CUADERNO IX

MÉTODOS NUMÉRICOS DEL ÁLGEBRA

Miguel A. Sainz, Joan Serarols, Anna M. Pérez
Dep. de Informática y Matemática Aplicada
Universidad de Girona

RESUMEN: Se estudia la solución de sistemas lineales mediante métodos directos y métodos iterativos y su aplicación a la obtención del valor de un determinante y de la matriz inversa. Se expone el método de las potencias para la obtención de los valores y vectores propios de una matriz diagonalizable.

IX.1.- RESOLUCION DE SISTEMAS DE CRAMER

Sea un sistema lineal de Cramer

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$$

es decir, con igual número de ecuaciones que de incógnitas y con det (**A**) ≠ 0, por lo que el sistema tiene solución única. Los métodos exactos vistos en los capítulos anteriores son útiles cuando el número de ecuaciones no es grande, pero si se trata de un sistema de p.ej. orden 20, la resolución por la regla de Cramer exige del orden de $5 \cdot 10^9$ multiplicaciones, lo que significa una enorme cantidad de tiempo; estos sistemas no son raros y es corriente encontrar en matemática aplicada la necesidad de resolver sistemas mucho mayores.

Dos tipos de métodos existen para resolver el problema: los ***métodos directos*** que dan respuesta exacta, excepto errores, después de un cierto número de pasos y los ***métodos iterativos***, caracterizados porque la solución no es exacta sino que se consigue con una aproximación determinada, partiendo de su valor próximo y mejorándolo de modo sucesivo.

El método directo más importante es la ***eliminación gaussiana*** y se fundamenta en la aplicación de transformaciones elementales sobre las ecuaciones del sistema, que como ya probamos, lo convierten en otro sistema equivalente. Sea el sistema lineal

$$\begin{aligned} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n &= a_{1n+1} \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n &= a_{2n+1} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\ldots+a_{nn}x_n &= a_{nn+1} \end{aligned} \qquad [1]$$

Como det(**A**) ≠ 0, existe al menos un coeficiente de x_1 distinto de cero que, cambiando ecuaciones de lugar si fuese necesario, podemos conseguir que sea a_{11}; aplicando a cada ecuación 2ª, ..., *n*ª la transformación elemental consistente en restarle la primera multiplicada por

$$a_{i1}/a_{11} \qquad \text{(para } i = 2,...,n\text{)}$$

obtenemos un sistema en el que x_1 aparece solamente en la primera ecuación

$$\begin{aligned} a_{11}^{(0)}x_1+a_{12}^{(0)}x_2+...+a_{1n}^{(0)}x_n &= a_{1\,n+1}^{(0)} \\ a_{22}^{(1)}x_2+...+a_{2n}^{(1)}x_n &= a_{2\,n+1}^{(1)} \\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ . & \\ a_{n2}^{(1)}x_2+...+a_{nn}^{(1)}x_n &= a_{n\,n+1}^{(1)} \end{aligned}$$

siendo

$$a_{1j\text{-}1}^{(0)} = a_{1j\text{-}1} \quad , \quad a_{ij}^{(1)} = a_{ij} - \frac{a_{i1}}{a_{11}}\,a_{1j} \qquad \text{para } 2 \le i \le n \qquad 2 \le j \le n+1$$

El nuevo sistema sigue teniendo un determinante distinto de cero ya que las transformaciones elementales dejan invariante el rango de la matriz; por ello alguno de los elementos $a_{22}^{(1)},\ldots,a_{n2}^{(1)}$ es distinto de cero y reordenando ecuaciones, si fuera necesario, podemos conseguir que sea precisamente $a_{22}^{(1)} \neq 0$. Aplicamos a las ecuaciones 3ª,...,nª la transformación elemental consistente en restarles la 2ª ecuación multiplicada por

$$a_{i2}^{(1)} / a_{22}^{(1)} \qquad \text{(para } i = 3,...,n\text{)}$$

y obtenemos el sistema en la forma

$$\begin{aligned} a_{11}^{(0)}x_1+a_{12}^{(0)}x_2+a_{13}^{(0)}x_3+...+a_{1n}^{(0)}x_n &= a_{1\,n+1}^{(0)} \\ a_{22}^{(1)}x_2+a_{23}^{(1)}x_3+...+a_{2n}^{(1)}x_n &= a_{2\,n+1}^{(1)} \\ a_{33}^{(2)}x_3+...+a_{3n}^{(2)}x_n &= a_{3\,n+1}^{(2)} \\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ . & \\ a_{n3}^{(2)}x_3+...+a_{nn}^{(2)}x_n &= a_{n\,n+1}^{(2)} \end{aligned}$$

con

$$a_{ij}^{(2)} = a_{ij}^{(1)} - \frac{a_{i2}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}}\,a_{2j}^{(1)} \qquad \text{para } 3 \le i \le n \qquad 3 \le j \le n+1$$

Reiterando el procedimiento llegamos al sistema transformado

$$
\begin{aligned}
a_{11}^{(0)}x_1+a_{12}^{(0)}x_2+a_{13}^{(0)}x_3+\ldots+a_{1n}^{(0)}x_n &= a_{1\,n+1}^{(0)}\\
a_{22}^{(1)}x_2+a_{23}^{(1)}x_3+\ldots+a_{2n}^{(1)}x_n &= a_{2\,n+1}^{(1)}\\
a_{33}^{(2)}x_3+\ldots+a_{3n}^{(2)}x_n &= a_{3\,n+1}^{(2)}\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
a_{nn}^{(n-1)}x_n &= a_{n\,n+1}^{(n-1)}
\end{aligned}
$$

siendo

$$
a_{ij}^{(k)} = a_{ij}^{(k-1)} - \frac{a_{ik}^{(k-1)}}{a_{kk}^{(k-1)}}\, a_{kj}^{(k-1)} \qquad \text{para} \begin{cases} 1 \le k \le n-1 \\ k+1 \le i \le n \\ k+1 \le j \le n+1 \end{cases}
$$

Despejando x_n en la última ecuación y sustituyendo en la anterior obtendremos x_{n-1} y sustituyendo sucesivamente en las ecuaciones anteriores vamos despejando todas las incógnitas hasta la x_1. La fórmula general es

$$
x_i = \frac{1}{a_{ii}^{(i-1)}}\left(a_{i\,n+1}^{(i-1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}^{(i-1)} x_j\right) \qquad \text{para } i = n, n-1, \ldots, 1
$$

El número total de operaciones a realizar depende del tamaño del sistema y se demuestra que es proporcional a $n^{\log_2 7}$. Depende de como sean los coeficientes del sistema y el número máximo de dígitos que mantiene el computador, pueden introducirse errores por redondeo que, de acuerdo con la fórmula de resolución, se van acumulando aunque son menores si los $a_{k\,k}^{(k-1)}$ son grandes. Por ello una modificación del método puede reducir en algún grado el efecto acumulado del error por redondeo y es tomar como elementos $a_{k\,k}^{(k-1)}$ los mayores posibles en valor absoluto. El método recibe el nombre de ***eliminación gaussiana con pivote***. El procedimiento para obtenerlos consiste en definir para cada ecuación el escalar

$$
s_i = \max_{j=k,\ldots,n} \left| a_{kj}^{(k-1)} \right| \qquad (i = k, \ldots, n)
$$

con lo que el intercambio adecuado de ecuaciones se determina seleccionando los menores enteros p y q tales que

$$
\frac{a_{pq}^{(k-1)}}{s_p} = \max_{\substack{i=k,\ldots,n \\ j=k,\ldots,n}} \frac{\left| a_{ij}^{(k-1)} \right|}{s_i}
$$

e intercambiando las ecuaciones $k \leftrightarrow p$ y los términos $a_{kk}^{(k-1)} x_k \leftrightarrow a_{pq}^{(k-1)} x_q$.

Ejemplo IX.1.1

Resolvamos por el método de eliminación gaussiana con pivote el sistema

$$\begin{array}{l} 2x+y-z=7 \\ 3x-y+2z=-4 \\ x-2y-5z=5 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} 3x-y+2z=-4 \\ 2x+y-z=7 \\ x-2y-5z=5 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} 3x-y+2z=-4 \\ 5/3y-7/3z=29/3 \\ -5/3y-17/3z=19/3 \end{array} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{array}{l} 3x-y+2z=-4 \\ 5/3y-7/3z=29/3 \\ -8z=16 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} 3x-3-4=-4 \\ 5/3y+14/3=29/3 \\ z=-2 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} x=1 \\ y=3 \\ z=-2 \end{array}$$

o bien

$$\begin{array}{l} 3x \quad +3/5z=9/5 \\ 5y-7z=29 \\ -8z=16 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} 3x=3 \\ 5y=15 \\ -8z=16 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} x=1 \\ y=3 \\ z=-2 \end{array}$$

La precisión de la solución puede obtenerse calculando la matriz de ***residuales*** $\mathbf{r} = \mathbf{b}-\mathbf{Ax}$. Si los componentes de **r** son grandes es que hay problemas con el sistema, que pueden resolverse mediante un ***refinamiento iterativo*** consistente en resolver el sistema $\mathbf{Ay} = \mathbf{r}$ y puede demostrarse que $\mathbf{x}+\mathbf{y}$ es una aproximación a la solución mejor que **x**. Este proceso puede ser repetido.

Ejercicios

IX.1 .- Dado el sistema

$$\left.\begin{array}{r} -12x_1+x_2-7x_3=-80 \\ x_1-6x_2+4x_3=13 \\ -2x_1-x_2+10x_3=92 \end{array}\right|$$

Resolverlo mediante la eliminación gaussiana con pivote.

IX.2 .- Utilizar la eliminación gaussiana con pivote y refinamiento iterativo, para resolver los siguientes sistemas:

a) $\left.\begin{array}{r} 4x_1+5x_2-6x_3=28 \\ 2x_1-7x_3=29 \\ -5x_1-8x_2=-64 \end{array}\right|$ b) $\left.\begin{array}{r} \alpha_1x_2-13x_3=-50 \\ 2x_1-6x_2+\alpha_2x_3=44 \\ \alpha_3x_1+\alpha_4x_3=4 \end{array}\right|$ c) $\left.\begin{array}{r} x_1+9x_2+12x_3=22 \\ 9x_1+3x_2+x_3=13 \\ x_1+x_2+x_3=3 \end{array}\right|$

para $\alpha_1 =$, $\alpha_2 =$, $\alpha_3 =$, $\alpha_4 =$.

Otra variante es el bien conocido método de ***Gauss-Jordan***, en el que hemos basado la mayor parte de los algoritmos desarrollados a lo largo del curso, y que consiste en utilizar los elementos de la diagonal $a_{k\,k}^{(k-1)}$ para anular tanto los coeficientes de x_k en las ecuaciones $(k+1)$-

ésima,...,*n*-ésima como en las anteriores (*k*–1)-ésima,..,1ª. El resultado final es un sistema de la forma

$$\begin{aligned} a_{11}^{(n)} x_1 \qquad\qquad\qquad &= a_{1\,n+1}^{(n)} \\ a_{22}^{(n)} x_2 \qquad\qquad &= a_{2\,n+1}^{(n)} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\ a_{nn}^{(n)} x_n &= a_{n\,n+1}^{(n)} \end{aligned}$$

con

$$a_{ij}^{(k)} = a_{ij}^{(k\text{-}1)} - \frac{a_{ik}^{(k\text{-}1)}}{a_{kk}^{(k\text{-}1)}} a_{kj}^{(k\text{-}1)} \qquad \text{para} \begin{cases} 1 \le k \le n\text{–}1 \\ 1 \le j \le n\text{–}1\ ,\ j \ge k \\ 1 \le i \le n\ \ ,\ i \ne k \end{cases}$$

$$a_{ij}^{(k)} = a_{ij}^{(k\text{-}1)} \qquad \text{para} \quad i = k \ \text{ o } \ j < k$$

siendo los $a_{ij}^{(0)}$ iguales a los coeficientes iniciales del sistema.

Para sistemas de gran número de ecuaciones son más efectivos los métodos iterativos consistentes en construir una sucesión de aproximaciones que converja hacia la solución del sistema.

Veamos el ***método de Jacobi***; en el sistema [1] despejamos x_1 en la primera ecuación, x_2 en la segunda,..., x_n en la *n*-ésima, en función de las restantes incógnitas

$$\begin{aligned} x_1 &= -\frac{a_{12}}{a_{11}} x_2 - \frac{a_{13}}{a_{11}} x_3 - \ldots - \frac{a_{1n}}{a_{11}} x_n + \frac{a_{1\,n+1}}{a_{11}} \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_n &= -\frac{a_{n1}}{a_{nn}} x_1 - \frac{a_{n2}}{a_{nn}} x_2 - \ldots - \frac{a_{nn-1}}{a_{nn}} x_{n-1} + \frac{a_{n\,n+1}}{a_{nn}} \end{aligned} \qquad [2]$$

siempre que sea posible. Partiendo de una solución aproximada inicial del sistema

$$x_1^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}$$

se substituye en las *n* igualdades anteriores, obteniéndose unos valores

$$x_1^{(1)}, \ldots, x_n^{(1)}$$

que son una aproximación mejor a la solución del sistema. Estos valores se sustituyen en las anteriores igualdades y obtenemos otra aproximación mejor

$$x_1^{(2)}, \ldots, x_n^{(2)}$$

y así sucesivamente, se va mejorando la aproximación hasta que se considere la aproximación suficientemente buena. En efecto, la forma matricial de las anteriores igualdades es

$$\mathbf{x}^{(k)} = \mathbf{B}\mathbf{x}^{(k-1)}+\mathbf{c}$$

siendo $\mathbf{B} = \mathbf{D}^{-1}(\mathbf{L}+\mathbf{U})$, con las matrices $\mathbf{D} = (d_{ij})$, $\mathbf{L} = (l_{ij})$ y $\mathbf{U} = (u_{ij})$ definidas por

$$\underline{\text{if}}\ i = j\ \underline{\text{then}}\ d_{ij} = a_{ij}\ \underline{\text{else}}\ d_{ij} = 0$$
$$\underline{\text{if}}\ i < j\ \underline{\text{then}}\ l_{ij} = a_{ij}\ \underline{\text{else}}\ l_{ij} = 0$$
$$\underline{\text{if}}\ i > j\ \underline{\text{then}}\ u_{ij} = a_{ij}\ \underline{\text{else}}\ u_{ij} = 0$$

Como la solución del sistema $\mathbf{x}^*$ debe verificar la ecuación anterior

$$\mathbf{x}^* = \mathbf{B}\mathbf{x}^*+\mathbf{c}$$

restando se obtiene

$$\mathbf{x}^{(k)}-\mathbf{x}^* = \mathbf{B}(\mathbf{x}^{(k-1)}-\mathbf{x}^*)$$

luego

$$\mathbf{x}^{(1)}-\mathbf{x}^* = \mathbf{B}(\mathbf{x}^{(0)}-\mathbf{x}^*)$$
$$\mathbf{x}^{(2)}-\mathbf{x}^* = \mathbf{B}(\mathbf{x}^{(1)}-\mathbf{x}^*)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\mathbf{x}^{(k)}-\mathbf{x}^* = \mathbf{B}(\mathbf{x}^{(k-1)}-\mathbf{x}^*)$$

y sustituyendo cada una en la siguiente llegamos a

$$\mathbf{x}^{(k)}-\mathbf{x}^* = \mathbf{B}^k(\mathbf{x}^{(0)}-\mathbf{x}^*)$$

por lo que $\mathbf{x}^{(k)}$ converge a $\mathbf{x}^*$ si y sólo si $\mathbf{B}^k \to \mathbf{0}$ al tender $k \to \infty$, siendo esta la condición necesaria y suficiente de convergencia del método. Habrá muchos tipos de matrices que verificarán esta condición, aunque el más característico es el de las matrices cuyos valores propios $\lambda_1,...,\lambda_n$ son en valor absoluto menores que 1, ya que

$$\mathbf{B}^k = \mathbf{P}\mathbf{D}^k\mathbf{P}^{-1} = \mathbf{P}\begin{pmatrix} \lambda_1^{\,k} & .. & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & .. & \lambda_n^{\,k} \end{pmatrix}\mathbf{P}^{-1}$$

y, en efecto, si $k \to \infty$ y $|\lambda_i| < 1$, entonces $\lambda_i^k \to 0$. Otro tipo de matrices que cumplen la condición son las ***matrices estrictamente dominantes en la diagonal*** que verifican

$$|a_{ii}| > |a_{i1}| + \ldots + |a_{i\,i-1}| + |a_{i\,i+1}| + \ldots + |a_{in}|$$

Se demuestra que si la matriz del sistema $\mathbf{A}$ es estrictamente dominante en la diagonal el método iterativo converge.

La aplicación del método de Jacobi exige en primer lugar disponer de una aproximación inicial; en caso contrario podemos elegir

$$x_1^{(0)} = \ldots = x_n^{(0)} = 0$$

Además, los coeficientes a_{ii} deben ser distintos de cero, para todo i, lo que puede conseguirse intercambiando de lugar ecuaciones o subíndices de incógnitas. Un criterio típico para acabar el proceso iterativo es hacer

$$\mathbf{M}^{(k)} = \max \left| \mathbf{x}_i^{(k)} - \mathbf{x}_i^{(k-1)} \right| \quad \text{o bien} \quad \mathbf{M}^{(k)} = \max \left| \frac{\mathbf{x}_i^{(k)} - \mathbf{x}_i^{(k-1)}}{\mathbf{x}_i^{(k)}} \right|$$

y llegar hasta $\mathbf{M}^{(k)} < \delta$, siendo δ algún número positivo pequeño.

Una variante muy útil del método de Jacobi es el denominado ***método de Gauss-Seidel*** y que en la mayoría de los casos reduce el número de iteraciones necesarias. En el método de Jacobi cada nueva aproximación se obtiene de la anterior substituyendo ésta en los segundos miembros de las ecuaciones [2], obteniendo la nueva $x_1^{(k)}$ de la primera igualdad, ..., $x_n^{(k)}$ de la n-ésima; como la nueva solución, si se verifican las condiciones de convergencia, está más próxima a la solución del sistema, podríamos obtener una mejor aproximación utilizando los nuevos valores según se vayan calculando, es decir el valor de $x_i^{(k)}$ obtenido de la i-ésima igualdad utilizarlo en las siguientes, en vez de $x_i^{(k-1)}$; las igualdades a que dan la nueva aproximación serán, por tanto

$$x_1^{(k)} = -\frac{a_{12}}{a_{11}} x_2^{(k-1)} - \frac{a_{13}}{a_{11}} x_3^{(k-1)} - \ldots - \frac{a_{1n}}{a_{11}} x_n^{(k-1)} + \frac{a_{1\,n+1}}{a_{11}}$$

$$x_2^{(k)} = -\frac{a_{21}}{a_{22}} x_1^{(k)} - \frac{a_{23}}{a_{22}} x_3^{(k-1)} - \ldots - \frac{a_{2n}}{a_{22}} x_n^{(k-1)} + \frac{a_{2\,n+1}}{a_{22}}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$x_i^{(k)} = -\frac{a_{i1}}{a_{ii}} x_1^{(k)} - \ldots - \frac{a_{i\,i-1}}{a_{ii}} x_{i-1}^{(k)} - \ldots - \frac{a_{in}}{a_{ii}} x_n^{(k-1)} + \frac{a_{i\,n+1}}{a_{ii}}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$x_n^{(k)} = -\frac{a_{n1}}{a_{nn}} x_1^{(k)} - \frac{a_{n2}}{a_{nn}} x_2^{(k)} - \ldots - \frac{a_{n\,n-1}}{a_{nn}} x_{n-1}^{(k)} + \frac{a_{n\,n+1}}{a_{nn}}$$

que al tener una forma análoga a la del método de Jacobi

$$\mathbf{x}^{(k)} = \mathbf{B}\mathbf{x}^{(k-1)} + \mathbf{c}$$

siendo ahora $\mathbf{B} = (\mathbf{D}-\mathbf{L})^{-1}\mathbf{U}$, se le pueden aplicar las mismas condiciones de convergencia anteriores.

Ejemplo IX.1.2

El método de Jacobi aplicado al sistema

$$\begin{aligned} x+y+z &= 2 \\ 3x-y+5z &= 20 \\ 2x-5y+z &= 15 \end{aligned}$$

se basa en las igualdades

$$\begin{aligned} x &= -y-z+2 \\ y &= 3x+5z-20 \\ z &= -2x+5y+15 \end{aligned}$$

por lo que si partimos de la aproximación inicial cero, será

$$\begin{array}{lllll} x^{(0)}=0 & x^{(1)}=-0-0+2=2 & x^{(2)}=7 & x^{(3)}=30 & x^{(4)}=140 \\ y^{(0)}=0 \Rightarrow & y^{(1)}=3\cdot 0+5\cdot 0-20=-20 \Rightarrow & y^{(2)}=61 \Rightarrow & y^{(3)}=-444 \Rightarrow & y^{(4)}=1600 \\ z^{(0)}=0 & z^{(1)}=-2\cdot 0+5\cdot 0+15=15 & z^{(2)}=-89 & z^{(3)}=306 & z^{(4)}=-2265 \end{array}$$

pudiéndose comprobar que el algoritmo no converge. Para el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} 3x+y+z &= 4 \\ x-2y-z &= 2 \\ 2x-y-3z &= -5 \end{aligned}$$

las igualdades para aplicar el algoritmo son

$$\begin{aligned} x &= -y/3-z/3+4/3 \\ y &= x/2-z/2-1 \\ z &= 2x/3-y/3+5/3 \end{aligned}$$

mediante el que se obtiene, sucesivamente

$$\begin{array}{llll} x^{(0)}=0 & x^{(1)}=-0/3-0/3+4/3=1'3333 & x^{(2)}=1'11 & \ldots\ x^{(23)}=0'999979 \\ y^{(0)}=0 \Rightarrow & y^{(1)}=0/2-0/2-1=-1 \Rightarrow & y^{(2)}=-1'167 & \ldots\ y^{(23)}=-2'000018 \\ z^{(0)}=0 & z^{(1)}=2\cdot 0/3-0/3+5/3=1'6666 & z^{(2)}=2'88 & \ldots\ z^{(23)}=2'999988 \end{array}$$

convergiendo hacia la solución $x = 1$ $y = -2$ $z = 3$. Los resultados del algoritmo de Gauss-Seidel para este sistema son

$$\begin{array}{llll} x^{(0)}=0 & x^{(1)}=-0/3-0/3+4/3=1'333 & x^{(2)}=0'555 & \ldots\ x^{(23)}=1'000000 \\ y^{(0)}=0 \Rightarrow & y^{(1)}=1'3333/2-0/2-1=-0'333 \Rightarrow & y^{(2)}=-2'055 & \ldots\ y^{(23)}=-2'000000 \\ z^{(0)}=0 & z^{(1)}=2\cdot 1'333/3-0'333/3+5/3=2'6666 & z^{(2)}=2'722 & \ldots\ z^{(23)}=3'000000 \end{array}$$

convergiendo hacia la solución de forma más rápida.

Ejercicios

IX.3.- Resolver por los métodos de Jacobi y Gauss-Seidel, los siguientes sistemas:

$$\text{a)}\ \left|\begin{array}{r} 10x_1-3x_2+6x_3 = 24'5 \\ x_1+8x_2-2x_3 = -9 \\ -2x_1+4x_2-9x_3 = -50 \end{array}\right| \quad \text{b)}\ \left|\begin{array}{r} x_1+7x_2-3x_3 = -51 \\ 4x_1-4x_2+9x_3 = 61 \\ 12x_1-x_2+3x_3 = 8 \end{array}\right| \quad \text{c)}\ \left|\begin{array}{r} \alpha_1 x_1-2x_2+\alpha_2 x_3 = 0 \\ -x_1+\alpha_3 x_2-2x_3 = 11 \\ x_1+\alpha_4 x_2-3x_3 = 6 \end{array}\right|$$

para $\alpha_1 =$, $\alpha_2 =$, $\alpha_3 =$, $\alpha_4 =$.

IX.2.- CALCULO DE DETERMINANTES Y DE LA MATRIZ INVERSA

El método de Gauss desarrollado antes para resolver un sistema de Cramer es válido para hallar el determinante de una matriz cuadrada regular. Si aplicamos al determinante

$$\left|\mathbf{A}\right| = \begin{vmatrix} a_{11} & .. & a_{1n} \\ ..... & & \\ a_{n1} & .. & a_{nn} \end{vmatrix}$$

las transformaciones del método de Gauss

$$a_{ij}^{(k)} = a_{ij}^{(k\text{-}1)} - \frac{a_{ik}^{(k\text{-}1)}}{a_{kk}^{(k\text{-}1)}} a_{kj}^{(k\text{-}1)} \qquad \text{para} \left|\begin{array}{l} 1 \le k \le n-1 \\ k+1 \le i \le n \\ k+1 \le j \le n \end{array}\right.$$

el resultado es un determinante triangular igual al anterior ya que las transformaciones elementales efectuadas no modifican el valor absoluto del determinante; por tanto

$$\left|\mathbf{A}\right| = (-1)^p \prod_{i=1}^{n} a_{ii}^{(i-1)}$$

siendo p el número de posibles cambios de fila que hayan debido hacerse para evitar que los pivotes $a_{kk}^{(k-1)}$ sean 0.

Para el cálculo de la matriz inversa de una matriz regular $\mathbf{A}$ vimos también que las mismas transformaciones elementales sirven para calcularla. Por definición de matriz inversa

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{I} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{A} \begin{pmatrix} \mathbf{x}_1 & \mathbf{x}_2 & & \mathbf{x}_n \\ x_{11} & x_{12} & .. & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & .. & x_{2n} \\ & ..... & & \\ x_{n1} & x_{n2} & .. & x_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & & \mathbf{e}_n \\ 1 & 0 & .. & 0 \\ 0 & 1 & .. & 0 \\ & ..... & & \\ 0 & 0 & .. & 1 \end{pmatrix}$$

lo que equivale a resolver n sistemas de Cramer con n incógnitas

$$\mathbf{A}\mathbf{x}_1 = \mathbf{e}_1$$

$$\mathbf{A}\mathbf{x}_2 = \mathbf{e}_2$$
$$\cdots\cdots$$
$$\mathbf{A}\mathbf{x}_n = \mathbf{e}_n$$

todas ellas con la misma matriz por lo que la eliminación gaussiana puede ser hecha simultáneamente usando *n* vectores en el segundo miembro en lugar de uno, lo que equivale a adjuntar la matriz unidad

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{array}\right)$$

y mediante las mismas transformaciones elementales que las utilizadas para el método de Gauss-Jordancon se llega a

$$\left(\begin{array}{cccccccc} a_{11}^{(n-1)} & 0 & \cdots & 0 & a_{1\,n+1}^{(n-1)} & a_{1\,n+2}^{(n-1)} & \cdots & a_{1\,2n}^{(n-1)} \\ 0 & a_{22}^{(n-1)} & \cdots & 0 & a_{2\,n+1}^{(n-1)} & a_{2\,n+2}^{(n-1)} & \cdots & a_{2\,2n}^{(n-1)} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn}^{(n-1)} & a_{n\,n+1}^{(n-1)} & a_{n\,n+2}^{(n-1)} & \cdots & a_{n\,2n}^{(n-1)} \end{array}\right)$$

$$a_{ij}^{(k)} = a_{ij}^{(k-1)} - \frac{a_{ik}^{(k-1)}}{a_{kk}^{(k-1)}} a_{kj}^{(k-1)} \qquad \text{para} \begin{cases} 1 \le k \le n-1 \\ 1 \le j \le 2n\,,\ j \ge k \\ 1 \le i \le n\ ,\ i \ne k \end{cases}$$

$$a_{ij}^{(k)} = a_{ij}^{(k-1)} \qquad \text{para} \quad i = k \ \text{o}\ j < k$$

Así la matriz inversa es

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} \dfrac{a_{1\,n+1}^{(n-1)}}{a_{11}^{(n-1)}} & \dfrac{a_{1\,n+2}^{(n-1)}}{a_{11}^{(n-1)}} & \cdots & \dfrac{a_{1\,2n}^{(n-1)}}{a_{11}^{(n-1)}} \\ \dfrac{a_{2\,n+1}^{(n-1)}}{a_{22}^{(n-1)}} & \dfrac{a_{2\,n+2}^{(n-1)}}{a_{22}^{(n-1)}} & \cdots & \dfrac{a_{2\,2n}^{(n-1)}}{a_{22}^{(n-1)}} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \dfrac{a_{n\,n+1}^{(n-1)}}{a_{nn}^{(n-1)}} & \dfrac{a_{n\,n+2}^{(n-1)}}{a_{nn}^{(n-1)}} & \cdots & \dfrac{a_{n\,2n}^{(n-1)}}{a_{nn}^{(n-1)}} \end{pmatrix}$$

es decir, la transformación $b_{ij} = \dfrac{a_{i\,n+j}^{(n-1)}}{a_{i1}^{(n-1)}}$ da los elementos de $\mathbf{A}^1$.

Ejercicios

IX.4.- Determinar las inversas para $\alpha_1 =$, $\alpha_2 =$, $\alpha_3 =$, $\alpha_4 =$ de las matrices:

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 0 \\ -1 & 1 & \alpha_2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 2 & 0 & \alpha_3 \\ 1 & 0 & 1 \\ \alpha_4 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

IX.3.- CALCULO DE VALORES Y VECTORES PROPIOS

Al ser los valores propios de una matriz las raíces de su ecuación característica, podrían aplicarse los algoritmos existentes en el cálculo numérico para resolver una ecuación polinómica, si ésta se conociera. Existen algoritmos complicados para calcular la ecuación característica de una matriz cuadrada, sin embargo, vamos a optar por un camino más sencillo, y vamos a ver un procedimiento para calcular los valores y los vectores propios de una matriz a partir de sus elementos denominado el ***método de las potencias***.

Supongamos que **A** es una matriz cuadrada de orden *n* diagonalizable, sean $\lambda_1,...,\lambda_n$ los valores propios dispuestos en orden decreciente de valores absolutos, es decir

$$|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq ... \geq |\lambda_n| \qquad [3]$$

y sean $\boldsymbol{x}_1,...,\boldsymbol{x}_n$ vectores propios l.i. asociados a los valores propios $\lambda_1,...,\lambda_n$. Sea $\boldsymbol{y}_0$ un vector de K^n; como **A** es diagonalizable $(\boldsymbol{x}_1,...,\boldsymbol{x}_n)$ es una base de K^n por lo cual

$$\boldsymbol{y}_0 = k_1\boldsymbol{x}_1+k_2\boldsymbol{x}_2+...+k_n\boldsymbol{x}_n \qquad [4]$$

Multiplicando por **A** a la izquierda

$$\mathbf{y}_1 = \mathbf{A}\mathbf{y}_0 = \mathbf{A}(k_1\mathbf{x}_1+k_2\boldsymbol{x}_2+...+k_n\mathbf{x}_n) =$$

$$= k_1\mathbf{A}\mathbf{x}_1+k_2\mathbf{A}\mathbf{x}_2+...+k_n\mathbf{A}\mathbf{x}_n = k_1\lambda_1\mathbf{x}_1+k_2\lambda_2\mathbf{x}_2+...+k_n\lambda_n\mathbf{x}_n$$

y multiplicando sucesivamente por **A** tendremos, por inducción

$$\mathbf{y}_k = \mathbf{A}^k\mathbf{y}_0 = k_1\lambda_1^k\mathbf{x}_1+k_2\lambda_2^k\mathbf{x}_2+...+k_n\lambda_n^k\mathbf{x}_n \qquad [5]$$

Veamos como calcular, en primer lugar el valor propio dominante λ_1 y un vector propio asociado; para cualquier componente de $\boldsymbol{y}_k$ tenemos

$$y_{ik} = k_1\lambda_1^k x_{i1} + k_2\lambda_2^k x_{i2}+...+k_n\lambda_n^k x_{in} \qquad [6]$$

Supongamos que el vector $\boldsymbol{y}_0$ se ha elegido de modo que $k_1 \neq 0$ y consideremos los casos posibles que pueden darse respecto de los módulos de λ_1 y λ_2

a) $|\lambda_1| > |\lambda_2|$

Dividiendo y_{ik+1} por y_{ik}, para cualquier $1 \leq i \leq n$, será

$$\frac{y_{ik+1}}{y_{ik}} = \frac{k_1\lambda_1^{k+1}x_{i1}+\ldots+k_n\lambda_n^{k+1}x_{in}}{k_1\lambda_1^{k}x_{i1}+\ldots+k_n\lambda_n^{k}x_{in}} =$$

$$= \frac{\lambda_1^{k+1}}{\lambda_1^{k}} \frac{k_1x_{i1}+k_2x_{i2}(\lambda_2/\lambda_1)^{k+1}+\ldots+k_nx_{in}(\lambda_n/\lambda_1)^{k+1}}{k_1x_{i1}+k_2x_{i2}(\lambda_2/\lambda_1)^{k}+\ldots+k_nx_{in}(\lambda_n/\lambda_1)^{k}} = \lambda_1\varepsilon(k)$$

Como $\lim_{k\to\infty} (\lambda_j/\lambda_1)^k = 0$, al ser $|\lambda_1| > |\lambda_2| >\ldots$, tenemos que $\lim_{k\to\infty} \varepsilon(k) = 1$, luego

$$\lim_{k \to \infty} \frac{y_{ik+1}}{y_{ik}} = \lambda_1$$

cualquiera que sea $1 \leq i \leq n$. Para k suficientemente grande

$$\lambda_1 \approx \frac{y_{ik+1}}{y_{ik}}$$

Para obtener un vector propio asociado a λ_1 basta tener en cuenta que de [5]

$$\boldsymbol{y}_k = k_1\lambda_1^k\boldsymbol{x}_1+k_2\lambda_2^k\boldsymbol{x}_2+\ldots+k_n\lambda_n^k\boldsymbol{x}_n = \lambda_1^k(k_1\boldsymbol{x}_1+k_2(\lambda_2/\lambda_1)^k\boldsymbol{x}_2+\ldots+k_n(\lambda_n/\lambda_1)^k\boldsymbol{x}_n)$$

con lo que si $k \to \infty$, entonces $\boldsymbol{y}_k \to \lambda_1^k k_1\boldsymbol{x}_1$, es decir, $\boldsymbol{y}_k$ es un múltiplo del vector propio $\boldsymbol{x}_1$ luego $\boldsymbol{y}_k$ es también un vector propio asociado a λ_1.

b) $\lambda_1 = \lambda_2$, $|\lambda_2| > |\lambda_3| \geq \ldots \geq |\lambda_n|$

En este caso en [6] puede sacarse factor común λ^k_1 quedando

$$y_{ik} = (k_1x_{i1}+k_2x_{i2})\lambda_1^k+k_3\lambda_3^kx_{i3}+\ldots+k_n\lambda_n^kx_{in}$$

y razonando de modo análogo será

$$\frac{y_{ik+1}}{y_{ik}} = \frac{\lambda_1^{k+1}}{\lambda_1^{k}} \frac{(k_1x_{i1}+k_2x_{i2})+k_3x_{i3}(\lambda_3/\lambda_1)^{k+1}+\ldots+k_nx_{in}(\lambda_n/\lambda_1)^{k+1}}{(k_1x_{i1}+k_2x_{i2})+k_3x_{i3}(\lambda_3/\lambda_1)^{k}+\ldots+k_nx_{in}(\lambda_n/\lambda_1)^{k}} = \lambda_1\varepsilon(k)$$

con $\lim_{k\to\infty} \varepsilon(k) = 1$ y su valor aproximado es también

$$\lambda_1 \approx \frac{y_{ik+1}}{y_{ik}}$$

Para el vector propio asociado sirve el razonamiento anterior

$$\boldsymbol{y}_k = k_1\lambda_1^k\boldsymbol{x}_1+k_2\lambda_1^k\boldsymbol{x}_2+k_3\lambda_3^k\boldsymbol{x}_3+\ldots+k_n\lambda_n^k\boldsymbol{x}_n =$$

$$= \lambda_1^k(k_1\boldsymbol{x}_1+k_2\boldsymbol{x}_2+k_3(\lambda_3/\lambda_1)^k\boldsymbol{x}_3+..+k_n(\lambda_n/\lambda_1)^k\boldsymbol{x}_n$$

con lo cual si $k \to \infty$, entonces $\boldsymbol{y}_k \to k_1\lambda_1^k\boldsymbol{x}_1+k_2\lambda_1^k\boldsymbol{x}_2$, es decir, una combinación lineal de vectores propios asociados a λ_1, luego $\boldsymbol{y}_k$ es también vector propio del mismo subespacio; partir de distintos vectores iniciales $\boldsymbol{y}_0$ llevará a obtener distintos vectores propios asociados a λ_1. La generalización a $\lambda_1 =...= \lambda_r$, $|\lambda_{r+1}| > |\lambda_{r+2}| \geq ... \geq |\lambda_n|$ es evidente, con resultados análogos

c) $\lambda_1 = -\lambda_2$, $|\lambda_2| > |\lambda_3| \geq... \geq |\lambda_n|$

En este caso no se mantiene el razonamiento anterior ya que $\varepsilon(k)$ no tiende a 1; pero basta considerar el cociente

$$\frac{y_{i\,2k+1}}{y_{i\,2k-1}} = \frac{\lambda_1^{2k+1}}{\lambda_1^{2k-1}} \frac{(k_1x_{i1}-k_2x_{i2})+k_3x_{i3}(\lambda_3/\lambda_1)^{2k+1}+\ldots+k_nx_{in}(\lambda_n/\lambda_1)^{2k+1}}{(k_1x_{i1}-k_2x_{i2})+k_3x_{i3}(\lambda_3/\lambda_1)^{2k-1}+\ldots+k_nx_{in}(\lambda_n/\lambda_1)^{2k-1}} = \lambda_1^2\varepsilon(k)$$

con $\lim_{k\to\infty} \varepsilon(k) = 1$; por tanto

$$\lambda_1^2 \approx \frac{y_{i\,2k+1}}{y_{i\,2k-1}}$$

En este caso

$$\boldsymbol{y}_k = k_1\lambda_1^k\boldsymbol{x}_1+k_2(-\lambda_1)^k\boldsymbol{x}_2+\ldots+k_n\lambda_n^k\boldsymbol{x}_n \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \boldsymbol{y}_k+\lambda_1\boldsymbol{y}_{k-1} =\lambda_1^k(2k_1\boldsymbol{x}_1+k_3(\lambda_3/\lambda_1+1)(\lambda_3/\lambda_1)^{k-1}\boldsymbol{x}_3+\ldots+k_3(\lambda_n/\lambda_1+1)(\lambda_3/\lambda_1)^{k-1}\boldsymbol{x}_n)$$

con lo cual si $k\to\infty$, entonces $\boldsymbol{y}_k+\lambda_1\boldsymbol{y}_{k-1}$ tiende a $2\lambda_1^kk_1\boldsymbol{x}_1$ luego $\boldsymbol{y}_k+\lambda_1\boldsymbol{y}_{k-1}$ es un vector propio asociado a λ_1.

En la práctica es conveniente calcular los cocientes

$$\frac{y_{ik+1}}{y_{ik}} \left(\text{o } \frac{y_{i\,2k+1}}{y_{i\,2k-1}}\right)$$

con $i = 1,...,n$ para cada k, que representaremos por

$$\frac{\boldsymbol{y}_{k+1}}{\boldsymbol{y}_k} \left(\text{o } \frac{\boldsymbol{y}_{2k+1}}{\boldsymbol{y}_{2k-1}}\right)$$

para todas las componentes de $\boldsymbol{y}_k$ (que no sean nulas) de forma que una buena coincidencia entre estos resultados indica que la aproximación alcanzada es suficiente. Para evitar números grandes en el cálculo de los sucesivos vectores $\boldsymbol{y}_1,...,\boldsymbol{y}_k$, dados por

$$\mathbf{y}_1 = \mathbf{A}\mathbf{y}_0 \ ,..., \ \mathbf{y}_k = \mathbf{A}\mathbf{y}_{k-1}$$

es conveniente dividir las componentes de cada uno de estos vectores por la 1ª componente; en este caso se obtiene la sucesión

$$\mathbf{y}_1 = \mu_0\mathbf{A}\mathbf{y}_0 \ ,..., \ \mathbf{y}_k = \mu_k\mathbf{A}\mathbf{y}_{k-1}$$

y para obtener λ_1 deben calcularse los cocientes entre las componentes de $\mathbf{A}\mathbf{y}_k$ e $\mathbf{y}_k$ (o bien $\mathbf{A}^2\mathbf{y}_{2k}$ e $\mathbf{y}_{2k}$). En general la rapidez de la convergencia dependrá de y_{ik+1}/y_{ik}, existiendo algunos procedimientos auxiliares para acelerarla.

Para calcular el segundo valor propio λ_2 tendremos en cuenta que

$$\frac{y_{ik+1}-\lambda_1 y_{ik}}{y_{ik}-\lambda_1 y_{ik-1}} = \frac{k_2x_{i2}(\lambda_2-\lambda_1)\lambda_2^{\,k}+...+k_nx_{in}(\lambda_n-\lambda_1)\lambda_n^{\,k}}{k_2x_{i2}(\lambda_2-\lambda_1)\lambda_2^{\,k-1}+...+k_nx_{in}(\lambda_n-\lambda_1)\lambda_n^{\,k-1}} =$$

$$= \frac{\lambda_2^{\,k}}{\lambda_2^{\,k-1}} \frac{k_2x_{i2}(\lambda_2-\lambda_1)+k_3x_{i3}(\lambda_3-\lambda_1)(\frac{\lambda_3}{\lambda_2})^{k}+...+k_nx_{in}(\lambda_n-\lambda_1)(\frac{\lambda_n}{\lambda_2})^{k}}{k_2x_{i2}(\lambda_2-\lambda_1)+k_3x_{i3}(\lambda_3-\lambda_1)(\frac{\lambda_3}{\lambda_2})^{k-1}+...+k_nx_{in}(\lambda_n-\lambda_1)(\frac{\lambda_n}{\lambda_2})^{k-1}} = \lambda_2\varepsilon(k)$$

con $\varepsilon(k)\to 1$ al tender $k\to\infty$, por lo que para k suficientemente grande

$$\lambda_2 \approx \frac{y_{ik+1}-\lambda_1 y_{ik}}{y_{ik}-\lambda_1 y_{ik-1}}$$

Un vector propio asociado a λ_2 se puede obtener, teniendo en cuenta que,

$$\Delta^1_{k+1} = \boldsymbol{y}_{k+1}-\lambda_1\boldsymbol{y}_k = k_2(\lambda_2-\lambda_1)\lambda_2^k\boldsymbol{x}_2+...+k_n(\lambda_n-\lambda_1)\lambda_n^k\boldsymbol{x}_n =$$

$$= \lambda_2^k(k_2(\lambda_2-\lambda_1)\boldsymbol{x}_2+\lambda_3(\lambda_3-\lambda_1)(\lambda_3/\lambda_2)^k\boldsymbol{x}_3+...+k_n(\lambda_n-\lambda_1)(\lambda_n/\lambda_2)^k\boldsymbol{x}_n)$$

y si $k\to\infty$, entonces $\boldsymbol{y}_{k+1}-\lambda_1\boldsymbol{y}_k \to \lambda_2^k k_2(\lambda_2-\lambda_1)\boldsymbol{x}_2$, es decir, $\boldsymbol{y}_{k+1}-\lambda_1\boldsymbol{y}_k$ es un múltiplo del vector propio $\boldsymbol{x}_2$ con lo que es también un vector propio asociado a λ_2. Reiterando el proceso anterior

$$\lambda_3 \approx \frac{\Delta^2_{k+1}}{\Delta^2_k} = \frac{\Delta^1_{k+1}-\lambda_2\Delta^1_k}{\Delta^1_k-\lambda_2\Delta^1_{k-1}}$$

será la aproximación al siguiente valor propio así como $(\boldsymbol{y}_{k+1}-\lambda_1\boldsymbol{y}_k)-\lambda_2(\boldsymbol{y}_k-\lambda_1\boldsymbol{y}_{k-1})$ es una aproximación a un vector propio asociado a λ_3 y así sucesivamente.

El estudio detallado de la convergencia, errores y otros procedimientos más eficaces para calcular los vectores y valores propios de una matriz cuadrada se sale fuera del alcance de este capítulo introductorio a los métodos numéricos que más utiliza el álgebra lineal.

Ejemplo IX.3.1

Para diagonalizar la matriz

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

tomamos un $\boldsymbol{y}_0$ cualquiera, $\boldsymbol{y}_0 = (1,1,1)$, y calculemos las sucesivas imágenes

$$\mathbf{y}_1 = \mathbf{A}\mathbf{y}_0 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{y}_2 = \mathbf{A}\mathbf{y}_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{y}_3 = \mathbf{A}\mathbf{y}_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -6 \\ -6 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{y}_4 = \mathbf{A}\mathbf{y}_3 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 \\ -6 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 9 \\ 9 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{y}_5 = \mathbf{A}\mathbf{y}_4 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 9 \\ 9 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 \\ -18 \\ -18 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{y}_6 = \mathbf{A}\mathbf{y}_5 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -9 \\ -18 \\ -18 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 27 \\ 27 \\ 27 \end{pmatrix}$$

Calculemos los cocientes $\dfrac{\boldsymbol{y}_{i\,k+1}}{\boldsymbol{y}_{i\,k}}$ y $\dfrac{\boldsymbol{y}_{i\,2k+1}}{\boldsymbol{y}_{i\,2k-1}}$

$$\frac{\boldsymbol{y}_1}{\boldsymbol{y}_0} = (-1,-2,-2) \qquad \frac{\boldsymbol{y}_2}{\boldsymbol{y}_1} = \left(-3,-\frac{3}{2},-\frac{3}{2}\right) \qquad \frac{\boldsymbol{y}_3}{\boldsymbol{y}_2} = (-1,-2,-2)$$

$$\frac{\boldsymbol{y}_4}{\boldsymbol{y}_3} = \left(-3,-\frac{3}{2},-\frac{3}{2}\right) \qquad \frac{\boldsymbol{y}_5}{\boldsymbol{y}_4} = (-1,-2,-2) \qquad \frac{\boldsymbol{y}_6}{\boldsymbol{y}_5} = \left(-3,-\frac{3}{2},-\frac{3}{2}\right)$$

que no convergen. Como

$$\frac{\boldsymbol{y}_3}{\boldsymbol{y}_1} = (3,3,3) \qquad \frac{\boldsymbol{y}_5}{\boldsymbol{y}_3} = (3,3,3)$$

en que cada componente converge a 3, entonces $\lambda_1 = \sqrt{3}$ es valor propio y $\lambda_2 = -\sqrt{3}$

también lo es. Busquemos los correspondientes vectores propios, calculando las expresiones $\boldsymbol{y}_k+\lambda_1\boldsymbol{y}_{k-1}$ y $\boldsymbol{y}_k+\lambda_2\boldsymbol{y}_{k-1}$

$$[\boldsymbol{y}_1+\sqrt{3}\boldsymbol{y}_0] = [(-1+\sqrt{3},-2+\sqrt{3},-2+\sqrt{3})] = [(-(1+\sqrt{3}),1,1)]$$

$$[\boldsymbol{y}_2+\sqrt{3}\boldsymbol{y}_1] = [(3-\sqrt{3},3-2\sqrt{3},3-2\sqrt{3})] = [(-(1+\sqrt{3}),1,1)]$$

$$[\boldsymbol{y}_3+\sqrt{3}\boldsymbol{y}_2] = [(-3+3\sqrt{3},-6+3\sqrt{3},-6+3\sqrt{3})] = [(-(1+\sqrt{3}),1,1)]$$

El vector propio asociado al valor propio $\lambda_1 = \sqrt{3}$, será $\boldsymbol{v}(\sqrt{3}) = [(-(1+\sqrt{3}),1,1)]$. Como

$$[\boldsymbol{y}_1-\sqrt{3}\boldsymbol{y}_0] = [(-1-\sqrt{3},-2-\sqrt{3},-2-\sqrt{3})] = [(-1+\sqrt{3}),1,1)]$$

$$[\boldsymbol{y}_2-\sqrt{3}\boldsymbol{y}_1] = [(3+\sqrt{3},3+2\sqrt{3},3+2\sqrt{3})] = [(-1+\sqrt{3}),1,1)]$$

el asociado a $\lambda_2 = -\sqrt{3}$, será $\boldsymbol{v}(-\sqrt{3}) = [(-1+\sqrt{3},1,1)]$. Calculemos el tercer valor propio, que será

$$\lambda_3 \approx \frac{\Delta^2_{k+1}}{\Delta^2_k} = \frac{\Delta^1_{k+1}-\lambda_2\Delta^1_k}{\Delta^1_k-\lambda_2\Delta^1_{k-1}} = \frac{(\boldsymbol{y}_{k+1}-\sqrt{3}\boldsymbol{y}_k)+\sqrt{3}(\boldsymbol{y}_k-\sqrt{3}\boldsymbol{y}_{k-1})}{(\boldsymbol{y}_k-\sqrt{3}\boldsymbol{y}_{k-1})+\sqrt{3}(\boldsymbol{y}_{k-1}-\sqrt{3}\boldsymbol{y}_{k-2})} = \frac{\boldsymbol{y}_{k+1}-3\boldsymbol{y}_{k-1}}{\boldsymbol{y}_k-3\boldsymbol{y}_{k-2}}$$

Hallemos pues los cocientes $\dfrac{\boldsymbol{y}_{i\,k+1}-3\boldsymbol{y}_{i\,k-1}}{\boldsymbol{y}_{i\,k}-3\boldsymbol{y}_{i\,k-2}}$

$$\frac{\boldsymbol{y}_3-3\boldsymbol{y}_1}{\boldsymbol{y}_2-3\boldsymbol{y}_0} = \left(\frac{0}{0},\frac{0}{0},\frac{0}{0}\right)$$

Vemos que da una indeterminación para cada componente, y si calculásemos los sucesivos cocientes para todas las *k* también sucedería lo mismo. Esto se debe a que el vector inicial $\boldsymbol{y}_0 = (1,1,1)$ es combinación lineal de los dos primeros vectores propios

$$(1,1,1) = \left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)(-1-\sqrt{3},1,1)+\left(\frac{\sqrt{3}}{3}+\frac{1}{2}\right)(-1+\sqrt{3},1,1)$$

Por lo tanto, al escribir el vector $\boldsymbol{y}_0 = (1,1,1)$ en la base de vectores propios, la componente correspondiente al tercer vector propio es cero. En este caso, partiremos de otro vector $\boldsymbol{y}_0$ para calcular el valor propio que nos falta. Tomemos, por ejemplo, el vector $\boldsymbol{z}_0 = (1,2,1)$

$$\mathbf{z}_1 = \mathbf{A}\mathbf{z}_0 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{z}_2 = \mathbf{A}\mathbf{z}_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{z}_3 = \mathbf{A}\mathbf{z}_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ -8 \\ -7 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{z}_4 = \mathbf{A}\mathbf{z}_3 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -6 \\ -8 \\ -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 14 \\ 13 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{z}_5 = \mathbf{A}\mathbf{z}_4 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 9 \\ 14 \\ 13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -18 \\ -23 \\ -22 \end{pmatrix}$$

$$\frac{\mathbf{z}_3 - 3\mathbf{z}_1}{\mathbf{z}_2 - 3\mathbf{z}_0} = \left(\frac{0}{0}, \frac{1}{-1}, \frac{-1}{1}\right) \quad , \quad \frac{\mathbf{z}_4 - 3\mathbf{z}_2}{\mathbf{z}_3 - 3\mathbf{z}_1} = \left(\frac{0}{0}, \frac{-1}{1}, \frac{1}{-1}\right) \quad , \quad \frac{\mathbf{z}_5 - 3\mathbf{z}_3}{\mathbf{z}_4 - 3\mathbf{z}_2} = \left(\frac{0}{0}, \frac{1}{-1}, \frac{-1}{1}\right)$$

Entonces, el tercer valor propio es $\lambda_3 = -1$, y un vector propio asociado lo podemos encontrar mediante la expresión

$$(\mathbf{z}_{k+1} - \sqrt{3}\mathbf{z}_k) - (-\sqrt{3})(\mathbf{z}_k - \sqrt{3}\mathbf{z}_{k-1}) = \mathbf{z}_{k+1} - 3\mathbf{z}_{k-1}$$

es decir,

$$[\mathbf{z}_3 - 3\mathbf{z}_1] = [(0,1,-1)] = [(0,1,-1)]$$

$$[\mathbf{z}_4 - 3\mathbf{z}_2] = [(0,-1,1)] = [(0,-1,1)]$$

$$[\mathbf{z}_5 - 3\mathbf{z}_3] = [(0,1,-1)] = [(0,1,-1)]$$

Luego $V(-1) = [(0,1,-1)]$.

Ejercicios

IX.5.- Hallar el valor propio dominante de las siguientes matrices:

a) $\begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 0 & \alpha_1 \\ \alpha_1 & 0 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 0 & -5 & 3 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} \alpha_3 & -12 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_4 \end{pmatrix}$

PROCEDIMIENTOS PRÁCTICOS BASICOS

Los procedimientos básicos que forman los elementos constructivos a partir de los cuales pueden abordarse los problemas que tratan sobre las materias desarrolladas en este Cuaderno, son los siguientes:

- Resolución de un sistema por los métodos de Gauss y Gauss-Jordan con y sin pivotaje.
- Resolución de un sistema por los métodos de Jacobi y de Gauss-Seidel.
- Cálculo de un determinante y de la matriz inversa por los métodos directo e iterativo
- Cálculo del valor propio dominante y del vector propio asociado

EJERCICIOS DE RECAPITULACION

IX.6.- Resolver por los métodos de Jacobi y Gauss-Seidel, los siguientes sistemas:

$$\text{a)}\ \left|\begin{aligned} 4x_1-2x_2-x_3 &= 39\\ x_1-6x_2+2x_3 &= -28\\ x_1-3x_2+12x_3 &= -86 \end{aligned}\right. \qquad \text{b)}\ \left|\begin{aligned} x_1-3x_2+12x_3 &= 10\\ 5x_1-12x_2+2x_3 &= -33\\ x_1-14x_2 &= -103 \end{aligned}\right. \qquad \text{c)}\ \left|\begin{aligned} -6x_1+12x_3 &= 60\\ 4x_1-x_2-x_3 &= -2\\ 6x_1+8x_2 &= 44 \end{aligned}\right.$$

IX.7 .- Hallar la solución del sistema

$$\left|\begin{aligned} x_1+9x_2+12x_3 &= 21{,}8\\ 9x_1+3x_2+x_3 &= 13{,}2\\ x_1+x_2+x_3 &= 3 \end{aligned}\right.$$

por el método de de Gauss con pivote.

IX.8.- Resolver los siguientes sistemas por eliminación gaussiana con pivote, redondeando todos los cálculos hasta tres dígitos significativos:

$$\text{a)}\ \left|\begin{aligned} 0'21x_1+0'33x_2 &= 0'54\\ 0'70x_1+0'24x_2 &= 0'94 \end{aligned}\right. \qquad \text{b)}\ \left|\begin{aligned} 0'11x_1-0'13x_2+0'20x_3 &= -0'02\\ 0'10x_1+0'36x_2+0'45x_3 &= 0'25\\ 0'50x_1-0'01x_2+0'30x_3 &= -0'70 \end{aligned}\right.$$

IX.9 .- Resolver los sistemas

$$\left|\begin{aligned} 2x_1+6x_2 &= 8\\ 2x_1+6'00001x_2+x_3 &= 8'00001 \end{aligned}\right. \qquad \left|\begin{aligned} 2x_1+6x_2 &= 8\\ 2x_1+5'99999x_2+x_3 &= 8'00002 \end{aligned}\right.$$

y compara sus soluciones.

IX.10.- Resolver el sistema de ecuaciones no lineales, por el procedimiento de Gauss-Siedel

$$\left|\begin{aligned} 4x-y^2-z^2 &= 3\\ -x+4y^2-z &= 2\\ -x-y-4z &= 1 \end{aligned}\right.$$

Tomar como valores iniciales $x = y = z = 0$ y efectuar cuatro o cinco iteraciones. (*Nota*: Aunque la matriz de los coeficientes sea diagonalmente dominante, no tenemos asegurada la convergencia de un sistema de ecuaciones no lineales).

IX.11.- Resolver los sistemas

a)
$$\left.\begin{aligned} 2x_1-x_2-x_3 &= 1'1 \\ -x_1+x_2-3x_3 &= 0'05 \\ 3x_1-3x_2+4x_3 &= 1'9 \end{aligned}\right|$$

b)
$$\left.\begin{aligned} x_1-2x_2-x_4 &= 3 \\ -2x_1+7x_2+x_3-x_5 &= 2 \\ x_2+2x_3+x_4+2x_5 &= 1 \\ -x_1-x_3+6x_4+x_5 &= 4 \\ -x_2+2x_3+x_4+9x_5 &= 0 \end{aligned}\right|$$

c)
$$\left.\begin{aligned} 5x_1+4x_2+2x_3-3x_4+x_5 &= 2 \\ 2x_1-6x_2+x_3+2x_4-3x_5 &= -5 \\ 4x_1-x_2+4x_3-x_4-x_5 &= -9 \\ x_1+x_2+x_3+x_4+x_5 &= -1 \\ -x_1+x_2-x_3+x_4-x_5 &= 7 \end{aligned}\right|$$

IX.12.- ¿Cuáles de las siguientes matrices son estrictamente dominantes en la diagonal?

a) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 6 & 0 & 1 \\ 3 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 2 \\ 4 & 1 & -7 \end{pmatrix}$ e) $\begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 & 0 \\ 3 & -7 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & -5 \end{pmatrix}$

IX.13.- Determinar la inversa de cada una de las siguientes matrices:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 9 & 12 \\ 9 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

IX.14.- La matriz

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ -2 & 0 & 2 \\ -2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

es singular. Utilizar la regla de Cramer para determinar el valor de α para el cual la ecuación

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \quad \text{con} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ \alpha \end{pmatrix}$$

tiene una solución. Para este valor de α, la solución ¿es única?.

IX.15.- Sean las matrices

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{D} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}$$

a) Utilizar el método de las potencias para obtener una aproximación del valor propio dominante de cada una de ellas. Redondear todos los cálculos hasta tres dígitos significativos.

b) Usar el resultado anterior para obtener una aproximación de los valores propios dominantes de cada matriz.

c) Encontrar los valores exactos del vector y valor propio dominante de cada matriz.

BIBLIOGRAFIA

de Burgos J. (1988). *Curso de Algebra y Geometría*. Alhambra. Madrid.

Dixmier J. (1974). *Matemáticas Generales.* Editorial Aguilar. Madrid.

Godement R. (1974). *Algebra*. Tecnos. Madrid.

Hoffmann R., Kunze R. (1974). *Algebra Lineal*. Prentice. Madrid.

Lentin A., Rivaud J. (1973). *Algebra Moderna*. Aguilar. Madrid.

McCraken D.D. y Dorn W.S. (1969). *Métodos numéricos y de programación FORTRAN*. Limusa-Wesley. México.

Noble B., Daniel J.W. (1988). *Applied Linear Algebra*. Prentice Hall. London.

Puerta F. (1986). *Algebra lineal*. Marcombo. Barcelona.

Queysanne M. (1985) *Algebra*. Vicens-Vives. Barcelona.

Sainz M.A., Serarols J.L. Pérez A.M. (1994). *Álgebra*. Escuela Politécnica Superior. Gerona.

Strang G. (1982). *Algebra Lineal y sus aplicaciones.* Fondo Educativo Interamericano. Méjico.

Szidarovsky F. y Yakowitz S. (1978). *Principles and procedures of Numerical Analysis*. Plenum Press. New York and London.