CUADERNO I

LÓGICA Y TEORÍA DE CONJUNTOS

Miguel A. Sainz, Josep M. Humet
Dep. de Informática y Matemática Aplicada
Universidad de Girona

RESUMEN: El pensamiento humano es más complicado de lo que en principío creían los filósofos y existen muchas formas de pensamiento lógico difícilmente reducibles a una sola. Por ello la Lógica actualmente no es una sino que comprende toda una familia de lógicas. Algunos autores las clasifican en deductivas, que plantean el problema de determinar que conclusiones pueden deducirse de unas premisas con certeza absoluta, e inductivas, que no buscan certeza sino sólamente razonabilidad. La lógica que se vamos a desarrollar es la Lógica del siglo XIX, que sirve de fundamento a la ciencia en general, con un enfoque dirigido al estudio de las formas de razonamiento; en resumen, una Lógica simbólica, deductiva y clásica en el sentido de admitir los principios de no contradicción y del tercio excluido. La exposición va a ser claramente intuitiva, cosa que si bien no sería admisible en una fundamentación de tal Lógica, si puede ser permisible dado que se trata de aproximarse de un modo simple y pedagógico a una disciplina que actualmente está bien fundamentada, rigurosamente desarrollada y con un alcance claramente determinado.

La Lógica es la ciencia que estudia los mecanismos del pensamiento lógico y su representación mediante un lenguaje, con su vocabulario, sintaxis y semántica. Se inicia en Grecia hacia el siglo IV a.d.C. como parte de la filosofía y para proporcionar criterios objetivos de discernimiento en las discusiones filosóficas. Se crea como una lógica bivalente o, en términos más populares, de verdadero o falso: nada puede ser verdadero y falso a la vez (principio de no contradicción) y todo es o verdadero o falso (principio del tercio excluido). Esta lógica, desarrollada originalmente por Aristóteles, es completada en muchos de sus aspectos en Europa durante la Edad Media. En el siglo XIX la aplicación de la Lógica se extiende a las Matemáticas que, hasta entonces, se habían ocupado de números, figuras, funciones,..., pero no de razonamientos. En *Las leyes del pensamiento* G. Boole convierte la Lógica en un cálculo simbólico análogo al Álgebra. Muchos otros matemáticos del XIX y XX realizaron importantes trabajos conducentes a fundamentar todas las matemáticas en la Lógica hasta demostrar que tal cosa no se podía conseguir.

I.1.- PROPOSICIONES, CONECTORES Y FORMULAS

El objeto de estudio de cualquier ciencia es la proposición o enunciado. Una ***proposición*** es una frase con sentido y valorable, es decir, que pueda atribuírsele sin ambigüedad uno sólo de estos valores: verdadera (1) o falsa (0). Por ejemplo, "Hoy hace frío" es una proposición y no lo son "Olas miran vagamente lo negro" o "Dame ese libro" o "¿Cuántos años tienes?". De

valorar una proposición como "La tierra es redonda" se ocupará la Geografía y la Astronomía; de si es verdadera una proposición como "La sucesión de números primos es indefinida" se ocupará la Aritmética y, en general, cada disciplina se ocupa de valorar proposiciones sobre los objetos de los que trata.

Podemos intuitivamente distinguir dos tipos de proposiciones: proposiciones simples, como

"Hoy hace sol"
"El número 1729 es expresable como suma de dos cubos"

y proposiciones compuestas, como

"Si hace buen tiempo, entonces salgo de casa y paseo por el parque o por las ruinas del castillo"

que se puede descomponer en las proposiciones simples "hace buen tiempo", "salgo de casa", "paseo por el parque", "paseo por las ruinas del castillo" enlazadas por nexos gramaticales, tales como

"si ..., entonces ..." , "y" , "o"

que, a su vez, pueden enlazar proposiciones compuestas para formar otras más complejas. Estos nexos gramaticales, que unen proposiciones, se denominan ***conectores lógicos***. Estudiaremos cinco de éllos (aunque en realidad podrían reducirse a uno sólo), que son

"no" , "y" , "o" , "si ..., entonces ..." , "... si y sólo si ..."

La Lógica se ocupa básicamente de la estructura de las proposiciones; no estudia una proposición tal como

"Si hace buen tiempo, entonces salgo de casa"

sino la estructura

si ..., entonces ...

independientemente de los contenidos de pensamiento que puedan representar las palabras que la forman. Por ello, una proposición determinada, aunque no precisada, la representaremos mediante una letra, y los conectores lógicos mediante los símbolos expresados en la Tabla I.1.1

TABLA I.1.1

Conectores lógicos

$\neg$	representa "no" y se denomina *negación*
$\wedge$	representa "y" y se denomina *conjunción*
$\vee$	representa "o" y se denomina *disyunción*
$\rightarrow$	representa " si ..., entonces ..." y se denomina *condicional*
$\leftrightarrow$	representa "... si y sólo si ..." y se denomina *bicondicional*

Las letras que representan proposiciones P, Q, ... pueden ser conectadas entre sí formando expresiones tales como

$$((P \vee Q) \wedge (P \rightarrow Q)) \leftrightarrow (\neg(P \vee R) \leftrightarrow R)$$

en la que intervienen símbolos de proposición, símbolos de conectores y paréntesis que determinan el alcance de cada conector, se denominarán fórmulas del cálculo proposicional y simbolizarán la estructura de una proposición.

Supongamos un conjunto finito de símbolos arbitrarios, denominado alfabeto de la lógica proposicional. Cada uno de los símbolos se denomina símbolo de proposición. Sea el conjunto formado por los cinco conectores lógicos y los dos paréntesis (y). Combinando estos símbolos podemos formar secuencias de signos. De entre todas estas secuencias se distinguen unas, denominadas ***fórmulas*** bien formadas de la lógica proposicional o simplemente fórmulas proposicionales, que son las que se pueden construir a partir de la siguiente definición:

1) Todo símbolo de proposición P es una fórmula, llamada ***átomo***.

2) Si P es una fórmula, entonces $\neg(P)$ es una fórmula.

3) Si P y Q son fórmulas, entonces $(P) \wedge (Q)$, $(P) \vee (Q)$, $(P) \rightarrow (Q)$ y $(P) \leftrightarrow (Q)$ son fórmulas.

4) No hay más fórmulas que las generadas por 1), 2) y 3).

Por ejemplo, la secuencia de signos $(((P) \wedge ((Q) \vee (R))) \leftrightarrow ((S) \rightarrow (\neg(T))))$ es una fórmula. En cambio la secuencia $)P(\neg \rightarrow S$ no lo es. Para simplificar el trabajo con las fórmulas se admite la supresión discrecional de algunos paréntesis. Los átomos no se colocan entre paréntesis y si en una fórmula se han suprimido algunos paréntesis, entonces aplicaremos las normas de restauración de paréntesis que se indican a continuación.

1) Restaurar los paréntesis correspondientes a todas las negaciones. Si hay dos seguidas se comienza por la de más a la derecha.

2) Restaurar los paréntesis correspondientes a todas las disjunciones y conjunciones. En el caso de tener que restaurar los paréntesis de disjunciones de la forma $P \vee Q \vee R$ se escribe $(P \vee Q) \vee R$ o bien $P \vee (Q \vee R)$ indistintamente. En el caso de tener de paréntesis de conjunciones de la forma $P \wedge Q \wedge R$ se escribe $(P \wedge Q) \wedge R$ o bien $P \wedge (Q \wedge R)$ indistintamente.

3) Restaurar los paréntesis correspondientes a todos los condicionales y bicondicionales.

Las expresiones de alguna de las formas $P \vee Q \wedge R$, $P \wedge Q \vee R$, $P \rightarrow Q \rightarrow R$, $P \leftrightarrow Q \leftrightarrow R$, $P \rightarrow Q \leftrightarrow R$ y $P \leftrightarrow Q \rightarrow R$ se consideran ambiguas y no son fórmulas aunque lo sean P, Q y R.

Por ejemplo, para restaurar de los paréntesis en $(P \rightarrow Q) \wedge \neg Q \rightarrow \neg P$ primero se restauran los paréntesis correspondientes a las negaciones: $(P \rightarrow Q) \wedge (\neg Q) \rightarrow (\neg P)$; a continuación el de la conjunción $((P \rightarrow Q) \wedge (\neg Q)) \rightarrow (\neg P)$; finalmente el paréntesis correspondiente al condicional $(((P \rightarrow Q) \wedge (\neg Q)) \rightarrow (\neg P))$.

Toda proposición tiene una fórmula que es su expresión simbólica abstracta.

Ejemplo I.1.1

La proposición

"6 es múltiplo de 3"

tiene por fórmula P. La proposición

"Si cambia el viento entonces llueve y no puedo salir de casa "

tiene por fórmula

$$P \rightarrow (Q \wedge R)$$

para P: "Cambia el viento", Q: " Llueve" y R: "No puedo salir de casa".

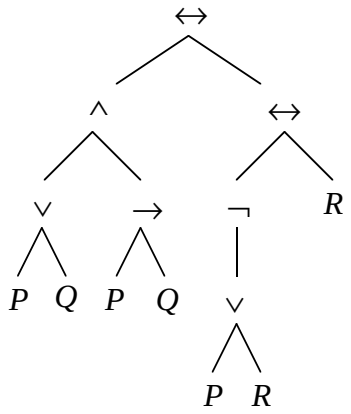
Se denomina ***árbol sintáctico*** de una fórmula a una representación de la misma mediante un diagrama en árbol que se construye poniendo los conectores como nodos y las distintas incidencias de los átomos como hojas, de forma que el nodo correspondiente al conector principal se dibuja encima (o a la izquierda) de los demás y las ramas que salen de cada nodo, que corresponden a las subfórmulas a las que afecta el conector, se dibujan debajo (o a la derecha) del nodo.

Ejemplo I.1.2

El árbol sintáctico de la fórmula

$$(P \vee Q) \wedge (P \rightarrow Q) \leftrightarrow (\neg(P \vee R) \leftrightarrow R)$$

es



La característica fundamental de una proposición es que es valorable y si la proposición es compuesta, tomará valor 1 o 0 según los valores de los átomos que la componen y de como los

conectores actúan sobre estos valores. Los valores 1 o 0 de todas las proposiciones que tienen una determinada fórmula dependerán de como los conectores actúan sobre los distintos valores 1 o 0 que pueden tomar los átomos que intervienen. Por ello en cuando definamos esta actuación, la asignación de los valores 1 o 0 de una fórmula podrán obtenerse mediante reglas fijas.

Para la fórmula atómica tenemos

P
1
0

Tal y como hemos introducido los conectores, éstos no son símbolos arbitrarios sino que representan ciertas partículas gramaticales con contenido semántico; por lo tanto, los valores 1 o 0 no debemos asignarlos a las fórmulas arbitrariamente sino de acuerdo con el sentido gramatical del nexo que representa entre proposiciones o, por lo menos, sin entrar en contradicción con él.

Negación : $\neg P$ (no P). Si admitimos dos principios básicos de la lógica aristotélica: ***principio de no contradicción***

"Una proposición y su contraria no pueden ser ambas verdaderas"

y ***principio del tercio excluído***

"Una de las dos proposiciones P o no P, es verdadera"

los valores de verdad que definirán la fórmula $\neg P$ deberán ser los de la tabla

P	$\neg P$
1	0
0	1

Cuando se trate de una fórmula compuesta por otras dos y un conector cualquiera $\bullet$, definiremos sus valores mediante una tabla del tipo

P	Q	$P \bullet Q$
1	1	.
1	0	.
0	1	.
0	0	.

en la que en lugar de los puntos deben figurar los valores 1 o 0 que definen como actúa el conector. Así para cada conector definiremos una de las 16 posibles tablas de este tipo que denominaremos ***tabla de verdad***.

Conjunción : $P \wedge Q$ (P y Q). La conjunción entre dos proposiciones se efectúa mediante

la conjunción gramatical "y" que tiene un sentido preciso. Una proposición tal como "Mañana lloverá y hará frío" se verificará únicamente cuando ambos hechos sean verdaderos a la vez; por tanto, la tabla de verdad de la conjunción debe estar constituida por un valor 1 cuando sean 1 ambas fórmulas y valores 0 en todas los demás casos, tal como se expresa en la tabla de verdad que la define

P	Q	$P \wedge Q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

Disyunción : $P \vee Q$ (P o Q). La disyunción se efectua mediante la partícula "o" que, a diferencia de la anterior, tiene ambigüedades en su uso en el lenguaje ordinario. A veces se utiliza de forma excluyente

"El día 15 fue sábado o domingo"

donde la verificación de una proposición excluye la verificación de la otra (si fue sábado no fue domingo); otras en sentido disyuntivo no excluyente como en el ejemplo

"Este local cierra los martes o los días festivos"

donde el ser martes no excluye que pueda ser festivo. Además, difícilmente una persona no familiarizada con la lógica estará dispuesta a admitir como proposición

"París es la capital de Francia o la madera es un metal"

Desde un punto de vista estrictamente lógico es necesario eliminar ambigüedades y factores psicológicos ajenos, por lo que consideraremos como valores de la disyunción los correspondientes al sentido gramatical del "o" no excluyente. Así la disyunción se define por

P	Q	$P \vee Q$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

Condicional : $P \rightarrow Q$ (si P, entonces Q). El condicional corresponde al nexo gramatical "si ..., entonces ...", como en la proposición

"Si hace frío, entonces nieva"

Esta previsión meteorológica falla únicamente cuando haga frío y no nieva, es decir la primera proposición verdadera y la segunda falsa, y será verdadera en todos los demás casos. De forma análoga a la disyunción, existen ambigüedades e imprecisiones en el uso habitual de este nexo gramatical. En primer lugar, el hecho de que el uso de las palabras sea fluctuante, lleva a que muchas veces la expresión "si ..., entonces ..." esté sustituida por alguna otra equivalente, p.ej. la proposición anterior es la misma que

"Cuando hace frío, nieva "

o muchas otras. Otro asunto más grave es el que, a menudo, asociemos a la expresión "si ..., entonces ..." la convicción de que la segunda proposición se sigue necesariamente de la primera, como una relación causa-efecto. No todo el mundo creerá que

"Si 2+2 = 5, entonces hoy llueve"

sea una proposición, y quizá menos aún que sea una proposición verdadera; sin embargo lo va a ser desde un punto de vista lógico. Por todo esto, para utilizar de forma lógica el concepto ordinario "si ..., entonces ..." hay que liberarlo de posibles ambigüedades de interpretación, a pesar de que su sentido científico difiera un cierto grado de su uso ordinario. Definimos el conector lógico condicional según la tabla de verdad

P	Q	$P \to Q$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

Bicondicional : $P \leftrightarrow Q$ (P si y sólo si Q). Representa la expresión gramatical "... si y sólo si ..." que si bien no es frecuente en el lenguaje ordinario, sí lo es en el lenguaje matemático, principalmente para establecer equivalencias o igualdades lógicas; por ejemplo

"Un número entero es par si y sólo si es múltiplo de 2"

Definimos el bicondicional mediante la tabla

P	Q	$P \leftrightarrow Q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

Toda fórmula, al estar compuesta de otras fórmulas y conectores, podemos asignarle valores 1 o 0 según los valores de los átomos que la componen y de los conectores que intervienen, construyendo la tabla de verdad de la fórmula. Constará de 2^n filas, siendo n, el número de átomos que intervienen y tantas columnas como sean necesarias para, paso a paso, y aplicando las definiciones de cada conector se pueda llegar hasta la fórmula completa.

Ejemplo I.1.3

Veamos la tabla de verdad de la fórmula

$$((P \vee Q) \wedge (\neg P \to R)) \to Q$$

La tabla tendrá $2^3 = 8$ filas, pues éstos son los casos posibles de verdad o falsedad

entre los tres átomos que la componen. Para formarla habrá que descomponer, de forma sucesiva, la fórmula en sus componentes y, de acuerdo con las tablas de verdad que definen a los conectores, ir atribuyendo valores 1 o 0 hasta llegar a la fórmula completa.

P	Q	R	$\neg P$	$\neg P \to R$	$P \vee Q$	$(P \vee Q) \wedge (\neg P \to R)$	$((P \vee Q) \wedge (\neg P \to R)) \to Q$
1	1	1	0	1	1	1	1
1	1	0	0	1	1	1	1
1	0	1	0	1	1	1	0
1	0	0	0	1	1	1	0
0	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	1	0	1	0	1
0	0	1	1	1	0	0	1
0	0	0	1	0	0	0	1

que nos dice que toda proposición que tenga esta fórmula será falsa cuando P, Q y R sean proposiciones, respectivamente 1, 0, 1 o bien 1, 0, 0 y en todos los demás casos será verdadera. Así la proposición

> "Si las ballenas son mamíferos o peces y si no son mamíferos tienen plumas, entonces las ballenas son peces"

es una proposición falsa, pues su formula proposicional es la anterior con

P : "Las ballenas son mamíferos" 1

Q : "Las ballenas son peces" 0

R : "Las ballenas tienen plumas" 0

Puede utilizarse la siguiente construcción, más compacta

P	Q	R	$((P$	$\vee$	$Q)$	$\wedge$	$(\neg P$	$\to$	$R))$	$\to$	Q
1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1
1	1	0	1	1	1	1	0	1	0	1	1
1	0	1	1	1	0	1	0	1	1	0	0
1	0	0	1	1	0	1	0	1	0	0	0
0	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	1	1	0	1	0	0	1	1
0	0	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0
0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0

Si queremos valorar una proposición concreta no es necesario construir toda la tabla de verdad. Así, la proposición "Si 2+3 = 6, entonces 2 = 6−3 y 2+3 = 5" es verdadera ya que su fórmula es

$$(P \to Q) \wedge R$$

siendo P : "2+3 = 6", proposición de valor 0, Q : "2 = 6−3 ", proposición de valor 0 y R : "2+3 = 5" proposición de valor 1. La tabla de verdad para este caso es

$$(P \rightarrow Q) \wedge R$$

0 1 0 1 1

Ejemplo I.1.4

Una fórmula que sea 1 únicamente en los casos 1 0 0 y 0 1 0 es la disyunción de una fórmula que sea 0 para todos los casos excepto el 1 0 0

$$P \wedge \neg Q \wedge \neg R$$

y otra que sea 0 en todos los casos excepto el 0 1 0

$$\neg P \wedge Q \wedge \neg R$$

por lo que la fórmula puede ser

$$(P \wedge \neg Q \wedge \neg R) \vee (\neg P \wedge Q \wedge \neg R)$$

Una fórmula que tenga los valores 1 y 0 alternados tiene los mismos valores que el tercer átomo por lo que

$$(P \vee \neg P) \wedge (Q \vee \neg Q) \wedge R$$

Una fórmula que sea 0 únicamente en el caso 1 1 0 es la contraria de la que es todo 0 excepto en el caso 1 1 0, por lo que pueden ser $\neg(P \wedge Q \wedge \neg R)$, o bien $\neg P \vee \neg Q \vee R$.

Si P es una fórmula conteniendo los átomos $P_1, \ldots, P_n$ se denomina una ***interpretación lingüística*** de P a cualquier asignación de valores de proposición a cada uno de los átomos. El resultado de una interpretación lingüística es una proposición; si las proposiciones se refieren a objetos matemáticos tendremos una interpretación matemática.

Ejemplo I.1.5

Si en la fórmula

$$P \rightarrow Q \vee R$$

sustituimos P por "6 es múltiplo de 3", Q por "6 es menor que 2" y R por "4 es un número par", tenemos la interpretación

"Si 6 es múltiplo de 3, entonces 6 es menor que 2 y 4 es un número par"

Si sustituimos P por "los pájaros cantan", Q por "hoy hace sol" y R por "hoy es primavera", tenemos la proposición

"Si los pájaros cantan, entonces hoy hace sol y es primavera"

Dada la imprecisión del lenguaje natural el proceso de obtener la fórmula de una proposición puede ser ambiguo; así

"En viniendo tú, yo me habré ido"

parece que tiene por la fórmula

$$P \to Q$$

pero, dado el tiempo verbal, parece más natural la fórmula

$$P \wedge Q$$

Se denomina ***interpretación lógica***, o simplemente interpretación, de P a cualquier asignación de valores 1 o 0 a cada átomo $P_1, \ldots, P_n$; el resultado es un valor 1 o 0. Existen así 2^n interpretaciones distintas que son cada una de las filas de la tabla de verdad. Si para una interpretación dada, siguiendo el proceso anterior de construcción de la tabla de verdad, la fórmula P es 1 diremos que lo es bajo esa interpretación y ésta se denomina ***ejemplo*** de la fórmula. Análogamente si P es 0 bajo una interpretación, ésta se denomina ***contraejemplo***.

Ejercicios

I.1 .- Construir la tabla de verdad de las siguientes fórmulas del cálculo de proposiciones:

a) $\neg P \vee Q \to P \wedge \neg Q$

b) $(P \vee Q \to R) \leftrightarrow (\neg R \vee Q)$

c) $(R \vee \neg(Q \to R \wedge Q)) \leftrightarrow \neg(P \wedge Q)$

d) $(R \vee Q \to R \wedge Q) \leftrightarrow \neg(P \wedge Q)$

I.2.- TAUTOLOGIA Y CONTRADICCION

Según los valores que aparecen en la tabla de verdad de una fórmula podemos considerar los siguientes casos:

Una fórmula que es 1 bajo todas sus interpretaciones, se llama ***fórmula válida*** o ***tautología*** y se designa por τ. En caso contrario se denomina ***fórmula inválida***.

Una fórmula que es 0 bajo todas sus interpretaciones se llama ***fórmula insatisfactible*** o ***contradicción*** y se designa por $\mathfrak{c}$. En caso contrario se denomina ***fórmula satisfactible***.

Ejemplo I.2.1

Es una taulogía $(P \to Q) \vee (Q \to P)$ y es una contradicción $(P \to Q) \wedge (P \wedge \neg Q)$ pues sus tablas de verdad son

$(P \rightarrow Q) \vee (Q \rightarrow P)$						
1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	0	1	1
0	1	1	1	1	0	0
0	1	0	1	0	1	0

$(P \rightarrow Q) \wedge (P \wedge \neg Q)$						
1	1	1	0	1	0	0
1	0	0	0	1	1	1
0	1	1	0	0	0	0
0	1	0	0	0	0	1

Asímismo puede comprobarse que $(P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P)$ es una contingencia.

Las tautologías fundamentan, como más adelante veremos, el proceso que permite construir, a partir de proposiciones verdaderas, nuevas proposiciones verdaderas. Las más importantes figuran en la Tabla I.2.1

TABLA I.2.1

Algunas tautologías del cálculo de proposiciones

1)	$\neg(\neg P) \leftrightarrow P$		*Doble negación*
2)	$(P \wedge P) \leftrightarrow P$	$(P \vee P) \leftrightarrow P$	*Idempotente*
3)	$((P \wedge Q) \wedge R) \leftrightarrow (P \wedge (Q \wedge R))$ $((P \vee Q) \vee R) \leftrightarrow (P \vee (Q \vee R))$		*Asociativa*
4)	$(P \wedge Q) \leftrightarrow (Q \wedge P)$	$(P \vee Q) \leftrightarrow (Q \vee P)$	*Conmutativa*
5)	$P \wedge (P \vee Q) \leftrightarrow P$	$P \vee (P \wedge Q) \leftrightarrow P$	*Absorción*
6)	$(P \wedge (Q \vee R)) \leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$ $(P \vee (Q \wedge R)) \leftrightarrow (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$		*Distributiva*
7)	$\neg(P \wedge Q) \leftrightarrow (\neg P \vee \neg Q)$	$\neg(P \vee Q) \leftrightarrow (\neg P \wedge \neg Q)$	*De Morgan*
8)	$P \leftrightarrow P$	$P \rightarrow P$	*Reflexiva*
9)	$((P \leftrightarrow Q) \wedge (Q \leftrightarrow R)) \rightarrow (P \leftrightarrow R)$ $((P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow R)) \rightarrow (P \rightarrow R)$		*Transitiva*
10)	$(P \leftrightarrow Q) \leftrightarrow (Q \leftrightarrow P)$		*Simétrica*
11)	$((P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P)) \leftrightarrow (P \leftrightarrow Q)$		*Antisimétrica*
12)	$(P \wedge \tau) \leftrightarrow P$	$(P \vee \tau) \leftrightarrow \tau$	
13)	$(P \wedge \complement) \leftrightarrow \complement$	$(P \vee \complement) \leftrightarrow P$	

14) $P \wedge Q \rightarrow P$ $\qquad\qquad$ $P \rightarrow P \vee Q$

15) $(P \rightarrow Q) \leftrightarrow (\neg P \vee Q)$

16) $(P \rightarrow Q) \leftrightarrow (\neg Q \rightarrow \neg P)$

17) $(P \wedge (P \rightarrow Q)) \rightarrow Q$

18) $\neg(P \rightarrow Q) \leftrightarrow (P \wedge \neg Q)$

19) $((P \rightarrow Q) \wedge (\neg P \rightarrow Q)) \rightarrow Q$

20) $(P \wedge ((P \wedge \neg Q) \rightarrow \mathbb{C})) \rightarrow Q$

Para verificar estas fórmulas basta simplemente construir las correspondientes tablas de verdad; por ejemplo, para probar 18) basta construir la tabla de verdad

$\neg$	$(P$	$\rightarrow$	$Q)$	$\leftrightarrow$	$(P$	$\wedge$	$\neg Q)$
0	1	1	1	1	1	0	0
1	1	0	0	1	1	1	1
0	0	1	1	1	0	0	0
0	0	1	0	1	0	0	1

Si todos los valores de la fórmula que se obtienen en todas las 2^n interpretaciones diferentes son 1 y ninguno de ellos es 0, se trata de una tautología. Si al menos para una interpretación el valor es 0, entonces la fórmula no es tautología. Construyendo toda la tabla de verdad se encuentran, en particular, aquellas interpretaciones que hacen falsa la fórmula y todas las interpretaciones la hacen verdadera, pero si el número de átomos es grande la construcción de la tabla de verdad es impracticable. Por eso, a veces, es útil considerar que una fórmula es una tautología cuando no existe ninguna interpretación que la haga falsa, para lo que bastará averiguar si existen interpretaciones que hacen falsa la fórmula, ahorrando el obtener aquellas que la hacen verdadera. Por ejemplo, para que la fórmula $(P \rightarrow Q) \vee \neg Q$ sea 0, debe serlo $\neg Q$, en cuyo caso Q es 1, de donde $P \rightarrow Q$ es 1 y $(P \rightarrow Q) \vee \neg Q$ es también 1, es decir, la fórmula no puede tomar el valor 0.

Ejercicios

I.2 .- Determinar cuáles de las siguientes fórmulas proposicionales son tautologías:

a) $((P \wedge Q) \vee (\neg P)) \vee (\neg Q)$

b) $((P \vee Q) \wedge (\neg P)) \rightarrow Q$

c) $(P \wedge (\neg Q)) \vee ((\neg P) \wedge Q)$

d) $((P \vee Q) \wedge ((\neg P) \vee Q)) \wedge (P \vee (\neg Q))$

I.3.- IMPLICACIÓN Y EQUIVALENCIA

Cuando un condicional o un bicondicional son tautológicos, suelen usarse unos términos especiales que definimos a continuación. Dadas dos fórmulas P y Q diremos que la primera ***implica*** la segunda, escribiendo

$$P \Rightarrow Q$$

cuando el condicional $P \to Q$ es una tautología. Según la tabla de verdad del condicional, significa que nunca ocurre simultáneamente que P es 1 y Q es 0. Una implicación entre dos fórmulas P y Q

$$P \Rightarrow Q$$

se denomina ***teorema*** en el que P recibe el nombre de ***hipótesis*** y Q el de ***tesis***. En el lenguaje matemático existen tradicionalmente varias formas de expresarlo, siendo las más comunes

P implica Q

Q es condición necesaria para P

si P, entonces Q

De acuerdo con la definición un teorema será cierto cuando P sea 1 y Q sea 1 o bien cuando P sea 0 o, de otro modo, siempre que P sea 1 debe serlo Q. El proceso de verificar un teorema se denomina ***demostración***.

Dadas dos fórmulas P y Q diremos que son ***equivalentes***, escribiendo

$$P \Leftrightarrow Q$$

cuando el bicondicional $P \leftrightarrow Q$ es una tautología, lo que se expresa también diciendo que

Q es condición necesaria y suficiente para P

Una equivalencia será cierta cuando P y Q sean a la vez 1 o 0 y bajo cualquier interpretación, por lo tanto, cuando sus tablas de verdad sean iguales. En este caso se verifican a la vez las implicaciones

$$P \Rightarrow Q \quad \text{y} \quad Q \Rightarrow P$$

ya que nunca P es 1 y Q es 0, o viceversa. Por tanto, si dos fórmulas P y Q verifican

$$P \Leftrightarrow Q$$

se verifican los teoremas

$$P \Rightarrow Q \quad \text{y} \quad Q \Rightarrow P$$

y, recíprocamente, si estos dos teoremas se verifican, las dos proposiciones son equivalentes.

Ejemplo I.3.1

Es verdadero el teorema

$$(P \wedge (P \to Q)) \Rightarrow Q$$

pues construyendo la tabla de verdad del condicional

$$(P \wedge (P \to Q)) \to Q$$

1	1	1	1	1	1	1
1	0	1	0	0	1	0
0	0	0	1	1	1	1
0	0	0	1	0	1	0

el resultado es un tautología. Tambien se verifica que

$$P \to Q \Leftrightarrow \neg(P \wedge \neg Q)$$

pues en las tablas de verdad de ambas fórmulas se obtienen los mismos valores

P	$\to$	Q
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	1	0

$\neg$	$(P$	$\wedge$	$\neg Q)$
1	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	0	1

o bien, construyendo la tabla de verdad de la fórmula formada por el bicondicional entre ambas

$$P \to Q \leftrightarrow \neg(P \wedge \neg Q)$$

1	1	1	1	1	1	0	0
1	0	0	1	0	1	1	1
0	1	1	1	1	0	0	0
0	1	0	1	1	0	0	1

el resultado es una tautología

Entre dos fórmulas P y Q y sus negaciones $\neg P$ y $\neg Q$, pueden establecerse los siguientes condicionales y bicondicionales

Directo :	$P \to Q$	$P \leftrightarrow Q$
Recíproco :	$Q \to P$	$Q \leftrightarrow P$
Contrario :	$\neg P \to \neg Q$	$\neg P \leftrightarrow \neg Q$
Contrarrecíproco :	$\neg Q \to \neg P$	$\neg Q \leftrightarrow \neg P$

que entre sí no son independientes pues, según las tautologías de la Tabla I.1.2, se verifica

$$P \to Q \;\Leftrightarrow\; \neg Q \to \neg P$$
$$Q \to P \;\Leftrightarrow\; \neg P \to \neg Q$$
$$P \leftrightarrow Q \;\Leftrightarrow\; Q \leftrightarrow P \;\Leftrightarrow\; \neg P \leftrightarrow \neg Q \;\Leftrightarrow\; \neg Q \leftrightarrow \neg P$$

Por ello, y según las definiciones anteriores, entre dos proposiciones P y Q y sus negaciones existen cuatro teoremas: directo, recíproco, contrario y contrarrecíproco. Si se verifica el directo

$$P \Rightarrow Q$$

se verifica el contrarrecíproco

$$\neg Q \Rightarrow \neg P$$

y al revés; la misma relación hay entre los teoremas recíproco y contrario. De las cuatro equivalencias posibles entre dos proposiciones y su negaciones, la verificación de una cualquiera lleva consigo la verificación de las otras tres.

Para demostrar una implicación bastaría con construir la correspondiente tabla de verdad aunque, si la fórmula contiene muchos átomos, puede ser impracticable. Vamos a ver otro procedimiento de demostración que se basa en las siguientes propiedades:

1) Propiedad de instanciación de una implicación. Sean P y Q dos fórmulas y P' y Q' las fórmulas que se obtienen al sustituir, simultáneamente, símbolos de proposición en P y Q, por cualquier otra fórmula. Si $P \Rightarrow Q$, entonces $P' \Rightarrow Q'$.

Por ejemplo, como $A \wedge B \Rightarrow A$, sustituyendo el átomo A por la fórmula $R \to \neg S$ y B por $\neg R$, es cierta la implicación $(R \to \neg S) \wedge (\neg R) \Rightarrow (R \to \neg S)$.

2) La propiedad de compatibilidad respecto disyunción la de conjunción. Si P, P', Q y Q' son fórmulas tales que $P \Rightarrow P'$ y $Q \Rightarrow Q'$, entonces

$$P \vee Q \Rightarrow P' \vee Q'$$
$$P \wedge Q \Rightarrow P' \wedge Q'$$

Por ejemplo como $P \Rightarrow P \vee \neg Q$ y $Q \wedge R \Rightarrow Q$, la propiedad de compatibilidad nos asegura la implicación $P \vee (Q \wedge R) \Rightarrow (P \vee \neg Q) \vee Q$.

3) Propiedad de transitividad. Si una fórmula, P_1, implica una segunda fórmula, P_2, y ésta segunda implica una tercera, P_3, entonces la primera , P_1, implica la tercera, P_3.

Por ejemplo, sabiendo que $P \wedge Q \Rightarrow Q$ y que $Q \Rightarrow Q \vee R$, la regla de transitividad asegura la implicación $P \wedge Q \Rightarrow Q \vee R$.

La demostración de una implicación consiste en ir combinando estas propiedades de manera adecuada, aunque no siempre será fácil adivinar que pasos serán necesarios para probarla.

Ejemplo I.3.2

Veamos como probar la implicación

$$(P \wedge S) \wedge ((P \wedge S) \rightarrow Q) \wedge R \;\Rightarrow\; \neg(Q \rightarrow \neg R)$$

De la propiedad de instanciación y de la implicación $A \wedge (A \rightarrow B) \;\Rightarrow\; B$, sustituyendo A por $(P \wedge S)$ y B por Q tenemos la implicación

$$(P \wedge S) \wedge ((P \wedge S) \rightarrow Q) \;\Rightarrow\; Q$$

De la implicación $Q \;\Rightarrow \neg\neg Q$ y la propiedad transitiva obtenemos

$$(P \wedge S) \wedge ((P \wedge S) \rightarrow Q) \;\Rightarrow\; \neg\neg Q$$

De la implicación $R \;\Rightarrow \neg\neg R$ y la propiedad de compatibilidad obtenemos

$$(P \wedge S) \wedge ((P \wedge S) \rightarrow Q) \wedge R \;\Rightarrow\; \neg\neg Q \wedge \neg\neg R$$

De la implicación $\neg A \wedge \neg B \Rightarrow \neg(A \vee B)$ y la propiedades de instanciación y transitiva obtenemos

$$(P \wedge S) \wedge ((P \wedge S) \rightarrow Q) \wedge R \;\Rightarrow\; \neg(\neg Q \vee \neg R)$$

De la implicación $\neg A \vee B \Rightarrow A \rightarrow B$ obtenemos finalmente

$$(P \wedge S) \wedge ((P \wedge S) \rightarrow Q) \wedge R \;\Rightarrow\; \neg(Q \rightarrow \neg R)$$

Análogamente, para demostrar una equivalencia haremos uso de las siguientes propiedades:

1) Propiedad de instanciación de una equivalencia. Sean P y Q dos fórmulas y P' y Q' las fórmulas que se obtienen al sustituir, simultáneamente, símbolos de proposición en P y Q, por cualquier otra fórmula. Si $P \;\Leftrightarrow\; Q$, entonces $P' \;\Leftrightarrow\; Q'$.

Por ejemplo, como $A \wedge \neg B \;\Leftrightarrow\; \neg(A \rightarrow B)$, sustituyendo el átomo A por la fórmula $R \rightarrow \neg S$ y B por $\neg R$, es cierta la implicación $(R \rightarrow \neg S) \wedge (\neg(\neg R)) \;\Leftrightarrow\; \neg((R \rightarrow \neg S) \rightarrow (\neg R))$.

2) La propiedad de compatibilidad respecto disyunción la de conjunción. Si P, P', Q y Q' son fórmulas tales que $P \;\Leftrightarrow\; P'$ y $Q \;\Leftrightarrow\; Q'$, entonces

$$\neg P \;\Leftrightarrow\; \neg P'$$
$$P \vee Q \;\Leftrightarrow\; P' \vee Q'$$
$$P \wedge Q \;\Leftrightarrow\; P' \wedge Q'$$
$$P \rightarrow Q \;\Leftrightarrow\; P' \rightarrow Q'$$
$$P \leftrightarrow Q \;\Leftrightarrow\; P' \leftrightarrow Q'$$

Por ejemplo como $P \rightarrow Q \;\Leftrightarrow\; \neg P \vee Q$, la propiedad de compatibilidad asegura la equivalencia $\neg(P \rightarrow Q) \;\Leftrightarrow\; \neg(\neg P \vee Q)$.

3) Propiedad de transitividad. Si una fórmula, P_1, equivale a una segunda fórmula, P_2, y ésta segunda equivale a una tercera, P_3, entonces la primera , P_1, equivale la tercera, P_3.

Por ejemplo, sabiendo que $\neg(P \to Q) \Leftrightarrow \neg(\neg P \vee Q)$ y que $\neg(\neg P \vee Q) \Leftrightarrow P \wedge \neg Q$, la regla de transitividad asegura la equivalencia $\neg(P \to Q) \Leftrightarrow P \wedge \neg Q$.

Al igual que en el caso de una implicación, la demostración de una equivalencia consiste en ir combinando estas propiedades de manera adecuada, aunque no siempre será fácil adivinar que pasos serán necesarios para probarla.

Ejercicios

I.3. Averiguar si la fórmula $\neg(A \to B) \vee \neg(B \to C) \to \neg(C \to D) \wedge \neg(D \to E)$ implica la $A \to C$.

I.4 .- Ordenar las siguientes fórmulas de tal manera que cada una de ellas implique todas las que siguen

a) $\neg P \leftrightarrow Q$

b) $P \to (\neg P \to Q)$

c) $\neg(P \to (Q \to P))$

d) $P \vee Q$

e) $\neg P \wedge Q$

I.4.- FORMAS NORMALES

Otro procedimiento para probar una implicación o una equivalencia se basa en las denominadas formas normales de una fórmula. Se ha comentado antes que existen 16 posibles conectores entre dos proposiciones, por lo cual parece arbitrario elegir los definidos antes. Ahora bien, cualquier fórmula es posible expresarla de forma equivalente con los conectores puede expresarse mediante $\neg$, $\vee$ y $\wedge$. Por ejemplo, el condicional puede expresarse en términos de $\neg$ y $\vee$ ya que de acuerdo con las tautologías de la Tabla I.1.2 se obtiene

$$P \to Q \Leftrightarrow \neg P \vee Q$$

Diremos que una fórmula P está en ***forma conjuntiva*** (f.c.) si es de la forma

$$P_1 \wedge P_2 \wedge ... \wedge P_n$$

siendo P_1, P_2, ..., P_n disyunciones de átomos o negaciones de átomos. Cada una de estas disyunciones se denomina ***cláusula***. Si en cada cláusula aparecen todos los átomos, o sus negaciones, la forma normal se denomina ***forma normal conjuntiva.*** Análogamente, una formula P está en ***forma disyuntiva*** (f.d.) si es de la forma

$$P_1 \vee P_2 \vee ... \vee P_n$$

siendo P_1, P_2, ..., P_n conjunciones de átomos, o negaciones de átomos, y se denominan

cláusulas. Si en cada cláusula aparecen todos los átomos, o sus negaciones, la forma normal se denomina ***forma normal disyuntiva*.**

Toda fórmula es posible pasarla a forma normal, es decir, toda fórmula es equivalente a otra en forma normal, conjuntiva o disyuntiva. El proceso de transformación es como sigue:

1) Las equivalencias

$$P \leftrightarrow Q \;\Leftrightarrow\; (P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P)$$
$$P \rightarrow Q \;\Leftrightarrow\; \neg P \vee Q$$

permiten eliminar los conectores $\leftrightarrow$ y $\rightarrow$.

2) Las equivalencias

$$\neg(\neg P) \;\Leftrightarrow\; P$$
$$\neg(P \vee Q) \;\Leftrightarrow\; \neg P \wedge \neg Q$$
$$\neg(P \wedge Q) \;\Leftrightarrow\; \neg P \vee \neg Q$$

permiten que toda negación afecte sólamente a un átomo.

3) Las leyes conmutativa, asociativa y distributiva permiten expresar la fórmula como conjunción de cláusulas disyuntivas o disyunción de cláusulas conjuntivas.

4) Para obtener la correspondiente forma normal basta usar las equivalencias

$$P \vee P \;\Leftrightarrow\; P$$
$$P \;\Leftrightarrow\; (P \wedge Q) \vee (P \wedge \neg Q)$$
$$P \wedge P \;\Leftrightarrow\; P$$
$$P \;\Leftrightarrow\; (P \vee Q) \wedge (P \vee \neg Q)$$

Ejemplo I.4.1

El proceso de transformación de la fórmula $(P \wedge (Q \rightarrow R)) \rightarrow S$ a forma conjuntiva es como sigue:

$$\begin{aligned}
(P \wedge (Q \rightarrow R)) \rightarrow S &\;\Leftrightarrow\; (P \wedge (\neg Q \vee R)) \rightarrow S \\
&\;\Leftrightarrow\; \neg(P \wedge (\neg Q \vee R)) \vee S \\
&\;\Leftrightarrow\; (\neg P \vee \neg(\neg Q \vee R)) \vee S \\
&\;\Leftrightarrow\; (\neg P \vee (Q \wedge \neg R)) \vee S \\
&\;\Leftrightarrow\; ((\neg P \vee Q) \wedge (\neg P \vee \neg R)) \vee S \\
&\;\Leftrightarrow\; S \vee ((\neg P \vee Q) \wedge (\neg P \vee \neg R)) \\
&\;\Leftrightarrow\; (S \vee \neg P \vee Q) \wedge (S \vee \neg P \vee \neg R)
\end{aligned}$$

y para conseguir la forma normal

$$\Leftrightarrow\ (S \vee \neg P \vee Q \vee R) \wedge (S \vee \neg P \vee Q \vee \neg R) \wedge$$
$$(S \vee \neg P \vee Q \vee \neg R) \wedge (S \vee \neg P \vee \neg Q \vee \neg R)$$
$$\Leftrightarrow\ (S \vee \neg P \vee Q \vee R) \wedge (S \vee \neg P \vee Q \vee \neg R) \wedge (S \vee \neg P \vee \neg Q \vee \neg R)$$

Dos formas normales conjuntivas de una misma fórmula se diferencian únicamente en el orden de las clausulas y, dentro de éstas, en el orden de los literales, y lo mismo con las formas normales disyuntivas. Este hecho permite hablar de la forma normal disyuntiva y de la forma normal conjuntiva de una fórmula.

La demostración de una implicación por formas normales, consiste en obtener una forma normal (disyuntiva o conjuntiva) de la hipótesis y de la tesis y a continuación compararlas teniendo en cuenta las implicaciones $P \wedge Q \Rightarrow P$ y $P \Rightarrow P \vee Q$. Si hemos utilizado la forma normal conjuntiva, la hipótesis implica la tesis si la hipótesis contiene todas las cláusulas de la tesis; si hemos utilizado la forma normal disyuntiva, la hipótesis implica la tesis si todas las cláusulas de la hipótesis están en la tesis.

La demostración de una equivalencia por formas normales, consiste en obtener una forma normal (disyuntiva o conjuntiva) de la hipótesis y de la tesis y a continuación compararlas para ver si tienen las mismas cláusulas (salvo el orden).

Ejemplo I.4.2

Para probar la implicación

$$((P \wedge (Q \rightarrow R)) \rightarrow S) \Rightarrow ((P \wedge \neg S) \rightarrow Q)$$

debemos obtener las formas normales conjuntivas de ambas fórmulas. La de la hipótesis se ha obtenido en el Ejemplo I.4.1 y la de la tesis es

$$((P \wedge \neg S) \rightarrow Q) \Leftrightarrow \neg(P \wedge \neg S) \vee Q \Leftrightarrow (\neg P \vee S \vee Q) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (\neg P \vee S \vee Q \vee R) \wedge (\neg P \vee S \vee Q \vee \neg R)$$

y la implicación es verdadera pues las cláusulas de la hipótesis contienen las de la tesis.

Ejercicios

I.5.- Pasar a forma normal conjuntiva la formula proposicional

$$(\neg(P \wedge Q) \rightarrow (Q \vee R)) \leftrightarrow \neg P \rightarrow ((R \wedge S) \rightarrow P)$$

I.6. Demostrar

$$(\neg A \rightarrow B \wedge \neg C) \wedge (D \wedge \neg C \rightarrow A) \wedge (A \wedge D \rightarrow \neg B) \Rightarrow D \rightarrow A \wedge \neg B$$

I.5.- INFERENCIA LOGICA EN EL CALCULO DE PROPOSICIONES

Un tipo de fórmula establece lo que de forma intuitiva son relaciones de causa-efecto entre proposiciones, es decir, cómo los valores de una proposición dependen de los valores de otras.

Consideremos una fórmula del tipo

$$(A_1 \wedge ... \wedge A_n) \rightarrow T$$

donde A_1,...,A_n y T son fórmulas. Si es una tautología, es decir si es cierto el teorema

$$(A_1 \wedge ... \wedge A_n) \Rightarrow T$$

decimos que T es ***consecuencia lógica*** de A_1,..., A_n o que T se ***infiere*** o se ***deduce*** de A_1,..., A_n o que la implicación define un ***esquema lógico*** válido. Las fórmulas A_1,..., A_n. se denominan ***premisas*** y T ***conclusión***. Si la fórmula no es una tautología, decimos que T no es consecuencia lógica de A_1,... y A_n o que el esquema lógico es inválido. Una sola fórmula T también determina un esquema lógico; pero es un esquema lógico sin premisas.

Cualquiera de las interpretaciones verdaderas de la fórmula se denomina un ***ejemplo*** o modelo del esquema lógico. En el caso de un esquema lógico incorrecto, cualquiera de las interpretaciones falsas de la fórmula que lo determina lo que se llama un ***contraejemplo*** del esquema lógico. Por eso un esquema lógico es correcto si únicamente tiene ejemplos y no tiene ningún contraejemplo y es incorrecto si tiene por lo menos un contraejemplo, aunque pueda tener ejemplos. Demostrar que un esquema lógico es correcto es demostrar que únicamente tiene ejemplos y no tiene ningún contraejemplo. No es suficiente dar ejemplos para demostrar que el esquema lógico es correcto; es necesario demostrar que no tiene ningún contraejemplo. Demostrar que un esquema lógico no es correcto es demostrar que tiene por lo menos un contraejemplo.

Ejemplo I.5.1

Averigüemos si a partir del discurso

> "Si llego tarde a clase los alumnos armarán un gran ruido. Cuando esto ocurre el jefe de estudios castiga sin recreo a los más alborotadores. El lunes pasado éstos fueron castigados a la hora del recreo".

puede obtenerse como conclusión

"El pasado lunes llegué tarde a clase"

Hagamos P : "Llego tarde a clase", Q : "Los alumnos arman ruido", R : "El jefe de estudios castiga sin recreo a los más alborotadores", con lo que el discurso tiene la fórmula $(P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow R) \wedge R$. Por ello, lo que queremos averiguar es si es correcto el esquema lógico

$$((P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow R) \wedge R) \Rightarrow P$$

para lo que basta construir la tabla de verdad del condicional

$((P \to Q) \wedge (Q \to R) \wedge R) \to P$										
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	0	1	0	0	0	0	1	1
1	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	0	1	0	0	0	1	1
0	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0
0	1	1	0	1	0	0	0	0	1	0
0	1	0	1	0	1	1	1	1	0	0
0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0

y verificar que no es una tautología; por lo tanto, de las premisas establecidas no puede deducirse la conclusión: "El lunes llegué tarde a clase".

Cuando el número de átomos no es pequeño, la construcción de la tabla de verdad es impracticable y, en este caso, una demostración se puede hacer simplemente encontrando una interpretación falsa.

Ejemplo I.5.2

El esquema lógico de premisas

$$(P \to (Q \vee R)) \wedge ((R \wedge S) \to Q) \wedge (Q \to P) \Rightarrow (P \to R)$$

no es correcto como prueba la interpretación que se obtiene dando a P el valor 1, a Q el valor 1, a R el valor 0 y a S el valor 1.

Demostrar una inferencia no es más que demostrar una implicación, para lo que se puede recurrir a los procedimientos vistos en la Sección anterior: comparar las formas normales de las premisas y la conclusión, lo que es en general muy incómodo en cuanto sea un poco grande el número de átomos, o utilizar convenientemente las propiedades de la implicación. Para facilitar la utilización apropiada de estas propiedades se establecen unas reglas generales que describen situaciones repetidas en estos procesos y son elementos que, usados de forma consecutiva y conveniente, permiten llegar de las premisas a la conclusión. Las principales figuran en la Tabla I.5.1

TABLA I.5.1

Reglas de inferencia

1) Modus Ponendo Ponens MPP : $(P \wedge (P \to Q) \Rightarrow Q$

2) Modus Tollendo Tollens MTT : $(\neg Q \wedge (P \to Q)) \Rightarrow \neg P$

3) Modus Ponendo Tollens MPT : $(P \wedge \neg(P \wedge Q)) \Rightarrow \neg Q$

4) Modus Tollendo Ponens MTP : $(\neg P \wedge (P \vee Q)) \Rightarrow Q$

5) Silogismo hipotético SH : $((P \to Q) \wedge (Q \to R)) \Rightarrow (P \to R)$

6) Silogismo disyuntivo SD : $((P \to R) \wedge (Q \to S) \wedge (P \vee Q)) \Rightarrow (R \vee S)$

7) Adición A : $P \Rightarrow (P \vee Q)$

8) Simplificación S : $(P \wedge Q) \Rightarrow P$; $(P \wedge Q) \Rightarrow Q$

9) Disyunción D : $((P \to Q) \wedge (\neg P \to Q)) \Rightarrow Q$

10) Resolución R: $((P \vee Q) \wedge (R \vee \neg Q)) \Rightarrow P \vee R$

11) Contraposición C : $(P \to Q) \Rightarrow (\neg Q \to \neg P)$

12) Doble negación DN : $P \Rightarrow \neg(\neg P)$; $\neg(\neg P) \Rightarrow P$

13) Conmutatividad CM : $(P \wedge Q) \Rightarrow (Q \wedge P)$; $(P \vee Q) \Rightarrow (Q \vee P)$

14) $(P \wedge ((P \wedge \neg Q) \to \mathbb{C})) \Rightarrow Q$

Para demostrarlas basta construir las correspondientes tablas de verdad y probar que los condicionales correspondientes son tautologías. Además, cualquier implicación demostrada es válida como regla de inferencia, p.ej., son reglas de inferencia

$$\neg(P \vee Q) \Rightarrow (\neg P \wedge \neg Q) \qquad\qquad (\neg P \wedge \neg Q) \Rightarrow \neg(P \vee Q)$$

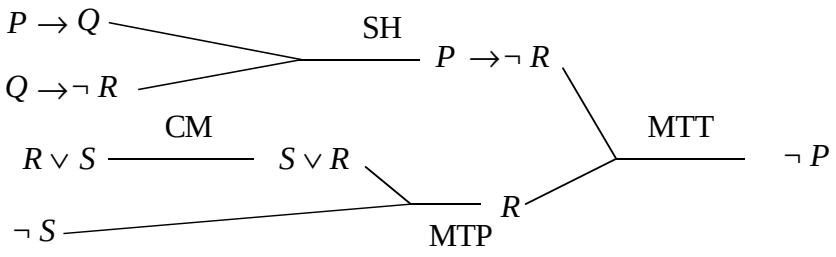
aunque las más usadas, muchas de ellas con nombre propio, son las anteriores. Aplicando estas reglas de modo consecutivo y conveniente es posible llegar a una conclusión o conclusiones a partir de un determinado conjunto de premisas.

Ejemplo I.5.3

Observemos qué conclusión puede extraerse del siguiente discurso:

"Si las ballenas son peces entonces viven en el agua y, debido a esto, su sangre es caliente. Las ballenas tienen la sangre fría o vuelan pero las ballenas no vuelan".

Denotando por P : "Las ballenas son peces", Q : "Las ballenas viven en el agua", R : "Las ballenas tienen la sangre fría" y S : "Las ballenas vuelan", podemos establecer las siguientes fórmulas como premisas y, mediante las reglas anteriores, llegar a la conclusión



"Las ballenas no son peces"

Cuando de un sistema de premisas obtenemos una contradicción decimos que el sistema es ***inconsistente***.

Ejemplo I.5.4

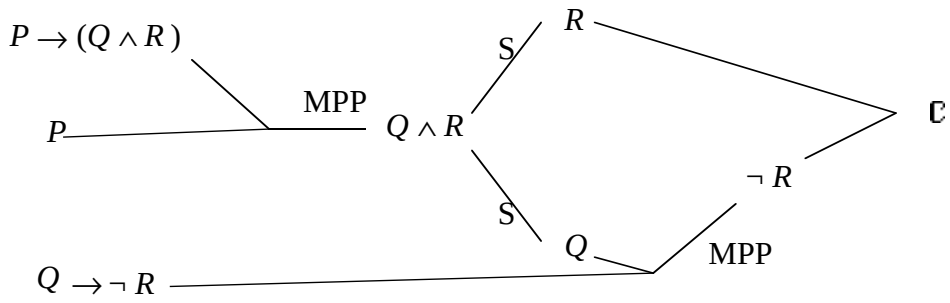
Del discurso

> "Si vamos al cine nos aburrimos y gastamos más dinero de lo habitual; pero cuando nos aburrimos gastamos menos dinero. Vamos al cine"

pasando a la fórmula, haciendo

P : "Vamos al cine" Q : "Nos aburrimos" R : "Gastamos más dinero"

llegamos a una contradicción



El proceso de demostración de un esquema deductivo mediante las reglas de inferencia tiene el inconveniente de tener que decidir en cada paso cuál o cuáles son las reglas apropiadas de aplicación, lo cual tiene una fuerte carga subjetiva y de prueba y error. Sin embargo, existe otro procedimiento que se basa en sólamente una de las reglas de inferencia, la de resolución, aplicada a un esquema deductivo puesto en una forma estándar equivalente y es de aplicación más sistemática.

Un esquema lógico diremos que está en forma estándar si todas las premisas son cláusulas disyuntivas y las conclusión es una contradicción. Como la fórmula $P \to Q$ es equivalente a la $(P \wedge \neg Q) \to \mathbb{C}$, entonces para obtener la forma standard de un esquema lógico primero negaremos la conclusión y esta conclusión negada la añadiremos a las premisas poniendo como nueva conclusión la contradicción, pues las fórmulas

$$(A_1 \wedge ... \wedge A_n) \rightarrow T \qquad\qquad (A_1 \wedge ... \wedge A_n) \wedge \neg T \rightarrow \mathbb{C}$$

son equivalentes. Aplicaremos ahora a cada una de las premisas (incluyendo la negación de la conclusión) la técnica para pasarlas a forma conjuntiva. No hace falta que estas formas conjuntivas sean formas normales. En virtud de la compatibilidad de la conjunción respecto a la equivalencia, las premisas se pueden tratar por separado. Aplicaremos ahora la técnica llamada de ***resolución*.**

Diremos que dos cláusulas son ***resolubles*** si tienen un átomo en común que en una esté con negación y en la otra no; en este caso utilizando las reglas de inferencia

$$\begin{aligned} (P \vee Q) \wedge (R \vee \neg Q) &\Rightarrow (P \vee R) \\ (P \vee Q) \wedge (P \vee \neg Q) &\Rightarrow P \\ (P \vee Q) \wedge (\neg Q) &\Rightarrow P \\ Q \wedge (\neg Q) &\Rightarrow \mathbb{C} \end{aligned}$$

se obtiene una nueva cláusula en la que no existe el átomo común. El proceso de obtener esta cláusula a partir de las dadas se denomina resolución. Por ello para llegar a la conclusión $\mathbb{C}$,

1) se fija una cláusula como inicial y se resuelve con una de las restantes, resoluble con ella,

2) cada cláusula intermedia obtenida en el proceso se resuelve con una de las iniciales o con otra cláusula obtenida antes, con la finalidad de ir eliminando átomos hasta llegar a la contradicción.

Ejemplo I.5.5

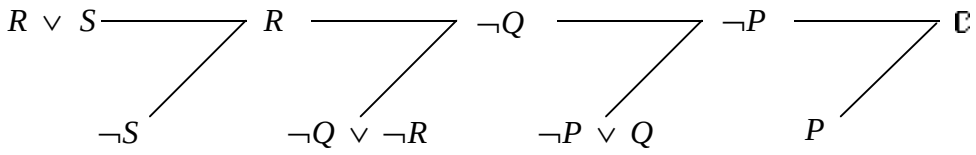
Volviendo sobre el ejemplo I.5.3 intentemos obtener la conclusión $\neg P$ a partir del conjunto de premisas dado. Para ello construimos la fórmula

$$(P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow \neg R) \wedge (R \vee S) \wedge \neg S \wedge \neg(\neg P)$$

que en forma conjuntiva es

$$(\neg P \vee Q) \wedge (\neg Q \vee \neg R) \wedge (R \vee S) \wedge \neg S \wedge P$$

Fijando como inicial la cláusula $R \vee S$, y eliminado sucesivamente los átomos S, R, Q y P, tenemos



y la fórmula es una contradicción, luego del sistema de premisas se deduce $\neg P$.

La parte de la Lógica vista hasta ahora se denomina cálculo de proposiciones pues el objeto

de estudio es la proposición y, a través de ella, las fórmulas que representan la estructura de proposiciones complejas. Sin embargo lo visto hasta aquí no es suficiente pues una deducción intuitivamente clara tal como

"Todo hombre es mortal. Sócrates es hombre, luego Sócrates es mortal"

no puede obtenerse por los medios desarrollados hasta ahora ya que en ella no pueden identificarse negaciones, ni conjunciones ni condicionales, pero es evidente que las premisas y conclusión están muy relacionadas. Estructuras como "Todo hombre es mortal" o "existe algún hombre llamado Sócrates" son el objeto de estudio del cálculo de predicados que iniciamos en las próximas Secciones, junto con una exposición intuitiva de la teoría de conjuntos.

Ejercicios

I.7.- Demostrar la invalidez del razonamiento siguiente:

$$(P \wedge Q\,) \wedge (M \rightarrow (R \wedge S)) \wedge (S \rightarrow (T \wedge \neg Q)) \;\Rightarrow\; \neg(P \wedge M)$$

I.8.- Demostrar que el esquema lógico que a continuación se indica es incorrecto:

$$(R \rightarrow (P \wedge \neg Q\,)) \wedge (\neg S \rightarrow (\neg T \vee U\,)) \wedge \neg(S \wedge \neg R) \wedge (T \rightarrow (S \wedge \neg U)) \;\Rightarrow \neg T \rightarrow (S \vee \neg R\,)$$

I.9.- Demostrar la validez del siguiente razonamiento:

$$(P \vee \neg Q \rightarrow R \vee M) \wedge (R \rightarrow T \vee S) \wedge (N \rightarrow S) \wedge (M \wedge \neg R \rightarrow N) \;\Rightarrow \\ \Rightarrow \neg P \rightarrow (\neg(Q \;\vee R) \rightarrow T \vee S)$$

I.10.- Averiguar si $(\neg P \leftrightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow \neg R) \wedge R \;\Rightarrow\; P \wedge \neg Q$

I.11.- Averiguar si es cierto el siguiente razonamiento: Si el jueves voy a Platea y el viernes voy a La Sala, entonces el sábado voy al cine; el sábado no fui al cine y el viernes fui a La Sala, luego el jueves no fui a Platea.

I.12.- Formalizar y demostrar: Cuando me deprimo, como níscalos y arenques; cuando como arenques, tengo sed y frío; tanto si tengo frío como si tengo sed, en ambos casos, como galletas; cuando como galletas, si tengo sed, no como arenques; por tanto, cuando como arenques, no como galletas y no me deprimo.

I.6.- CONJUNTOS

Empezaremos introduciendo tres conceptos primitivos, que no intentaremos definir, y que, aparentemente, tienen un significado claro e inmediato. Estos son

a) ***Conjunto*** : como agrupación de objetos o en palabras del creador de la teoría, Cantor, "cualquier colección de objetos determinados y bien distintos en nuestra percepción o pensamiento, reunidos en un todo", p.ej., el conjunto de árboles de un bosque, el conjunto de las letras del alfabeto, ... etc.

b) ***Elemento*** : como cada uno de los objetos que constituyen un conjunto.

c) ***Pertenencia*** : que relaciona los elementos con el conjunto que forman.

Con el fin de escribir estos conceptos en forma simbólica tenderemos a utilizar letras minúsculas para los elementos, mayúsculas para los conjuntos y un símbolo especial para la pertenencia. De modo que el hecho de que *a* sea un elemento del conjunto *A*, se escribirá

$$a \in A$$

que se lee "*a* pertenece a *A*" y si por el contrario escribimos

$$b \notin A$$

leeremos "*b* no pertenece a *A*", es decir, el objeto *b* no es un elemento del conjunto *A*. Es importante notar que un conjunto puede, a su vez, ser elemento de otro conjunto, pues el concepto de elemento no se refiere al objeto aislado, sino en relación con su pertenencia a un conjunto, de modo que las tres nociones primarias están ligadas entre sí.

Ejemplo I.6.1

El conjunto *S* de los números naturales menores que 6, está formado por los números 0,1,2,3,4 y 5 lo que se indicará con el símbolo

$$S = \{0,1,2,3,4,5\}$$

verificándose que $0 \in S$ y $7 \notin S$. Sin embargo, es falso que $\{0\} \in S$ dada la distinción existente entre el 0 como elemento del conjunto *S* y el conjunto que podemos formar con el 0 como único elemento; aunque todo conjunto puede ser elemento de otro y así, si definimos como conjunto *T*

$$T = \{0,1,2,3,4,5,\{0\}\}$$

podemos escribir que $0 \in T$ y $\{0\} \in T$

La noción primaria de conjunto tal como la definió Cantor es demasiado amplia, como se verá a continuación. Podemos considerar como conjunto el de los números naturales **N**, pues aunque, obviamente, no podamos escribir todos sus elementos, dado un objeto podemos saber si pertenece o no a **N**, p.ej. 4352 es un número natural y no lo es 1'32, ni un segmento, ni una silla. Sin embargo, definiendo el conjunto *C* cuyos elementos son los conjuntos que no se pertenecen a sí mismos como elementos se llega a la llamada paradoja de Russell, que hace tambalear la noción primaria de conjunto, tal como se ha establecido. En efecto, tenemos, por ejemplo

$$\{1,2\} \in C$$

pues los elementos de {1,2} son el 1 y el 2 y no el propio {1,2}; podemos preguntarnos si

$$C \in C \quad \text{o} \quad C \notin C$$

Si $C \notin C$, *C* sería un conjunto que no se pertenece a sí mismo como elemento y, por tanto

$C \in C$; si $C \in C$, C sería un conjunto que se pertenece a sí mismo como elemento, es decir $C \notin C$. Hacer frente a estos resultados paradójicos, exige un planteamiento de la teoría de conjuntos diferente y mucho más preciso del que hemos abordado. Pero salvo esta paradoja, y otras análogas a élla, nuestro concepto primario de conjunto es lo suficientemente simple y general para los conjuntos que se manejarán; y por ello vamos a prescindir de más consideraciones y se seguirá con el desarrollo intuitivo.

Dos relaciones importantes entre conjuntos son la igualdad y la inclusión. Dos conjuntos A y B son ***iguales*** si y sólo si tienen los mismos elementos, en cuyo caso se escribirá $A = B$; en caso contrario se escribe $A \neq B$.

Un conjunto A está ***contenido*** o ***incluído*** en otro B (o es un ***subconjunto*** o ***parte*** de B) si y sólo si, todos los elementos de A pertenecen a B, en cuyo caso se escribirá $A \subseteq B$ y, en caso contrario $A \not\subset B$. La relación $A \subset B$ significa ($A \subseteq B \ \wedge \ A \neq B$) y se denomina ***inclusión estricta***. De estas definiciones, se obtienen las propiedades de la Tabla I.6.1

TABLA I.6.1

Propiedades de la igualdad e inclusión de conjuntos

Reflexiva :	$A = A$ y $A \subseteq A$
Simétrica :	$A = B \Rightarrow B = A$
Antisimétrica :	$(A \subseteq B \wedge B \subseteq A) \Leftrightarrow A = B$
Transitiva :	$(A = B \wedge B = C) \Rightarrow A = C$
	$A \subseteq B$ y $B \subseteq C$ implican $A \subseteq C$

Por ejemplo, la transitiva de la inclusión resulta de considerar que si $A \subseteq B$, entonces los elementos de A pertenecen a B; y si $B \subseteq C$, los elementos de B, y por tanto los de A, pertenecen a C; luego, $A \subseteq C$.

Un conjunto viene determinado por los elementos que lo componen por lo que una manera de definir un conjunto, consiste en escribir todos sus elementos; se denomina ***definición por extensión***, y es la que hemos utilizado en el Ejemplo I.6.1. Los conjuntos formados por un solo elemento se denominan ***conjuntos unitarios***. El conjunto sin ningún elemento recibe el nombre de ***conjunto vacío*** y se representa mediante el símbolo Ø. Según la definición de la inclusión, si A es un conjunto cualquiera, la proposición

$$\emptyset \not\subset A$$

es falsa, ya que, si fuera verdadera, habría algún elemento de Ø que no sería elemento de A, cosa imposible pues no tiene ningún elemento. Según los principios de no contradicción y del tercio excluído es verdadera la proposición

$$\emptyset \subseteq A$$

La definición por extensión es, cuando menos, incómoda si el conjunto tiene bastantes elementos, e impracticable si se trata de conjuntos infinitos (en el sentido intuitivo del término). Es necesario establecer otra forma de definir conjuntos mediante propiedades que verifiquen sus elementos.

I.7.- PREDICADOS, CUANTIFICADORES Y FORMULAS

Si decimos "4 es menor que 5" hemos enunciado una proposición, verdadera en este caso. Si decimos

"*x* es menor que 5"

no expresamos ninguna proposición, ya que esta frase no tiene sentido hasta que no convengamos sobre el significado de *x*. A *x* la denominamos ***variable*** que, a diferencia de una ***constante*** que es un elemento fijo de un conjunto, representa a los elementos de un conjunto dado, p.ej.

$$E = \{3,4,5,6\}$$

con lo cual la frase anterior es capaz de generar las proposiciones siguientes

"3 es menor que 5"

"4 es menor que 5"

"5 es menor que 5"

"6 es menor que 5"

verdaderas las dos primeras y falsas las otras dos.

Dado un conjunto *E* se denomina ***función proposicional*** o ***predicado en una variable*** *x* que toma valores de *E*, a una propiedad en la que interviene *x*, de forma que al sustituirla por cada elemento de *E* se obtiene una proposición.

En esta definición intervienen tres objetos

a) un ***predicado***, o frase que expresa una propiedad,

b) una variable que toma como valores los elementos de un conjunto,

c) este conjunto, denominado ***conjunto referencial***, de los valores de la variable.

Si en la frase "*x* es menor que *y*" sustituímos *x* e *y* por elementos de dos conjuntos referenciales, que eventualmente pueden coincidir, obtendremos proposiciones, por lo cual la frase anterior recibe también el nombre de ***función proposicional*** o ***predicado en dos variables***. La generalización a más variables es natural. Una proposición es un predicado en 0 variables.

Representaremos un predicado, determinado aunque no precisado, mediante una letra latina

mayúscula seguida del nombre o nombres de las variables entre paréntesis

$$P(x) \qquad\qquad Q(x,y,z,t)$$

donde P y Q representan la propiedad. No hay ninguna norma específica para determinar la estructura de un predicado, excepto el sentido común y el requisito de coherencia entre diferentes representaciones.

Como el resultado de sustituir las variables por constantes en un predicado es una proposición, se pueden utilizar los conectores lógicos para construir predicados a partir de otros

$$\neg P(x) \qquad P(x) \wedge Q(x) \qquad P(x) \vee Q(x) \qquad P(x) \rightarrow Q(x) \qquad P(x) \leftrightarrow Q(x)$$

y así, por ejemplo, $P(x) \wedge Q(x)$ es un predicado pues si si x toma el valor $a \in E$, entonces da lugar a la proposición

$$P(a) \wedge Q(a)$$

Precisaremos más adelante el importante concepto de fórmulas en las que intervienen predicados conectados.

Ejemplo I.7.1

Sea el referencial $E = \{1,2,3,4\}$ y los predicados

$P(x)$: "x es menor que 3" $\qquad\qquad$ $Q(x,y)$: "$x+y = 5$"

El predicado

"Si x es menor que 3, entonces $x+y = 5$"

da lugar a 16 proposiciones

"Si 1 es menor que 3, entonces 1+1 = 5"

. . . . . .

"Si 4 es menor que 3, entonces 4+4 = 5"

de las que algunas serán verdaderas como

"Si 1 es menor que 3, entonces 1+4 = 5"

y otras falsas como

"Si 1 es menor que 3, entonces 1+3 = 5"

Todo predicado, al estar definido sobre un referencial, define conjuntos, según vamos a ver a continuación. Dada una propiedad P y el predicado de una variable

$$P(x)$$

sobre un conjunto referencial E, a cada valor de la variable corresponde una proposición, verdadera o falsa, por lo cual es posible definir el conjunto A de los valores de la variable que dan lugar a proposiciones verdaderas o, como suele decirse, el conjunto de valores de la variable que verifican la propiedad P. Se expresa simbólicamente por

$$A = \{x \in E \mid P(x)\}$$

que es, obviamente, un subconjunto de E. Cada predicado sobre un cierto referencial define siempre un subconjunto de éste, y viceversa, dado el subconjunto

$$A \subseteq E$$

siempre podemos asociarle el predicado sobre el referencial E

$$A(x) : \ "x \in A\ "$$

Definir un conjunto mediante un predicado se llama ***definición por comprensión*** del conjunto; constituye la forma más común de hacerlo, excepto para conjuntos con muy pocos elementos, y será la que adoptaremos de aquí en adelante. Así, consideraremos siempre conjuntos que son subconjuntos de un referencial previo, lo que no quita ninguna generalidad a los resultados, ya que en cualquier rama de la Matemática siempre existe un conjunto básico al cual pertenecen los objetos que se manejan.

Ejercicios

I.13 .- Definir por extensión los siguientes conjuntos:

a) $A = \{a \in \mathbf{N} \mid 2 < a < 6\}$
b) $B = \{p \in \mathbf{N} \mid p < 10$, siendo p par$\}$
c) $C = \{x \in \mathbf{Z} \mid 2x^2+x-6 = 0\}$

I.14 .- Definir por comprensión los siguientes conjuntos:

a) $A = \{5, 10, 15, 20, 25, 30\}$
b) $B = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, ...\}$
c) $C = \{1, 4, 9, 16, 25, 36\}$

Puede ocurrir que al dar valores a la variable x, todas las proposiciones a que da lugar el predicado sean falsas, en cuyo caso el conjunto A no tendrá ningún elemento y entonces $P(x)$ define un conjunto vacío. Si U es un referencial, el conjunto $A = \{x \in U \mid x \notin U\}$ es un conjunto vacío. Muchos predicados pueden dar lugar a conjuntos vacíos que serán todos iguales por tener los mismos elementos (ninguno), y por ello siempre hablamos del conjunto vacío $\emptyset$.

Por el contrario, si para todos los valores de la variable el predicado da lugar a proposiciones todas ellas verdaderas, se indicará por

$$(\forall x \in E)\ P(x)$$

que se lee "para todo x de E se verifica P", donde el símbolo $\forall$ representa la expresión "para todo" y se llama ***cuantificador universal***. Si $E = \{x_1,...,x_n\}$ equivale a $P(x_1) \wedge ... \wedge P(x_n)$.

Si solo para algunos valores de la variable son verdaderas las proposiciones resultantes escribiremos

$$(\exists x \in E)\ P(x)$$

que se lee "existe algún x de E que verifica P" ydonde el símbolo $\exists$ representa la expresión "existe algún", denominándose ***cuantificador existencial***. Si $E = \{x_1,...,x_n\}$ equivale a $P(x_1) \vee ... \vee P(x_n)$.

Todo cuantificador lleva asociada una variable y un conjunto referencial y su alcance es el predicado sobre el que recae la acción del cuantificador y que viene despues de la variable delimitado por paréntesis.

Ejemplo I.7.2

a) la proposición "Todo el mundo odia a todo el mundo" es equivalente a "para todo x y para todo y, x odia a y" que se formaliza como $(\forall x \in H)(\forall y \in H)\ O(x,y)$,

b) la proposición "Todo el mundo odia a alguien" es equivalente a "para todo x existe y (tal que) x odia a y" que se formaliza como $(\forall x \in H)(\exists y \in H)\ O(x,y)$,

c) la proposición "Hay alguien a quien todo el mundo odia" es equivalente a "existe y (tal que) para todo x, x odia a y" que se formaliza como $(\exists y \in H)(\forall x \in H)\ O(x,y)$,

d) la proposición "Todo el mundo es odiado por alguien" es equivalente a "para todo y existe x (tal que) x odia a y" que se formaliza como $(\forall y \in H)(\exists x \in H)\ O(x,y)$,

e) la proposición "Hay alguien que odia a todo el mundo" es equivalente a "existe x (tal que) para todo y, x odia a y" que se formaliza como $(\exists x \in H)(\forall y \in H)\ O(x,y)$,

f) la proposición "Siempre hay alguien que odia a alguien" es equivalente a "existe x y existe y (tal que) x odia a y" que se formaliza como $(\exists x \in H)(\exists y \in H)\ O(x,y)$.

El Cálculo de Proposiciones se preocupa del significado de muy pocas palabras, como los conectores *no, y, o, si...entonces, si y sólo si*, con los que se formalizan algunas proposiciones complejas a las que es posible atribuir valores de verdad y que se juzgan como siempre verdaderas (las tautologías), siempre falsas (las contradicciones) o unas veces verdaderas y otras falsas (las contingencias). Sin embargo, esto sirve de poco para los enunciados en los que existen expresiones de relación como "todo el mundo ama a alguien" o "los amigos de mis amigos son amigos míos" para cuya formalización es necesario el uso de variables. Las variables no son más abstractas que los pronombres del lenguaje natural, con los que guardan un estrecho parecido conceptual análogo al que las constantes guardan con los nombres sustantivos. Las fórmulas complejas de este tipo se pueden construir a partir de fórmulas simples con la adición de conectores, términos que expresen relaciones, variables y cuantificadores que formalicen las expresiones *todo* o *algún*.

Vamos pues a considerar expresiones en las que van a intervenir cuantificadores, predicados, variables, constantes u otros símbolos y paréntesis. Por ejemplo

$$(\forall x \in E)\ P(x) \qquad (\forall y \in E)\ Q(x,y) \qquad (\exists x \in E)\ (\forall y \in U)\ P(x,y,z)$$

Estas expresiones van a constituir las fórmulas del cálculo de predicados, cuya definición veremos de un modo más formal a continuación.

En primer lugar, una variable que está en un cuantificador, o dentro del alcance de un cuantificador que utilice esta variable, se dice que presenta una ***ocurrencia ligada***; en caso contrario la ocurrencia se denomina ***ocurrencia libre***. Una variable es ***ligada*** en una fórmula si presenta al menos una ocurrencia ligada y análogamente una variable es ***libre*** cuando no es ligada. Por ejemplo, en las fórmulas anteriores x es una variable ligada en la primera y tercera fórmulas y libre en la segunda. En ésta, el símbolo x tanto puede ser considerado como una variable o una constante y será una u otra dependiendo si nuestra intención es cuantificarla posteriormente o no.

El alfabeto del cálculo de predicados es un conjunto finito de símbolos arbitrarios, que clasificamos en cuatro tipos diferentes: unos denominados constantes y otros variables, otros símbolos de función y otros símbolos de predicado. A cada símbolo de función f le asociamos un número natural n, mayor o igual que cero, denominado la "aridad", diciéndose que f es un símbolo de función n-aria. Una función 0-aria es un símbolo de constante. Como un predicado es de hecho una función de varias variables, que al aplicarla da lugar a una proposición, a cada símbolo de predicado P le asociamos un número natural n, mayor o igual que cero, denominado la "aridad", diciéndose que P es un símbolo de predicado n-ario. Un predicado 0-ario es un símbolo de proposición.

Combinando las las variables, constantes y las funciones entre sí y con la ayuda de los paréntesis, se forman secuencias de signos. De entre todas estas secuencias se distinguen unas denominadas ***términos*** de la lógica de predicados con funciones y que son las que se pueden construir a partir de la siguiente defición inductiva:

1) Una variable es un término.

2) Una constante es un término.

3) Si f es un símbolo de función n-aria y, $t_1,...,t_n$ son términos, entonces $f(t_1,...,t_n)$ es un término.

4) No hay más términos que los generados por 1), 2) y 3).

Sea el conjunto formado por los cinco conectores lógicos, los dos paréntesis (y) y los dos cuantificadores. Combinando estos símbolos con el alfabeto del cálculo de predicados podemos formar secuencias de símbolos. De entre todas estas secuencias se distinguen unas denominadas ***fórmulas*** bien formadas de la lógica de predicados que son las que se pueden construir a partir de la siguiente definición inductiva:

1) Si P es un símbolo de predicado n-ario y $t_1,...,\ t_n$ son términos, entonces $P(t_1,...,t_n)$ es una fórmula que se llama atómica o ***átomo*** de la lógica de predicados.

2) Si P y Q son fórmulas, entonces $\neg(P)$, $(P) \wedge (Q)$, $(P) \vee (Q)$, $(P) \rightarrow (Q)$, $(P) \leftrightarrow (Q)$ son fórmulas.

3) Si P es una fórmula y x es una variable libre en P, entonces $(\forall x)\,(P)$ y $(\exists x)\,(P)$ son fórmulas.

4) No hay más fórmulas que las creadas en el proceso anterior.

Una fórmula del cálculo proposicional es una fórmula del cálculo de predicados con 0 variables. Las reglas de restauración de paréntesis son análogas a las de la lógica de proposiciones.

Admitiremos que en las fórmulas del cálculo de predicados los conjuntos referenciales pueden explicitarse o bien, en muchos casos, ser omitidos, bien por que se deducen del contexto o bien porque todos se hacen iguales a un referencial muy amplio que los contiene a todos como el "conjunto de todos los objetos del universo".

Las fórmulas sin variables libres se llaman ***cerradas*** y ***abiertas*** si tienen variables libres; el número de variables libres se denomina "aridad" de la fórmula.

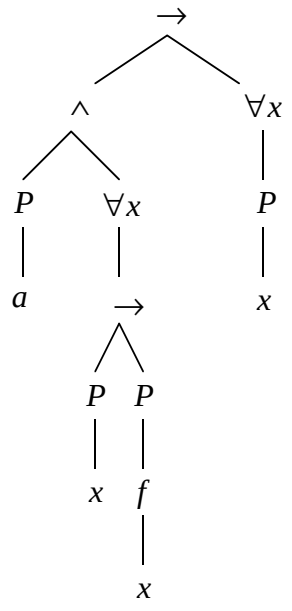
El ***árbol sintáctico*** de una fórmula del cálculo de predicados se construye poniendo como nodos los cuantificadores, los conectores, las funciones y los predicados. Las hojas son los átomos proposicionales, las variables y las constantes. De cada nodo parten hacia abajo (o hacia la derecha) las subfórmulas que son el alcance de cada cuantificador o cada conector o bien los átomos proposicionales, las variables o las constantes que son los argumentos de cada función o de cada predicado.

Ejemplo I.7.3

El árbol sintáctico de la fórmula

$$P(a) \wedge (\forall x \in U)\,(P(x) \rightarrow P(f(x))) \rightarrow (\forall x \in U)\,P(x)$$

es



Si en una fórmula se fijan los referenciales, los predicados, las funciones y se dan valores a las variables libres, se obtiene una ***interpretación*** de la fórmula, que puede ser lingüística, si el significado de los diversos símbolos se describe mediante conceptos expresables en el lenguaje natural. El resultado es una proposición, si la fórmula es cerrada, o un predicado, si la fórmula es abierta.

Ejemplo I.7.4

Para la fórmula

$$P(a) \wedge (\forall x \in U)\,(P(x) \rightarrow P(f(x))) \rightarrow (\forall x \in U)\,P(x)$$

en la que a es una constante y f una función, podemos construir una interpretación lingüística haciendo

U : el conjunto de las personas

a : Maragall

$f(x)$: el padre de x

$P(x)$: x es poeta

obteniéndose la proposición

"Si Maragall es poeta y si todo padre de poeta es poeta, entonces todos son poetas".

Si la atribución de significado a los diferentes símbolos que aparecen en una fórmula se restringe a objetos matemáticos precisos, tendremos entonces una interpretación matemática que será una proposición, si la fórmula es cerrada, o un predicado, si es abierta.

Ejemplo I.7.5

Si para la fórmula

$$(\forall x \in X)\,P(x,f(x,y,a))$$

hacemos $X = \mathbf{R}$, $P(x_1,x_2)$: "$x_1 > x_2$" , $a = 3$, $y = \pi$, $f(x_1,x_2,x_3) = x_2+x_3x_1^2$, obtenemos la interpretación matemática

"Todo número real es mayor que su cuadrado por 3 más π"

En el lenguaje natural palabras como "alguno", "cada", "todos" y otras, indican los cuantificadores subyacen en muchas expresiones.

Ejemplo I.7.6

Proposiciones como "Algunas estrellas tienen planetas" o "Todo hombre es mortal" son proposiciones cuantificadas, que podrían enunciarse como

"Existe algún x del conjunto de los objetos del universo tal que si x es una estrella, entonces tiene planetas"

"Para todo x del conjunto de los seres vivos, si x es un hombre, entonces x es mortal".

Claro que un aumento de precisión en los lenguajes naturales llevaría consigo una mayor rigidez y complejidad.

Toda proposición enunciada en un lenguaje natural en la que intervengan predicados, tiene su fórmula que es su expresión simbólica

Ejemplo I.7.7

La proposición "Hay ingleses que son amigos de los franceses" puede formalizarse definiendo los siguientes predicados: $A(x,y)$: "x es amigo de y" , $I(x)$: "x es inglés" y $F(x)$: "x es francés", obteniéndose

$$(\exists x)\,(I(x) \wedge (\forall y)\,(F(y) \rightarrow A(x,y)))$$

Las fórmulas del cálculo de predicados se utilizan mucho en matemáticas con la finalidad de abreviar, mediante escritura simbólica, definiciones y propiedades y permiten formalizar los razonamientos.

Ejemplo I.7.8

Se dice que una función f de una variable x tiene por límite l al tender x hacia a cuando los valores $f(x)$ se aproximan a l en un cantidad tan pequeña como queramos siempre que x difiera de a en menos de una cantidad conveniente. Expresada como fórmula del cálculo de predicados esta definición de límite es

$$(\forall \varepsilon \in \mathbf{R}^+)\,(\exists \delta \in \mathbf{R}^+)\,(\forall x \in \mathbf{R})\,(|x-a| < \delta \rightarrow |f(x)-l| < \varepsilon)$$

donde $\mathbf{R}^+$ es el conjunto de los números reales positivos.

Ejercicios

I.15. Formalizar la proposición "Algunos profesores solo aprueban a los que asisten a clase".

I.16. Construir el árbol sintáctico y una interpretación lingüística de la formula

$$\forall x\ (E(x) \rightarrow \forall y\ (As(y) \wedge \neg Ap(x,y)))$$

para los predicados $E(x)$: x es estudiante, $As(y)$: y es una asignatura y $Ap(x,y)$: x aprueba y.

I.17.- Con los símbolos y significados siguientes:

a: Alberto

b: Berta

$G(x)$: x es generoso

$H(x)$: x es honrado

$T(x,y)$: x trata con y

a) dar interpretaciones lingüísticas a:

a1) $\forall x\ (H(x) \rightarrow T(b,x))$

a2) $(\forall x\ G(x)) \rightarrow (\forall x\ T(b,x))$

a3) $\exists x\ (H(x) \wedge \neg T(x,a) \wedge \neg T(x,b))$

b) formalizar:

b1) Todos los generosos tratan con el Alberto.

b2) Si nadie fuese honrado Alberto no trataría con nadie.

b3) Si todos los honrados fuesen generosos, todos trataríamos con todos

I.18.- Formalizar las proposiciones que a continuación se dan usando los símbolos que en cada caso se adjuntan:

a) Hoy hace sol y nos vamos de excursión al Canigó: S, $E(x)$, c

b) Hay anarquistas que no son ricos pero también hay que si lo son: $A(x)$, $R(x)$

c) Hay franceses que solo son amigos de los catalanes: $F(x)$, $A(x,y)$, $C(y)$

d) Hay franceses que son amigos de todos los catalanes: $F(x)$, $A(x,y)$, $C(y)$

e) Los vendedores ambulantes engañan a todos los tontos: $V(x)$, $E(x,y)$, $T(y)$

f) En verano Bernardo y todos sus hijos se hartan de hamburguesas: E, b, $F(x,y)$, $H(x,y)$, h

Construir los árboles sintácticos de las fórmulas obtenidas.

I.19. Formalizar el siguiente razonamiento: "Hay pintores con técnica pero sin imaginación. Todos los pintores son artistas. No todos los pintores tienen técnica. Todo ingeniero tiene técnica. Por tanto, no todo artista es ingeniero". Construir el árbol sintáctico.

Se denomina ***interpretación lógica***, o simplemente interpretación, de P a cualquier

asignación de valores lógicos a cada uno de los componentes de la fórmula. Para ello hay que determinar:

1) Los referenciales, que fijan los dominios de valores de las constantes y variables.

2) Una asignación de valor para cada constante.

3) Una interpretación para cada símbolo de función, asignándole una función precisa.

4) Una interpretación, es decir, una asignación de valor 1 o 0 a cada proposición a que da lugar cada predicado.

El resultado de la interpretación lógica de una fórmula cerrada es un valor 1 o 0 que se obtiene a partir del significado de los cuantificadores del modo siguiente: $(\exists x)\ P(x)$ será verdadera cuando existe un valor t del referencial para el que la proposición $P(t)$ es verdadera y falsa si ningún elemento del referencial hace que $P(x)$ dé lugar a proposición verdadera; análogamente, $(\forall x)\ P(x)$ es verdadera si todo elemento del referencial hace que $P(x)$ dé lugar a proposición verdadera y falsa si existe un valor t del referencial para el que la proposición $P(t)$ es falsa.

Ejemplo I.7.9

Una interpretación de la fórmula

$$(\forall y \in Y)\ (\exists z \in Z)\ (A(z) \rightarrow (M(y) \wedge P(y,z,f(z))))$$

puede obtenerse mediante las siguientes asignaciones:

$$Y = Z = \{1,2\}\ ,\ f(1) = 2\ ,\ f(2) = 1\ ,\ A(1) = 1\ ,\ A(2) = 0\ ,\ M(1) = 1\ ,\ M(2) = 0$$
$$P(1,1,2) = 1\ ,\ P(1,2,1) = 0\ ,\ P(2,1,2) = 0\ ,\ P(2,2,1) = 1$$

siendo el resultado 1.

I.8.- IMPLICACION Y EQUIVALENCIA

Una fórmula del cálculo de predicados es universalmente verdadera, si es verdadera bajo todas sus interpretaciones, es insatisfactible si es falsa bajo todas sus interpretaciones y es satisfactible si tiene interpretaciones falsas y verdaderas. En particular, las tautologías son fórmulas universalmente verdaderas y las contradicciones son fórmulas insatisfactibles. Una fórmula implica otra si en toda interpretación para la cual la primera es verdadera, lo es también la segunda; dos fórmulas son equivalentes si y sólo si tienen los mismos valores 1 o 0 bajo todas sus interpretaciones. Pero así como en el cálculo proposicional averiguar si dos fórmulas eran o no equivalentes era un sencillo proceso de construcción de una tabla de verdad, una fórmula del cálculo de predicados tendrá un gran número de interpretaciones por lo que no será posible verificar de modo general si dos fórmulas son equivalentes, salvo en casos particulares como, por ejemplo, los que figuran en la Tabla I.8.1.

TABLA I.8.1

Algunas equivalencias del cálculo de predicados

Si E y U son conjuntos referenciales

1) $(\forall x\in E)\ P(x) \Leftrightarrow (\forall y\in E)\ P(y)$

2) $(\exists x\in E)\ P(x) \Leftrightarrow (\exists y\in E)\ P(y)$

3) $(\forall x\in E)\ (\forall y\in U)\ P(x,y) \Leftrightarrow (\forall y\in U)\ (\forall x\in E)\ P(x,y)$

4) $(\exists x\in E)\ (\exists y\in U)\ P(x,y) \Leftrightarrow (\exists y\in U)\ (\exists x\in E)\ P(x,y)$

5) $(\exists x\in E)\ (\forall y\in U)\ P(x,y) \Rightarrow (\forall y\in U)\ (\exists x\in E)\ P(x,y)$

6) $\neg((\forall x\in E)\ P(x) \Leftrightarrow (\exists x\in E)\ \neg P(x)$

7) $\neg((\exists x\in E)\ P(x)) \Leftrightarrow (\forall x\in E)\ \neg P(x)$

8) $\neg((\forall x\in E)\ (P(x)\rightarrow Q(x))) \Leftrightarrow (\exists x\in E)\ (P(x)\wedge\neg Q(x))$

Las dos primeras son evidentes, pues se trata del mismo predicado sobre un mismo referencial E y expresan que el nombre que demos a la variable es indiferente dado que lo que caracteriza a esta fórmula es el predicado y el conjunto sobre el que está definida. Igualmente evidentes son 3) y 4) sin embargo 5) es un poco más delicada y expresa que si los cuantificadores manejados son distintos, intercambiarlos puede dar lugar a una interpretación no equivalente a la primera, verificándose entonces únicamente la implicación. Para probar el teorema que constituye la proposición 5) basta comprobar que si la hipótesis es 1, existe un valor m de x tal que para todo y se verifica $P(x,y)$ y por ello para todo valor de y existe uno de x, el valor m, que verifica $P(x,y)$, es decir, la tesis es 1 (sin embargo, puede ocurrir que la tesis sea 1, si para todo valor de y existe uno de x, diferente para cada valor de y, con lo cual la hipótesis es 0 y no se verifica la equivalencia). La equivalencia 6): el que no sea verdadero que para todo elemento x del conjunto E se verifique $P(x)$, equivale a que exista uno para el cual no sea verdadera $P(x)$ y por tanto verdadera $\neg P(x)$; de forma análoga se razona 7). La propiedad 8) es una consecuencia de 6) y de la tautología

$$\neg(P\rightarrow Q) \leftrightarrow P\wedge\neg Q$$

De acuerdo con las propiedades 3) y 4), expresiones cuantificadas tales como

$$(\forall x\in U)\ (\forall y\in U)\ P(x,y) \qquad (\exists x\in U)\ (\exists y\in U)\ P(x,y)$$

pueden escribirse en forma abreviada como

$$(\forall x,y\in U)\ P(x,y) \qquad (\exists x,y\in U)\ P(x,y)$$

Ejemplo I.8.1

Si por referencial tomamos el conjunto de los números naturales **N**

$$(\forall y \in \mathbf{N})\ (\exists x \in \mathbf{N})\ x > y$$

significa que para todo número natural existe siempre otro mayor que él, lo cual es verdadero.

$$(\exists x \in \mathbf{N})\ (\forall y \in \mathbf{N})\ x > y$$

significa que existe un número natural mayor que todos los números naturales, lo cual es falso. Este es un contraejemplo que demuestra que las dos fórmulas de la propiedad 5) no son equivalentes.

Ejemplo I.8.2

Las negaciones de

a) $(\forall c \in \mathbf{R})\ (\forall a \in \mathbf{R})\ (\forall b \in \mathbf{R}^*)\ (a \cdot b = b \cdot c \ \rightarrow\ a = c)$

b) "Todo triángulo rectángulo posee un ángulo recto"

son

a) $(\exists c \in \mathbf{R})\ (\exists a \in \mathbf{R})\ (\exists b \in \mathbf{R}^*)\ (a \cdot b = b \cdot c \ \wedge\ a \neq c)$

b) Si llamamos T : conjunto de los triángulos del plano

$R(x)$: "x es rectángulo"

$A(x)$: "x tiene un ángulo recto"

el teorema tiene como fórmula

$$(\forall x \in T)\ (R(x) \rightarrow A(x))$$

con lo que su negación es

$$(\exists x \in T)\ \neg(R(x) \rightarrow A(x))$$

equivalente a

$$(\exists x \in T)\ (R(x) \wedge \neg A(x))$$

cuya interpretación lingüística es: "existe un triángulo que siendo rectángulo no tiene un ángulo recto".

Ejercicios

I.20 .- Examinar las relaciones lógicas existentes entre las proposiciones

Todos los hombres son mortales.

Todos los hombres son inmortales.

Algún hombre no es mortal.

Algún hombre no es inmortal.

Existen hombres inmortales.

Existen hombres mortales.

I.21.- Averiguar si $\neg(\exists x\ \forall y\ (P(x,y) \rightarrow \exists z\ Q(x,y,z)))$ y $\forall x\ \exists y\ (P(x,y) \wedge \forall z\ \neg Q(x,y,z))$ son fórmulas equivalentes.

I.9.- INFERENCIA LOGICA EN EL CALCULO DE PREDICADOS

Generalizando el concepto de inferencia visto en el cálculo proposicional, hay un tipo de fórmula que establece lo que de forma intuitiva son relaciones de causa-efecto entre fórmulas del cálculo de predicados.

Consideremos una fórmula del tipo

$$(A_1 \wedge ... \wedge A_n) \rightarrow T$$

donde $A_1,...,A_n$ y T son fórmulas. Si es válida, es decir, si

$$(A_1 \wedge ... \wedge A_n) \Rightarrow T$$

decimos que T es ***consecuencia lógica*** de $A_1,...,\ A_n$ o que T se ***infiere*** o se ***deduce*** de $A_1,...,\ A_n$ y que la implicación define un ***esquema lógico*** válido. Las fórmulas $A_1,...,\ A_n$. se denominan ***premisas*** y T ***conclusión***. Análogamente al cálculo de proposiciones, cualquiera de las interpretaciones verdaderas de la fórmula se denomina un ejemplo y cualquiera de las interpretaciones falsas determina un contraejemplo. Por eso una deducción es válida si únicamente tiene ejemplos y no tiene ningún contraejemplo e inválida si tiene por lo menos un contraejemplo, aunque pueda tener ejemplos

Ejemplo I.9.1

El siguiente esquema lógico

$$((\exists x \in U)(A(x) \wedge B(x)) \wedge (\exists x \in U)(C(x) \wedge B(x))) \Rightarrow (\forall x \in U)(C(x) \rightarrow A(x))$$

no es válido, como demuestra la interpretación de referencial el conjunto $U = \{1,2\}$, tomando $A(1)$ el valor 1, $A(2)$ el valor 1, $B(1)$ el valor 1, $B(2)$ el valor 0, $C(1)$ el valor 1 y $C(2)$ el valor 0.

Para demostrar que un esquema lógico no es válido basta hallar un contraejemplo, es decir, una interpretación bajo la cual la fórmula que representa el esquema lógico dé valor 0, como

hemos visto en el ejemplo I.9.1. Sin embargo, determinar que un esquema lógico es válido tiene la dificultad de que se basa en la inexistencia de contraejemplos, por lo que por más que construyamos interpretaciones candidatas a ser contraejemplos, ninguna lo será. Con ello lo único que se prueba es nuestra incapacidad para hallar un contaejemplo, pero no que no existan. Así la demostración de que un esquema lógico es válido necesitará de una argumentación razonada, que no siempre será fácil.

El significado de los cuantificadores existencial y universal determina que:

1) Si $(\exists x \in X)\ P(x)$ es válida, existe algún t del referencial X para el que la proposición $P(t)$ es verdadera.

2) Si para una constante t del referencial X la proposición $P(t)$ es 1, entonces $(\exists x \in X)\ P(x)$ es válida.

3) Si $(\forall x \in X)\ P(x)$ es válida, entonces para cualquier t del referencial X la proposición $P(t)$ es 1.

4) Si para cualquier constante t del referencial X la proposición $P(t)$ es 1, entonces $(\forall x \in X)$ $P(x)$ es válida. Una deducción de este tipo sólamente es posible hacerla ”genéricamente”, es decir, introduciendo una constante local que represente a cualquier elemento del dominio cuyo alcance empieza cuando se inicia la demostración y finaliza cuando ésta acaba.

Estas reglas permiten introducir constantes que reducen un fórmula del cálculo de predicados a otra del cálculo de proposiciones. Como las reglas de inferencia son propiedades específicas de los conectores lógicos, que son los mismos en el cálculo de proposiciones y en el de predicados, éstas son utilizables en el cálculo de predicado pero las instanciaciones necesarias para su aplicación serán con fórmulas del cálculo de predicados.

Ejemplo I.9.2

Veamos que de "todo hombre es mortal" y " Sócrates es hombre" se infiere "Sócrates es mortal". En efecto, sean

$$P(x):\ \text{"}x\text{ es hombre"} \quad , \quad Q(x):\ \text{"}x\text{ es mortal"}$$

Tenemos que averiguar si

$$(\forall x)(P(x) \to Q(x)) \ \wedge\ P(\text{Sócrates}) \ \Rightarrow\ Q(\text{Sócrates})$$

Como para todo x es $P(x) \to Q(x)$ verdadero lo es también $P(\text{Sócrates}) \to Q(\text{Sócrates})$; de esta fórmula y $P(\text{Sócrates})$, por el MPP se infiere $Q(\text{Sócrates})$.

Ejemplo I.9.3

Veamos si es válido el esquema lógico: "Algunos enfermos confían en los médicos; ningún enfermo confía en los curanderos. Por tanto, ningún médico es curandero"

Definiendo los predicados

$P(x)$: "x es un enfermo" $\quad$ $Q(x)$: "x es un médico"

$R(x)$: "x es un curandero" $\quad$ $S(x,y)$: "x confía en y"

las premisas del discurso son

$$A_1 : (\exists x)\,(P(x) \wedge (\forall y)\,(Q(y) \rightarrow S(x,y)))$$
$$A_2 : (\forall x)\,(P(x) \rightarrow (\forall y)\,(R(y) \rightarrow \neg S(x,y)))$$

y la conclusión

$$T : (\forall x)\,(Q(x) \rightarrow \neg R(x))$$

Veamos que de A_1 y A_2 se infiere T. Si A_1 y A_2 son válidas, existe un h tal que

$$P(h) \text{ y } (\forall y)\,(Q(y) \rightarrow S(h,y))$$

es 1 y también $P(h) \rightarrow (\forall y)\,(R(y) \rightarrow \neg S(h,y))$ es 1. Como $P(h)$ es 1, el MPP asegura que

$$(\forall y)\,(R(y) \rightarrow \neg S(h,y))$$

es una fórmula válida y también $(\forall y)\,(Q(y) \rightarrow S(h,y))$. Para los valores de t tales que $Q(t)$ es 1 lo es también $S(h,t)$ luego $\neg S(h,t)$ es 0, de donde $R(t)$ 0, por lo que $\neg R(t)$ es 1 y $Q(t) \rightarrow \neg R(t)$ es 1; para los valores de t tales que $Q(t)$ es 0, entonces $Q(t) \rightarrow \neg R(t)$ es 1. Todo ello prueba que T es 1 para todo x, luego T se infiere de A_1 y A_2.

Diremos que una fórmula del cálculo de predicados P está en ***forma prenexa conjuntiva*** si es del tipo

$$(\forall x_1) \ldots (\forall x_n)\,(M)$$

donde M es una conjunción de fórmulas sin cuantificadores que son disyunciones de átomos o sus negaciones. Para conseguir reducir una fórmula a su forma normal conjuntiva se han de realizar los pasos siguientes:

1) Eliminar los conjuntos referenciales teniendo en cuenta que

$$(\forall x \in D)\,P(x) \Leftrightarrow (\forall x)\,(D(x) \rightarrow P(x)) \quad \text{con} \quad D(x): "x \in D"$$
$$(\exists x \in D)\,P(x) \Leftrightarrow (\exists x)\,(D(x) \wedge P(x)) \quad \text{con} \quad D(x): "x \in D"$$

Si los referenciales están omitidos, este paso, obviamente, no es necesario; si todos los referenciales coinciden pueden suprimirse sin más, entendiendo que cualquier interpretación de la fórmula será válida dentro de este referencial.

2) Eliminar los conectores $\rightarrow$ y $\leftrightarrow$ mediante las equivalencias

$$P \leftrightarrow Q \Leftrightarrow (P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P)$$
$$P \rightarrow Q \Leftrightarrow \neg P \vee Q$$

3) Mediante las equivalencias

$$\begin{aligned} \neg(\neg P) &\Leftrightarrow P \\ \neg(P \wedge Q) &\Leftrightarrow \neg P \vee \neg Q \\ \neg(P \vee Q) &\Leftrightarrow \neg P \wedge \neg Q \\ \neg((\forall x)\,(P(x))) &\Leftrightarrow (\exists x)\,(\neg P(x)) \\ \neg((\exists x)\,(P(x))) &\Leftrightarrow (\forall x)\,(\neg P(x)) \end{aligned}$$

se consigue que toda negación afecte sólamente a un átomo.

4) Si es necesario, renombrar las variables ligadas para que tengan nombres distintos, de forma que cada variable esté ligada a un único cuantificador.

5) Mediante las equivalencias

$$\begin{aligned} (\Theta_1 x)\,(P(x)) \vee Q &\Leftrightarrow (\Theta_1 x)\,(P(x) \vee Q) \\ (\Theta_1 x)\,(P(x)) \wedge Q &\Leftrightarrow (\Theta_1 x)\,(P(x) \wedge Q) \\ (\Theta_1 x_1)\,P(x_1) \vee (\Theta_2 x_2)\,Q(x_2) &\Leftrightarrow (\Theta_1 x_1)\,(\Theta_2 x_2)\,(P(x_1) \vee Q(x_2)) \\ (\Theta_1 x_1)\,P(x_1) \wedge (\Theta_2 x_2)\,Q(x_2) &\Leftrightarrow (\Theta_1 x_1)\,(\Theta_2 x_2)\,(P(x_1) \wedge Q(x_2)) \end{aligned}$$

(donde Θ_1 y Θ_2 significan $\forall$ o $\exists$) se llevan los cuantificadores al comienzo de la fórmula, sin cambiar su orden relativo, lo cual es posible, pues todas las variables son distintas.

6) Utilizar las leyes conmutativa, asociativa y distributiva.

Así se llega a una fórmula con todos los cuantificadores al principio

$$(\Theta_1 x_1)\ \ldots\ (\Theta_n x_n)\ (M)$$

en la que $(\Theta_1 x_1)\ \ldots\ (\Theta_n x_n)$ se denomina ***prefijo*** y M ***matriz***, de manera que en M no hay cuantificadores y está en forma conjuntiva. Supongamos ahora que un cuantificador Θ_r es existencial; si a la izquierda de $(\Theta_r x_r)$ no hay cuantificadores universales se reemplazan todas las x_r por un valor c, que sea distinto de las constantes que eventualmente puedan haber en M, y eliminamos $(\Theta_r x_r)$ del prefijo; si $(\Theta_{s1} x_{s1})\ \ldots\ (\Theta_{sm} x_{sm})$ son cuantificadores universales a la izquierda de $(\Theta_r x_r)$ (por tanto, $1 \le s1 \le,\ldots,\le sm \le r$) creamos una función f de nombre distinto de las funciones que ya hay en M y reemplazamos todos los x_r por $f_r(x_{s1},\ldots,x_{sm})$ y eliminamos $(\Theta_r x_r)$ del prefijo; repitiendo estos procesos eliminamos del prefijo todos los cuantificadores existenciales llegando así, a la denominada ***forma de Skolem***. Las constantes y funciones usadas en estos reemplazamientos se denominan ***funciones Skolem***.

Ejemplo I.9.4

Apliquemos este proceso a la fórmula.

$$(\forall y)\ ((\exists x)\ (\exists z)\ (P(x,z) \vee P(y,z)) \rightarrow (\exists x)\ (\forall u)\ Q(x,y,u))$$

Tendremos

$$(\forall y)\ ((\exists x)\ (\exists z)\ (P(x,z) \vee P(y,z)) \rightarrow (\exists x)\ (\forall u)\ (Q(x,y,u)))$$
$$\Leftrightarrow$$
$$(\forall y)\ ((\forall x)\ (\forall z)\ (\neg P(x,z) \wedge \neg P(y,z)) \vee (\exists x)\ (\forall u)\ (Q(x,y,u)))$$
$$\Leftrightarrow$$
$$(\forall y)\ ((\forall x)\ (\forall z)\ (\neg P(x,z) \wedge \neg P(y,z)) \vee (\exists x_1)\ (\forall u)\ (Q(x_1,y,u)))$$
$$\Leftrightarrow$$
$$(\forall y)\ ((\exists x_1)\ (\forall u)\ (Q(x_1,y,u)) \vee (\forall x)\ (\forall z)\ (\neg P(x,z) \wedge \neg P(y,z)))$$
$$\Leftrightarrow$$
$$(\forall y)\ (\exists x_1)\ (\forall x)\ (\forall z)\ (\forall u)\ (Q(x_1,y,u) \vee (\neg P(x,z) \wedge \neg P(y,z)))$$
$$\Leftrightarrow$$
$$(\forall y)\ (\exists x_1)\ (\forall x)\ (\forall z)\ (\forall u)\ ((Q(x_1,y,u) \vee \neg P(x,z)) \wedge (Q(x_1,y,u) \vee \neg P(y,z)))$$
$$\Leftrightarrow$$
$$(\forall y)\ (\forall x)\ (\forall z)\ (\forall u)\ ((Q(f(y),y,u) \vee \neg P(x,z)) \wedge (Q(f(y),y,u) \vee \neg P(y,z)))$$

En este punto podemos ignorar el prefijo, pero teniendo en cuenta que todas las variables que aparecen están cuantificadas universalmente. En la matriz tenemos una conjunción de disyunciones; cada uno de los paréntesis de la conjunción, considerado separadamente, recibe el nombre de ***cláusula***. Todo este proceso permite llegar desde la fórmula inicial a un conjunto de cláusulas, siendo cada una de ellas una disyunción de átomos o sus negaciones.

A partir de aquí, el método de resolución para demostrar una inferencia en el cálculo de predicados se va desarrollar de un modo análogo al del cálculo de proposiciones, por medio de la refutación, significando con ello que para demostrar que la conclusión es verdadera, se demostrará que su negación produce una contradicción con las premisas. Previamente es necesario poner las premisas y conclusión en forma estándar, es decir, añadir al conjunto de premisas la negación de la conclusión y poner como conclusión una contradicción.

Si en el esquema deductivo existe alguna variable libre *x*, se la considera cuantificada universalmente, es decir, se considera que el esquema deductivo debe ser válido para cualquier valor de las variables libres,

$$\forall x\ (A_1 \wedge \ldots \wedge A_n \rightarrow T) \quad \text{es válida.}$$

Dos cláusulas con determinada estructura es posible "resolverlas" en una tercera; en el caso del cálculo proposicional vimos que esta resolución viene dada a través de la denominada regla de resolución y averiguar si dos cláusulas son resolubles es inmediato. La regla de resolución sigue siendo válida en el cálculo de predicados cuando sustituimos las variables por constantes apropiadas, convirtiendo así los predicados en proposiciones, para conseguir parejas de átomos en cláusulas distintas de modo que en una cláusula figure el átomo y en la otra el mismo precedido de negación. Existen algoritmos para emparejar cláusulas y hallar sus resolventes.

Por ello, el proceso de resolución en el cálculo de predicados, mediante el cual a partir de unas premisas $A_1,\ldots,A_n$ se quiere deducir una conclusión *T*, consiste en probar que es una contradicción la fórmula formada por la conjunción de las premisas y la negación de la

conclusión, es decir, comprobar que toda interpretación da lugar a una contradicción, procediéndose como sigue:

1) Pasar la fórmula a la forma de Skolem. Si existen premisas sin variables comunes, pueden "skolemizarse" de forma independiente.

2) En este momento todas las variables están cuantificadas universalmente por tanto, para comprobar la contradicción es suficiente encontrar una contradicción entre las fórmulas del cálculo proposicional que resultan de fijar de modo conveniente los valores de las variables. Para ello basta ir resolviendo pares de cláusulas que resultan de sustituir en los predicados las variables de igual letra por constantes convenientes; si la resolvente es la cláusula vacía se ha encontrado una contradicción y si no lo es, se añade al conjunto de cláusulas disponibles y se continuan resolviendo pares de cláusulas.

Veamos dos ejemplos simples para ilustrar este proceso; en el primero veremos como resolver cláusulas y en el segundo el proceso general.

Ejemplo I.9.5

Supongamos que para una fórmula dada, despues de obtener su forma normal Skolem y eliminar los cuantificadores, se llega a

$$(P(x,f(x),a)) \wedge (\neg Q(x) \vee \neg Q(y) \vee Q(z) \vee \neg P(x,f(y),z)) \wedge Q(b) \wedge (\neg Q(a))$$

Haciendo $z = a$, pueden resolverse

$$(\neg Q(x) \vee \neg Q(y) \vee Q(z) \vee \neg P(x,f(y),z)) \wedge (\neg Q(a))$$

obteniéndose

$$(\neg Q(x) \vee \neg Q(y) \vee \neg P(x,f(y),a))$$

Haciendo $y = b$, puede resolverse ésta anterior con $Q(b)$ obteniéndose

$$(\neg Q(x) \vee \neg P(x,f(b),a))$$

Haciendo $x = b$, se resuelve ésta con $Q(b)$ obteniéndose

$$\neg P(b,f(b),a)$$

Haciendo $x = b$, se resuelve ésta con la

$$P(x,f(x),a)$$

obteniéndose $\square$.

Ejemplo I.9.6

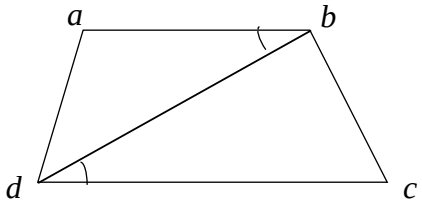
De las premisas,

"Todo trapecio es un cuadrilátero con dos lados paralelos".

"Dos rectas paralelas cortadas por una secante determinan ángulos internos iguales".

obtengamos la conclusión,

"Los ángulos interiores determinados por una diagonal de un trapecio y las bases son iguales".



Sean $T(x,y,u,v)$: "Los puntos x, y, u y v determinan un trapecio de vértices superiores x e y e inferiores u y v".

$P(x,y,u,v)$: "La recta que determinan los puntos x e y es paralela a la recta que determinan u y v".

$E(x,y,z,u,v,w)$: "El ángulo $\angle(xyz)$ es igual al ángulo $\angle(uvw)$"

que puestas en forma de fórmulas del cálculo de predicados, son

$$A_1 : (\forall x)\,(\forall y)\,(\forall u)\,(\forall v)\,(T(x,y,u,v) \rightarrow P(x,y,u,v))$$
$$A_2 : (\forall x)\,(\forall y)\,(\forall u)\,(\forall v)\,(P(x,y,u,v) \rightarrow E(x,y,v,u,v,y))$$
$$A_3 : T(a,b,c,d)$$

El proceso de inferencia es

$$(A_1 \wedge A_2 \wedge A_3) \Rightarrow E(a,b,d,c,d,b)$$

para lo cual negamos la conclusión y probamos que

$$A_1 \wedge A_2 \wedge A_3 \wedge \neg E(a,b,d,c,d,b)$$

es decir

$$((\forall x)\,(\forall y)\,(\forall u)\,(\forall v)\,(T(x,y,u,v) \rightarrow P(x,y,u,v))) \wedge$$
$$\wedge ((\forall x)\,(\forall y)\,(\forall u)\,(\forall v)\,(P(x,y,u,v) \rightarrow E(x,y,v,u,v,y))) \wedge$$
$$\wedge T(a,b,c,d) \wedge \neg E(a,b,d,c,d,b)$$

aplicándose ahora el método de resolución para llegar a una contradicción. Pasando a la forma prenex conjuntiva se obtiene

$$(\forall x)\,(\forall y)\,(\forall u)\,(\forall v)(\neg T(x,y,u,v) \overset{1)}{\vee} P(x,y,u,v)) \wedge (\neg P(x,y,u,v) \overset{2)}{\vee} E(x,y,v,u,v,y)) \wedge$$
$$\wedge T(a,b,\overset{3)}{c},d) \wedge \neg E(a,b,d,\overset{4)}{c},d,b)$$

La forma de Skolem es

$$(\neg T(x,y,u,v) \vee P(x,y,u,v)) \wedge (\neg P(x,y,u,v) \vee E(x,y,v,u,v,y)) \wedge T(a,b,c,d) \wedge \neg E(a,b,d,c,d,b)$$

Haciendo la sustitución x por a, y por b, u por c y v por d, la resultante de 2) y 4) es,

$$\neg P(a,b,c,d)$$

La misma sustitución da como resolvente de 1) y ésta última,

$$\neg T(a,b,c,d)$$

y la resolvente de esta última y 3) es una contradición luego la conclusión es verdadera.

Todos los procesos anteriores de reducción a la forma prenexa y de skolemización pueden ser efectuados sobre los árboles sintácticos en lugar de sobre las fórmulas para lo que se necesitaría, y es posible, desarrollar una serie de reglas de adaptación de estos procesos. La ventaja que pueden representar tener no es relevante, excepto cuando se tienen que renombrar variables o definir las funciones de Skolem, lo que que efectuado sobre el árbol sintáctico quedan más sistematizados e intuitivamente más claros como ilustra el ejemplo siguiente.

Ejemplo I.9.7

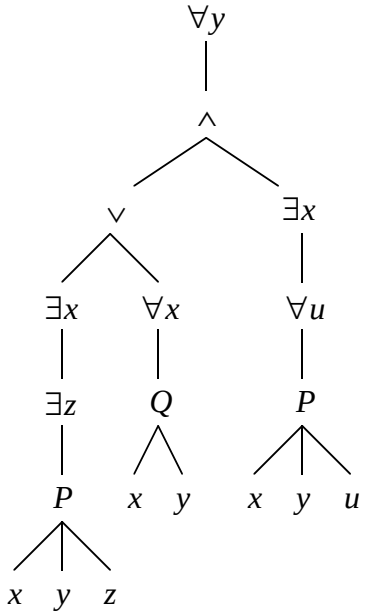
Si sobre la fórmula

$$(\forall y)\ ((\forall x)\ (\forall z)\ P(x,y,z) \rightarrow (\forall x)\ Q(x,y)) \wedge (\exists x)\ (\forall u)\ R(x,y,u)$$

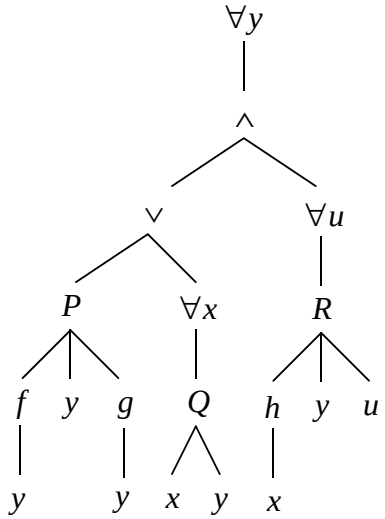
se eliminan se reduce su matriz a forma conjuntiva, se obtiene

$$(\forall y)\ ((\exists x)\ (\exists z)\ P(x,y,z)) \vee (\forall x)\ Q(x,y)) \wedge (\exists x)\ (\forall u)\ R(x,y,u)$$

cuyo árbol sintáctico es



en el queda claramente reflejado qué variables renombrar y qué variables cuantificadas existencialmente dependen de qué variables anteriores cuantificadas universalmente. Por ello, aplicando el proceso de renombrar y skolemizar, el árbol resultante es



que después de eliminar los cuantificadores universales da lugar a la forma Skolem

$$(P(f(y),y,g(y)) \vee Q(x,y)) \wedge R(h(y),y,u)$$

Ejercicios

I.22.- Hallar la forma normal de Skolem de la formula $\forall x\ (A(x,y) \rightarrow \exists y(\neg B(x))$

I.23.- Encontrar un contraejemplo de $\exists x\ \exists y\ (Q(x,y) \rightarrow P(y)) \ \wedge \exists x\ \exists y\ Q(x,y) \ \Rightarrow\ \exists y\ P(y)$

I.24.- Probar que el esquema lógico $\exists x\ P(x) \wedge \exists x\ Q(x) \rightarrow\ \exists x(P(x) \wedge Q(x))$ es inválido.

I.25.- El esquema lógico que a continuación se indica es inválido. Encontrar un contraejemplo.

$$P(a) \wedge \forall x\ (P(x) \rightarrow\ S(f(x))) \wedge \forall x\ (S(x) \rightarrow\ P(f(x))) \ \Rightarrow\ S(f(f(a)))$$

I.26.- Encontrar un contraejemplo de

$$\neg\exists x\ (P(x) \wedge Q(x,a)) \wedge \forall x\ (R(x) \rightarrow \exists y\ (Q(x,y) \wedge P(y))) \ \ \Rightarrow\ \ \exists x\ (\neg R(x))$$

I.27.- Demostrar que de

$$\forall x\ (T(a,x) \rightarrow G(x)) \wedge ((\forall x\ \forall y\ T(x,y)) \rightarrow (\forall x\ G(x) \wedge \forall x\ H(x)) \wedge \forall x\ (G(x) \rightarrow (\forall y\ T(x,y))$$

se deduce $(\exists x\ \neg H(x)) \rightarrow (\exists x\ \neg T(a,x))$

I.28.- Demostrar la validez del siguiente razonamiento:

$$\forall x\,(A(x) \to (B(x) \to C(x)) \wedge$$
$$\wedge\, \exists x\,(B(x) \wedge D(x) \wedge \neg E(x)) \wedge$$
$$\wedge\, \forall x\,((A(x) \to C(x)) \to (F(x) \to E(x))) \;\Rightarrow\; \exists x\,(D(x) \wedge \neg F(x))$$

I.29.- Formalizar y demostrar el siguiente razonamiento: "Los hijos de los amigos de los animales son amigos de los animales. Los amigos de los animales no maltratan a los animales. Pedro es amigo de los animales. Juana es hija de Pedro. Por tanto, Juana no maltrata a los animales".

I.30.- Formalizar el razonamiento siguiente y demostrar su validez: "Todo alumno de la escuela estudia informática, ingeniería técnica o arquitectura técnica. Todos los que estudian informática tienen ordenador. Juan es un alumno de la escuela que no estudia arquitectura técnica, ni tiene ordenador. Luego, Juan estudia ingeniería técnica".

I.31.- Formalizar y demostrar: "Pedro es un ciudadano de Gerona. Pedro afeita a todos los ciudadanos de Gerona que no se afeitan a si mismos, y solo a ellos. Por tanto, Pedro no afeita a nadie".

I.32 .- Obtener una conclusión del conjunto de los siguientes argumentos

– Un hombre infeliz no es su propio jefe.

– Todos los hombres casados tienen responsabilidades.

– Todo hombre o es casado o es su propio jefe o ambos.

– Ningún hombre con responsabilidades puede ir de pesca todos los días.

I.10.- ALGEBRA DE CONJUNTOS.

Hemos visto como todo predicado sobre un referencial define un subconjunto de éste. Se llama conjunto de las ***partes de un referencial*** E al conjunto formado por todos los subconjuntos de E y se representa por $\mathbb{P}(E)$. Siempre se verificará que $\emptyset \in \mathbb{P}(E)$ y $E \in \mathbb{P}(E)$.

Ejemplo I.10.1

Los elementos del conjunto $\mathbb{P}(\emptyset)$ son

$$\mathbb{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$$

con lo que

$$\mathbb{P}(\mathbb{P}(\emptyset)) = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$$

$$\mathbb{P}(\mathbb{P}(\mathbb{P}(\emptyset))) = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$$

Sean $A(x)$ y $B(x)$ dos predicados sobre E y sean A y B los subconjuntos de E

$$A = \{x \in E \mid A(x)\} \qquad\qquad B = \{x \in E \mid B(x)\}$$

De las definiciones de inclusión de conjuntos e implicación se deduce que

$$A \subseteq B \;\Leftrightarrow\; (\forall x \in E)\,(A(x) \Rightarrow B(x))$$

pues si $A \subseteq B$, para todo elemento que verifica $A(x)$ se cumple que pertenece a A, luego según la inclusión pertenece también a B y, por tanto, hace verdadera $B(x)$ con lo que se verifica la tesis del teorema; recíprocamente si $x \in A$, verifica $A(x)$ y, como el condicional es verdadero, también verifica $B(x)$, por lo cual $x \in B$ y, según la definición de inclusión, $A \subseteq B$

De forma análoga se prueba la equivalencia entre la igualdad de conjuntos y la equivalencia de predicados

$$A = B \;\Leftrightarrow\; (\forall x \in E)\,(A(x) \;\Leftrightarrow\; B(x))$$

Si A es un subconjunto no vacío de E, un predicado que lo define es el predicado conjuntista

$$A(x):\ "x \in A"$$

o cualquier otro equivalente. Así puede escribirse $A = \{x \in E \mid x \in A\}$.

La conjunción, disyunción y negación de proposiciones permiten definir operaciones entre conjuntos mediante las cuales construimos nuevos conjuntos. El conjunto

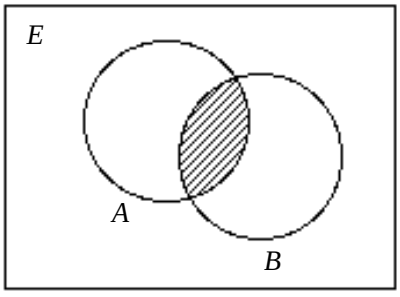
$$A \cap B = \{x \in E \mid A(x) \wedge B(x)\}$$

se denomina ***conjunto intersección*** de A y B. Un elemento de E que pertenezca a esta intersección, es porque verifica $(A(x) \wedge B(x))$, y por tanto, verifica $A(x)$ y $B(x)$ es decir, pertenece a los conjuntos A y B. Si un elemento no está en la intersección es porque no verifica $(A(x) \wedge B(x))$ lo que significa que no verifica $A(x)$ o $B(x)$, es decir, no está en A o B por lo que son equivalentes los predicados

$$x \in A \cap B \;\Leftrightarrow\; (x \in A \;\wedge\; x \in B) \qquad\qquad x \notin A \cap B \;\Leftrightarrow\; (x \notin A \;\vee\; x \notin B)$$

relaciones que caracterizan a los elementos de una intersección como los elementos comunes de ambos conjuntos, lo cual es útil para construirla cuando ambos conjuntos están definidos por extensión.

Si representamos los conjuntos mediante regiones planas, denominadas ***diagramas de Venn***, la intersección será la zona rayada en la figura



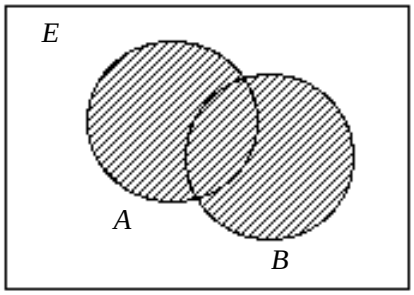
El conjunto

$$A \cup B = \{x \in E \mid A(x) \vee B(x)\}$$

se llama ***conjunto unión*** de A y B. Un elemento $x \in E$ del conjunto unión será un elemento del referencial que verifica la proposición $(A(x) \vee B(x))$ y, por tanto, verifica $A(x)$ o $B(x)$, o ambas, luego x pertenece a A o a B, o a ambos; por ello son equivalentes

$$x \in A \cup B \Leftrightarrow (x \in A \vee x \in B) \qquad x \notin A \cup B \Leftrightarrow (x \notin A \wedge x \notin B)$$

Representando A, B y E mediante diagramas de Venn, la unión será la zona rayada en la figura



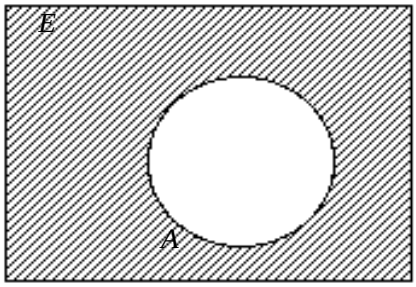
El conjunto

$$A' = \{x \in E \mid \neg A(x)\}$$

se denomina ***conjunto complementario*** de A. Un elemento x que pertenezca a A' será un elemento del referencial que verifica la proposición $\neg A(x)$ y, por tanto, hace que $A(x)$ sea falsa, luego, x no pertenece a A; por ello

$$x \in A' \Leftrightarrow x \notin A \qquad x \notin A' \Leftrightarrow x \in A$$

En un diagrama de Venn, el complementario está representado por la zona rayada de la figura



Otras operaciones con conjuntos se pueden definir operando con los predicados que los definen. El conjunto

$$A - B = \{x \in E \mid A(x) \wedge \neg B(x)\}$$

se denomina ***conjunto diferencia*** y, de acuerdo con los razonamientos anteriores verificará,

$$x \in A-B \;\Leftrightarrow\; (x \in A \;\wedge\; x \notin B) \qquad\qquad x \notin A-B \;\Leftrightarrow\; (x \notin A \;\vee\; x \in B)$$

que en función de intersección y complementario es

$$A-B = A \cap B'$$

La intersección, unión y complementario al estar definidas mediante la conjunción, disyunción y negación, tendrán sus mismas propiedades, las más importantes de las cuales están en la Tabla I.10.1.

TABLA I.10.1

Propiedades de la unión, intersección y complementario

Si A, B y C son subconjuntos del referencial E

1)	$(A')' = A$		
2)	$A \cap A = A$	$A \cup A = A$	*Idempotente*
3)	$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$		*Asociativa*
4)	$A \cap B = B \cap A$	$A \cup B = B \cup A$	*Conmutativa*
5)	$A \cap (A \cup B) = A$	$A \cup (A \cap B) = A$	*Absorción*
6)	$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$		*Distributiva*
7)	$(A \cap B)' = A' \cup B'$	$(A \cup B)' = A' \cap B'$	*De Morgan*
8)	$A \cap \emptyset = \emptyset$	$A \cup \emptyset = A$	
9)	$A \cap E = A$	$A \cup E = E$	
10)	$A \cap A' = \emptyset$	$A \cup A' = E$	

La demostración de cualquiera de estas propiedades se deduce directamente de la propiedad análoga de la operación entre proposiciones; así, para demostrar

$$(A \cap B)' = A' \cup B'$$

supondremos A definido por el predicado $A(x)$ y B definido por el predicado $B(x)$, con lo cual

$$(A \cap B)' \quad \text{viene definido por} \quad \neg(A(x) \wedge B(x))$$

$$A' \cup B' \quad \text{viene definido por} \quad \neg A(x) \vee \neg B(x)$$

y basta tener en cuenta que, para cualquier x del referencial, según la propiedad 7) de la Tabla I.2.1

$$\neg(A(x) \wedge B(x)) \leftrightarrow (\neg A(x) \vee \neg B(x)))$$

es una tautología.

Así la analogía entre las propiedades de proposiciones y de conjuntos permite utilizar unas para demostrar relaciones entre los otros.

Ejemplo I.10.2

Vamos a utilizar una tabla de verdad para la igualdad $(A' \cap B)' = A \cup B'$. Para ello si suponemos como antes A definido por el predicado $A(x)$ y B definido por el predicado $B(x)$, con lo cual

$$(A' \cap B)' \quad \text{viene definido por} \quad \neg(\neg A(x) \wedge B(x))$$
$$A \cup B' \quad \text{viene definido por} \quad A(x) \vee \neg B(x)$$

y para probar la igualdad entre ambos conjuntos bastará probar la equivalencia entre ambos predicados. Si x representa, no una variable, sino un elemento cualquiera del referencial, $A(x)$ y $B(x)$ son proposiciones y la tabla de verdad del bicondicional

$$\neg\ (\neg A(x) \wedge B(x)) \quad \leftrightarrow \quad (A(x) \vee \neg B(x))$$

1	0	1	0	1	1	1	1	0	1
1	0	1	0	0	1	1	1	1	0
0	1	0	1	1	1	0	0	0	1
1	1	0	0	0	1	0	1	1	0

demuestra que

$$(\forall x \in E)\ (\neg(\neg A(x) \wedge\ B(x)) \Leftrightarrow (A(x) \vee \neg B(x)))$$

lo que prueba la igualdad entre los conjuntos propuestos.

Pueden definirse los conjuntos mediante predicados conjuntistas del tipo $A(x)$: "$x \in A$" y aplicar entonces las carcterizaciones de la unión, intersección y complementario junto con las propiedades transitiva del condicional y bicondicional y otras reglas de inferencia para probar implicaciones y equivalencias entre predicados y, de ellas, deducir inclusiones e igualdades entre conjuntos.

Ejemplo I.10.3

Para probar la igualdad anterior

$$(A' \cap B)' = A \cup B'$$

debemos demostrar que la fórmula

$$(\forall x \in E)\ (x \in (A' \cap B)' \ \leftrightarrow \ x \in A \cup B')$$

es una tautología. Si x representa un elemento genérico del referencial, debemos probar que son equivalentes las proposiciones

$$x \in (A' \cap B)' \ \Leftrightarrow \ x \in A \cup B'$$

En efecto,

$$x \in (A' \cap B)' \ \Leftrightarrow \ x \notin A' \cap B \ \Leftrightarrow \ x \notin A' \ \vee \ x \notin B \ \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \ x \in A \ \vee \ x \in B' \ \Leftrightarrow \ x \in A \cup B')$$

y por la propiedad transitiva del bicondicional, se verifica la equivalencia y, por ello, la igualdad entre los conjuntos propuestos

Puede ocurrir que en el proceso de obtener la cadena de equivalencias anterior, alguno de los pasos sea solamente de implicación, en cuyo caso hay que construir otra cadena para establecer la implicación recíproca.

Ejemplo I.10.4

Supongamos que utilizamos este procedimiento para probar la propiedad de absorción

$$A \cup (A \cap B) = A$$

razonando del modo siguiente

$$x \in A \cup (A \cap B) \ \Leftrightarrow \ x \in A \ \vee \ x \in (A \cap B) \ \Leftrightarrow \ x \in A \ \vee \ (x \in A \ \wedge \ x \in \mathrm{B}) \ \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \ x \in A \ \vee \ x \in A \ \Leftrightarrow \ x \in A$$

donde los dos primeros pasos son de equivalencia y el tercero es solamente de implicación, ya que si x está en A y en B, seguro que está en A y sin embargo no al revés, pues puede haber elementos de A que no pertenezcan a B; por ello, las propiedades transitivas del bicondicional y condicional aseguran que

$$x \in A \cup (A \cap B) \ \Rightarrow \ x \in \mathrm{A}$$

por lo cual únicamente podemos afirmar que

$$A \cup (A \cap B) \subseteq A$$

Para la inclusión recíproca debemos completar el razonamiento en la forma

$$x \in A \ \Rightarrow \ (x \in A \ \vee \ x \in A \cap B) \ \Leftrightarrow \ x \in A \cup (A \cap B)$$

con lo que

$$A \subseteq A \cup (A \cap B)$$

que con la inclusión anterior y la propiedad antisimétrica, demuestran la igualdad.

Las igualdades de la tabla I.10.1 y la propiedad transitiva de la igualdad se usan con frecuencia para probar igualdades entre conjuntos.

Ejemplo I.10.5

Utilicemos este procedimiento para verificar la igualdad

$$((A \cup E) \cap A') \cup ((B \cap C) \cup A) = E$$

para lo que procedemos aplicando las relaciones más apropiadas de la Tabla I.4.1

$$\begin{aligned}&((A \cup E) \cap A') \cup ((B \cap C) \cup A) = \\ &= ((A \cap A') \cup (E \cap A')) \cup ((B \cap C) \cup A) = (\emptyset \cup A') \cup ((B \cap C) \cup A) = \\ &= A' \cup ((B \cap C) \cup A) = (B \cap C) \cup (A' \cup A) = (B \cap C) \cup E = E\end{aligned}$$

Observemos que las propiedades de la Tabla I.10.1, excepto la primera, son dobles y que la parte derecha puede deducirse de la izquierda intercambiando

$\cap$ por $\cup$ $\qquad$ $\emptyset$ por E

Por ello podemos establecer un ***principio de dualidad*** por el cual a partir de cualquier igualdad, consecuencia de las propiedades 2) a 10), es posible obtener una igualdad dual intercambiando estos elementos; así, por ejemplo, la igualdad dual de la del ejemplo anterior es

$$((A \cap \emptyset) \cup A') \cap ((B \cup C) \cap A) = \emptyset$$

Ejercicios

I.33.- Dado el referencial $E = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,a,b,c,d,e,f,g\}$ y los subconjuntos

$$A = \{1, 2, 4, 6, 8, b, c, d, f\} \qquad B = \{1, 4, 7, a, d, g\} \qquad C = \{3, 5, 9, a, e\}$$

hallar

a) $A \cup B$, $B \cap C$, $(A \cup B) \cup C$, $A \cap C$, $(A \cap B) \cap C$

b) A' , $(A \cup B)'$, $(A \cap C)'$, $\mathbb{P}(C)$, $\mathbb{P}(A \cap C)$

I.34.- Para los conjuntos $A = \{1, 2, 3, 4\}$ y $B = \{3, 4, 5\}$ hallar

$$\mathbb{P}(A),\ \mathbb{P}(B),\ \mathbb{P}(A) \cap \mathbb{P}(B),\ \mathbb{P}(A) \cup \mathbb{P}(B),\ \mathbb{P}(A \cap B) \text{ y } \mathbb{P}(A \cup B)$$

I.35.- Si A, B, C son subconjuntos de un mismo referencial, entonces

$$A' \cap B \cap C' = (B - A')' \cap (A' - B)' \cap (C' - B)' \cap C'.$$

I.36.- Si A, B y C son subconjuntos de un referencial, expresar

$$((A \cup B) - (B - C)) \cup (B - (A \cap C)$$

como unión de intersecciones.

I.37.- Demostrar que $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \cap \mathbb{P}(B)$

I.38.- Dado el referencial E, demostrar las siguientes identidades:

a) $(A \cup E) \cap (A \cap \varnothing) = \varnothing$

b) $((A \cup E) \cap A') \cup ((B \cap C) \cup A) = E$

I.39.- Obtener los resultados duales de $(A \cap B) \cup A' \cup B' = E$ y de $A \cup (A' \cap B) = A \cup B$

I.40.- Sobre el conjunto de las partes de un referencial

a) Demostrar la equivalencia: $X \subseteq Y \Leftrightarrow \mathbb{P}(X) \subseteq \mathbb{P}(Y)$

b) Demostrar el teorema: $\mathbb{P}(E) = \mathbb{P}(F) \Rightarrow E = F$

c) Comparar $\mathbb{P}(E \cap F)$ con $\mathbb{P}(E) \cap \mathbb{P}(F)$ y $\mathbb{P}(E \cup F)$ con $\mathbb{P}(E) \cup \mathbb{P}(F)$

I.41 .- Sean las partes A y B de un cierto referencial E; estudiar si son ciertas o no las siguientes igualdades:

a) $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \cap \mathbb{P}(B)$

b) $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) \cup \mathbb{P}(B)$

c) $\mathbb{P}(A - B) = \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(B)$

I.11.- EL PROCESO DE DEMOSTRACION EN MATEMATICAS

Veamos como estructurar de manera general procedimientos que en una ciencia deductiva permiten obtener unos resultados a partir de otros. La Matemática, como cualquier otra ciencia, intenta describir y probar proposiciones verdaderas sobre los objetos de los que trata y así, la Geometría intenta establecer resultados o propiedades que verifican las rectas, las circunferencias, ..., etc, la Aritmética busca propiedades verificadas por los números primos, los divisores de un número, y otras.

Nos detendremos en el proceso de obtención de estos resultados. Ante todo, habrá que establecer los objetos matemáticos sobre los que se trabajará, mediante definiciones basadas en otros objetos anteriores, cuyas definiciones se basarán en las de otros objetos, ..., etc. Tenemos

así un proceso de regresión que, como no puede ser infinito, tendrá que finalizar en unos objetos iniciales a partir de los cuales pueden definirse los demás pero cuyas definiciones no podemos construir; a estos les denominaremos ***nociones primarias***.

Ejemplo I.11.1

La definición de triángulo

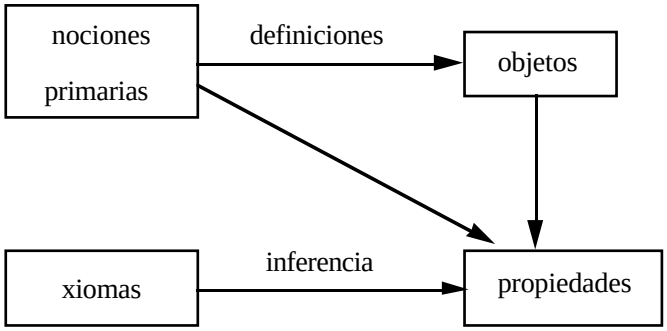
"Un triángulo es una parte de plano intersección de tres semiplanos"

necesita de la definición de semiplano

"Un semiplano es una de las regiones en que una recta divide un plano"

que se basa, a su vez, en las nociones primarias de recta y plano.

La obtención de propiedades verdaderas sobre los objetos, es decir, los resultados de la teoría, es un proceso que se denomina demostración y que se fundamenta en las reglas de inferencia: a partir de un conjunto de premisas, propiedades ya demostradas, es necesario establecer una conclusión, una nueva propiedad. Ahora bien, de forma análoga al proceso de definición de los objetos, si para demostrar una proposición nos basamos en proposiciones anteriores, deben existir unas proposiciones primeras que sean la base del proceso deductivo. Estas proposiciones primeras reciben el nombre de ***axiomas***.



El conjunto de nociones primarias, axiomas y cada una de las propiedades que se van estableciendo se denomina ***teoría***. Una teoría en principio consta de las nociones primarias, objetos y axiomas sobre ellos. Mediante un proceso deductivo, utilizando las reglas de inferencia, se van obteniendo propiedades, es decir, resultados verdaderos sobre los objetos, cada una de las cuales va ampliando a su vez la teoría. En una teoría $\mathbf{T}$, la obtención de un resultado T a partir de otros H_1, H_2,..., H_n, se denomina ***demostración***; se escribe

$$H_1,H_2,...,H_n \vdash_{\mathbf{T}} T$$

decimos que T se deduce de H_1, H_2,..., H_n y significa que es válido el esquema lógico

$$H_1 \wedge H_2 \wedge ... \wedge H_n \wedge \text{axiomas} \wedge \text{otras propiedades en } \mathbf{T} \Rightarrow T$$

A pesar de su estrecha relación, este proceso difiere del de inferencia en que en él las premisas se consideran verdaderas, por lo cual la conclusión se propone como verdadera; sin embargo en la inferencia la conclusión es verdadera, si lo son las premisas, pero sin afirmar, de hecho, la certidumbre.

De las reglas de inferencia veamos cuales son las más usuales en el razonamiento matemático y el tipo de demostración a que dan lugar.

1) El Modus Ponendo Ponens

$$(P \wedge (P \to Q)) \Rightarrow Q$$

permite establecer la siguiente demostración

$$P\,,\,(P \Rightarrow Q) \overset{\mathbf{T}}{\vdash} Q$$

que constituye la llamada ***demostración directa***.

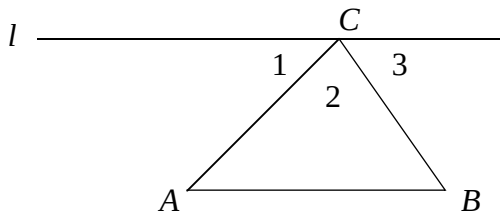
Ejemplo I.11.2

Sea **T** la geometría de Euclides, en la que a partir de sus axiomas hemos podido establecer varias propiedades que son consecuencia de ellos. En particular supongamos ya demostrado que

P : "Los ángulos interiores que una recta determina al cortar a otras dos paralelas son iguales".

y queremos deducir el resultado

Q : "La suma de los ángulos de un triángulo es un ángulo llano".



Si por el vértice *C* trazamos una recta *l* paralela a la recta *AB* tendremos que, como *P* es verdadera

$$\angle 1 = \angle A \qquad \angle 2 = \angle C \qquad \angle 3 = \angle B$$

además de

$$\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = \text{ángulo llano}$$

por lo que

$$\angle A + \angle B + \angle C = \text{ángulo llano}$$

es decir, $P \Rightarrow Q$, luego se verifica Q.

2) A la regla de inferencia que hemos llamado Disyunción

$$((P \to Q) \wedge (\neg P \to Q)) \Rightarrow Q$$

va asociada la demostración

$$(P \Rightarrow Q), (\neg P \Rightarrow Q) \overset{\mathbb{T}}{\vdash} Q$$

que se denomina ***demostración por disyunción de casos***.

Ejemplo I.11.3

Sea $\mathbb{T}$ la teoría de conjuntos en la que se verifican todas las propiedades estudiadas hasta ahora y en la cual queremos demostrar el nuevo resultado

$$Q: A \subseteq (A \cap B) \cup (A \cap B')$$

Sea x un elemento cualquiera de A. Este elemento, con respecto a B, verificará

P: "$x \in B$"

$x \in B \Rightarrow x \in A \cap B \Rightarrow x \in (A \cap B) \cup (A \cap B') \Rightarrow A \subseteq (A \cap B) \cup (A \cap B')$

o bien

$\neg P$: "$x \notin B$

$x \notin B \Rightarrow x \in A \cap B' \Rightarrow x \in (A \cap B') \cup (A \cap B) \Rightarrow A \subseteq (A \cap B) \cup (A \cap B')$

luego P y $\neg P$ implican Q y Q queda demostrado.

3) A la regla de inferencia

$$(P \wedge ((P \wedge \neg Q) \to \mathbb{C})) \Rightarrow Q$$

va asociada la demostración, llamada ***demostración por reducción al absurdo***

$$P, ((P \wedge \neg Q) \Rightarrow \mathbb{C}) \overset{\mathbb{T}}{\vdash} Q$$

es decir, si en una teoría $\mathbb{T}$ tenemos un resultado cierto cualquiera P y queremos demostrar otro Q, basta probar que si suponemos $\neg Q$, se obtiene una contradicción.

Ejemplo I.11.4

Sea **T** la teoría de números, en la que ya se ha establecido la propiedad

P : "Si un número no es primo, es expresable como producto de números primos menores que él".

Se trata de probar que

Q : "El conjunto de números primos es infinito".

Supongamos $\neg Q$, es decir, el conjunto de números primos es finito; sean $p_1,..., p_n$. El número

$$a = p_1 \cdot ... \cdot p_n + 1$$

es mayor que $p_1,..., p_n$ luego no es primo y según *P* será expresable como producto de números primos menores que él; sin embargo, la igualdad anterior expresa que *a* no es divisible por ningún número primo, pues al dividirlo por cualquiera de ellos se obtiene de resto 1, lo que es una contradicción. Según el esquema de demostración por reducción al absurdo *Q* es verdadero.

4) Según propiedades de fórmulas del cálculo de predicados, se verifica que

$$\neg((\forall x \in E)\ (P(x) \rightarrow Q(x)) \Leftrightarrow (\exists x \in E)\ (P(x) \wedge \neg Q(x))$$

De aquí resulta el proceso de deducción utilizado para demostrar que una fórmula

$$(\forall x \in E)\ (P(x) \rightarrow Q(x))$$

no es una tautología, denominado ***demostración por contraejemplo*** según el cual basta hallar un elemento *a* del referencial *E* para el que $P(a)$ sea una proposición verdadera y $Q(a)$ una proposición falsa.

Ejemplo I.11.5

Sobre el conjunto de los números enteros **Z**, sean

$P(x)$: "x es múltiplo de 6" $Q(x)$: "x es múltiplo de 9"

para demostrar que es falso que

$$(\forall x \in \mathbf{Z})\ ((x \text{ múltiplo de } 6) \rightarrow (x \text{ múltiplo de } 9))$$

basta encontrar un solo número entero, p.ej. el 42, que verifica

$$(42 \text{ es múltiplo de } 6) \wedge (42 \text{ no es múltiplo de } 9)$$

5) Otro procedimiento de demostración, denominado ***demostración por inducción*** se

fundamenta en la siguiente propiedad del conjunto **N** de los números naturales:

"Si M es un conjunto tal que

$$(M \subseteq \mathbf{N}) \ \wedge \ (1 \in M) \ \wedge \ (\forall n \in \mathbf{N})\ (\ n \in M \ \rightarrow \ n+1 \in M)$$

entonces $M = \mathbf{N}$"

Por lo cual si queremos demostrar una cierta propiedad que pueda expresarse como $P(n)$, siendo n una variable que toma sus valores en el conjunto **N** de los números naturales, construimos el conjunto

$$M = \{n \in \mathrm{N} \mid P(n)\}$$

y debemos probar que M verifica la tres propiedades anteriores, de las que concluimos que $M = \mathbf{N}$, es decir, que la propiedad P es verdadera para todo número natural.

Ejemplo I.11.6

En la teoría de los números naturales queremos demostrar que

$$1^2+2^2+ \ ... \ +n^2 = \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6}$$

para lo cual definimos el conjunto

$$M = \{n \in \mathbf{N} \mid 1^2+2^2+ \ ... \ +n^2 = \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6}\}$$

que verifica

a) $M \subseteq \mathbf{N}$, por definición de M

b) $1 \in M$ pues $\quad 1^2 = \frac{1^3}{3} + \frac{1^2}{2} + \frac{1}{6}$

c) Si $n \in M$, entonces $\quad 1^2+2^2+ \ ... \ +n^2 = \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6}$

y sumando a ambos miembros $(n+1)^2$

$$1^2+2^2+ \ ... \ ++n^2+(n+1)^2 = \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6} +(n+1)^2$$

de donde haciendo operaciones se obtiene

$$1^2+2^2+ \ldots +(n+1)^2 = \frac{(n+1)^3}{3} + \frac{(n+1)^2}{2} + \frac{(n+1)}{6}$$

por tanto $n+1 \in M$ y, según lo anterior, es $M = \mathbf{N}$ y la propiedad es verdadera para todo número natural.

Ejercicios

I.42.- Demostrar por inducción sobre los naturales la igualdad

$$\sum_{k=1}^{n} r^k = \frac{r^{n+1}-r}{r-1}$$

I.43.- Demostrar por el método de inducción

a) $\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \ldots + \frac{1}{n.(n+1)} = \frac{n}{(n+1)}$

b) $\frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \ldots + \frac{n}{2^n} = 2 - \frac{n+2}{2^n}$

c) $1^2+3^2+ \ldots +(2n+1)^2 = \frac{(n+1)(2n+1)(2n+3)}{3}$

d) $1^3+3^3+ \ldots +(2n+1)^3 = (n+1)^2(2n^2+4n+1)$

e) $n.(n^2+5) = \dot{6}$

f) $2^n > n$

I.12.- OTRAS LOGICAS

La Lógica presentada hasta ahora es fundamentalmente una herramienta para modelar los procesos del razonamiento deductivo y, como tal, es una aproximación a la realidad del pensamiento humano, que es mucho más rica y compleja. Al usar el lenguaje natural para explicar historias, intuiciones o comunicar ideas, las personas usan metáforas, comparaciones, puntos de vista particulares, juicios de valor,...etc, sin análisis, cálculos o demostraciones. Por ello, la lógica informal que se utiliza en las conversaciones, en las argumentaciones cotidianas o en la narrativa literaria es más difusa y antropocéntrica que la lógica formalizada que se emplea en las deducciones científicas y en la construcción de demostraciones matemáticas.

La utilización de relaciones entre objetos, conectores, cuantificadores y diversas reglas de inferencia da lugar a un sistema lógico, la lógica de predicados, que permite formalizar el razonamiento matemático. Pero a diferencia de las matemáticas y de la lógica de predicados, la imprecisión del lenguaje natural hace que formalizar una frase pueda ser un asunto difícil debido

a la austeridad del lenguaje formal que, artificialmente, se restringe al conjunto de proposiciones que pueden formarse con los conectores, las variables, los cuantificadores y los predicados de relación. Una cosa tan simple como un artículo indeterminado *un*/*una* puede tener más de una interpretación ya que, por ejemplo, el razonamiento: "Un gato necesita agua para vivir, luego mi gato *Mau* necesita agua para vivir" no es en absoluto equivalente al: "Un perro ladra en el patio, luego mi perro *Yak* ladra en el patio", aunque ambos tengan la misma forma. El sencillo verbo *ser* se puede traducir a la lógica formal de diferentes maneras ya que, por ejemplo, en "Don Quijote es Alonso Quijano" donde *es* indica identidad, en "Don Quijote es excéntrico" donde *es* tiene función de predicado (x tiene la propiedad P), en "El hombre es mortal" donde *es* indica inclusión (para todo x, si x tiene la propiedad de ser hombre, entonces tiene la propiedad de ser mortal) o en "Es un hombre nervioso" donde *es* indica existencia (existe un hombre con la propiedad de ser nervioso).

Por ello, otras lógicas deductivas abordan aspectos no considerados ni en el Cálculo de Proposiciones ni en el Cálculo de Predicados y son una completación en dos direcciones: unas amplían los lenguajes de ambos cálculos pero conservando la validez de las construcciones y resultados, como hacen la lógica de predicados de orden superior, la lógica de clases y relaciones, la lógica de predicados con identidad, la lógica modal y la lógica temporal, y otras invalidan algunas leyes, como hacen las lógicas multivaloradas y la lógica difusa. Sobre ellas vamos a tratar en esta Sección dando una visión general de ellas y con mucha menos extensión que en las lógicas de proposiciones y predicados.

Lógica de predicados de orden superior. La lógica de predicados desarrollada antes puede ser considerada de primer orden frente a una lógica de segundo orden que considere los predicados como variables, que pueden ser cuantificadas; por ejemplo, si decimos

"Todos los chinos comparten algún rasgo común"

y definimos los predicados $C(x)$: "x es chino" y $R(x)$: "x tiene el rasgo R", puede expresarse mediante la fórmula

$$(\exists R)\ (\forall x)\ (C(x) \rightarrow R(x))$$

en la que hemos considerado el predicado R como una variable afectada por el cuantificador existencial. A su vez los predicados que se refieren a propiedades pueden ser considerados como variables, y ser cuantificados, en lo que será una lógica de tercer orden y así para otras de orden superior que pueden servir para muchos enunciados del lenguaje. Estas lógicas de orden mayor que uno tienen la virtud de ser amplias y el defecto de que son inconsistentes y dan lugar a paradojas.

Lógica de clases y relaciones. Es otro modo de presentar la lógica de predicados de un modo más cercano a la teoría de conjuntos. Parte del concepto de ***clase*** como una entidad abstracta que designa todos los objetos que comparten una propiedad. Es muy semejante a un conjunto que es algo más concreto, pero comparte con ellos las mismas operaciones de unión intersección y complementario. El alfabeto de la lógica de clases está formado por letras que designan clases, los símbolos de la teoría de conjuntos y los conectores y con ellos se construyen las fórmulas bien definidas. Así para el esquema deductivo

"Todo hombre es mortal. Sócrates es hombre, luego Sócrates es mortal"

puede ser representado por una fórmula del tipo

$$((H \subseteq M) \wedge (s \in H)) \rightarrow (s \in M)$$

donde *H* representa a la clase ser hombre y *M* a la clase ser mortal. De hecho la lógica de clases equivale a la lógica de predicados de una variable. Los predicados en más variables vienen representados por las ***relaciones***. Así un enunciado como

"María es hija de Juan y Mercedes"

se refiere a la relación "ser hijo de..". Las relaciones se representan mediante letras *P*, *Q*, .. que forman parte del alfabeto de esta lógica.

Lógica de predicados con igualdad. Amplía el alfabeto de la lógica de predicados con el signo de igualdad "=" que puede leerse indistintamente de varios modos: "es igual a", "es idéntico a", "es lo mismo que",... Si, en principio, la igualdad no es más que un predicado con dos variables, tiene una importancia especial pues con él, o su negación, pueden expresarse cuantificaciones numéricas como "existe un sólo *x* que verifica la propiedad *P*"

$$(\forall x)\ (\forall y)\ ((P(x) \wedge P(y)) \rightarrow (x = y))$$

Para el proceso deductivo con la igualdad se definen unas reglas de inferencia adicionales, que proceden de las propiedades básicas de la igualdad y además se establecen unas reglas específicas para sistematizar el proceso de resolución con igualdad.

Lógica modal. Si *P* es una letra proposicional, junto a enunciados del tipo "*P* es verdadera" o "*P* es falsa", existen expresiones como "es necesario que *P*" o "es posible que *P*". En la lógica modal tales expresiones se escriben

"es posible que *P*" : $\Diamond P$

"es necesario que *P*": $\Box P$

que se añaden al alfabeto de la lógica de predicados para crear fórmulas en las que intervienen estas expresiones.

Lógica temporal. En ella la interpretación de una fórmula depende del instante introduciendo dos predicados temporales

F(*A*) : "*A* será verdadera en algún instante futuro"

P(*A*) : "*A* fue verdadera en algún instante pasado"

a partir de los que pueden expresarse otros como "*A* será verdadera en todo instante futuro" o "*A* fue verdadera en todo instante pasado" y predicados de precedencia temporal $T(t_1,t_2)$, verdadero si $t_1 < t_2$ y falso si $t_1 \geq t_2$.

Lógicas multivaloradas. La lógica clásica es bivalente, es decir, toda proposición es verdadera o falsa, con exclusión. Si asignamos más valores de verificación tendremos lógicas multivaloradas. Así, en una lógica trivalente toda proposición puede ser 1, verdadera, 0, falsa o 1/2, ni verdadera ni falsa. Pueden definirse las tablas de verdad para los conectores y las reglas de obtencion de valores 1, 0 o 1/2 en la interpretación de cualquier fórmula. Obviamente puede generalizarse el proceso y construir lógicas multivaloradas, en las que los valores de verificación son elementos de un conjunto finito. En ellas no se verifican ni el principio de no

contradicción, ni el del tercio excluido, ni muchas tautologías de la lógica bivalente, e incluso los conceptos de tautología y contradicción tienen que ser sustituidos por cuasi-tautología, cuando la fórmula no toma el valor falso en todas sus interpretaciones o cuasi-contradicción cuando nunca toma el valor verdadero.

En principio una lógica multivalorada es mucho más poderosa que la lógica bivalente para expresar valores de verdad graduados. Sin embargo, es insuficiente para modelar otros valores de verdad que se usan en el lenguaje natural, tales como "no completamente", "casi", "más o menos",... De hecho ninguna lógica con valores de verdad pertenecientes a un conjunto finito será capaz de hacerlo. Por ello se han creado lógicas con infinitos valores de interpretación, como son la lógica probabilística y la lógica difusa.

Si los valores de verdad que se atribuyen a una proposición o a una fórmula son elementos del intervalo [0,1] tenemos una lógica probabilística, en la que los conectores se corresponden con operaciones con probabilidades. Por ejemplo a la proposición "al tirar un dado sale un cinco" le atribuimos el valor de verdad 1/6 y a su negación "al tirar un dado no sale un cinco" le corresponde un valor de verificación de 1−1/6.

Otro tipo de lógica no finita, importante por su creciente número de aplicaciones es la lógica difusa, que no sólamente es una lógica con infinitos valores de verdad sino que considera que estos mismos valores pueden ser imprecisos. Por ejemplo, a la proposición "la lógica es una ciencia difícil" no puede atribuirse un valor de verdad, aunque sea de un conjunto infinito, pues en ella interviene un término impreciso como es "difícil". Esta lógica se basa en el concepto de ***conjunto difuso*** en el que no existe un criterio que determine exactamente un límite entre la pertenencia o no pertenencia de un elemento al conjunto. Un conjuto difuso se define asignando a cada elemento un valor entre 0 y 1 para designar su grado de pertenencia al conjunto. Por ejemplo para el conjunto que represente el concepto "dia templado" pueden asignarse grados de pertenencia tales como 0 para cualquier dia en el que la temperatura máxima sea igual o menor que 5˚C, 0.3 si la temperatura oscila entre 5˚C y 15˚C, 1 si la temperatura oscila entre 15˚C y 25˚C,.... Con más precisión, dado un referencial U, un subconjunto difuso A de U es un conjunto de pares formados por un elemento de U y su imagen por una función de pertenencia, de U en el intervalo [0,1]. Sobre este tipo de conjunto se extienden las relaciones de igualdad e inclusión y las operaciones unión, intersección y complementario. En una lógica fundamentada en este tipo de conjuntos, los valores de verdad son conjuntos difusos dentro del intervalo [0,1] existiendo como posibles valores de verdad expresiones como "muy cierto", "bastante cierto", "algo falso"... con lo que una proposición será muy cierta, bastante cierta, algo falsa,... no con caracter absoluto sino con ciertos grados de pertenencia. Si en la lógica clásica los predicados son concretos, "x es hombre", "x es mortal", " x es menor que y",... en la lógica difusa son no concretos, como "x es joven", "x está próximo a y" y en ella se admiten cuantificadores difusos como "existen muchos", "la mayoría de"... La lógica difusa incluye como casos particulares a todas las demás lógicas y es muy apropiada para la representación del conocimiento humano expresado mediante el lenguaje natural, en el que a veces la imprecisión o la ambigüedad son más deseables que la precisión.

EJERCICIOS DE RECAPITULACION

I.44.- Obtener la forma normal conjuntiva de la formula proposicional

$$\neg(((\neg(A \to B) \vee (B \to \neg C)) \to ((A \wedge B) \to C) \vee (C \leftrightarrow D)))$$

I.45.- Encontrar un contraejemplo de

$$(\neg A \wedge E \to \neg P \vee \neg Q) \wedge (\neg E \vee D \to \neg B \wedge P) \wedge (\neg B \vee \neg P \to \neg C \vee Q) \Rightarrow \\ \Rightarrow C \vee D \to \neg B \vee A$$

I.46.- Demostrar que la conclusión es una consecuencia de las premisas dadas: "Si el reloj está adelantado, entonces Juan llegó antes de las diez y vió salir el coche de Andrés. Si Andrés dice la verdad, entonces Juan no vió salir el coche de Andrés. O Andrés dice la verdad o estaba dentro del edificio en el momento del crimen. El reloj está adelantado, por lo tanto Andrés estaba dentro del edificio en el momento del crimen".

I.47.- En el razonamiento: "Si Juan es más alto que Pedro, entonces María es más baja que Raquel. María no es más baja que Raquel. Si Juan y Luís tienen la misma altura, entonces Juan es más alto que Pedro. Por lo tanto Juan y Luís no tienen la misma altura", ¿es la conclusión una consecuencia de las premisas dadas?.

I.48.- Demostrar que

$$(R \to (P \wedge \neg Q)) \wedge (\neg S \to (\neg T \vee U)) \wedge \neg(S \wedge \neg R) \wedge (T \to (S \wedge \neg U)) \Rightarrow \\ \Rightarrow (T \wedge \neg U) \to (P \vee Q)$$

I.49.- Formalizar y demostrar: Duermo o navego por internet o no tengo hambre; cuando como, tengo sed y no tengo frío; cuando tengo hambre, no duermo y no navego por internet; cuando no duermo, como; por tanto, cuando tengo hambre y no navego por internet, tengo sed.

I.50.- Para los símbolos y significados siguientes:

a: Alberto
b: Berta
$G(x)$: x es generoso
$H(x)$: x es honrado
$T(x,y)$: x trata con y

a) dar interpretaciones lingüísticas a:
- a4) $\forall x\ (T(a,x) \to G(x))$
- a5) $(\forall x\ \forall y\ T(x,y)) \to (\forall x\ G(x) \wedge \forall x\ H(x)$
- a6) $\forall x\ (G(x) \to (\forall y\ T(x,y))$

b) formalizar:
- b1) Alberto trata solo con la gente que trata con Berta
- b2) Berta no trata con nadie que no sea honrado
- b3) Todos tratan con la gente honrada

I.51.- Utilizando los predicados $P(y)$: y es político, $A(x,y)$: x aprecia a y, formalizar el razonamiento: "Todo aquel que no aprecia a ningún fanático, no aprecia a ningún político. Hay algún político que es apreciado por alguien. Por tanto, hay algún fanático que es apreciado por alguien".

I.52.- Formalizar: "Lancelot no quiere ninguno de sus amigos. Los amigos de Lancelot odian a todos aquellos a los que Lancelot quiere. El rey Arturo es amigo de Lancelot. Lancelot quiere la reina Ginebra. Por tanto, el rey Arturo odia la reina Ginebra". (Observación: considerar que odiar y querer son opuestos uno del otro.)

I.53.- Averiguar si son válidas las siguientes implicaciones

a) $\neg Q(s) \wedge \forall x\,(P(x) \rightarrow Q(x)) \;\Rightarrow\; \neg P(s)$

b) $Q(s) \wedge \forall x\,(P(x) \rightarrow Q(x)) \;\Rightarrow\; P(s)$

c) $P(s) \wedge \exists x\,(P(x) \rightarrow Q(x)) \;\Rightarrow\; Q(s)$

d) $\neg P(s) \wedge \exists x\,(P(x) \rightarrow Q(x)) \;\Rightarrow\; \neg Q(s)$

I.54.- Demostrar la invalidez del siguiente razonamiento:

$$\exists x\,(P(x) \wedge A(x)) \wedge \forall x\,(P(x) \rightarrow G(x)) \wedge \exists x\,(P(x) \wedge \neg A(x)) \;\Rightarrow\; \forall x\,(A(x) \rightarrow G(x))$$

I.55.- Demostrar que no es cierto que de las premisas

$$\forall x\,(A(x) \vee B(x) \rightarrow ((C(x) \wedge D(x)) \vee E(x) \rightarrow F(x)))$$
$$\exists x\,(B(x) \wedge \neg A(x))$$
$$\forall x\,((D(x) \rightarrow F(x)) \wedge \neg G(x) \rightarrow B(x))$$

se deduce $\exists x\,(C(x) \rightarrow G(x))$

I.56.- Averiguar si de las premisas $\forall x\,(A(x) \rightarrow \neg B(x))$ y $\exists x\,(B(x) \rightarrow \neg C(x))$ se puede concluir que $\forall x\,(\neg B(x))$

I.57.- Demostrar que la fórmula $\forall x\,(\neg\exists y\,(Q(y) \wedge R(x,y)) \rightarrow \neg\exists y\,(P(y) \wedge S(x,y))$ implica la fórmula $\exists x\,\forall y\,(S(x,y) \wedge \forall y\,(R(x,y) \rightarrow \neg Q(y)) \rightarrow \neg P(y))$

I.58.- Demostrar que el esquema lógico que a continuación se indica es válido:

$$\forall x\,\forall z\,((P(x,z) \vee \exists y\,(A(x,y) \wedge P(y,z))) \rightarrow A(x,z)) \;\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\; \forall y\,((\exists x\,\exists z\,(P(x,y) \wedge P(y,z) \wedge P(x,z))) \rightarrow A(y,y))$$

I.59.- Demostrar la validez o la invalidez del razonamiento siguiente:

$$\exists x\,(P(x) \wedge L(x)) \wedge \exists x\,(L(x) \wedge \neg S(x)) \;\Rightarrow\; \exists x\,(\neg S(x) \wedge P(x))$$

I.60.- Formalizar y demostrar si es cierto que: "Los ricos y las personas con buen corazón ayudan a los pobres. Los ladrones que no tienen buen corazón son ricos. Joaquina es pobre, Enrique es un ladrón y Nieves tiene buen corazón. Por tanto, Nieves y Enrique ayudan a la Juaquina".

I.61 .- Un periodista hizo un reportaje de una fiesta de disfraces con las siguientes declaraciones acerca de los invitados:

– Todas las mujeres llevaban peluca y ningún hombre llevaba sombrero.

– Todo el que en la fiesta llevaba peluca era hombre y cada hombre llevaba un paraguas pero no un bastón.

– Todo hombre que llevaba un paraguas llevaba un sombrero, un bastón, o ambos.

¿ Puede deducirse alguna conclusión ?.

I.62.- Averiguar la validez o invalidez de los siguientes razonamientos:

a) Un libro es interesante sólo si está bien escrito; un libro está bien escrito sólo si es interesante; por tanto, todo libro es interesante y bien escrito si es una de las dos cosas.

b) Los ácidos y bases son compuestos químicos; el vinagre es un ácido; por tanto, el vinagre es un compuesto químico.

c) No hay ningún diplomático que sea extremista, pero hay fanáticos que si lo son; por tanto, hay diplomáticos que no son fanáticos.

I.63.- Dado un referencial E, $A \subseteq E$, $B \subseteq E$, $S_1 = A \cap B$, $S_2 = A' \cap B$, $S_3 = A \cap B'$ y $S_4 = A' \cap B'$, demostrar que $S_1 \cup S_2 \cup S_3 \cup S_4 = E$ y que $\forall i \, \forall j \, (i \neq j \Rightarrow S_i \cap S_j = \emptyset)$

I.64.- Demostrar que

a) $\mathbb{P}(A-B) \neq \mathbb{P}(A)-\mathbb{P}(B)$

b) $(A \cup B) \cap B' = A \Leftrightarrow A \cap B = \emptyset$

I.65.- Sea E un conjunto referencial y en $\mathbb{P}(E)$ consideramos la ecuación $A \cup X = B$. Hallar una condición necesaria y suficiente para que tenga solución y en esta situación, resolverla. Lo mismo para $A \cap X = B$.

I.66.- Simplificar los conjuntos

$$(A \cap B') \cap (A' \cap B')$$

$$(A \cap B \cap C) \cup ((A' \cup B') \cup C')$$

$$(A \cap (A' \cup B)) \cup (B \cap (B \cup C)) \cup B$$

$$((A \cap B) \cup (A \cap C) \cup (A' \cap X' \cap Y')) \cup ((A \cap B' \cap C) \cup (A' \cap X' \cap Y') \cup (A' \cap B \cap Y))'$$

I.67.- Simplificar las expresiones

a) $(((A \cup B) \cup C) \cap A) \cap (((B \cup C) \cap (B' \cap C')) \cup A')$

b) $(((A \cup B)' \cap C') \cap (B \cup (A \cup B)')) \cup ((A \cap B)' \cup A')$

c) $((A \cap B) \cap C) \cup ((A \cap B) \cap C') \cup (A' \cap B)$

d) $(A \cap (B \cap C')') \cup ((A' \cup B') \cup C)'$

I.68.- Demostrar las siguientes igualdades:

a) $(A-(B \cup C)) \cup ((B \cap C)-A) = ((B \cap C)-(A \cap B)) \cup ((A-B) \cap (A-C))$

b) $C-(B-A) = (A \cap B \cap C) \cup (C-B)$

I.69.- Averiguar si es cierto o no que

a) $(A \cup B) \subseteq (A \cup C) \Rightarrow B \subseteq C$

b) $((A \cup B) \subseteq (A \cup C) \wedge (A \cap B) \subseteq (A \cap C)) \Rightarrow B \subseteq C$

c) $A - (B \cap C) = (A - B) \cup (A - C)$

d) $A - (B - C) = (A - B) \cup C$

I.70.- Si A y B son dos subconjuntos de un referencial E, demostrar que

a) $(A \cap B') \cup (A' \cap B) = \varnothing \Rightarrow A = B$

b) $(A \cap B') \cup (A' \cap B) = B \Rightarrow A = \varnothing$

c) $(A \cup B) \cap B' = A \Leftrightarrow A \cap B = \varnothing$

d) $A \cup B = A \cap B \Leftrightarrow A = B$

e) $A \cup B = A \Leftrightarrow A \subseteq B$

f) $(A \cap B') \cup (A' \cap B) = A \cup B \Leftrightarrow A \cap B = \varnothing$

I.71.- Sean A, B y C tres partes de un referencial E no vacío. Se define como diferencia simétrica entre dos partes A y B a la operación

$$A \Delta B = (A \cup B)-(A \cap B)$$

Demostrar las siguientes igualdades:

a) $A \Delta B = (A-B) \cup (B-A)$

b) $A \Delta B = B \Delta A$

c) $A \Delta A = \varnothing$

d) $A \Delta E = A'$

e) $A \Delta B = B \leftrightarrow A = \varnothing$

f) $A \Delta B = A \Delta C \leftrightarrow B = C$

I.72.- Demostrar por el método de inducción que

a) $3^{4n}+9$ es múltiplo de 10.

b) $9^{n+1}-8n+55$ es múltiplo de 64.

c) Las potencias de 12890625 terminan en estas mismas ocho cifras.

d) $1^3+2^3+3^3+...+n^3 = (1+2+3+...+n)^2$

e) $2^0+2^1+2^2+...+2^{n-1} = 2^n-1$

BIBLIOGRAFIA

Aranda J, Fernández J.L., Morilla F. (1993). *Lógica Matemática*. Sanz y Torres. Madrid.

Condamine M. (1971). *Algèbre*. Delagrave. París.

Cuena J. (1985). *Lógica Informática*. Alianza Editorial. Madrid.

de Burgos J. (1988). *Curso de Algebra y Geometría*. Alhambra. Madrid.

Fernández G., Sáez F. (1992). *Fundamentos de informática*. Alianza Editorial. Madrid.

Godement R. (1974). *Algebra*. Tecnos. Madrid.

Paulos J.A. (1999). *Érase una vez un número*. Tusquets, Col. Metatemas 60. Barcelona.

Sainz M.A., Serarols J.L. Pérez A.M. (1994). *Álgebra*. Escuela Politécnica Superior. Gerona.