; además el subespacio director de F está formado por los vectores cuyas componentes son solución del sistema homogéneo $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$. En efecto, según la relación entre las soluciones de un sistema $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ y su sistema homogéneo asociado $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ y dado que las soluciones de este último forman un subespacio de dimensión $n-m$, podemos escribir

$$\boldsymbol{x} \text{ solución de } \mathbf{Ax} = \mathbf{b} \text{ equivale a } \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}^0+\lambda_1\boldsymbol{z}_1+...+\lambda_{n-m}\boldsymbol{z}_{n-m}$$

siendo $\boldsymbol{x}^0$ una solución particular de $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ y $(\boldsymbol{z}_1,...,\boldsymbol{z}_{n-m})$ una base del subespacio que forman las soluciones de $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$. Si hacemos

$$P = O+\boldsymbol{x}^0$$

tendremos que si $X(x_1,...,x_n)$ es un punto tal que $x_1,...,x_n$ es solución de $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, entonces

$$X = O+\boldsymbol{x} = O+(\boldsymbol{x}^0+\lambda_1\boldsymbol{z}_1+\ldots+\lambda_{n-m}\boldsymbol{z}_{n-m}) = (O+\boldsymbol{x}^0)+\lambda_1\boldsymbol{z}_1+\ldots+\lambda_{n-m}\boldsymbol{z}_{n-m} =$$
$$= P+\lambda_1\boldsymbol{z}_1+\ldots+\lambda_{n-m}\boldsymbol{z}_{n-m}$$

es decir los puntos solución forman una variedad lineal de dimensión $n-m$ y sus vectores directores son los que tienen por componentes las soluciones del sistema homogéneo.

Este resultado anterior significa, por ejemplo, que una ecuación

$$a_1x_1+\ldots+a_nx_n = b$$

compatible, representa un hiperplano de dimensión n-1 del espacio afín de n dimensiones, cuyo subespacio director está formado por los vectores cuyas componentes, respecto del sistema de referencia, son las soluciones de la ecuación

$$a_1x_1+\ldots+a_nx_n = 0$$

Particularicemos el resultado anterior al espacio afín de dimensión 3.

a) Dado un sistema lineal de una ecuación

$$a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3 = b$$

cuya matriz y matriz ampliada son

$$\mathbf{A} = (a_1 \;\; a_2 \;\; a_3) \qquad\qquad \mathbf{A}|\mathbf{b} = (a_1 \;\; a_2 \;\; a_3 \;\; b)$$

entonces si

a1) rang($\mathbf{A}$) = 0 = rang($\mathbf{A}|\mathbf{b}$), el sistema es compatible y sus soluciones son las coordenadas de los puntos de una variedad lineal de dimensión 3–0 = 3, es decir, todo el espacio.

a2) rang($\mathbf{A}$) = 0, rang($\mathbf{A}|\mathbf{b}$) = 1, el sistema es incompatible.

a3) rang($\mathbf{A}$) = 1 implica rang($\mathbf{A}|\mathbf{b}$) = 1, por lo que el sistema es compatible y sus soluciones son las coordenadas de los puntos de una variedad lineal de dimensión 3–1 = 2 , un plano, cuyo subespacio director lo forman los vectores cuyas componentes son las soluciones del sistema homogéneo

$$a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3 = 0$$

b) Dado un sistema lineal de dos ecuaciones

$$a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3 = b_1$$
$$a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3 = b_2$$

cuya matriz y matriz ampliada son

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \qquad\qquad \mathbf{A}|\mathbf{b} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & b_2 \end{pmatrix}$$

entonces si

b1) rang(**A**) = 0 y rang(**A**|**b**) = 0, el sistema es compatible y sus soluciones son los puntos de una variedad lineal de dimensión 3, es decir, todo el espacio,

b2) rang(**A**) = 0 y rang(**A**|**b**) = 1, el sistema es incompatible,

b3) rang(**A**) = 1 y rang(**A**|**b**) = 1, el sistema es compatible equivalente al formado por su única ecuación principal, cuyas soluciones son los puntos de una variedad lineal de dimensión 3–1 = 2, es decir, un plano, como en el caso a3),

b4) rang(**A**) = 1 y rang(**A**|**b**) = 2, el sistema es incompatible,

b5) rang(**A**) = 2 y rang(**A**|**b**) = 2, el sistema es compatible y sus soluciones son los puntos de una variedad lineal de dimensión 3–2 = 1, es decir, una recta cuyo subespacio director es el formado por los vectores cuyas componentes son las soluciones del sistema

$$a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3 = 0$$
$$a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3 = 0$$

c) Dado un sistema lineal de tres ecuaciones

$$a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3 = b_1$$
$$a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3 = b_2$$
$$a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3 = b_3$$

de matriz y matriz ampliada

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \qquad \mathbf{A}\,|\mathbf{b} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & b_3 \end{pmatrix}$$

entonces si

c1) rang(**A**) < 3 y si el sistema es compatible, tenemos los casos anteriores,

c2) rang(**A**) = 3 = rang(**A**|**b**), el sistema es compatible y determinado, luego su única solución son las coordenadas de un único punto, es decir, una variedad lineal de dimensión 3–3 = 0.

Ejemplo VIII.4.1

En $(E,\mathbf{R}^3)$ el sistema

$$x+y-z = 2$$
$$x+3y-5z = 0$$

representa una recta, pues, rang(**A**) = 2; el subespacio director son las soluciones de

$$\left.\begin{array}{r} x+y-z=0 \\ x+3y-5z=0 \end{array}\right| \Rightarrow \left.\begin{array}{c} y=2z \\ x=-z \end{array}\right| \Rightarrow \quad U=[(-1,2,1)]$$

luego (–1,2,1) es un vector director de la recta.

Para las ecuaciones

$$\begin{array}{r} x+y-3z=4 \\ -3x-3y+9z=-12 \end{array}$$

como rang(**A**) = rang(**A**|**b**) = 1, representan un plano cuya ecuación es

$$x+y-3z=4$$

su subespacio director lo forman las soluciones de sistema homogéneo

$$x+y-3z=0 \;\Rightarrow\; x=-y+3z \;\Rightarrow\; U=[(3,0,1)(-1,1,0)]$$

y dos vectores directores son, por tanto $\boldsymbol{u}=(3,0,1)$ y $\boldsymbol{v}=(-1,1,0)$.

El sistema

$$\begin{array}{r} x+y-3z=4 \\ -3x-3y+9z=5 \end{array}$$

no forma las ecuaciones cartesianas de ninguna variedad lineal, al ser incompatible pues rang(**A**) = 1 y rang(**A**|**b**) = 2.

Ejercicios

VIII.6.- Ecuación del plano que pasa por el punto $A(2,4,1)$ y contiene a la recta

$$\begin{array}{r} 3x+y-z+5=0 \\ x-y+z-2=0 \end{array}$$

VIII.7.- Dado el tetraedro regular *ABCD* y el sistema de referencia $(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD})$, se pide:

a) Hallar la ecuación del plano que pasa por la arista *AB* y por el punto medio de la arista opuesta.

b) Recta que une el punto medio de la arista *AB* con el punto medio de la arista *CD*.

c) Recta que pasa por el vértice *A* y el baricentro de la cara *BCD*.

VIII.8.- Interpretar geométricamente los sistemas

a) $\begin{array}{r} x_1+2x_2-x_3=4 \\ 2x_1-x_4=-6 \end{array}$

$$\text{b)}\quad \begin{aligned} 2x_1-3x_2+x_4 &= 1\\ x_1-x_2-x_3-x_4 &= 0\\ 4x_1-5x_2-2x_3-x_4 &= 1 \end{aligned}$$

$$\text{c)}\quad x_1 = 0$$

y hallar punto y vectores directores de las variedades lineales que representen.

VIII.5.- PARALELISMO E INTERSECCION DE VARIEDADES LINEALES

Vamos a estudiar que consecuencias geométricas tienen las posibles relaciones entre los subespacios directores de dos variedades lineales o la posible existencia de puntos comunes.

Sean las variedades lineales $F = P+U$ y $G = Q+V$; si

1) tienen algún punto en común, diremos que F y G son ***variedades que se cortan***,

2) $U\subseteq V$ o $V\subseteq U$ diremos que F y G son ***variedades paralelas,*** lo que se representa mediante el símbolo $F \parallel G$.

3) si ni se cortan ni son paralelas, diremos que F y G son ***variedades que se cruzan***,

De la definición de paralelismo se deduce fácilmente que

1) Si dim (F) = dim (G), entonces

$$F \parallel G \iff U = V$$

pues para dos subespacios que verifiquen $U\subseteq V$ y dim(U) = dim(V), entonces $U = V$.

2) Si $F \parallel G$ y tienen un punto en común, entonces

$$F\subseteq G \quad \text{o} \quad G\subseteq F$$

ya que, en efecto, si suponemos que $R\in F\cap G$ y que $U\subseteq V$ podemos escribir

$$F = P+U \Rightarrow F = R+U$$
$$G = Q+V \Rightarrow G = R+V$$

y como $U\subseteq V$ entonces $F\subseteq G$.

Supongamos un sistema de referencia ($O;\boldsymbol{e}_1,...,\boldsymbol{e}_n$) respecto del cual los vectores directores de F y G sean

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u}_1 &= a_{11}\boldsymbol{e}_1+a_{21}\boldsymbol{e}_2+\ldots+a_{n1}\boldsymbol{e}_n\\ \boldsymbol{u}_2 &= a_{12}\boldsymbol{e}_1+a_{22}\boldsymbol{e}_2+\ldots+a_{n2}\boldsymbol{e}_n\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ \boldsymbol{u}_m &= a_{1m}\boldsymbol{e}_1+a_{2m}\boldsymbol{e}_2+\ldots+a_{nm}\boldsymbol{e}_n \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \boldsymbol{v}_1 &= b_{11}\boldsymbol{e}_1+b_{21}\boldsymbol{e}_2+\ldots+b_{n1}\boldsymbol{e}_n\\ \boldsymbol{v}_2 &= b_{12}\boldsymbol{e}_1+b_{22}\boldsymbol{e}_2+\ldots+b_{n2}\boldsymbol{e}_n\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ \boldsymbol{v}_p &= b_{1p}\boldsymbol{e}_1+b_{2p}\boldsymbol{e}_2+\ldots+b_{np}\boldsymbol{e}_n \end{aligned}$$

igualdades que en forma matricial son

$$\left(\boldsymbol{u}_1\ \ \boldsymbol{u}_2\,..\,\boldsymbol{u}_m\right)=\left(\boldsymbol{e}_1\ \ \boldsymbol{e}_2\,..\,\boldsymbol{e}_n\right)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12}\,..\,a_{1m}\\ a_{21} & a_{22}\,..\,a_{2m}\\ \cdots & \cdots\\ a_{n1} & a_{n2}\,..\,a_{nm}\end{pmatrix}\ \Leftrightarrow\ \mathbf{u}=\mathbf{eM}$$

y

$$\left(\boldsymbol{v}_1\ \ \boldsymbol{v}_2\,..\,\boldsymbol{v}_p\right)=\left(\boldsymbol{e}_1\ \ \boldsymbol{e}_2\,..\,\boldsymbol{e}_n\right)\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12}\,..\,b_{1p}\\ b_{21} & b_{22}\,..\,b_{2p}\\ \cdots & \cdots\\ b_{n1} & b_{n2}\,..\,b_{np}\end{pmatrix}\ \Leftrightarrow\ \mathbf{v}=\mathbf{eN}$$

La condición de paralelismo será

$$F\parallel G\ \Leftrightarrow\ \left.\begin{matrix}U\subseteq V\\ \vee\\ V\subseteq U\end{matrix}\right|\ \Leftrightarrow\ \left.\begin{matrix}\text{rang}(\mathbf{M}\,|\,\mathbf{N})=\text{rang}(\mathbf{N})\\ \vee\\ \text{rang}(\mathbf{M}\,|\,\mathbf{N})=\text{rang}(\mathbf{M})\end{matrix}\right|\ \Leftrightarrow\ \text{rang}(\mathbf{M}\,|\,\mathbf{N})=\max(\text{rang}(\mathbf{M}),\text{rang}(\mathbf{N}))$$

Si las variedades lineales vienen dadas por sus sistemas de ecuaciones cartesianas

$$F:\ \mathbf{Ax}=\mathbf{b}\qquad\qquad G:\ \mathbf{Bx}=\mathbf{c}$$

dado que los subespacios directores son las soluciones de los correspondientes sistemas homogéneos, tendremos como condición de paralelismo

$$F\parallel G\ \Leftrightarrow\ \left.\begin{matrix}U\subseteq V\\ \vee\\ V\subseteq U\end{matrix}\right|\ \Leftrightarrow\ \left.\begin{matrix}\text{toda solución de }\mathbf{Ax}=\mathbf{0}\text{ es solución de }\mathbf{Bx}=\mathbf{0}\\ \vee\\ \text{toda solución de }\mathbf{Bx}=\mathbf{0}\text{ es solución de }\mathbf{Ax}=\mathbf{0}\end{matrix}\right|\ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ \left|\begin{matrix}\mathbf{Ax}=\mathbf{0}\\ \mathbf{Bx}=\mathbf{0}\end{matrix}\right|\ \text{es equivalente a}\ \mathbf{Bx}=\mathbf{0}\qquad \vee \qquad \left|\begin{matrix}\mathbf{Ax}=\mathbf{0}\\ \mathbf{Bx}=\mathbf{0}\end{matrix}\right|\ \text{es equivalente a}\ \mathbf{Ax}=\mathbf{0}$$

y será por tanto

$$\left.\begin{matrix}\text{rang}\left(\dfrac{\mathbf{A}}{\mathbf{B}}\right)=\text{rang}(\mathbf{B})\\ \vee\\ \text{rang}\left(\dfrac{\mathbf{A}}{\mathbf{B}}\right)=\text{rang}(\mathbf{A})\end{matrix}\right|\ \Leftrightarrow\ \text{rang}\left(\frac{\mathbf{A}}{\mathbf{B}}\right)=\max(\text{rang}(\mathbf{A}),\text{rang}(\mathbf{B}))$$

Particularicemos estos resultados en el caso de un espacio afín de dimensión 3.

a) Paralelismo de dos planos α y β:

$$\alpha:\ A_1x_1+A_2x_2+A_3x_3 = A_4 \qquad\qquad \beta:\ B_1x_1+B_2x_2+B_3x_3 = B_4$$

Tendremos

$$\alpha \parallel \beta \ \Leftrightarrow\ \operatorname{rang}\begin{pmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \end{pmatrix} = 1 \ \Leftrightarrow\ \frac{A_1}{B_1} = \frac{A_2}{B_2} = \frac{A_3}{B_3}$$

b) Paralalelismo de dos rectas r y s

$$r:\ \frac{x_1-p_1}{a_1} = \frac{x_2-p_2}{a_2} = \frac{x_3-p_3}{a_3} \qquad\qquad s:\ \frac{x_1-q_1}{b_1} = \frac{x_2-q_2}{b_2} = \frac{x_3-q_3}{b_3}$$

Tendremos

$$r \parallel s \ \Leftrightarrow\ \operatorname{rang}\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{pmatrix} = 1 \ \Leftrightarrow\ \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3}$$

c) Paralelismo de recta r y plano α

$$r:\ \frac{x_1-p_1}{a_1} = \frac{x_2-p_2}{a_2} = \frac{x_3-p_3}{a_3} \qquad\qquad \alpha:\ A_1x_1+A_2x_2+A_3x_3 = A_4$$

Tendremos que $r \parallel \alpha$ equivale a que el vector director de r está contenido en el subespacio director de α lo que quiere decir que a_1, a_2 y a_3 es solución de la ecuación

$$A_1x_1+A_2x_2+A_3x_3 = 0$$

es decir,

$$A_1a_1+A_2a_2+A_3a_3 = 0$$

Ejemplo VIII.5.1

Los planos

$$\alpha:\ x+y-z = 2 \qquad\qquad \beta:\ x+3y-5z = 0$$

no son paralelos, sin embargo si lo son los planos

$$\alpha:\ x+y-z = 4 \qquad\qquad \beta:\ -3x-3y+3z = -12$$

que como tienen el punto (1,1,–2) en común, coinciden. Los planos

$$\alpha:\ x+y-z = 4 \qquad\qquad \beta:\ -3x-3y+3z = 5$$

son paralelos y no tienen puntos comunes.

Estudiemos las intersecciones de variedades lineales. Sean las variedades F y G dadas por sus sistemas de ecuaciones cartesianas

$$F : \mathbf{Ax} = \mathbf{b} \qquad\qquad G : \mathbf{Bx} = \mathbf{c}$$

y estudiemos que condición debe verificarse para que un punto cualquiera del espacio afín X pertenezca a ambas variedades

$$X(x_1,...,x_n) \in F \cap G \;\Leftrightarrow\; \left.\begin{array}{c} X \in F \\ \wedge \\ X \in G \end{array}\right| \;\Leftrightarrow\; \left.\begin{array}{c} x_1,...,x_n \text{ es solución de } \mathbf{Ax} = \mathbf{b} \\ \wedge \\ x_1,...,x_n \text{ es solución de } \mathbf{Bx} = \mathbf{c} \end{array}\right| \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\; x_1,...,x_n \text{ es solución del sistema } \left.\begin{array}{c} \mathbf{Ax} = \mathbf{b} \\ \\ \mathbf{Bx} = \mathbf{c} \end{array}\right|$$

es decir, un punto es común a dos variedades si sus coordenadas son solución del sistema conjunto que forman sus ecuaciones; como un sistema de ecuaciones compatible representa una variedad lineal del espacio afín, tenemos que $F \cap G$ o es vacío o es una variedad lineal de dimensión $n - \text{rang}\left(\begin{array}{c}\mathbf{A}\\ \hline \mathbf{B}\end{array}\right)$.

Apliquemos este resultado a un espacio afín de dimensión 3 con un sistema de referencia $(O;\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3)$ para estudiar posiciones relativas de rectas y planos.

a) Intersección de dos planos α y β

$$\alpha :\; A_1x_1+A_2x_2+A_3x_3 = A_4 \qquad\qquad \beta :\; B_1x_1+B_2x_2+B_3x_3 = B_4$$

Según los rangos de la matriz y matriz ampliada del sistema que forman sus ecuaciones, tendremos

rang($\mathbf{A}$) = 2, rang($\mathbf{A}\,|\,\mathbf{b}$) = 2 sistema compatible luego existe intersección, que es una variedad lineal de dimensión 3–2 = 1, una recta, que viene así dada como una intersección de planos.

rang($\mathbf{A}$) = 1, rang($\mathbf{A}\,|\,\mathbf{b}$) = 2 sistema incompatible y de acuerdo con la condición anterior de paralelismo, los planos son paralelos.

rang($\mathbf{A}$) = 1, rang($\mathbf{A}\,|\,\mathbf{b}$) = 1 sistema compatible y como los planos son paralelos, uno está contenido en otro, es decir son coincidentes.

b) Intersección de recta r y plano α

$$r :\; \begin{array}{l} A_1x_1+A_2x_2+A_3x_3 = A_4 \\ B_1x_1+B_2x_2+B_3x_3 = B_4 \end{array} \qquad \text{con } \text{rang}\begin{pmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \end{pmatrix} = 2$$

$$\alpha :\; C_1x_1+C_2x_2+C_3x_3 = C_4$$

Según los rangos de la matriz y matriz ampliada del sistema que forman las ecuaciones de

ambas variedades tenemos

rang($\mathbf{A}$) = 3, rang($\mathbf{A}|\mathbf{b}$) = 3 sistema compatible y determinado por lo que la intersección es un punto.

rang($\mathbf{A}$) = 2, rang($\mathbf{A}|\mathbf{b}$) = 3 sistema incompatible y, de acuerdo con la condición vista de paralelismo, la recta y el plano son paralelos.

rang($\mathbf{A}$) = 2, rang($\mathbf{A}|\mathbf{b}$) = 2 sistema compatible y al ser la recta paralela al plano, según la condición ya vista, está contenida en él.

c) Intersección de tres planos

$$\alpha:\ A_1x_1+A_2x_2+A_3x_3 = A_4$$
$$\beta:\ B_1x_1+B_2x_2+B_3x_3 = B_4$$
$$\gamma:\ C_1x_1+C_2x_2+C_3x_3 = C_4$$

Según los rangos de las matrices $\mathbf{A}$ y $\mathbf{A}|\mathbf{b}$ de este sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas tendremos

rang($\mathbf{A}$) = 3, rang($\mathbf{A}|\mathbf{b}$) = 3 sistema compatible y determinado, luego los tres planos se cortan en un único punto.

rang($\mathbf{A}$) = 2, rang($\mathbf{A}|\mathbf{b}$) = 3 sistema incompatible, dos planos definen una recta que es paralela al tercer plano y tenemos o dos planos paralelos cortados por el tercer plano, o una superficie prismática triangular.

rang($\mathbf{A}$) = 2, rang($\mathbf{A}|\mathbf{b}$) = 2 sistema compatible, dos de los planos determinan una recta paralela al tercero; al existir puntos comunes, está contenida en él y los tres planos se cortan en una recta.

rang($\mathbf{A}$) = 1, rang($\mathbf{A}|\mathbf{b}$) = 2 sistema incompatible, los tres planos son entre sí paralelos, pudiendo dos de éllos coincidir.

rang($\mathbf{A}$) = 1, rang($\mathbf{A}|\mathbf{b}$) = 1 sistema compatible y dado que los tres planos son paralelos dos a dos, coinciden.

d) Dos rectas r y s.

Estudiaremos el problema tanto si las rectas vienen dadas como intersección de planos o mediante el sistema cartesiano en el que vienen expresadas con un punto de la recta y un vector director.

d1) Sean

$$r:\begin{matrix} A_1x_1+A_2x_2+A_3x_3 = A_4 \\ B_1x_1+B_2x_2+B_3x_3 = B_4 \end{matrix} \qquad \text{con } \operatorname{rang}\begin{pmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \end{pmatrix} = 2$$

$$s:\begin{matrix} C_1x_1+C_2x_2+C_3x_3 = C_4 \\ D_1x_1+D_2x_2+D_3x_3 = D_4 \end{matrix} \qquad \text{con } \operatorname{rang}\begin{pmatrix} C_1 & C_2 & C_3 \\ D_1 & D_2 & D_3 \end{pmatrix} = 2$$

Tendremos

rang(**A**) = 3, rang(**A**|**b**) = 4 sistema incompatible y como la matriz **A** no tiene de rango 2 las rectas no son paralelas ni tienen puntos comunes; diremos que son rectas que se ***cruzan***.

rang(**A**) = 3, rang(**A**|**b**) = 3 sistema compatible determinado y las dos rectas se cortan en un punto.

rang(**A**) = 2, rang(**A**|**b**) = 3 sistema incompatible y como rang(**A**) = 2, las rectas son paralelas.

rang(**A**) = 2, rang(**A**|**b**) = 2 sistema compatible equivalente al formado por la ecuación de *r* o de *s*; además las rectas son paralelas, luego una está contenida en otra, es decir, son coincidentes.

d2) Sean

$$r:\frac{x_1-p_1}{a_1}=\frac{x_2-p_2}{a_2}=\frac{x_3-p_3}{a_3}$$

es decir, $F = P+U$ con $P(p_1,p_2,p_3)$ y $U = [\boldsymbol{u}]$, con $\boldsymbol{u} = a_1\boldsymbol{e}_1+a_2\boldsymbol{e}_2+a_3\boldsymbol{e}_3$

$$s:\frac{x_1-q_1}{b_1}=\frac{x_2-q_2}{b_2}=\frac{x_3-q_3}{b_3}$$

es decir, $G = Q+V$ con $Q(q_1,q_2,q_3)$ y $V = [\boldsymbol{v}]$, con $\boldsymbol{v} = b_1\boldsymbol{e}_1+b_2\boldsymbol{e}_2+b_3\boldsymbol{e}_3$. Tendremos según sean los vectores directores de ambas

d21) Si $\{\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\}$ es l.d., entonces $U = V$ con lo que tendremos :

Para $\overrightarrow{PQ}\in U$ ambas rectas coinciden, es decir, $F = G$ pues

$$X\in F \;\Leftrightarrow\; \overrightarrow{PX}\in U \;\Leftrightarrow\; \overrightarrow{QX} = \overrightarrow{QP}+\overrightarrow{PX}\in U = V \;\Leftrightarrow\; X\in G$$

Para $\overrightarrow{PQ}\notin U$, F y G son paralelas y sin punto común, pues si

$$X\in F\cap G \;\Leftrightarrow\; \overrightarrow{PX}\in U \;\wedge\; \overrightarrow{QX}\in V = U \;\Leftrightarrow\; \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PX}+\overrightarrow{XQ}\in U$$

lo que va contra lo supuesto.

d22) Si $\{\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\}$ es l.i., lo que equivale a que $U \neq V$, entonces

d22a) si es $\{\overrightarrow{PQ},\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\}$ l.d. las rectas se cortan en un punto; en efecto, por hipótesis

$$\overrightarrow{PQ} = \lambda_1\boldsymbol{u}+\lambda_2\boldsymbol{v}$$

y si M es el punto de F dado por

$$M = P+\lambda_1\boldsymbol{u}$$

tendremos

$$\overrightarrow{PM} = \lambda_1\boldsymbol{u} \;\Rightarrow\; \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PM}+\lambda_2\boldsymbol{v} \Rightarrow\; \overrightarrow{PQ}-\overrightarrow{PM} = \lambda_2\boldsymbol{v} \;\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\; \overrightarrow{MQ} = \overrightarrow{MP}+\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PQ}-\overrightarrow{PM} = \lambda_2\boldsymbol{v} \Rightarrow\; M\in G$$

d22b) Para $\{\overrightarrow{PQ},\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\}$ l.i., entonces las rectas no tienen punto común ya que si

$$M\in F\cap G \;\Leftrightarrow\; M\in F \wedge M\in G \;\Leftrightarrow\; \overrightarrow{PM} = \lambda_1\boldsymbol{u} \wedge \overrightarrow{QM} = \lambda_2\boldsymbol{v} \;\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\; \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PM}+\overrightarrow{MQ} = \lambda_1\boldsymbol{u}+(-\lambda_2)\boldsymbol{v}$$

lo cual va contra lo supuesto; por lo tanto las rectas se cruzan.

Ejercicios

VIII.9.- Hallar la ecuación del plano que pasa por los puntos $P(-2,1,1)$, $Q(0,1,1)$ y es paralelo a la recta

$$r:\; \begin{aligned} 2x-y+z-2 &= 0\\ x+3y-z+3 &= 0\end{aligned}$$

VIII.10.- Ecuación de la recta que pasando por el punto $A(1,7,6)$ es paralela

a) a la recta BC, con $B(2,4,1)$ y $C(1,0,3)$,

b) a la recta $\dfrac{x-1}{3} = \dfrac{y-5}{11} = \dfrac{z+2}{-1}$.

VIII.11.- Hallar la ecuación del plano que pasando por el punto $A(3,1,7)$ es paralelo a

a) al plano $x-z = 0$,

b) a las rectas $\dfrac{x+1}{\alpha_1} = \dfrac{y-3}{4} = \dfrac{z-7}{\alpha_2}$ $\qquad$ $\dfrac{x+5}{\alpha_3} = \dfrac{y+7}{2} = \dfrac{z-7}{\alpha_4}$ $\qquad$ para $\alpha_1 =$, $\alpha_2 =$, $\alpha_3 =$, $\alpha_4 =$.

VIII.12.- Ecuación del plano que pasando por $A(1,7,-3)$ es paralelo a las rectas

$$r:\ \begin{aligned} x-2y+z &= 1\\ x+y+z &= 2 \end{aligned} \qquad s:\ \begin{aligned} y-z &= 0\\ y+z &= 5 \end{aligned}$$

VIII.13.- Hallar las intersecciones de los pares de planos siguientes:

a) $\begin{aligned} x+y+z &= 2\\ 2x-y-z &= 1 \end{aligned}$ b) $\begin{aligned} 2x-y-z &= 4\\ 4x-2y-2z &= 8 \end{aligned}$ c) $\begin{aligned} x-y-z &= 1\\ 3x-3y-3z &= 1 \end{aligned}$

VIII.14.- Ecuación del plano que pasando por la recta de intersección de los dos planos $2x+y = 3$ $x-y+z = 1$ es paralelo a la recta

$$x-1 = \frac{y+2}{2} = -\frac{z-3}{3}$$

VIII.15.- Entre las rectas del espacio afín que pasan por $(-1,1,3)$ y cortan a la recta

$$r:\ \begin{aligned} 4x-y+z &= 13\\ 2x-y-z &= 1 \end{aligned}$$

determinar una que pase por $Q(-4,3,2)$ y hallar sus ecuaciones cartesianas. Lo mismo en el caso $Q(1,2,-3)$

VIII.16.- Estudiar la intersección de las ternas de planos

a) $\begin{aligned} x+y &= 11\\ y-z &= 8\\ x+z &= 3 \end{aligned}$ b) $\begin{aligned} \alpha_1 x+2y+5z &= 4\\ \alpha_2 x-y+3z &= 3\\ \alpha_3 x+y+\alpha_4 z &= 11 \end{aligned}$

para $\alpha_1 =$, $\alpha_2 =$, $\alpha_3 =$, $\alpha_4 =$.

VIII.17.- Estudiar las posiciones relativas de los pares de hiperplanos

1) $\begin{aligned} \alpha_1 x_1+x_3-2x_4 &= 0\\ 3x_1-2x_2+3x_3 &= 1 \end{aligned}$ 2) $\begin{aligned} 2x_1-x_3+2x_4 &= -3\\ \alpha_2 x_1-2x_2+2x_3+2x_4 &= 6 \end{aligned}$

3) $\begin{aligned} x_1+x_3-2x_4 &= 0\\ \alpha_3 x_1-2x_2+3x_3 &= 1 \end{aligned}$ 4) $\begin{aligned} \alpha_4 x_1-x_3+2x_4 &= -3\\ 5x_1-2x_2+2x_3+2x_4 &= -2 \end{aligned}$

para $\alpha_1 =$, $\alpha_2 =$, $\alpha_3 =$, $\alpha_4 =$, hallando punto y vector director de la variedad lineal intersección, cuando se corten.

VIII.18.- Hallar la condición para que cuatro planos tengan un solo punto común. Aplicarlo en los casos siguientes:

a) $\begin{aligned} x-y &= 0\\ y-z &= 0\\ x-z &= 0\\ x+y+z &= 1 \end{aligned}$ b) $\begin{aligned} ax+y-z &= 1\\ x-ay-z &= 1\\ x-y+az &= 1\\ ax+ay+az &= 3 \end{aligned}$

VIII.19.- Ecuación del plano que pasando por la recta $\frac{x-2}{1} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z}{1}$ forma un triedro con

los planos $y+z = 0$, $2x-y+z = 3$.

VIII.20.- Hallar la intersección de la recta $\frac{x-1}{2} = \frac{y+3}{3} = \frac{z-5}{0}$ con el plano $x+y+z = 0$.

VIII.21.- Demostrar que las rectas

$$r: \frac{x-3}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-1}{1} \qquad s = \{(1,-1,-1)+\lambda(0,-1,1) \;\; \lambda\in\mathbf{R}\}$$

$$t = \{(-1,0,-4)+\lambda(1,-1,2) \;\; \lambda\in\mathbf{R}\} \qquad m: \; x-2y = 5 \;\; , \;\; z = 0$$

tienen un punto común y hallarlo.

VIII.22.- Dada la recta r de ecuaciones $3x-y+5z = 6$, $x+y+z = 2$, hallar la recta que pasando por $A(2,1,0)$ es

a) Paralela a r.

b) Corta a r.

VIII.23.- Sea la recta r determinada por los puntos (2,1,0) y (3,2,2) y la recta s que pasa por (1,0,a) y tiene por vector director el (1,1,1). Hallar a para que r y s se corten y en este caso hallar la ecuación del plano que determinan.

VIII.24.- Averiguar si son coplanarias las rectas

$$\frac{x+1}{2} = \frac{y+2}{3} = \frac{z-2}{1} \qquad \text{y} \qquad \left| \begin{array}{l} x+y+z = 1 \\ 2x-y-z = 2 \end{array} \right.$$

VIII.25.- Estudiar la posición relativa de los siguientes pares de rectas

a) $\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{3} = \frac{z-2}{5} \qquad x+3 = \frac{y-4}{2} = \frac{z+8}{3}$

b) $\frac{x+5}{\alpha_1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z}{\alpha_2} \qquad \frac{x+3}{\alpha_3} = \frac{y-4}{2} = \frac{z+8}{\alpha_4}$

para $\alpha_1 =$, $\alpha_2 =$, $\alpha_3 =$, $\alpha_4 =$.

VIII.26.- Demostrar que las rectas r : $(4,1,1)+[(1,0,-2)]$ y s : $(-1,1,1)+[(2,-2,3)]$ no se cortan y hallar el plano que pasa por r y es paralelo a s.

VIII.27.- Discutir,según los valores de $\lambda\in\mathbf{R}$, la posición relativa de las rectas

$$r: \; \lambda x+y+z = 1 \qquad x+\lambda y+z = 1 \qquad\qquad s: \; x+y+\lambda z = 1 \qquad x+y+z = \lambda$$

VIII.28.- Estudiar la posición relativa de las ternas de planos siguientes según los valores de a

a) $\begin{array}{l} x+5y+z = a \\ x+ay+z = 2a+1 \\ x+5y+z = 2-a \end{array}$ b) $\begin{array}{l} x+ay+az = 1 \\ ax+y+az = a \\ ax+ay+z = 1 \end{array}$

VIII.29.- Hallar a y b para que los planos

$$\begin{array}{l} \alpha: \ ax+by+z = 1 \\ \beta: \ x+aby+z = b \\ \pi: \ x+by+az = 1 \end{array}$$

tengan una recta en común.

Estudiaremos en lo que sigue las propiedades geométricas de las variedades lineales en las que intervienen la distancia, ángulos y perpendicularidad. Para éllo es necesario suponer que el espacio afín tiene un espacio vectorial asociado real y euclidiano, es decir, en el que hay definido un producto escalar.

Definimos como ***espacio afín euclídeo*** de dimensión n, un espacio afín con un espacio vectorial asociado euclidiano de dimensión n, es decir, un espacio vectorial real en el que se ha definido un producto escalar. Lo denotaremos por E_n y en el vamos a resolver los problemas geométricos de ángulos, distancias y perpendicularidad entre variedades. Supondremos E_n con un sistema de referencia cartesiano $(O;\boldsymbol{e}_1,..,\boldsymbol{e}_n)$, siendo $(\boldsymbol{e}_1,..,\boldsymbol{e}_n)$ una base ortonormal, lo que según el teorema de Gram-Schmidt es posible hacerlo, con la ventaja de que respecto de élla el producto escalar de dos vectores tiene una expresión sencilla.

VIII.6.- PERPENDICULARIDAD

Dada la variedad lineal de E_n

$$F = P+U$$

cualquier variedad que tenga como subespacio director el ortogonal a U

$$F^{\perp} = Q+U^{\perp}$$

se denomina ***variedad perpendicular*** a F que pasa por Q. Según las propiedades de los subespacios ortogonales se verifica

$$\dim(F)+\dim(F^{\perp}) = n$$

Ejemplo VIII.6.1

La recta $r: \dfrac{x-4}{2} = \dfrac{y+5}{3} = \dfrac{z-0}{-1}$ tiene por subespacio director $U = [(2,3,-1)]$. Su subespacio ortogonal será

$$(x_1,x_2,x_3,) \perp (2,3,-1) \ \Rightarrow \ 2x_1+3x_2-x_3 = 0 \ \Rightarrow \ U^{\perp} = [(1,0,2),(0,1,3)]$$

con lo que una variedad perpendicular a r será cualquier plano que tenga como subespacio director $U^{\perp}$; por ejemplo

$$\begin{vmatrix} x & 1 & 0 \\ y & 0 & 1 \\ z & 2 & 3 \end{vmatrix} = 0 \;\Rightarrow\; 2x+3y-z = 0$$

Obsérvese que los coeficientes de la ecuación de este plano perpendicular a la recta dada son iguales a las componentes del vector director de la recta.

Generalizando el resultado obtenido en este ejemplo se verifica que para una variedad lineal de dimensión $n-m$, de ecuaciones cartesianas

$$\begin{gathered} A_{11}x_1+\ldots+A_{1n}x_n = A_{1n+1} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ A_{m1}x_1+\ldots+A_{mn}x_n = A_{mn+1} \end{gathered}$$

de subespacio director U, su subespacio ortogonal es

$$U^{\perp} = [A_{11}\boldsymbol{e}_1+\ldots+A_{1n}\boldsymbol{e}_n,\ldots,\ A_{m1}\boldsymbol{e}_1+\ldots+A_{mn}\boldsymbol{e}_n,]$$

En efecto, para cualquier vector director $\boldsymbol{u} = u_1\boldsymbol{e}_1+\ldots+u_n\boldsymbol{e}_n$ se verifica que

$$\begin{gathered} A_{11}u_1+\ldots+A_{1n}u_n = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ A_{m1}u_{11}+\ldots+A_{mn}u_n = 0 \end{gathered}$$

con lo que los vectores $A_{11}\boldsymbol{e}_1+\ldots+A_{1n}\boldsymbol{e}_n,\ldots,A_{m1}\boldsymbol{e}_1+\ldots+A_{mn}\boldsymbol{e}_n$ son ortogonales a $\boldsymbol{u}$ y como son l.i. por ser m el rango de la matriz $\mathbf{A} = (A_{ij})$, forman una base de $U^{\perp}$, cuya dimensión es m. Cada uno de estos vectores, cuyas componentes son los coeficientes de una de las ecuaciones cartesianas de la variedad, se denomina ***vector asociado*** a la variedad.

En particular, para $n = 3$, un plano α determinado por un punto $P(p_1,p_2,p_3)$ y un subespacio director $U = [(u_1,u_2,u_3),(v_1,v_2,v_3)]$ tiene de ecuación cartesiana

$$\begin{vmatrix} x_1-p_1 & u_1 & v_1 \\ x_2-p_2 & u_2 & v_2 \\ x_3-p_3 & u_3 & v_3 \end{vmatrix} = 0$$

y desarrollando por los elementos de la primera columna da lugar a

$$\begin{vmatrix} u_2 & v_2 \\ u_3 & v_3 \end{vmatrix}(x_1-p_1) - \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_3 & v_3 \end{vmatrix}(x_2-p_2) + \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{vmatrix}(x_3-p_3) = 0$$

o bien

$$\begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix} x_1 - \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix} x_2 + \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} x_3 = A_4$$

es decir

$$A_1x_1+A_2x_2+A_3x_3 = A_4$$

siendo los coeficientes de esta ecuación

$$A_1 = \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix} \qquad A_2 = -\begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix} \qquad A_3 = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix}$$

las componentes del vector asociado a α.

Ejemplo VIII.6.2

Dado el plano α: $x+3y-4z = 1$, el vector $\boldsymbol{v} = (1,3,-4)$ es un vector asociado al plano y por ello, ortogonal a los vectores directores; en efecto, su subespacio director es

$$x+3y-4z = 0 \;\Rightarrow\; x = -3y+4z \;\Rightarrow\; U = [(-3,1,0),(4,0,1)]$$

que es ortogonal a $\boldsymbol{v}$ ya que

$$<(1,3,-4),(-3,1,0)> = 1\cdot(-3)+3\cdot1+(-4)\cdot0 = 0$$

$$<(1,3,-4),(\ 4,0,1)> = 1\cdot4\ +3\cdot0+(-4)\cdot1 = 0$$

La intersección de cualquier variedad lineal $F = P+U$ con una de sus variedades perpendiculares $F^\perp = Q+U^\perp$ siempre es un punto, ya que si las ecuaciones cartesianas de F son

$$\begin{gathered} A_{11}x_1+\ldots+A_{1n}x_n = A_{1n+1} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ A_{m1}x_1+\ldots+A_{mn}x_n = A_{mn+1} \end{gathered}$$

y las de $F^\perp$ son

$$\begin{gathered} B_{11}x_1+\ldots+B_{1n}x_n = B_{1n+1} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ B_{n-m1}x_1+\ldots+B_{n-mn}x_n = B_{n-mn+1} \end{gathered}$$

la matriz del sistema conjunto que forman sus ecuaciones tiene rango n porque sus primeras m filas son las componentes de una base del subespacio $U^\perp$, las otras $n-m$ filas son las componentes de una base del subespacio $(U^\perp)^\perp = U$ y es directa la suma $U\oplus U^\perp$.

La perpendicularidad de dos variedades lineales

$$F = P+U \qquad\qquad G = Q+V$$

no podemos establecerla a través de la ortogonalidad de sus subespacios directores pues, por las propiedades ya vistas, si U y V son ortogonales entonces $\dim(U)+\dim(V) \le n$, con lo cual, por ejemplo en E_3, dos planos no podrían ser perpendiculares. Por ello diremos que F y G son ***variedades lineales perpendiculares***, lo que representaremos por $F \perp G$, si y sólo si se verifica

$$U \perp V \quad \text{si } \dim(U)+\dim(V) \le n \qquad , \qquad U^{\perp} \perp V^{\perp} \quad \text{si } \dim(U)+\dim(V) > n$$

Ejemplo VIII.6.3

En un espacio afín euclídeo de dimensión $n = 4$, las rectas

$$r: \frac{x_1-2}{4} = \frac{x_2-5}{3} = \frac{x_3-2}{4} = \frac{x_4+1}{1} \qquad\qquad s: \frac{x_1}{4} = \frac{x_2}{1} = \frac{x_3}{-5} = \frac{x_4}{1}$$

son perpendiculares ya que

$$U = [(4,3,4,1)] \, , \, V = [(4,1,-5,1)] \;\Rightarrow\; U \perp V$$

pues

$$\langle (4,3,4,1),(4,1,-5,1) \rangle = 16+3-20+1 = 0$$

El plano α de dimensión 2 y el hiperplano β de dimensión 3

$$\alpha: \begin{array}{l} x_1 - 3x_2+2x_3 = 1 \\ 2x_1 - 3x_3+5x_4 = -1 \end{array} \qquad\qquad \beta: \; 3x_1-x_2-3x_3+2x_4 = 5$$

tienen por subespacios directores

$$\alpha: \left.\begin{array}{l} x_1 - 3x_2+2x_3 = 0 \\ 2x_1 - 3x_3+5x_4 = 0 \end{array}\right| \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 2x_1 = 3x_3-5x_4 \\ 6x_2 = 7x_3-5x_4 \end{array}\right| \Rightarrow \; U = [(9,7,6,0),(-15,-5,0,6)]$$

$$\beta: \; 3x_1-x_2-3x_3+2x_4 = 0 \;\Rightarrow\; x_2 = 3x_1-3x_3+2x_4 = 5 \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \; V = [(1,3,0,0),(0,-3,1,0),(0,2,0,1)]$$

Como $\dim(U)+\dim(V) = 2+3 > 4$, para verificar si son o no perpendiculares, según la definición, tenemos que calcular los subespacios ortogonales a éstos,

$$U^{\perp}: \; (u_1,u_2,u_3,u_4) \perp U \;\Leftrightarrow\; \left.\begin{array}{ll} (u_1,u_2,u_3,u_4) \perp (9,7,6,0) & \Rightarrow \; 9u_1+7u_2+6u_3 = 0 \\ (u_1,u_2,u_3,u_4) \perp (-15,-5,0,6) & \Rightarrow \; -15u_1-5u_2+6u_4 = 0 \end{array}\right| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} 6u_3 = -9u_1-7u_2 \\ 6u_4 = 15u_1+5u_2 \end{array}\right| \Rightarrow \; U^{\perp} = [(6,0,-9,15),(0,6,-7,5)]$$

y para el hiperplano β, de acuerdo con la definición de vector asociado,

$$V^{\perp} = [(3,-1,-3,2)]$$

Como $<(6,0,-9,15),(3,-1,-3,2)> = 18+27+30 = 75$ tenemos que $U^{\perp}$ y $V^{\perp}$ no son ortogonales, luego α y β no son perpendiculares.

Veamos ahora condiciones más simples para estudiar la perpendicularidad en E_3 que las que proporciona la mera definición.

Dadas dos rectas mediante sus ecuaciones cartesianas

$$r: \frac{x_1-p_1}{a_1} = \frac{x_2-p_2}{a_2} = \frac{x_3-p_3}{a_3} \qquad s: \frac{x_1-q_1}{b_1} = \frac{x_2-q_2}{b_2} = \frac{x_3-q_3}{b_3}$$

la perpendicularidad entre ambas viene dada por la ortogonalidad de sus vectores directores,

$$r \perp s \text{ equivale a } \quad a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3 = 0$$

Para un plano

$$\alpha : A_1x_1+A_2x_2+A_3x_3+A_4 = 0$$

y una recta

$$r: \frac{x_1-p_1}{a_1} = \frac{x_2-p_2}{a_2} = \frac{x_3-p_3}{a_3}$$

la condición de perpendicularidad es que el vector director director de la recta sea ortogonal al subespacio director del plano U lo que, de acuerdo con la definición de vector asociado al plano, equivale a que (a_1,a_2,a_3) pertenezca la subespacio $U^{\perp} = [(A_1,A_2,A_3)]$, es decir,

$$r \perp \alpha \iff \frac{a_1}{A_1} = \frac{a_2}{A_2} = \frac{a_3}{A_3}$$

Para dos planos

$$\alpha : A_1x_1+A_2x_2+A_3x_3+A_4 = 0$$

$$\beta : B_1x_1+B_2x_2+B_3x_3+B_4 = 0$$

la perpendicularidad es, según ya vimos al tratar el problema general de perpendicularidad entre variedades, la ortogonalidad entre los subespacios ortogonales a ambos planos, es decir, la ortogonalidad entre sus vectores asociados

$$\alpha \perp \beta \text{ equivale a } \quad A_1B_1+A_2B_2+A_3B_3 = 0$$

Ejercicios

VIII.30.- Averiguar si son perpendiculares las variedades lineales de ecuaciones

$$x_1-3x_2+4x_3-x_5 = -1 \qquad x_1-3x_2-x_4 = 2$$

y

$$x_1-2x_2+x_3+x_4-x_5 = -1$$

VIII.31.- Hallar la recta que pasando por el punto (3,2,–1,–1) es perpendicular al plano $2x_1+3x_2-5x_4 = -3$.

VIII.32.- Buscar el plano que pasa por el punto $A(2,3,-7)$ y es perpendicular a la recta de ecuaciones $x+3y-10z = 4$, $x-y = 2$.

VIII.33.- Buscar el plano que pasa por la recta $a: \dfrac{x+3}{1} = \dfrac{y-2}{2} = \dfrac{z-1}{3}$ y es perpendicular al plano que pasa por los puntos $A(1,1,1)$, $B(1,0,1)$ y $C(3,-1,-1)$.

VIII.34.- Dada la recta $a: \dfrac{x+3}{1} = \dfrac{y-2}{2} = \dfrac{z-1}{3}$ hallar las ecuaciones de otras dos rectas b y c, que pasan por el punto (–3,2,1), sean perpendiculares entre sí y a la recta a y tales que b esté en el plano que pasa por la recta a y por el punto (1,0,0).

VIII.7.- DISTANCIAS

Dados dos puntos P y Q de E_n llamaremos ***distancia*** entre P y Q, que representaremos por $d(P,Q)$ a la norma del vector $\overrightarrow{PQ}$

$$d(P,Q) = \| \overrightarrow{PQ} \|$$

De las propiedades de la norma se deducen las propiedades de la distancia de la Tabla VIII.7.1

TABLA VIII.7.1

Propiedades de la distancia entre dos puntos

1) $d(P,Q) \geq 0$

2) $d(P,Q) = 0$ equivale a $P = Q$

3) $d(P,Q) = d(Q,P)$

4) $d(P,R) \leq d(P,Q)+d(Q,R)$ (propiedad triangular)

5) $\overrightarrow{PQ} \perp \overrightarrow{QR}$ implica $d(P,R)^2 = d(P,Q)^2+d(Q,R)^2$

6) $\overrightarrow{PQ} \perp \overrightarrow{QR}$ implica $\left| \begin{array}{l} d(P,Q) = d(P,R)\ \left|\cos \angle(\overrightarrow{PQ},\overrightarrow{PR})\right| \\ d(P,Q) = d(P,R)\ \text{sen}\ \angle(\overrightarrow{QR},\overrightarrow{PR}) \end{array} \right.$

Demostraciones:

1) Por definición de distancia y de norma, $d(P,Q) = \| \overrightarrow{PQ} \| \geq 0$

2) Según las propiedades de la norma: $d(P,Q) = \| \overrightarrow{PQ} \| = 0 \ \Leftrightarrow \ \overrightarrow{PQ} = 0 \ \Leftrightarrow \ P = Q$

3) Análogamente, $d(P,Q) = \| \overrightarrow{PQ} \| = \|(-1)\overrightarrow{QP} \| = |-1| \, \| \overrightarrow{QP} \| = \| \overrightarrow{QP} \| = d(Q,P)$

4) $d(P,R) = \| \overrightarrow{PR} \| = \| \overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{QR} \| \leq \| \overrightarrow{PQ} \|+\| \overrightarrow{QR} \| = d(P,Q)+d(Q,R)$

5) Según propiedades de la ortogonalidad tendremos

$$d(P,R)^2 = \| \overrightarrow{PR} \|^2 = \| \overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{QR} \|^2 = \| \overrightarrow{PQ} \|^2+\| \overrightarrow{QR} \|^2 = d(P,Q)^2+d(Q,R)^2$$

Esta propiedad recibe el nombre, bien conocido, de teorema de Pitágoras.

6) De las propiedades del ángulo no orientado se deduce

$$d(P,Q)^2 = \| \overrightarrow{PQ} \|^2 = \| \text{pr}_{\overrightarrow{PQ}}(\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{QR}) \|^2 = \| \overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{QR} \|^2 \cos^2\angle(\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{QR},\overrightarrow{PQ}) =$$
$$= \| \overrightarrow{PR} \|^2 \cos^2\angle(\overrightarrow{PQ},\overrightarrow{PR})$$

Además, como

$$\text{sen}^2\angle(\overrightarrow{QR},\overrightarrow{PR}) = 1-\cos^2\angle(\overrightarrow{QR},\overrightarrow{PR}) = 1-\frac{<\overrightarrow{QR},\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{QR}>^2}{\| \overrightarrow{QR} \|^2 \| \overrightarrow{PR} \|^2} = 1-\frac{\| \overrightarrow{QR} \|^2}{\| \overrightarrow{PR} \|^2} =$$
$$= 1-\frac{\| \overrightarrow{QR} \|^2}{\| \overrightarrow{PQ} \|^2+\| \overrightarrow{QR} \|^2} = \frac{\| \overrightarrow{PQ} \|^2}{\| \overrightarrow{PR} \|^2}$$

$$\cos^2\angle(\overrightarrow{PQ},\overrightarrow{PR}) = \frac{<\overrightarrow{PQ},\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{PR}>^2}{\| \overrightarrow{PQ} \|^2 \| \overrightarrow{PR} \|^2} = \frac{\| \overrightarrow{PQ} \|^2}{\| \overrightarrow{PR} \|^2}$$

se deduce que

$$\text{sen}^2\angle(\overrightarrow{QR},\overrightarrow{PR}) = \cos^2\angle(\overrightarrow{PQ},\overrightarrow{PR}) \ \Rightarrow \ \text{sen}\ \angle(\overrightarrow{QR},\overrightarrow{PR}) = \left|\cos \angle(\overrightarrow{PQ},\overrightarrow{PR})\right|$$

luego, según el resultado anterior, tendremos $d(P,Q) = d(P,R)\ \text{sen}\ \angle(\overrightarrow{QR},\overrightarrow{PR})$

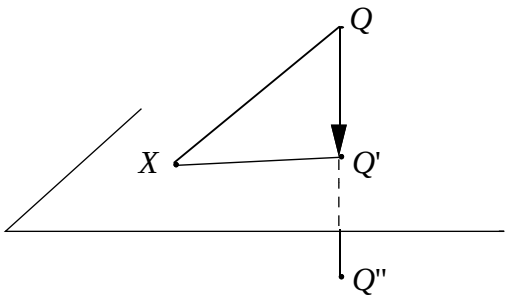
Si referimos los puntos al sistema de referencia cartesiano $(O;\boldsymbol{e}_1,...,\boldsymbol{e}_n)$, supongamos que sus coordenadas sean $P(p_1,...,p_n)$ y $Q(q_1,...,q_n)$, teniendo en cuenta la expresión del producto escalar de dos vectores cuando están referidos a una base ortonormal, será

$$d(P,Q) = \| \overrightarrow{PQ} \| = \sqrt{<\overrightarrow{PQ},\overrightarrow{PQ}>} = \sqrt{(q_1-p_1)^2+(q_2-p_2)^2+...+(q_n-p_n)^2}$$

Para definir la distancia entre un punto y una variedad, definiremos previamente el concepto de ***proyección de un punto sobre una variedad***. Sean una variedad lineal $F = P+U$ y un punto Q; definimos la proyección Q' de Q sobre F como el punto intersección de F y su variedad perpendicular $F^{\perp}$ que pasa por Q. Denominamos ***punto simétrico*** de Q respecto de F al punto definido por

$$Q'' = Q+2\overrightarrow{QQ'}$$

siendo Q' la proyección de Q sobre F. En la figura se observa la justificación intuitiva de estas definiciones.



Ejercicios

VIII.35.- Dadas las rectas

$$r: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-a}{-1} \qquad\qquad s: \frac{x+1}{3} = \frac{y-2}{1} = \frac{z}{1}$$

a) Hallar a para que se corten y en este caso, hallar la ecuación del plano que determinan y la proyección sobre él de la recta

$$t: \frac{x}{\alpha_2} = \frac{y}{\alpha_3} = \frac{z+\alpha_1}{\alpha_4}$$

para $\alpha_1 =$, $\alpha_2 =$, $\alpha_3 =$, $\alpha_4 =$.

b) Hallar la intersección de s y t con su perpendicular común.

VIII.36.- Un rayo de luz parte del punto (1,0,1). En qué punto del plano $x+2y+3z-1 = 0$ debe incidir para que el rayo reflejado pase por (2,1,1).

Se define como distancia entre un punto Q y una variedad $F = P+U$, que expresaremos por $d(Q,F)$, a la menor de las distancias de Q a los puntos de la variedad. Esta distancia coincide con la distancia entre Q y su proyección Q' sobre F. En efecto, la distancia de Q a Q'es menor que la distancia de Q a cualquier otro punto X de la variedad pues $\overrightarrow{QQ'} \perp \overrightarrow{Q'X}$ y, de acuerdo con las propiedades de la distancia,

$$d(Q,X)^2 = d(Q,Q')^2+d(Q',X)^2 \;\Rightarrow\; d(Q,Q')^2 = d(Q,X)^2-d(Q',X)^2 \;\Rightarrow\; d(Q,Q') < d(Q,X)$$

Se define la distancia entre dos variedades $F = P+U$ y $G = R+V$, que expresaremos por $d(F,G)$, como la menor de las distancias entre sus puntos, es decir

$$d(F,G) = \min_{X\in F\,,\,Y\in G} d(X,Y)$$

Si F y G tienen puntos comunes, su distancia es 0. Si F y G son paralelas es $U \subseteq V$ y entonces la distancia es igual a la distancia entre cualquier punto de F y G; en efecto, si Q es otro punto de F y P' y Q' son las proyecciones de P y Q sobre la variedad G, tendremos que

$$\overrightarrow{PQ}\in U\subseteq V \;\Rightarrow\; \overrightarrow{PQ}\in V \;\Rightarrow\; \begin{cases} \overrightarrow{PP'}\perp\overrightarrow{PQ} & \Rightarrow\; d^2(Q,P') = d^2(P,Q)+d^2(P,P') \\ \overrightarrow{QQ'}\perp\overrightarrow{PQ} & \Rightarrow\; d^2(P,Q') = d^2(P,Q)+d^2(Q,Q') \\ \overrightarrow{PP'}\perp\overrightarrow{P'Q'} & \Rightarrow\; d^2(P,Q') = d^2(P,P')+d^2(P',Q') \\ \overrightarrow{QQ'}\perp\overrightarrow{P'Q'} & \Rightarrow\; d^2(Q,P') = d^2(Q,Q')+d^2(Q',P') \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} d^2(P,P') = -d^2(P,Q)+d^2(Q,Q')+d^2(P',Q') \\ d^2(P,Q) = d^2(P',Q')-d^2(Q,Q')+d^2(P,P') \end{cases} \Rightarrow\; d^2(P,P') = d^2(Q,Q')$$

Ejemplo VIII.7.1

Sean en E_3 el punto $Q(3,1,4)$ y el plano $\alpha: x+y-z = 2$. Para hallar la distancia de Q a α hemos de calcular previamente el punto Q' proyección de Q sobre α. Como la variedad perpendicular a α que pasa por Q es la recta r de ecuaciones

$$t:\ \frac{x-3}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-4}{-1}$$

la intersección de r y α da el punto $Q'(11/3,5/3,10/3)$, luego

$$d(Q,\alpha) = d(Q,Q') = \sqrt{(3-11/3)^2+(1-5/3)^2+(4-10/3)^2} = 2\sqrt{3}/3$$

Ejercicios

VIII.36.- Hallar la distancia del punto $A(1,4,-1,-3)$ al plano de ecuaciones $2x_1-x_2+x_4 = 1$

y $x_1-x_2-x_3+x_4 = -2$.

VIII.37.- Hallar la distancia del plano α de ecuaciones $2x_1-3x_2+x_4 = 6$, $x_2-3x_3+x_4 = -1$ a

a) el plano paralelo a α que pasa por el punto $A(-1,-1,1,1)$

b) el plano que pasa por los puntos $B(1,2,0,0)$, $C(-1,-2,0,1)$ y $D(0,-1,0,-1)$.

VIII.38.- Hallar la mínima distancia entre las rectas

$$r: \begin{cases} \alpha_1 x+3y+z = 0 \\ x-y+2z = 0 \end{cases} \qquad s: \frac{x-2}{\alpha_2} = \frac{y-3}{\alpha_3} = \frac{z}{\alpha_4}$$

para $\alpha_1 =$, $\alpha_2 =$, $\alpha_3 =$, $\alpha_4 =$.

VIII.39.- Se consideran

la recta r de ecuaciones : $x = 0$ $y = 0$

la recta r' de ecuaciones : $x = 4z+3$ $y = 3z+4$

Se piden las coordenadas de los puntos $A\in r$; $B\in r'$ que determinan el segmento AB, cuya longitud es la mínima entre las rectas r y r'.

VIII.40.- Hallar la proyección del punto $Q = (7,-3,-4)$ sobre el plano que pasa por los puntos $A(2,0,1)$, $B(3,-1,2)$, $C(2,1,3)$. Hallar también la distancia de Q al plano.

VIII.41.- En E_3, sea $A(1,2,1)$, $\pi : x-y-z-1 = 0$, $\pi' : x-2y+z-1 = 0$ y sea r la recta intersección de π y π'. Se pide determinar las coordenadas del punto simétrico de A respecto al plano π de A' y del simétrico de A respecto a la recta r y las distancias de A r y π.

VIII.8.- PRODUCTO VECTORIAL Y PRODUCTO MIXTO

La determinación de la distancia de un punto a una variedad en E_n está resuelta, aunque, como hemos visto en el ejemplo anterior, de un modo un tanto laborioso. Caso particular, muy interesante por sus aplicaciones físicas y técnicas, son las soluciones de estos problemas geométricos en el espacio euclídeo tridimensional E_3 con espacio vectorial asociado $\mathbf{R}^3$ y con un sistema de referencia cartesiano que denotaremos, siguiendo una notación muy común en física, por $(O;\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k})$. En este espacio los problemas de distancias tienen soluciones particulares más simples y además pueden definirse los ángulos no orientados entre rectas y planos.

En el espacio vectorial $\mathbf{R}^3$ definimos ***producto vectorial*** de dos vectores $\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{i}+x_2\boldsymbol{j}+x_3\boldsymbol{k}$ $\boldsymbol{y} = y_1\boldsymbol{i}+y_2\boldsymbol{j}+y_3\boldsymbol{k}$ como el vector $\boldsymbol{x}\wedge\boldsymbol{y}$ de componentes

$$\boldsymbol{x}\wedge\boldsymbol{y} = (x_2y_3-x_3y_2)\boldsymbol{i}+(x_3y_1-x_1y_3)\boldsymbol{j}+(x_1y_2-x_2y_1)\boldsymbol{k}$$

que son los menores de orden dos de la matriz, con signos + y – alternados,

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{pmatrix}$$

es decir

$$\boldsymbol{x} \wedge \boldsymbol{y} = \begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{vmatrix} \boldsymbol{i} - \begin{vmatrix} x_1 & x_3 \\ y_1 & y_3 \end{vmatrix} \boldsymbol{j} + \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} \boldsymbol{k}$$

Las propiedades de este producto vectorial, que como veremos se deducen de la definición, se enuncian en la Tabla VIII.8.1

TABLA VIII.8.1

Propiedades del producto vectorial en $\mathbf{R^3}$

1) $\boldsymbol{x} \wedge \boldsymbol{y} = -(\boldsymbol{y} \wedge \boldsymbol{x})$

2) $(\alpha \boldsymbol{x}) \wedge \boldsymbol{y} = \alpha(\boldsymbol{x} \wedge \boldsymbol{y}) = \boldsymbol{x} \wedge (\alpha \boldsymbol{y})$

3) $(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) \wedge \boldsymbol{z} = (\boldsymbol{x} \wedge \boldsymbol{z}) + (\boldsymbol{x} \wedge \boldsymbol{z})$

$\boldsymbol{x} \wedge (\boldsymbol{y}+\boldsymbol{z}) = (\boldsymbol{x} \wedge \boldsymbol{y}) + (\boldsymbol{x} \wedge \boldsymbol{z})$

4) $\boldsymbol{x} \wedge \boldsymbol{y} = (0,0,0)$ equivale a $\{\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\}$ l.d.

5) $\boldsymbol{x} \wedge \boldsymbol{y}$ ortogonal a $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{y}$

6) $\boldsymbol{x} \wedge (\boldsymbol{y} \wedge \boldsymbol{z}) = \langle \boldsymbol{x},\boldsymbol{z} \rangle \boldsymbol{y} - \langle \boldsymbol{x},\boldsymbol{y} \rangle \boldsymbol{z}$

7) $\boldsymbol{u} \perp \boldsymbol{x}$ y $\boldsymbol{u} \perp \boldsymbol{y}$ equivalen a $\boldsymbol{u} = \alpha(\boldsymbol{x} \wedge \boldsymbol{y})$

8) $\| \boldsymbol{x} \wedge \boldsymbol{y} \| = \| \boldsymbol{x} \| \, \| \boldsymbol{y} \| \operatorname{sen} \angle(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$

Demostraciones:

1) En efecto

$$\boldsymbol{x} \wedge \boldsymbol{y} = \begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{vmatrix} \boldsymbol{i} - \begin{vmatrix} x_1 & x_3 \\ y_1 & y_3 \end{vmatrix} \boldsymbol{j} + \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} \boldsymbol{k} = -\left(\begin{vmatrix} y_2 & y_3 \\ x_2 & x_3 \end{vmatrix} \boldsymbol{i} - \begin{vmatrix} y_1 & y_3 \\ x_1 & x_3 \end{vmatrix} \boldsymbol{j} + \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ x_1 & x_2 \end{vmatrix} \boldsymbol{k} \right) = -(\boldsymbol{y} \wedge \boldsymbol{x})$$

2) Se demuestra analogamente, utilizando propiedades de los determinantes

$$(\alpha \boldsymbol{x}) \wedge \boldsymbol{y} = \begin{vmatrix} \alpha x_2 & \alpha x_3 \\ y_2 & y_3 \end{vmatrix} \boldsymbol{i} - \begin{vmatrix} \alpha x_1 & \alpha x_3 \\ y_1 & y_3 \end{vmatrix} \boldsymbol{j} + \begin{vmatrix} \alpha x_1 & \alpha x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} \boldsymbol{k} =$$

$$= \alpha\left(\begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{vmatrix}\boldsymbol{i} - \begin{vmatrix} x_1 & x_3 \\ y_1 & y_3 \end{vmatrix}\boldsymbol{j} + \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix}\boldsymbol{k}\right) = \alpha(\boldsymbol{x}\wedge\boldsymbol{y})$$

y de forma análoga para $\boldsymbol{x}\wedge(\alpha\boldsymbol{y})$.

3) $(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})\wedge\boldsymbol{z}$ =

$$= \begin{vmatrix} x_2+y_2 & x_3+y_3 \\ z_2 & z_3 \end{vmatrix}\boldsymbol{i} - \begin{vmatrix} x_1+y_1 & x_3+y_3 \\ z_1 & z_3 \end{vmatrix}\boldsymbol{j} + \begin{vmatrix} x_1+y_1 & x_2+y_2 \\ z_1 & z_2 \end{vmatrix}\boldsymbol{k} =$$

$$= \left(\begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ z_2 & z_3 \end{vmatrix}\boldsymbol{i} - \begin{vmatrix} x_1 & x_3 \\ z_1 & z_3 \end{vmatrix}\boldsymbol{j} + \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ z_1 & z_2 \end{vmatrix}\boldsymbol{k}\right) + \left(\begin{vmatrix} y_2 & y_3 \\ z_2 & z_3 \end{vmatrix}\boldsymbol{i} - \begin{vmatrix} y_1 & y_3 \\ z_1 & z_3 \end{vmatrix}\boldsymbol{j} + \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ z_1 & z_2 \end{vmatrix}\boldsymbol{k}\right) =$$

$$= (\boldsymbol{x}\wedge\boldsymbol{z})+(\boldsymbol{y}\wedge\boldsymbol{z})$$

y análogamente para la otra igualdad.

4) $\boldsymbol{x}\wedge\boldsymbol{y} = 0\boldsymbol{i}+0\boldsymbol{j}+0\boldsymbol{k} \iff \begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{vmatrix} = 0 \wedge \begin{vmatrix} x_1 & x_3 \\ y_1 & y_3 \end{vmatrix} = 0 \wedge \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_3 \end{vmatrix} = 0 \iff$

$$\iff \operatorname{rang}\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_2 \end{pmatrix} < 2 \iff \{\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\} \text{ l.d}$$

5) El producto vectorial es un vector ortogonal a ambos vectores pues

$$<(\boldsymbol{x}\wedge\boldsymbol{y}),\boldsymbol{x}> = \begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{vmatrix}x_1 - \begin{vmatrix} x_1 & x_3 \\ y_1 & y_3 \end{vmatrix}x_2 + \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix}x_3 = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix} = 0 \iff (\boldsymbol{x}\wedge\boldsymbol{y})\perp\boldsymbol{x}$$

y análogamente se demuestra que $(\boldsymbol{x}\wedge\boldsymbol{y})\perp\boldsymbol{y}$

6) Basta desarrollar ambos miembros y comparar resultados.

7) Esta propiedad complementa la 5) en el sentido de que cualquier vector ortogonal a otros dos es proporcional a su producto vectorial; en efecto

$$\boldsymbol{u}\wedge(\boldsymbol{x}\wedge\boldsymbol{y}) = <\boldsymbol{u},\boldsymbol{y}>\boldsymbol{x} - <\boldsymbol{u},\boldsymbol{x}>\boldsymbol{y} = (0,0,0) \iff \{\boldsymbol{u},\boldsymbol{x}\wedge\boldsymbol{y}\} \text{ l.d.}$$

8) Por una parte

$$\|\boldsymbol{x}\wedge\boldsymbol{y}\| = \sqrt{<\boldsymbol{x}\wedge\boldsymbol{y},\boldsymbol{x}\wedge\boldsymbol{y}>} = \sqrt{(x_2y_3-x_3y_2)^2+(x_3y_1-x_1y_3)^2+(x_1y_2-x_2y_1)^2}$$

y por otra

$$\| \boldsymbol{x} \| \| \boldsymbol{y} \| \operatorname{sen} \angle(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \| \boldsymbol{x} \| \| \boldsymbol{y} \| \sqrt{1 - \frac{<\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}>^2}{\| \boldsymbol{x} \|^2 \| \boldsymbol{y} \|^2}} =$$

$$= \sqrt{\| \boldsymbol{x} \|^2 \| \boldsymbol{y} \|^2 - <\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}>^2} = \sqrt{(x_1^2+x_2^2+x_3^2)(y_1^2+y_2^2+y_3^2) - (x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3)^2}$$

y basta con hacer operaciones hasta comprobar que ambos resultados coinciden.

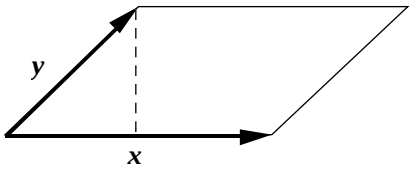
Esta última propiedad justifica que definamos como ***área del paralelogramo*** de aristas $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{y}$ a la norma del producto vectorial

$$\| \boldsymbol{x} \wedge \boldsymbol{y} \|$$

ya que el producto

$$\| \boldsymbol{y} \| \operatorname{sen} \angle (\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$$

es lo que en geometría intuitiva es la "altura" del paralelogramo



Un plano α determinado por un punto $P(p_1,p_2,p_3)$ y un subespacio director $U = [(u_1,u_2,u_3),(v_1,v_2,v_3)]$ tiene de ecuación cartesiana

$$\begin{vmatrix} u_1 & v_1 & x_1-p_1 \\ u_2 & v_2 & x_2-p_2 \\ u_3 & v_3 & x_3-p_3 \end{vmatrix} = 0$$

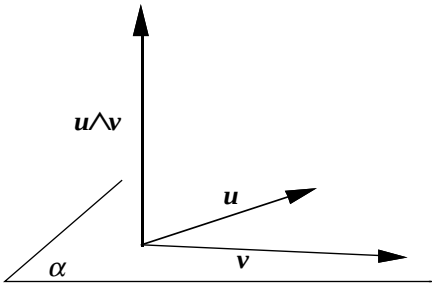
que desarrollando por los elementos de la tercera columna da lugar a

$$A_1x_1+A_2x_2+A_3x_3 = A_4$$

siendo los coeficientes de esta ecuación

$$A_1 = \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix} \qquad A_2 = -\begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix} \qquad A_3 = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix}$$

que son a la vez las componentes de un vector asociado y las componentes del vector producto vectorial de los dos vectores directores del plano y, por ello, ortogonal a ambos y al subespacio director *U*. En geometría intuitiva la figura expresa el resultado.



Ejemplo VIII.8.1

Dado el plano

$$\alpha : \; x+3y-4z = 1$$

el vector $\boldsymbol{v} = (1,3,-4)$ es un vector asociado al plano y por ello, ortogonal a los vectores directores. El producto vectorial de dos vectores directores del plano es

$$(-3,1,0) \wedge (4,0,1) = (1,3,-4)$$

que es un vector igual (en general, proporcional) al vector asociado.

En el espacio vectorial $\mathbf{R}^3$ definimos el ***producto mixto*** de tres vectores $\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{i}+x_2\boldsymbol{j}+x_3\boldsymbol{k}$ $\boldsymbol{y} = y_1\boldsymbol{i}+y_2\boldsymbol{j}+y_3\boldsymbol{k}$ y $\boldsymbol{z} = z_1\boldsymbol{i}+z_2\boldsymbol{j}+z_3\boldsymbol{k}$ como el número real resultado de

$$<\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\wedge\boldsymbol{z}>$$

y que representaremos por $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})$. Teniendo en cuenta la definición de producto vectorial será

$$(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}) = <\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\wedge\boldsymbol{z}> = x_1\begin{vmatrix} y_2 & y_3 \\ z_2 & z_3 \end{vmatrix} - x_2\begin{vmatrix} y_1 & y_3 \\ z_1 & z_3 \end{vmatrix} + x_3\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ z_1 & z_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix}$$

y así las propiedades de los determinantes nos darán las propiedades del producto mixto, que enunciamos en la Tabla VIII.8.2

TABLA VIII.8.2

Propiedades del producto mixto en $\mathbf{R}^3$

1) $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}) = -(\boldsymbol{x},\boldsymbol{z},\boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{z},\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \ldots$

2) $(\lambda\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}) = (\boldsymbol{x},\lambda\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}) = (\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\lambda\boldsymbol{z}) = \lambda(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})$

3) $(\boldsymbol{x}_1+\boldsymbol{x}_2,\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}) = (\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})+(\boldsymbol{x}_2,\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})$

$$(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}_1+\boldsymbol{y}_2,\boldsymbol{z}) = (\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}_1,\boldsymbol{z})+(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}_2,\boldsymbol{z})$$

$$(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}_1+\boldsymbol{z}_2) = (\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}_1)+(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}_2)$$

4) $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}) = 0$ equivale a $\{\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}\}$ l.d.

Demostraciones:

1) Al cambiar en un determinante dos filas, cambia de signo. Por ello de los 6 productos mixtos que pueden definirse con tres vectores, son entre sí iguales u opuestos.

2) De la propiedad de que si los elementos de una fila de un determinante están multiplicados por un escalar, este puede sacarse como factor del determinante.

3) Análogamente a 2), si los elementos de una fila son suma de dos sumandos el determinante puede ser descompuesto en suma de dos determinantes.

4) Por las propiedades anteriores, el producto mixto es una forma trilineal alternada.

Análogamente a la definición de área para un paralelogramo, definimos como ***volumen de un paralelepípedo*** de aristas $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ y $\boldsymbol{z}$ el valor absoluto del producto mixto de los tres vectores

$$|(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})|$$

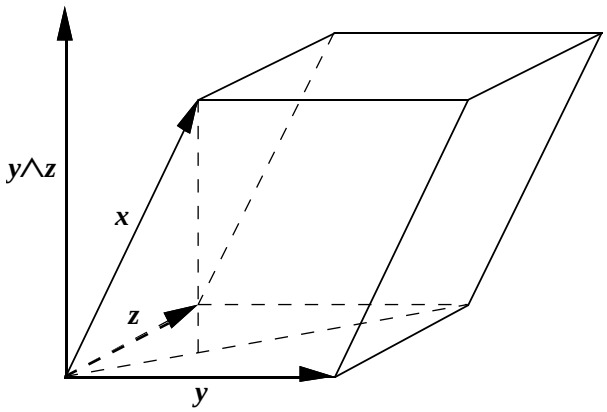
ya que por la definición de producto mixto y por propiedades del producto escalar

$$|(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})| = |<\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\wedge\boldsymbol{z}>| = \| \boldsymbol{x} \| \, \| \boldsymbol{y}\wedge\boldsymbol{z} \| \, |\cos \angle (\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\wedge\boldsymbol{z})|$$

siendo $\| \boldsymbol{y}\wedge\boldsymbol{z} \|$ el área del paralelogramo base y

$$\| \boldsymbol{x} \| \, |\cos \angle (\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\wedge\boldsymbol{z})|$$

lo que en geometría intuitiva es la "altura", al ser $\boldsymbol{y}\wedge\boldsymbol{z}$ un vector ortogonal al subespacio director del plano de la base



El volumen del tetraedro es la sexta parte del volumen del paralelepípedo.

Vamos a hacer uso del producto vectorial y del producto mixto para resolver en E_3, con espacio vectorial asociado $\mathbf{R}^3$, los problemas de distancias de un modo más simple que las soluciones halladas para E_n.

La ***distancia entre dos puntos*** $P(p_1,p_2,p_3)$ y $Q(q_1,q_2,q_3)$ ya fue obtenida para el caso de dimensión n por lo que, en particular

$$d(P,Q) = \sqrt{(q_1-p_1)^2+(q_2-p_2)^2+(q_3-p_3)^2}$$

La ***distancia de un punto*** $P(p_1,p_2,p_3)$ ***a un plano***

$$\alpha : A_1x_1+A_2x_2+A_3x_3+A_4 = 0$$

es la distancia entre P y su proyección $P'(p_1',p_2',p_3')$ sobre α ; por definición de proyección el vector $\overrightarrow{PP'}$ es ortogonal al subespacio director de α, por lo que es proporcional al vector asociado al plano. Sea $\boldsymbol{u}$ el vector asociado normalizado, es decir

$$\boldsymbol{u} = \frac{A_1\boldsymbol{i}+A_2\boldsymbol{j}+A_3\boldsymbol{k}}{\sqrt{A_1^2+A_2^2+A_3^2}}$$

tendremos, aplicando la desigualdad de Schwartz para el caso de vectores l.d.

$$d(P,\alpha) = d(P,P') = \| \overrightarrow{PP'} \| = \| \overrightarrow{PP'} \| \, \| \boldsymbol{u} \| = \left| <\overrightarrow{PP'},\boldsymbol{u}> \right| = \left| \frac{A_1(p_1'-p_1)+A_2(p_2'-p_2)+A_3(p_3'-p_3)}{\sqrt{A_1^2+A_2^2+A_3^2}} \right|$$

y al pertenecer P' al plano será

$$A_1p_1'+A_2p_2'+A_3p_3' = -A_4$$

por lo que tenemos finalmente para la distancia entre el punto y el plano

$$d(P,\alpha) = \left| \frac{A_1p_1+A_2p_2+A_3p_3+A_4}{\sqrt{A_1^2+A_2^2+A_3^2}} \right|$$

Sea un punto $P(p_1,p_2,p_3)$ y una recta r que pase por un punto $Q(q_1,q_2,q_3)$ de vector director $\boldsymbol{a} = (a_1,a_2,a_3)$ y sea $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{a} / \|\boldsymbol{a}\|$ el vector director $\boldsymbol{a}$ normalizado. La ***distancia entre el punto*** P ***y la recta*** r es la distancia entre P y su proyección P' sobre r, es decir

$$d(P,r) = d(P,P')$$

que por ser $\overrightarrow{PP'}$ ortogonal a $\boldsymbol{u}$, según la propiedad 6) de la Tabla VIII.7.1 y la propiedad 8) del producto vectorial, Tabla VIII.8.1, podemos escribir

$$d(P,r) = d(P,P') = \| \overrightarrow{PP'} \| = \| \overrightarrow{PQ} \| \, \| \boldsymbol{u} \| \operatorname{sen} \angle (\overrightarrow{PQ},\overrightarrow{QP'}) = \| \overrightarrow{PQ} \wedge \boldsymbol{u} \| = \frac{\| \overrightarrow{PQ} \wedge \boldsymbol{a} \|}{\| \boldsymbol{a} \|}$$

Si para punto de la recta elegimos otro $M(m_1,m_2,m_3)$, distinto de Q, la distancia sería

$$d(P,r) = \| \overrightarrow{PM} \wedge \boldsymbol{u} \| = \| (\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{QM}) \wedge \boldsymbol{u} \| = \| (\overrightarrow{PQ} \wedge \boldsymbol{u})+(\overrightarrow{QM} \wedge \boldsymbol{u}) \| = \| \overrightarrow{PQ} \wedge \boldsymbol{u} \|$$

ya que al ser Q y M puntos de la recta el los vectores $\overrightarrow{QM}$ y $\boldsymbol{u}$ son proporcionales.

La ***distancia entre dos rectas*** r y s se define como la menor de las distancias entre dos de sus puntos, uno de cada recta; por ello si las rectas se cortan su distancia es cero, si son paralelas la distancia es igual a la distancia de un punto cualquiera de una de ellas a la otra y si se cruzan la distancia es la longitud del segmento de perpendicular común a ambas, al ser la longitud de la perpendicular es menor que la de cualquier oblicua. Calculemos una fórmula de fácil aplicación práctica para el cálculo de esta distancia; sean $P(p_1,p_2,p_3)$ y $\boldsymbol{u} = (u_1,u_2,u_3)$ un punto y un vector director de r, $Q(q_1,q_2,q_3)$ y $\boldsymbol{v} = (v_1,v_2,v_3)$ punto y vector director de s, $X(x_1,x_2,x_3)$ un punto cualquiera de r, $Y(y_1,y_2,y_3)$ un punto cualquiera de s y M y N los puntos de r y s, respectivamente, que determinan el segmento de perpendicular común. Recordando las ecuaciones paramétricas de una recta tendremos

$$r: \begin{cases} x_1 = p_1+\lambda u_1 \\ x_2 = p_2+\lambda u_2 \\ x_3 = p_3+\lambda u_3 \end{cases} \qquad s: \begin{cases} y_1 = q_1+\mu v_1 \\ y_2 = q_2+\mu v_2 \\ y_3 = q_3+\mu v_3 \end{cases}$$

por lo que

$$\overrightarrow{XY} = \overrightarrow{PQ}-(\lambda \boldsymbol{u}-\mu \boldsymbol{v}) \;\Rightarrow\; <\overrightarrow{MN},(\boldsymbol{u} \wedge \boldsymbol{v})> = <\overrightarrow{PQ},(\boldsymbol{u} \wedge \boldsymbol{v})> = (\overrightarrow{PQ},\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}).$$

Al ser $\overrightarrow{MN}$ ortogonal a $\boldsymbol{u}$ y $\boldsymbol{v}$ es proporcional a su producto vectorial por lo que, de acuerdo con la desigualdad de Schwartz y la definición de producto mixto, podemos escribir

$$\| \overrightarrow{MN} \| \cdot \| \boldsymbol{u} \wedge \boldsymbol{v} \| = | <\overrightarrow{MN}, \boldsymbol{u} \wedge \boldsymbol{v}> | = | (\overrightarrow{PQ},\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) | \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \; d(r,s) = d(M,N) = \| \overrightarrow{MN} \| = \frac{| (\overrightarrow{PQ},\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) |}{\| \boldsymbol{u} \wedge \boldsymbol{v} \|}$$

Análogamente al caso de la distancia de un punto a una recta, puede demostrarse que esta resultado no varía al tomar otros puntos u otros vectores directores para definir la recta.

La ***distancia entre dos planos*** α y β se define como la menor de las distancias entre dos de sus puntos, uno de cada plano; por ello si los planos se cortan su distancia es cero, si son paralelos la distancia es igual a la distancia de un punto cualquiera de uno de ellos al otro.

Como aplicación de la fórmula de la distancia entre punto y recta resolveremos ahora el problema de hallar las ***bisectrices*** de los ángulos que determinan dos rectas que se cortan, pues tiene solución muy simple cuando las rectas están referidas de un modo conveniente. Sean r y s dos rectas que se cortan en un punto P y sean $\boldsymbol{u}$ y $\boldsymbol{v}$, respectivamente dos vectores directores normalizados de ambas rectas; definimos como bisectriz la recta lugar geométrico de los puntos del plano que definen las rectas y que equidistan de ambas, por lo que si X es un punto de la bisectriz, será

$$d(X,r) = d(X,s) \;\Rightarrow\; \| \overrightarrow{PX} \wedge \boldsymbol{u} \| = \| \overrightarrow{PX} \wedge \boldsymbol{v} \|$$

y como por estar en el mismo plano es $\overrightarrow{PX} = \lambda\boldsymbol{u}+\mu\boldsymbol{v}$, sustituyendo en la igualdad anterior tendremos

$$\| \mu(\boldsymbol{v} \wedge \boldsymbol{u}) \| = \| \lambda(\boldsymbol{u} \wedge \boldsymbol{v}) \| \;\Rightarrow\; |\mu| = |\lambda|$$

por lo que hay dos soluciones

$\mu = \lambda \;\Rightarrow\; \overrightarrow{PX} = \lambda(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v})$: una bisectriz es la recta que pasa por P de vector director $\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}$

$\mu = -\lambda \;\Rightarrow\; \overrightarrow{PX} = \lambda(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v})$: una bisectriz es la recta que pasa por P de vector director $\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}$

Ambas bisectrices son rectas perpendiculares al ser ortogonales sus vectores directores, ya que

$$<(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}),(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v})> = <\boldsymbol{u},\boldsymbol{u}>-<\boldsymbol{v},\boldsymbol{v}>+<\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}>-<\boldsymbol{v},\boldsymbol{u}> = <\boldsymbol{u},\boldsymbol{u}>-<\boldsymbol{v},\boldsymbol{v}> = 1-1 = 0$$

Los ángulos entre rectas y planos se definen a través de los ángulos de los vectores, directores o asociados que determinan estas figuras.

Así, definiremos como ***ángulo de dos rectas*** r y s, de respectivos vectores directores $\boldsymbol{u}$ y $\boldsymbol{v}$, a

$$\angle(r,s) = \min(\angle(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}),\angle(-\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}))$$

po lo que, teniendo en cuenta la definición de ángulo de dos vectores, será el número real comprendido entre 0 y $\pi/2$ tal que

$$\cos\angle(r,s) = \frac{|<\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}>|}{\|\boldsymbol{u}\|\,\|\boldsymbol{v}\|}$$

Definimos como ***ángulo de dos planos*** α y β, de respectivos vectores asociados $\boldsymbol{u}$ y $\boldsymbol{v}$, a

$$\angle(\alpha,\beta) = \min(\angle(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}),\angle(-\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}))$$

po lo que, teniendo en cuenta la definición de ángulo de dos vectores, será el número real comprendido entre 0 y $\pi/2$ tal que

$$\cos\angle(\alpha,\beta) = \frac{|<\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}>|}{\|\boldsymbol{u}\|\,\|\boldsymbol{v}\|}$$

Por último, definimos como ***ángulo entre una recta*** r de vector director $\boldsymbol{u}$ y ***un plano*** α de vector asociado $\boldsymbol{v}$ como el complementario del menor de los ángulos

$$\angle(r,\alpha) = \pi/2 - \min(\angle(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}),\angle(-\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}))$$

po lo que, teniendo en cuenta la definición de ángulo de dos vectores, será el número real comprendido entre 0 y $\pi/2$ tal que

$$\operatorname{sen} \angle(r,\alpha) = \frac{|<\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}>|}{\|\boldsymbol{u}\|\,\|\boldsymbol{v}\|}$$

Ejemplo VIII.9.2

Sean: punto $P(3,-3,2)$

plano α : $x+3y-2z = 1$ de vector asociado $\boldsymbol{p} = (1,3,-2)$

plano β : $-2x-6y+4z = 3$ de vector asociado $\boldsymbol{q} = (-2,-6,4)$

recta r que pasa por $R(1,3,0)$ y tiene como vector director $\boldsymbol{v} = (2,-1,1)$

$$r: \frac{x-1}{2} = \frac{y-3}{-1} = z$$

recta s que pasa por $Q(2,1,0)$ y tiene como vector director $\boldsymbol{u} = (2,9,5)$

$$s: \begin{cases} 2x-y+z = 3 \\ 3x+y-3z = 7 \end{cases}$$

recta t que pasa por $R(1,3,0)$ y tiene como vector director $\boldsymbol{w} = (4,5,-3)$

$$t: \frac{x-1}{4} = \frac{y-3}{5} = \frac{z}{-3}$$

Tenemos que

1) α y β no son perpendiculares, pues

$$<\boldsymbol{p},\boldsymbol{q}> = 1\cdot(-2)+3\cdot(-6)+(-2)\cdot 4 \neq 0$$

2) r y α no son perpendiculares, pues los vectores $\boldsymbol{v}$ y $\boldsymbol{p}$ no son proporcionales.

3) r y t son perpendiculares, pues $<\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}> = 2\cdot 4+(-1)\cdot 5+1\cdot(-3) = 0$.

4) La distancia del punto P al plano α es

$$d(P,\alpha)=\left|\frac{1\cdot 3+3\cdot(-3)+(-2)\cdot 2-1}{\sqrt{1^2+3^2+(-2)^2}}\right|=\frac{11}{\sqrt{14}}$$

5) La distancia entre el punto P y la recta s es

$$d(P,s)=\frac{\|\overrightarrow{PQ}\wedge\boldsymbol{u}\|}{\|\boldsymbol{u}\|}=\frac{\|(38,1,-17)\|}{\sqrt{2^2+9^2+5^2}}=\frac{\sqrt{1734}}{\sqrt{110}}$$

6) r y s se cruzan, ya que $\boldsymbol{u}$ y $\boldsymbol{v}$ no son proporcionales y $\{\overrightarrow{QR},\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\}$ l.i., pues

$$(\overrightarrow{QR},\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})=2\neq 0$$

y la distancia entre r y s será

$$d(r,s)=\frac{\left|(\overrightarrow{QR},\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})\right|}{\|\boldsymbol{u}\wedge\boldsymbol{v}\|}=\frac{|2|}{\sqrt{14^2+8^2+(-20)^2}}=\frac{2}{\sqrt{660}}$$

7) Los planos α y β son paralelos ya que sus vectores asociados $\boldsymbol{p}$ y $\boldsymbol{q}$ son proporcionales; la distancia entre α y β es

$$d(\alpha,\beta)=d(S,\alpha)=\left|\frac{(-2)\cdot 1+(-6)\cdot 0+4\cdot 0-3}{\sqrt{(-2)^2+(-6)^2+4^2}}\right|=\frac{5}{\sqrt{56}}$$

donde $S(1,0,0)$ es un punto del plano α

8) Las bisectrices de las rectas r y t serán rectas que pasan por el punto $R(1,3,0)$, común a ambas rectas y tienen como vectores directores la suma y diferencia de los vectores directores normalizados de las dos rectas,

$$\frac{\boldsymbol{v}}{\|\boldsymbol{v}\|}=\frac{1}{\sqrt{6}}(2,-1,1) \qquad \frac{\boldsymbol{w}}{\|\boldsymbol{w}\|}=\frac{1}{\sqrt{50}}(4,5,-3)$$

es decir, las rectas

$$b_1:\ \frac{x-1}{\frac{2}{\sqrt{6}}+\frac{4}{\sqrt{50}}}=\frac{y-3}{\frac{-1}{\sqrt{6}}+\frac{5}{\sqrt{50}}}=\frac{z}{\frac{1}{\sqrt{6}}-\frac{3}{\sqrt{50}}}$$

$$b_2:\ \frac{x-1}{\frac{2}{\sqrt{6}}-\frac{4}{\sqrt{50}}}=\frac{y-3}{\frac{-1}{\sqrt{6}}-\frac{5}{\sqrt{50}}}=\frac{z}{\frac{1}{\sqrt{6}}+\frac{3}{\sqrt{50}}}$$

9) El ángulo de los planos α y β será el número real entre 0 y $\pi/2$ cuyo coseno es

$$\cos\gamma = \frac{\left| <(1,3,-2)\ (-2,-6,4)> \right|}{\| (1,3,-2) \| \, \| \ (-2,-6,4) \|} = 1$$

es decir, el ángulo es 0 (los planos son paralelos).

10) El ángulo entre el plano α y la recta r será el complementario del ángulo entre 0 y $\pi/2$ cuyo coseno es

$$\cos\phi = \frac{\left| <(1,3,-2)\ (2,-1,1)> \right|}{\| (1,3,-2) \| \, \| \ (2,-1,1) \|} = \frac{3}{\sqrt{84}}$$

es decir, $\phi = 70^\circ 53'36''$ luego el ángulo pedido es $90^\circ - 70^\circ 53'36'' = 19^\circ 6'24''$

11) El ángulo de las rectas r y s será el número real entre 0 y $\pi/2$ cuyo coseno es

$$\cos\delta = \frac{\left| <(2,-1,1),(2,9,5)> \right|}{\| (2,-1,1) \| \, \| \ (2,9,5) \|} = \frac{0}{\sqrt{660}} = 0$$

es decir, r y s son perpendiculares.

Ejercicios

VIII.42.- a) Ecuación de la recta que pasa por (1,2,3) y es perpendicular al plano $x+2y-z+1 = 0$

b) Ecuación del plano que pasa por (–1,0,2) y es perpendicular a la recta

$$r: \ \frac{x-1}{0} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{3}$$

c) Ecuación del plano que pasa por (1,–1,0) y es paralelo al $2x-y+z = 0$.

d) Distancia del punto (1,2,–1) al plano $x-y+3 = 0$.

e) Distancia del punto (1,3,0) a la recta $s: \ \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-3}{-1}$

VIII.43.- Hallar el área del triángulo cuyos vértices son las intersecciones del plano $2x-2y+z = 4$ con los ejes coordenados.

VIII.44.- Dada la recta $r: x+y-2 = 0$ y el punto $P(2,2)$, hallar las ecuaciones de todas las rectas que pasen por P y formen un ángulo de 45º con la recta r. Calcular la distancia del punto P a la recta r. Estudiar de modo general la distancia de un

punto a un recta en E_2.

VIII.45.- Ecuación de la recta que pasa por el punto (0,0,0) y forma un ángulo de $\pi/6$ con los planos *OXY* y *OYZ*.

VIII.46.- a) Hallar las ecuaciones de los planos que pasando por la recta

$$\begin{aligned} \alpha_1 x+5y-7z+1 &= 0 \\ 3x+y+\alpha_2 z-2 &= 0 \end{aligned}$$

forman un angulo de $\pi/6$ con la recta $x+y+\alpha_3 z = 1$, $2x + y + 6z = \alpha_4$ para $\alpha_1 =$, $\alpha_2 =$, $\alpha_3 =$, $\alpha_4 =$.

b) Hallar los puntos que pertenecen a la recta

$$r: \frac{x-3}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z-2}{1}$$

y que equidistan de los planos α : $2x+2y+z = 2$ y β : $3x-4y = 4$.

VIII.47.- Un plano corta a los semiejes positivos en unos puntos que distan una unidad del origen. Hallar el lugar geométrico de las rectas que pasando por el punto (1,2,2) forman con dicho plano un ángulo de 45º.

VIII.48.- Un tetraedro regular *ABCD*, de lado *a*, tiene el vértice *A* en el origen de coordenadas y la cara opuesta es paralela al plano *XOY* y por encima de él. La arista *BC* es paralela al eje *OX* y está por detrás del plano *XOZ*. Se pide

a) Angulo que forma la altura relativa al vértice *D* con el eje *OZ*.

b) Altura de dicho tetraedro.

c) Su volumen.

VIII.49.- Dado el tetraedro de vértices $P(1,\alpha_1,-1)$, $Q(2,\alpha_2,1)$, $R(2,\alpha_3-2)$, $S(3,-1,\alpha_4)$, para $\alpha_1 =$, $\alpha_2 =$, $\alpha_3 =$, $\alpha_4 =$. Se pide

a) Hallar la distancia entre los pares de aristas *PQ*; *RS*; *PR*; *QS*

b) Su altura.

c) Su volumen.

VIII.50.- Comprobar que los planos $3x-y+z = 2$, $x+y-z+1 = 0$, $2x+3y+4z = 5$ forman un triedo y calcular los ángulos de sus caras.

VIII.51.- Demostrar que las alturas de un triángulo se cortan en un punto. Calcular el ortocentro del triángulo de vértices $A(1,3,2)$, $B(-1,1,1)$ y $C(2,4,1)$.

PROCEDIMIENTOS PRÁCTICOS BASICOS

Los procedimientos básicos que forman los elementos constructivos a partir de los cuales pueden abordarse los problemas que tratan sobre las materias desarrolladas en este Cuaderno, son los siguientes:

- Obtener coordenadas en un sistema de referencia.
- Cambiar de sistema de referencia.
- Hallar las ecuaciones paramétricas y cartesianas de una variedad lineal.
- Interpretar geométricamente un sistema compatible.
- Saber obtener la posición relativa de dos variedades.
- Hallar la intersección de dos variedades.
- Hallar la variedad perpendicular a otra.
- Averiguar si dos variedades son perpendiculares.
- Distancia de un punto a una variedad.
- Distancias y ángulos en E_3.

EJERCICIOS DE RECAPITULACION

VIII.52.- Sean $P(4,2,1)$ y el plano $\pi : 6x-2y-12 = 0$. Probar que las rectas

$$r: \begin{array}{l} x = -1 \\ 3y-z = 6 \end{array} \qquad s: \begin{array}{l} 5x+3y+z = 13 \\ 5x+2z = 7 \end{array} \qquad t: \frac{x+3}{-2} = \frac{y-3}{1} = \frac{z-3}{3}$$

están contenidas en π. Hallar los puntos Q, R y S de intersección de r con t, r con s y t con s respectivamente. Determinense las ecuaciones cartesianas de π, r, t y s en el sistema de referencia $(P;\overrightarrow{PQ},\overrightarrow{PR},\overrightarrow{PS})$.

VIII.53.- a) Hallar la ecuación del plano que pasa por A(1,0,1) y es paralelo a las rectas

$$r: \frac{x-3}{1} = \frac{y-7}{1} = \frac{z-1}{2} \qquad s: \frac{x-2}{3} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+9}{1}$$

b) Hallar la ecuación del plano que pasa por los puntos $A(0,1,2)$ y $B(1,3,-1)$ y es paralelo a la recta

$$t: \begin{array}{l} x-2y-3z = 0 \\ x-4y+z = 0 \end{array}$$

VIII.54.- De todas las rectas contenidas en el plano $2x+2y-z = 5$, hallar una que sea paralela al plano $-x+6y+3z = 2$.

VIII.55.- Sean las rectas $s: \left| \begin{array}{l} 2x-y+z = 0 \\ x-z-1 = 0 \end{array} \right.$, $r: \frac{x+2}{-1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z}{2}$ y el plano $\pi : x+y+2z+3 = 0$.

a) Averiguar si π contiene a r.

b) Hallar un plano que contenga a s y no corte a r.

VIII.56.- Hallar la ecuación de la recta que pasa por $(2,-1,0)$ y se apoya en las rectas

$$s: \left| \begin{array}{l} 2x-y+3z = 4 \\ x-y+z = 2 \end{array} \right. \qquad r: \frac{x}{3} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-1}{-1}$$

VIII.57.- Dada la recta r_1 que pasa por el origen y tiene como vector director $\boldsymbol{u}_1 = (1,1,1)$; y la recta r_2 que pasando por el punto $(1,0,1)$ tiene como vector director $\boldsymbol{u}_2 = (1,2,1)$. Hallar la ecuación de la recta r que pasa por $(3,2,-1)$ y se apoya en las rectas r_1 y r_2. Hallar el punto de intersección $P = r \cap r_1$.

VIII.58.- Hallar la ecuación de la recta coplanaria con la recta r de ecuación

$$\begin{array}{l} 3x+5y-z = -2 \\ x+2y+z = -4 \end{array}$$

incidente con el plano $2x-3y+6z+7=0$ y que corta a la recta $\frac{x}{4}=-\frac{y}{2}=\frac{z}{7}$.

VIII.59.- Discutir la posición relativa según los distintos valores de *a* y *b* de los planos

$$\begin{aligned}\alpha:&\quad 3x-y+2z=1\\ \beta:&\quad x+4y+z=b\\ \pi:&\quad 2x-5y+az=-2\end{aligned}$$

VIII.60.- Ecuación de un plano que pasando por la recta

$$\frac{x-2}{1}=\frac{y+1}{-2}=\frac{z}{1}$$

forma un triedo con los planos $\alpha: y+z=0$ y $\beta: 2x-y+z=3$

VIII.61.- Estudiar la posición relativa del plano $\alpha: x-2y+az=1$, y la recta

$$r: \frac{x-1}{2}=\frac{y}{3}=\frac{-z+5}{1}$$

VIII.62.- Determinar *a* para que las rectas

$$r:\ \begin{aligned}x-2z-1&=0\\ y-z-2&=0\end{aligned}\qquad\qquad s:\ \begin{aligned}x+y+z-1&=0\\ x-2y+2z-a&=0\end{aligned}$$

estén en un mismo plano y hallar la ecuación de este plano.

VIII.63.- Hallar la condición para que los planos

$$\begin{aligned}x-cy-bz&=0\\ y-az-cx&=0\\ z-bx-ay&=0\end{aligned}$$

pasen por una recta.

VIII.64.- Dados los planos

$$\begin{aligned}\alpha&: ax+by-z=1\\ \beta&: ax+y+bz=1\\ \pi&: ax+y+z=b\end{aligned}$$

obténgase, según los valores de *a* y *b*, sus posiciones relativas.

VIII.65.- Hallar la ecuación del plano que pasa por la recta

$$r:\ \begin{aligned}2x-3y+4z&=-8\\ 3x+y+5z&=2\end{aligned}$$

y es perpendicular al plano $\alpha:\ 5x+2y-7z-9=0$

VIII.66.- Sean las rectas

$$r: \begin{matrix} x+y+1=0 \\ x-y+2z=0 \end{matrix} \qquad s: \begin{matrix} 2x-2y+1=0 \\ 3x-3y+6z+1=0 \end{matrix}$$

Averiguar si determinan un plano y en caso afirmativo hallar su ecuación. Hallar la ecuación de la recta que pasando por el origen es perpendicular a dicho plano.

VIII.67.- Hallar el punto simétrico del (1,1,1) respecto de la recta interseción de los planos

$$\begin{matrix} \alpha: & x-2y+z=4 \\ \beta: & x-4y-5z=6 \end{matrix}$$

VIII.68.- En el espacio euclídeo se consideran las rectas

$$r: \begin{matrix} x=\frac{1}{2}z+10 \\ y=z+3 \end{matrix} \qquad s: \begin{matrix} x-2y-2z+6=0 \\ 2x+2y-z+24=0 \end{matrix}$$

a) ¿Qué posición relativa tienen?.

b) Hallar la mínima distancia entre las dos rectas dadas.

c) Hallar la ecuación de la recta perpendicular que corta a dichas rectas.

VIII.69.- En el espacio euclídeo E_3 se consideran los planos $\pi: x+y+z=3$ y $\pi': x+y+2z=6$.

a) Hallar los puntos simétricos del origen respecto de π y π'.

b) Una recta parte del origen e incide en π; siguiendo las leyes de la reflexión, se considera la recta que parte del punto de incidencia, la cual incide en π'; si esta recta pasa por el origen, hállense las tres rectas que se han considerado.

VIII.70.- Hallar la ecuación del plano que determinan la recta

$$r: \begin{matrix} 2x+y+3z=1 \\ x-y+z=0 \end{matrix}$$

y el punto simétrico del (1,2,3) respecto de la recta $s: \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z-2}{1}$

VIII.71.- Dados los planos

$$\alpha: ax+y+z=1 \qquad \beta: x+ay+z=1 \qquad \pi: x+y+az=1$$

a) Hallar a para que formen un superficie prismática.

b) Hallar el volumen del prisma formado por esta superficie al ser cortada por el plano XOY y el plano horizontal que pasa por el punto (1,1,2).

VIII.72.- Dado el tetraedo $ABCD$ y el sistema de referencia $(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD})$, se pide el volumen del tetraedro $ABCD$.

VIII.73.- Sea E_3 con un sistema de referencia ortonormal $(O;\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2,\boldsymbol{u}_3)$. Sea el punto $H(a,b,c)$ con $a,b,c > 0$. Se pide

a) Ecuación del plano que pasa por H y es perpendicular a la recta OH.

b) Los puntos de intersección A, B y C del plano anterior con los ejes de coordenadas.

c) Demostrar que el punto H es el ortocentro del triángulo ABC.

d) Hallar el área de la sombra de la proyección del triángulo cuando el sol está sobre el eje OZ. Id. si el sol se encuentra en la dirección del vector normal del plano.

VIII.74.- Hallar el área de la sombra que proyecta sobre el plano XOY un tetraedro regular de 36 cm de lado apoyado en equilibrio inestable sobre un vértice en el punto (6,6,0), al ser iluminado por un foco de luz situado en el eje OZ a 30 cm de altura.

VIII.75.- Un tetraedro regular de 2 cm de lado está en equilibrio inestable apoyado en un vértice situado en el punto (6,6,0) teniendo una arista paralela al eje OX. Se pide

a) Hallar la altura del tetraedro.

b) Coordenandas de los cuatro vértices.

c) Hallar el área de la sombra que proyecta en el plano horizontal al ser iluminado por un foco situado en el punto (0,0,8).

VIII.76.- Dado el tetraedro de vértices $A(1,1,1)$; $B(-1,2-1)$; $C(0,2,1)$ y $D(1,1,-1)$ hallar

a) Ecuación del plano que pasa por AB y el punto medio de la arista opuesta.

b) Recta que pasa por el vértice A y el baricentro de la cara BCD.

c) Altura del vértice A.

d) Su volumen.

VIII.77.- En el plano, demostrar que las bisectrices de un triángulo se cortan en un punto.

VIII.78.- Dados el tetraedro de vértices $A(3,5,1)$,$B(0,2,0)$,$C(1,0,-1)$ y $D(0,1,1)$. Calcular las longitudes de las aristas, las alturas, área total y diedros de sus caras.

VIII.79.- Clasificar el poliedro de vértices, $A(1,0,0)$, $B(0,1,0)$, $C(0,0,1)$, $D(-1,0,0)$, $E(0,-1,0)$ y $F(0,0,-1)$ y hallar los ángulos de sus caras, su área total y su volumen.

BIBLIOGRAFIA

Anton H. (1985). *Introducción al Algebra Lineal*. Limusa. Méjico.

de Burgos J. (1988). *Curso de Algebra y Geometría*. Alhambra. Madrid.

Godement R. (1974). *Algebra*. Tecnos. Madrid.

Hoffmann R., Kunze R. (1974). *Algebra Lineal*. Prentice. Madrid.

Lentin A., Rivaud J. (1973). *Algebra Moderna*. Aguilar. Madrid.

Noble B., Daniel J.W. (1988). *Applied Linear Algebra*. Prentice Hall. London.

Puerta F. (1986). *Algebra lineal*. Marcombo. Barcelona.

Queysanne M. (1985) *Algebra*. Vicens-Vives. Barcelona.

Rorres A., Anton H. (1979). *Aplicaciones del Algebra Lineal*. Limusa. Méjico.

Sainz M.A., S erarols J.L. Pérez A.M. (1994). *Álgebra*. Escuela Politécnica Superior. Gerona.

Strang G. (1982). *Algebra Lineal y sus aplicaciones.* Fondo Educativo Interamericano. Méjico.

Torregrosa J.R., Jordan C. (1987). *Algebra Lineal y sus aplicaciones*. McGraw-Hill. Madrid.

Trillas E., Alsina C. (1984). *Lecciones de Algebra y Geometría*. Gustavo Gili. Barcelona.

Xambó S. (1977). *Algebra Lineal y geometrias lineales*. EUNIBAR. Barcelona.