CUADERNO IV

ESPACIOS VECTORIALES Y APLICACIONES LINEALES

Miguel A. Sainz, Joan Serarols, Anna M. Pérez
Dep. de Informática y Matemática Aplicada
Universidad de Girona

RESUMEN: Se va a desarrollar la estructura algebraica denominada espacio vectorial, formada por vectores y escalares, y su correspondiente subestructura denominada subespacio. Se estudiarán los más interesantes, que son los de dimensión finita, caracterizándose sus conjuntos genaradores hasta llegar a una base como conjunto generador mínimo, formada por vectores linealmente independientes. El teorema de Steinitz permitirá definir la dimensión de un espacio. Se estudiará el concepto de aplicación lineal, su imagen, núcleo y rango para acabar con un importante teorema de caracterización de las aplicaciones lineales.

IV.1.- ESPACIO VECTORIAL

Vamos a estudiar una estructura algebraica dotada de distintas leyes de composición, de gran importancia en la matemática aplicada. Sea $(K,+,\cdot)$ un cuerpo y V un conjunto no vacío. Con el fin de distinguir a los elementos de K les llamaremos ***escalares*** y los designaremos preferentemente mediante letras minúsculas griegas o latinas: $a,b,..,x,..,\beta,\sigma,...$ y a los elementos de V les llamaremos ***vectores*** y los designaremos mediante letras latinas minúsculas en negrita: $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z},...$ Suponemos en V las siguientes leyes de composición:

a) Una l.c.i. en V, que llamaremos ***suma*** y designaremos por el mismo símbolo ,+, que la primera l.c.i. del cuerpo K

$$\begin{aligned} + :\ & V\times V \longrightarrow V \\ & (\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \longrightarrow \boldsymbol{x}+\boldsymbol{y} \end{aligned}$$

b) Una l.c. externa en V con dominio de operadores K que llamaremos ***producto externo***, y lo designaremos con el mismo símbolo $\cdot$, omitido con frecuencia, que la segunda l.c.i del cuerpo K

$$\begin{aligned} \cdot :\ & K\times V \longrightarrow V \\ & (\beta,\boldsymbol{x}) \longrightarrow \beta\cdot\boldsymbol{x} \end{aligned}$$

El designar operaciones distintas con los mismos símbolos no tiene que dar lugar a ambigüedades, habiendo tenido la precaución previa de distinguir escalares y vectores; así $\alpha+\beta$ y $\alpha\beta$ se refieren a las leyes de composición interna del cuerpo K, y $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}$ $\alpha\boldsymbol{x}$ se refieren a las leyes de composición de V.

Diremos que V es ***espacio vectorial*** sobre K, abreviadamente V e.v.s. K, si las dos leyes de composición verifican las siguientes propiedades:

1) $(V,+)$ es un grupo abeliano, lo que significa

1a) La ley + es asociativa en V

1b) La ley + es conmutativa en V

1c) Existe el vector neutro en V : $\boldsymbol{0}$

1d) Para todo vector de $\boldsymbol{x}\in V$ existe su opuesto $-\boldsymbol{x}$: $\boldsymbol{x}+(-\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}$

2) $(\ \forall \boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in V\ )\ (\forall \beta\in K)\ (\beta(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) = \beta\boldsymbol{x}+\beta\boldsymbol{y})$

3) $(\ \forall \boldsymbol{x}\in V)\ (\forall \alpha,\beta\in K)\ ((\alpha+\beta)\boldsymbol{x} = \alpha\boldsymbol{x}+\beta\boldsymbol{x})$

4) $(\forall \boldsymbol{x}\in V)\ (\forall \alpha,\beta\in K)\ (\alpha(\beta\boldsymbol{x}) = (\alpha\beta)\boldsymbol{x})$

5) $(\forall \boldsymbol{x}\in V)\ (1\cdot\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x})$

En esta definición hemos designado mediante $\boldsymbol{0}$ el vector neutro para la suma, para distinguirlo del escalar neutro de la suma 0 y del escalar unidad para el producto 1. El vector opuesto lo hemos designado por $-\boldsymbol{x}$, notación habitual para una operación aditiva.

Las condiciones 2) y 3) de la definición son una especie de propiedad distributiva del producto externo respecto a la suma de vectores y suma de escalares, y vistas las igualdades de derecha a izquierda, constituyen el modo de sacar un vector o un escalar factor común respectivamente. La condición 4) es una especie de propiedad asociativa entre el producto externo de V y el producto interno de K. La condición 5) puede interpretarse como que el elemento unidad para el producto interno de K es también unidad para el producto externo de V. Veamos como ejemplos algunos tipos importantes de espacios vectoriales.

Ejemplo IV.1.1

Sea un cuerpo $(K,+,\cdot)$; el conjunto K^n, formado por las n–plas de elementos de K, con las leyes de composición

Suma : $(a_1,a_2,...,a_n)+(b_1,b_2,...,b_n) = (a_1+b_1,a_2+b_2,...,a_n+b_n)$

Producto externo : $\alpha(a_1,a_2,...,a_n) = (\alpha a_1,\alpha a_2,...,\alpha a_n)$

El conjunto K^n es espacio vectorial sobre K. En efecto, es fácil comprobar las propiedades anteriores, por ejemplo

1b) $\forall \boldsymbol{x},\boldsymbol{y} \in K^n$ serán $\boldsymbol{x} = (a_1,...,a_n)$, $\boldsymbol{y} = (b_1,...,b_n)$

$$(a_1,...,a_n)+(b_1,...,b_n) = (b_1,...,b_n)+(a_1,...,a_n)$$

ya que

$$(a_1+b_1,...,a_n+b_n) = (b_1+a_1,...,b_n+a_n)$$

por la conmutatividad de la suma en K.

1c) Si 0 es el elemento neutro de + en K, entonces el vector (0,...,0) es el neutro de + en K^n, ya que para cualquier $\boldsymbol{x} = (a_1,...,a_n)\in K^n$ será

$$(a_1,...,a_n)+(0,...,0) = (a_1+0,...,a_n+0) = (a_1,...,a_n)$$

1d) Si $-a_i$ es el opuesto de a_i en K, entonces el vector $(-a_1,...,-a_n)$ es el opuesto de $(a_1,...,a_n)$ en K^n ya que

$$(a_1,...,a_n)+(-a_1,...,-a_n) = (a_1+(-a_1),..a_n+(-a_n)) = (0,0,...,0)$$

3) $(\alpha+\beta)(a_1,...,a_n) = \alpha(a_1,...,a_n)+\beta(a_1,...,a_n) = (\alpha a_1,...,\alpha a_n)+(\beta a_1,...,\beta a_n) =$

$$= (\alpha a_1+\beta a_1,...,\alpha a_n+\beta a_n) = ((\alpha+\beta)a_1,..,(\alpha+\beta)a_n)$$

y por distributividad del producto respecto de la suma en K, la propiedad se cumple. Análogamente se demuestran las otras condiciones de espacio vectorial.

Casos particulares de este espacio vectorial K^n son los siguientes:

a) $\mathbf{R}^n$ es espacio vectorial sobre **R**, por ser (**R**,+,·) un cuerpo.

b) $\mathbf{R}^2$ es espacio vectorial sobre **R**, es decir, **C** es espacio vectorial sobre **R**.

c) Para $n = 1$ tenemos el espacio vectorial de K sobre K. En este caso los vectores y escalares se confunden; asimismo la suma de vectores y el producto por un escalar con la suma y producto interno de K. Como casos particulares de éste tenemos

c1) **R** es espacio vectorial sobre **R**.

c2) **C** es espacio vectorial sobre **C**.

Los espacios vectoriales anteriores son los más utilizados en ejercicios y problemas, formando una categoría importante, como más adelante justificaremos. No obstante, existen otros tipos de espacios vectoriales, dos de los cuales describimos en los siguientes ejemplos.

Ejemplo IV.1.2

Sea $(K,+,\cdot)$ un cuerpo, A un conjunto no vacío y el conjunto de funciones de A en K

$$F = \{ \text{ funciones } f: A \longrightarrow K\}$$

Consideramos en F las siguientes operaciones:

Suma : $$f+g: A \longrightarrow K$$
$$x \longrightarrow (f+g)(x) = f(x)+g(x)$$

es decir, la función suma es una función de A en K tal que la imagen de un $x \in A$ es la suma (l.c.i en K) de las imágenes $f(x)$ y $g(x)$ (que son elementos de K)

Producto externo: $$\alpha f: A \longrightarrow K$$
$$x \longrightarrow (\alpha f)(x) = \alpha f(x)$$

donde al ser α y $f(x)$ elementos de K, $\alpha f(x)$ es el producto interno de K. Con estas dos leyes F es espacio vectorial sobre K. Por ejemplo

1c) La función

$$0_A : A \longrightarrow K$$
$$x \longrightarrow 0_A(x) = 0$$

para 0 el neutro de la suma en K, es el vector neutro ya que

$$(f+0_A)(x) = f(x)+0_A(x) = f(x)+0 = f(x)$$

con lo que $f+0_A = f$

4) $(\alpha(\mu f))(x) = \alpha(\mu f)(x) = \alpha(\mu f(x)) = (\alpha\mu)f(x)$

con lo que por la asociatividad de $\cdot$ en K, son iguales las funciones

$$\alpha(\mu f) = (\alpha\mu)f$$

Ejemplo IV.1.3

Otro espacio vectorial lo constituye $K[x]$, conjunto de polinomios sobre un cuerpo $(K,+,\cdot)$ con las operaciones

suma : $(a_0+a_1x+\ldots+a_nx^n)+(b_0+b_1x+\ldots+b_mx^m) = (a_0+b_0)+(a_1+b_1)x+\ldots$

producto externo : $\alpha(a_0+a_1x+\ldots+a_nx^n) = (\alpha a_0)+(\alpha a_1)x+\ldots+(\alpha a_n)x^n$

Fácilmente se prueba que $(K[x],+)$ es un grupo abeliano, verificándose además las otras condiciones de espacio vectorial; por ejemplo

2) $\alpha((a_0+a_1x+\ldots+a_nx^n)+(b_0+b_1x+\ldots+b_mx^m)) =$

$$= \alpha(a_0+b_0)+\alpha(a_1+b_1)x+\ldots+ \begin{cases} \alpha a_nx^n & \text{si } n > m \\ \alpha b_mx^m & \text{si } n < m \\ \alpha(a_n+b_m)x^n & \text{si } m = n \end{cases}$$

$\alpha(a_0+a_1x+\ldots+a_nx^n)+\alpha(b_0+b_1x+\ldots+b_mx^m) =$

$$= (\alpha a_0+\alpha b_0)+(\alpha a_1+\alpha b_1)x+\ldots+ \begin{cases} \alpha a_nx^n & \text{si } n > m \\ \alpha b_mx^m & \text{si } n < m \\ \alpha(a_n+b_m)x^n & \text{si } m = n \end{cases}$$

que son iguales, por distributividad del producto respecto de la suma en K.

Ejercicios

IV.1 .- Razonar si son espacios vectoriales los siguientes conjuntos:

a) **C** sobre **R**.

b) F = {funciones reales} sobre **R**.

c) $P_5[x]$ = {polinomios reales de grado ≤ 5} sobre **R**.

IV.2.- En $\mathbf{R}^+$ se definen las operaciones

$$x \oplus y = xy$$
$$\lambda \otimes x = x^{\lambda}$$

Averiguar si es espacio vectorial sobre **R** .

IV.3.- En el conjunto $\mathbf{R}\times\mathbf{R}$ se define

$$(x,y)+(z,u) = (x+z,y+u)$$
$$\lambda(x,y) = (\lambda x,\alpha_1)$$

Averiguar si con estas operaciones $\mathbf{R}\times\mathbf{R}$ es espacio vectorial sobre **R** para $\alpha_1 =$. Lo mismo para las operaciones

$$(x,y)+(z,u) = (x+z,y+u)$$
$$k(x,y) = (k^2x,k^2y) \quad \text{con} \quad k \in \mathbf{R}$$

Como $(V,+)$ es un grupo, existe la operación inversa y así $\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}$ será un vector que sumado con $\boldsymbol{y}$ nos da $\boldsymbol{x}$, y es igual a la suma de $\boldsymbol{x}$ con el opuesto de $\boldsymbol{y}$

$$\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x}+(-\boldsymbol{y})$$

Recordemos que al ser K un cuerpo existe también la diferencia de escalares.

De la definición de espacio vectorial se deducen propiedades que completan las condiciones de la definición y que junto con ellas constituyen las reglas de cálculo con vectores y escalares. Las enunciamos en la Tabla IV.1.1

TABLA IV.1.1

Propiedades de las l.c. de un espacio vectorial

Para cualesquiera $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y} \in V$ y $\alpha,\beta \in K$ se verifica

1) $(\alpha-\beta)\boldsymbol{x} = \alpha\boldsymbol{x}-\beta\boldsymbol{x} \qquad \alpha(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) = \alpha\boldsymbol{x}-\alpha\boldsymbol{y}$

2) $0\cdot\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} \qquad \alpha\cdot\boldsymbol{0} = \boldsymbol{0}$

3) $(-\alpha)\boldsymbol{x} = -\alpha\boldsymbol{x} \qquad \alpha(-\boldsymbol{x}) = -\alpha\boldsymbol{x} \qquad (-\alpha)(-\boldsymbol{x}) = \alpha\boldsymbol{x}$

4) $\alpha\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ implica $\alpha = 0$ o $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$

Demostraciones:

1) $(\alpha-\beta)\boldsymbol{x}+\beta\boldsymbol{x} = (\alpha-\beta+\beta)\boldsymbol{x} = \alpha\boldsymbol{x} \;\Rightarrow\; (\alpha-\beta)\boldsymbol{x}+\beta\boldsymbol{x}-\beta\boldsymbol{x} = \alpha\boldsymbol{x}-\beta\boldsymbol{x} \;\Rightarrow$
$\Rightarrow\; (\alpha-\beta)\boldsymbol{x} = \alpha\boldsymbol{x}-\beta\boldsymbol{x}$

Análogamente

$$\alpha(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})+\alpha\boldsymbol{y} = \alpha(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}+\boldsymbol{y}) = \alpha(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{0}) = \alpha\boldsymbol{x} \;\Rightarrow\; \alpha(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) = \alpha\boldsymbol{x}-\alpha\boldsymbol{y}$$

2) Particularizando el resultado anterior para $\alpha = \beta$, tenemos

$$(\alpha-\alpha)\boldsymbol{x} = \alpha\boldsymbol{x}-\alpha\boldsymbol{x} \;\Rightarrow\; 0\cdot\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$$

y haciendo $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$ se obtiene

$$\alpha(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}) = \alpha\boldsymbol{x}-\alpha\boldsymbol{x} \;\Rightarrow\; \alpha\cdot\boldsymbol{0} = \boldsymbol{0}$$

3) Si en la propiedad 1) hacemos $\alpha = 0$, tenemos

$$(0-\beta)\boldsymbol{x} = 0\cdot\boldsymbol{x}-\beta\boldsymbol{x} \;\Rightarrow\; (-\beta)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}-\beta\boldsymbol{x} \;\Rightarrow\; (-\beta)\boldsymbol{x} = -\beta\boldsymbol{x}$$

Análogamente con $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$,

$$\alpha(\boldsymbol{0}-\boldsymbol{y}) = \alpha\boldsymbol{0}-\alpha\boldsymbol{y} \;\Rightarrow\; \alpha(-\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{0}-\alpha\boldsymbol{y} \;\Rightarrow\; \alpha(-\boldsymbol{y}) = -\alpha\boldsymbol{y}$$

Combinando ambos resultados

$$(-\alpha)(-\boldsymbol{x}) = -(\alpha(-\boldsymbol{x})) = -(-\alpha\boldsymbol{x}) = \alpha\boldsymbol{x}$$

4) Teniendo en cuenta que

$$\alpha\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} \;\Rightarrow\; \left|\begin{array}{l}\alpha = 0\\ \vee\\ \alpha \neq 0\end{array}\right. \;\Rightarrow\; \alpha^{-1}(\alpha\boldsymbol{x}) = \alpha^{-1}\boldsymbol{0} \;\Rightarrow\; (\alpha^{-1}\alpha)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} \;\Rightarrow\; 1\cdot\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} \;\Rightarrow\; \boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$$

Ejercicios

IV.4 .- Estudiar si el conjunto $\left\{a+b\sqrt{5} \mid a,b\in\mathbf{Q}\right\}$ es o no un espacio vectorial sobre $\mathbf{Q}$ para la suma y producto de números reales.

IV.5 .- Demostrar que $E = \left\{a+b\sqrt{2}+c\sqrt{3} \mid a,b\in\mathbf{Q}\right\}$ es un espacio vectorial sobre $\mathbf{Q}$.

IV.2.- COMBINACIONES LINEALES

Una importancia especial tienen las sumas de vectores multiplicados por escalares; una expresión del tipo

$$\alpha_1 \boldsymbol{x}_1 + \alpha_2 \boldsymbol{x}_2 + \ldots + \alpha_n \boldsymbol{x}_n$$

se denomina ***combinación lineal*** de los vectores $\boldsymbol{x}_1,...,\boldsymbol{x}_n$. Así, diremos que un vector $\boldsymbol{x}$ es combinación lineal de los vectores $\boldsymbol{x}_1,...,\boldsymbol{x}_n$, si existen escalares $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ tales que

$$\boldsymbol{x} = \alpha_1 \boldsymbol{x}_1 + \ldots + \alpha_n \boldsymbol{x}_n$$

Los escalares $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ reciben el nombre de ***coeficientes*** de la combinación lineal.

Ejemplo IV.2.1.

En el espacio vectorial $\mathbf{R}^3$ sobre **R**, como

$$3(1,-4,2)-5(6,2,0)=(-27,-22,6)$$

diremos que (−27,−22,6) es combinación lineal de los vectores (1,−4,2), (6,2,0). Asímismo (−27,−22,6) es combinación lineal de (1,−4,2), (6,2,0) y (4,2,3) ya que

$$3(1,-4,2)-5(6,2,0)+0(4,2,3) = (-27,-22,6)$$

Para averiguar si, por ejemplo, (3,−2,−12) es o no combinación lineal de (2,1,−1), (1,1,1), (−3,−3,−3) y (3,2,0), habrá que resolver la ecuación en $\mathbf{R}^3$

$$(3,-2,-12) = \alpha_1(2,1,-1)+\alpha_2(1,1,1)+\alpha_3(-3,-3,-3)+\alpha_4(3,2,0)$$

Al hacer operaciones tenemos

$$(3,-2,-12) = (2\alpha_1+\alpha_2-3\alpha_3+3\alpha_4,\alpha_1+\alpha_2-3\alpha_3+2\alpha_4,-\alpha_1+\alpha_2-3\alpha_3)$$

e igualando

$$\begin{aligned} 2\alpha_1+\alpha_2-3\alpha_3+3\alpha_4 &= 3 \\ \alpha_1+\alpha_2-3\alpha_3+2\alpha_4 &= -2 \\ -\alpha_1+\alpha_2-3\alpha_3 &= -12 \end{aligned}$$

que es un sistema lineal de tres ecuaciones en **R** en las incógnitas $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$; si tiene solución significará que el vector (3,−2,−12) es combinación lineal de los otros cuatro. Resolviéndolo por reducción

$$\left.\begin{aligned} 2\alpha_1+\alpha_2-3\alpha_3+3\alpha_4 &= 3 \\ \alpha_1+\alpha_2-3\alpha_3+2\alpha_4 &= -2 \\ -\alpha_1+\alpha_2-3\alpha_3 &= -12 \end{aligned}\right| \Rightarrow \left.\begin{aligned} \alpha_1+\alpha_4 &= 5 \\ 2\alpha_1+2\alpha_4 &= 10 \end{aligned}\right| \Rightarrow \alpha_1+\alpha_4 = 5 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha_4 = 5-\alpha_1 \wedge \alpha_2 = -12+\alpha_1+3\alpha_3$$

Así, dando valores arbitrarios a α_1 y α_3, obtenemos diferentes soluciones del sistema; tenemos pues infinitas soluciones luego (3,−2,−12) es combinación lineal de los otros vectores de infinitas maneras, por ser infinito el conjunto de coeficientes que verifican la ecuación. Por ejemplo, para $\alpha_3 = 1$ y $\alpha_1 = 4$ obtenemos $\alpha_4 = 1$ y $\alpha_2 = -5$, cumpliéndose que $(3,-2,-12) = 4(2,1,-1) -5(1,1,1)+1(-3,-3,-3)+1(3,2,0)$

En general, y para espacios vectoriales tipo K^n sobre K, toda ecuación en K^n en la que

intervengan únicamente combinaciones lineales de vectores, al hacer operaciones en ambos miembros e igualar las componentes de los vectores resultantes se llega a un sistema de n ecuaciones lineales en K. Por esta razón vamos a exponer un procedimento ágil de resolución de estos sistemas; se denomina ***método de Gauss-Jordan***; su base teórica se demostrará cuando hablemos de la solución general de un sistema de ecuaciones lineales y ahora se presenta de un modo totalmente práctico, basándonos simplemente en la posibilidad de permutar dos ecuaciones, multiplicar una ecuación por un escalar, sumar a una ecuación un múltiplo de otra, que son transformaciones que reducen el sistema a otro con las mismas soluciones. Supongamos un sistema lineal, es decir, las incógnitas están multiplicadas por escalares y sumadas. Por ejemplo, y para fijar ideas, vamos a razonar sobre un sistema lineal de tres ecuaciones con tres incógnitas x_1,x_2 y x_3, aunque los resultados son válidos para sistemas de cualquier número de ecuaciones e incógnitas.

$$\begin{aligned} a_{11}\,x_1+a_{12}\,x_2+a_{13}\,x_3 &= b_1\\ a_{21}\,x_1+a_{22}\,x_2+a_{23}\,x_3 &= b_2\\ a_{31}\,x_1+a_{32}\,x_2+a_{33}\,x_3 &= b_3 \end{aligned}$$

En primer lugar, como dos sistemas lineales de tres ecuaciones con tres incógnitas se distinguen entre sí por sus coeficientes, éstos identifican al sistema, y lo pueden representar. Para ello, los dispondremos en filas y columnas de forma que en cada fila figuren los coeficientes de cada ecuación y en cada columna los de cada incógnita; la última columna será la de los términos independientes. Así el sistema anterior se representará por

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1\\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & b_2\\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & b_3 \end{pmatrix}$$

Esta disposición de los coeficientes en filas y columnas se denomina ***matriz del sistema*** (el concepto de matriz tiene un alcance mucho más amplio y será introducido más adelante; por ahora no es nada más que una disposición en filas y columnas de los coeficientes de un sistema de ecuaciones lineales). Las filas representan las ecuaciones, la última columna los términos independientes y las restantes columnas las incógnitas, en el orden en el que se hayan escrito.

Supongamos que $a_{11} \neq 0$; con él reduciremos a 0 los coeficientes no nulos que están en su columna sumando a la segunda ecuación, previamente multiplicada por a_{11}, la primera ecuación multiplicada por $-a_{21}$ y a la tercera ecuación, previamente multiplicada por a_{11}, la primera ecuación multiplicada por $-a_{31}$. (Si fuera $a_{11} = 0$, hacemos previamente a este proceso un cambio de ecuaciones para conseguir que este primer coeficiente sea no nulo). La matriz del sistema resultante será

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1\\ 0 & a^1_{22} & a^1_{23} & b^1_2\\ 0 & a^1_{32} & a^1_{33} & b^1_3 \end{pmatrix}$$

Supongamos que $a^1_{22} \neq 0$; con él reduciremos a 0 los coeficientes no nulos que están en su columna sumando a la primera ecuación, previamente multiplicada por a^1_{22}, la segunda ecuación multiplicada por $-a_{12}$ y a la tercera ecuación, previamente multiplicada por a^1_{22}, la segunda ecuación multiplicada por $-a^1_{32}$. (Si fuera $a^1_{22} = 0$, hacemos previamente a este proceso un cambio de la segunda ecuación con la tercera, si $a^1_{32} \neq 0$; si también $a^1_{32} = 0$ se salta a la siguiente columna, realizando estas transformaciones en la columna tercera). La matriz del

sistema resultante será

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & a_{13} & b_1 \\ 0 & a^1_{22} & a^1_{23} & b^1_2 \\ 0 & 0 & a^2_{33} & b^2_3 \end{pmatrix}$$

Supongamos que $a^2_{33} \neq 0$; con él reduciremos a 0 los coeficientes no nulos que están en su columna sumando a la primera ecuación, previamente multiplicada por a^2_{33}, la tercera ecuación multiplicada por $-a_{13}$ y a la segunda ecuación, previamente multiplicada por a^2_{33}, la tercera ecuación multiplicada por $-a^1_{23}$. (Si fuera $a^2_{33} = 0$, entonces o $b^2_3 \neq 0$, en cuyo caso la tercera ecuación no tiene solución y tampoco el sistema, o $b^2_3 = 0$ y podemos prescindir de la tercera ecuación que se ha convertido en una identidad). La matriz del sistema resultante será

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & b_1 \\ 0 & a^1_{22} & 0 & b^1_2 \\ 0 & 0 & a^2_{33} & b^2_3 \end{pmatrix}$$

Dividiendo la primera ecuación por a_{11}, la segunda por a^1_{22} y la tercera por a^2_{33}, tendremos

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & c_1 \\ 0 & 1 & 0 & c_2 \\ 0 & 0 & 1 & c_3 \end{pmatrix}$$

y la solución del sistema que representa, de acuerdo a como se han escrito las incógnitas, es

$$x_1 = c_1 \qquad x_2 = c_2 \qquad x_3 = c_3$$

que es también la solución del sistema inicial.

En resumen el método se basa en utilizar estas transformaciones (también puede dividirse una ecuación por un número en cualquier fase del proceso con el fin de manejar números más paqueños) para reducir la matriz del sistema inicial a otra que tenga columnas en las que exista un 1, en diferentes lugares, acompañado de ceros . Este tipo de columnas determinan las incógnitas, que podemos considerar principales, que pueden ser despejadas en función de los términos independientes y quizás también de otras incógnitas no principales que se pasan a los segundos miembros y entran a formar parte de estos términos independientes.

Ejemplo IV.2.2.

Siguiendo con el Ejemplo IV.2.1 veamos si es posible poner el vector (3,−2,−12) como combinación lineal de los vectores (2,1,−1),(1,1,1),(−3,−3,−3) y (3,2,0); esto significa resolver la ecuación

$$(3,-2,-12) = \alpha_1(2,1,-1)+\alpha_2(1,1,1)+\alpha_3(-3,-3,-3)+\alpha_4(3,2,0)$$

Al hacer operaciones tenemos

$$(3,-2,-12) = (2\alpha_1+\alpha_2-3\alpha_3+3\alpha_4,\alpha_1+\alpha_2-3\alpha_3+2\alpha_4,-\alpha_1+\alpha_2-3\alpha_3)$$

Igualando obtenemos

$$\left.\begin{array}{r} 2\alpha_1+\alpha_2-3\alpha_3+3\alpha_4 = 3 \\ \alpha_1+\alpha_2-3\alpha_3+2\alpha_4 = -2 \\ -\alpha_1+\alpha_2-3\alpha_3 = -12 \end{array}\right|$$

que es un sistema lineal de tres ecuaciones en $\mathbf{R}^3$ en las cuatro incógnitas $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$. Aplicando el método de Gauss-Jordan

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & -3 & 2 & -2 \\ -1 & 1 & -3 & 0 & -12 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & 1 & -7 \\ 0 & 3 & -9 & 3 & -21 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 2 & 10 \\ 0 & 1 & -3 & 1 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & -3 & 1 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

tenemos a α_1 y α_2 como incógnitas principales y la solución del sistema es

$$\alpha_1 = 5 - \alpha_4 \quad , \quad \alpha_2 = -7+3\alpha_3-\alpha_4$$

de modo que el vector dado resulta ser combinación lineal de los otros. Obsérvese que para resolver el problema no es necesario escribir la ecuación de la combinación lineal ni el sistema de ecuaciones en **R** sino que, directamente, de los datos puede escribirse la matriz del sistema.

Así, el método de Gauss-Jordan no solamente sirve para resolver con rapidez un sistema de ecuaciones lineales sino que también permite plantear de un modo inmediato un problema como el anterior.

Ejercicios

IV.6.- Estudiar si el vector (1,2,3,5) de $\mathbf{R}^4$ es o no combinación lineal de los vectores de los los siguientes conjuntos

a) {(2,3,0,5),(0,1,0,4),(1,1,0,2)}

b) {(−5,2,8,−16),(−5,3,17,−14),(1,1,11,6)}

c) {(0,1,2,−1),(1,2,−1,0),(0,2,−1,1),(4,6,1,3)}

d) {(0,1,1,1),(1,0,1,−1),(2,2,2,1),(0,0,−1,−1),(0,1,1,0)}

e) {(1,−1,3,3),(2,−2,6,6),(3,−1,3,5),(−2,2,−4,−4),(1,5,−3,3),(3,6,−9,0)}

IV.7.- En $\mathbf{R}^3$ se dan los siguientes conjuntos de vectores:

A = {(1,1,0),(1,0,1),(0,1,1),(0,1,−1)} B = {(3,0,0),(0,4,0),(0,0,2),(0,1,1)}

Probar que cualquier vector de de $\mathbf{R}^3$ es combinación lineal de los vectores de *A* y *B*.

IV.8.- Hallar λ y μ para que el vector $(\lambda,\mu,\alpha_1,\alpha_2)$ de $\mathbf{Q}^4$ sea combinación lineal de los vectores $(1,\alpha_3,-5,3)$ y $(\alpha_4,-1,4,7)$ para $\alpha_1 =$, $\alpha_2 =$, $\alpha_3 =$, $\alpha_4 =$.

IV.9.- Hallar m y n para que los vectores $(1,1,0,m)$,$(3,-1,n,-1)$ y $(-3,5,n,-4)$ sean tales que uno sea combinación lineal de los otros dos.

IV.3.- SUBESPACIO VECTORIAL

Sea V un espacio vectorial sobre K y W un subconjunto no vacío de V; diremos que W es un ***subespacio*** de V si W es espacio vectorial sobre K, lo cual equivale a que

W subespacio de V si y sólo si

1) W es subgrupo aditivo de V
2) W es estable para el producto externo
3) $(\forall \boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in W)\ (\forall \alpha\in K)\ (\alpha(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) = \alpha\boldsymbol{x}+\alpha\boldsymbol{y})$
4) $(\forall \boldsymbol{x}\in W)\ (\forall \alpha,\beta\in K)\ ((\alpha+\beta)\boldsymbol{x} = \alpha\boldsymbol{x}+\beta\boldsymbol{x})$
5) $(\forall \boldsymbol{x}\in W)\ (\forall \alpha,\beta\in K)\ (\alpha(\beta\boldsymbol{x}) = (\alpha\beta)\boldsymbol{x})$
6) $(\forall \boldsymbol{x}\in W)\ (1\cdot\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x})$

Como las propiedades 3),4),5),6) se verificarán por el mero hecho de ser W un subconjunto de V, según la condición de subgrupo aditivo, tendremos que

W subespacio de V si y sólo si

1) $(\forall \boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in W)\ (\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\in W)$
2) $(\forall \boldsymbol{x}\in W)\ (\forall \alpha\in K)\ (\alpha\boldsymbol{x}\in W)$

y estas dos condiciones se pueden resumir en la siguiente, a la cual equivalen

W subespacio de V si y sólo si $(\forall \boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in W)\ (\forall \alpha,\beta\in K)\ (\alpha\boldsymbol{x}+\beta\boldsymbol{y}\in W)$

Esta condición es verificada por los siguientes conjuntos, que son los subespacios triviales

$\{\boldsymbol{0}\}$, ya que $\alpha\cdot\boldsymbol{0}+\beta\cdot\boldsymbol{0} = \boldsymbol{0} \in \{\boldsymbol{0}\}$

V, ya que $\alpha\boldsymbol{x}+\beta\boldsymbol{y}\in V$ por ser V un espacio vectorial.

Si W_1 y W_2 son subespacios de V, la intersección $W_1 \cap W_2$ es también un subespacio ya que cualesquiera que sean los escalares $\alpha,\beta\in K$

$(\forall \boldsymbol{x}\in W_1 \cap W_2)\ ((\boldsymbol{x}\in W_1 \ \wedge\ \boldsymbol{x}\in W_2) \ \Rightarrow\ \alpha\boldsymbol{x}+\beta\boldsymbol{y}\in W_1)$ por ser W_1 subespacio

$(\forall \boldsymbol{y}\in W_1 \cap W_2)\ ((\boldsymbol{y}\in W_1 \ \wedge\ \boldsymbol{y}\in W_2) \ \Rightarrow\ \alpha\boldsymbol{x}+\beta\boldsymbol{y}\in W_2)$ por ser W_2 subespacio

por lo que

$$\alpha\boldsymbol{x}+\beta\boldsymbol{y}\in W_1 \cap W_2$$

El concepto de intersección de dos subespacios se generaliza de una manera natural a n subespacios $W_1,\ldots,W_n$ de un mismo espacio vectorial V, verificándose que $W_1 \cap \ldots \cap W_n$ es un subespacio, como fácilmente se demuestra por inducción. Se verifica que

$$W_1 \cap \ldots \cap W_i \cap \ldots \cap W_n \subseteq W_i$$

para cualquier $i = 1,\ldots,n$.

Si W_1 y W_2 son subespacios de V, el conjunto de vectores

$$W_1+W_2 = \{\boldsymbol{v}_1+\boldsymbol{v}_2 \mid \boldsymbol{v}_1 \in W_1 \ \wedge \ \boldsymbol{v}_2 \in W_2\}$$

es un subespacio, dado que para cualesquiera $\alpha,\beta \in K$:

$$(\forall x \in W_1+W_2)\ (\boldsymbol{x} = \boldsymbol{v}_1+\boldsymbol{v}_2) \qquad (\forall \boldsymbol{y} \in W_1+W_2)\ (\boldsymbol{y} = \boldsymbol{w}_1+\boldsymbol{w}_2)$$

luego

$$\alpha\boldsymbol{x}+\beta\boldsymbol{y} = \alpha(\boldsymbol{v}_1+\boldsymbol{v}_2)+\beta(\boldsymbol{w}_1+\boldsymbol{w}_2) = (\alpha\boldsymbol{v}_1+\beta\boldsymbol{w}_1)+(\alpha\boldsymbol{v}_2+\beta\boldsymbol{w}_2) \in W_1+W_2$$

ya que $\alpha\boldsymbol{v}_1+\beta\boldsymbol{w}_1 \in W_1$ y $\alpha\boldsymbol{v}_2+\beta\boldsymbol{w}_2 \in W_2$. Si W_1 y W_2 son tales que $W_1 \cap W_2 = \{\boldsymbol{0}\}$ (evidentemente dos subespacios nunca pueden ser disjuntos pues todos contienen el vector $\boldsymbol{0}$), el subespacio suma se denomina ***suma directa***, escribiéndose

$$W_1 \oplus W_2$$

y se dice que W_1 y W_2 son dos ***espacios independientes***. Un vector del subespacio W_1+W_2 será un vector descomponible en suma de dos vectores uno de W_1 y otro de W_2 es decir

$$\boldsymbol{x} \in W_1+W_2 \ \Leftrightarrow \ (\exists \boldsymbol{v}_1 \in W_1)\ (\exists \boldsymbol{v}_2 \in W_2)\ (\boldsymbol{x} = \boldsymbol{v}_1+\boldsymbol{v}_2)$$

pudiendo eventualmente existir otra descomposición en suma, es decir, puede que los dos vectores $\boldsymbol{v}_1$ y $\boldsymbol{v}_2$ no sean únicos. Sin embargo se verifica que

$$\boldsymbol{x} \in W_1 \oplus W_2 \ \Leftrightarrow \ (\exists \boldsymbol{v}_1 \in W_1 \ \text{único})\ (\exists \boldsymbol{v}_2 \in W_2 \ \text{único})\ (\boldsymbol{x} = \boldsymbol{v}_1+\boldsymbol{v}_2)$$

En efecto,

Directo: Si $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{v}_1+\boldsymbol{v}_2$ con $\boldsymbol{v}_1 \in W_1$ y $\boldsymbol{v}_2 \in W_2$; $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{w}_1+\boldsymbol{w}_2$ con $\boldsymbol{w}_1 \in W_1$ y $\boldsymbol{w}_2 \in W_2$ $\Rightarrow$ $\boldsymbol{v}_1-\boldsymbol{w}_1 = \boldsymbol{w}_2-\boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{u}$

y si $\boldsymbol{u} \neq \boldsymbol{0}$, como $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{v}_1-\boldsymbol{w}_1 \in W_1$ y $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{w}_2-\boldsymbol{v}_2 \in W_2$, entonces W_1 y W_2 tendrían en común un vector distinto del $\boldsymbol{0}$, lo que está en contra de la hipótesis.

Recíproco: Si $W_1 \cap W_2 \neq \{\boldsymbol{0}\}$, existe un $\boldsymbol{w} \in V$ no nulo tal que $\boldsymbol{w} \in W_1 \cap W_2$, pudiéndose escribir $\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{v}_1+\boldsymbol{w})+(\boldsymbol{v}_2-\boldsymbol{w})$ con $\boldsymbol{v}_1+\boldsymbol{w} \in W_1$ y $\boldsymbol{v}_2-\boldsymbol{w} \in W_2$ y, por ello, la descomposición de $\boldsymbol{x}$ como suma no sería única.

Si W_1 y W_2 son subespacios de V y se verifica que $W_1 \oplus W_2 = V$ se dice que W_1 y W_2 son ***subespacios suplementarios***.

El concepto de suma y suma directa de dos subespacios se generaliza de forma natural a n subespacios $W_1,\ldots,W_n$ de un mismo espacio V, definiéndose

$$W_1+\ldots+W_n = \{\boldsymbol{v}_1+\ldots+\boldsymbol{v}_n \mid \boldsymbol{v}_1\in W_1 \ \wedge \ \ldots \ \wedge \ \boldsymbol{v}_n\in W_n \}$$

demostrándose por inducción que es un subespacio. La suma se dirá directa si se verifican las n igualdades

$$(W_1+\ldots+W_i) \cap W_{i+1} = \{\boldsymbol{0}\} \quad (i = 1,\ldots, n-1)$$

representándose por $W_1\oplus\ldots\oplus W_n$; por inducción se demuestra que el hecho de ser directa la suma equivale a que todo vector del subespacio suma se exprese de forma única como suma de vectores de $W_1,\ldots,W_n$, en cuyo caso se dice que los subespacios son ***independientes***. Se verifica que

$$W_i \subseteq W_1\oplus\ldots\oplus W_i\oplus \ \ldots\oplus W_n$$

para cualquier $i = 1,\ldots,n$ ya que $\boldsymbol{x}_i = \boldsymbol{0}+\ldots+\boldsymbol{x}_i+\ldots+\boldsymbol{0}$ con $\boldsymbol{0}\in W_1,\ldots,\boldsymbol{x}_i\in W_i,\ldots,\boldsymbol{0}\in W_n$.

Si $\boldsymbol{v}_1,\ldots,\boldsymbol{v}_n$ son vectores cualesquiera de V, el conjunto

$$B = \{\alpha_1\boldsymbol{v}_1+\ldots+\alpha_n\boldsymbol{v}_n \mid \alpha_1,\ldots,\alpha_n\in K\}$$

es decir, el conjunto de todas las combinaciones lineales de los vectores $\boldsymbol{v}_1,\ldots,\boldsymbol{v}_n$, es un subespacio vectorial de V, ya que

$$(\forall \boldsymbol{x}\in B)\ (\boldsymbol{x} = \mu_1\boldsymbol{v}_1+\ldots+\mu_n\boldsymbol{v}_n)$$
$$(\forall \boldsymbol{y}\in B)\ (\boldsymbol{y} = \sigma_1\boldsymbol{v}_1+\ldots+\sigma_n\boldsymbol{v}_n)$$

se verifica

$$\alpha\boldsymbol{x}+\beta\boldsymbol{y} = \alpha(\mu_1\boldsymbol{v}_1+\ldots+\mu_n\boldsymbol{v}_n)+\beta(\sigma_1\boldsymbol{v}_1+\ldots+\sigma_n\boldsymbol{v}_n) = (\alpha\mu_1+\beta\sigma_1)\boldsymbol{v}_1+\ldots+(\alpha\mu_n+\beta\sigma_n)\boldsymbol{v}_n\in B$$

Este tipo de subespacios tienen gran importancia y reciben el nombre de ***subespacios generados*** por un conjunto de vectores; se representan mediante el símbolo $[\boldsymbol{v}_1,\ldots,\boldsymbol{v}_n]$, que se lee como el subespacio generado por los vectores $\boldsymbol{v}_1,..,\boldsymbol{v}_n$ y es

$$[\boldsymbol{v}_1,\ldots,\boldsymbol{v}_n] = \{\alpha_1\boldsymbol{v}_1+\ldots+\alpha_n\boldsymbol{v}_n \mid \alpha_1,\ldots,\alpha_n\in K\}$$

Además verifica que está contenido en todos los subespacios vectoriales de V que contienen a los vectores $\boldsymbol{v}_1,\ldots,\boldsymbol{v}_n$; en efecto, si llamamos A_i a estos subespacios, tendremos que

$$(\forall i\in I)\ ([\boldsymbol{v}_1,\ldots,\boldsymbol{v}_n] \subseteq A_i) \qquad (\exists k\in I)\ ([\boldsymbol{v}_1,\ldots,\boldsymbol{v}_n] = A_k)$$

con lo que $\bigcap_{i\in I} A_i = [\boldsymbol{v}_1,\ldots,\boldsymbol{v}_n]$

Ejemplo IV.3.1

En el espacio vectorial $\mathbf{R}^3$ sobre $\mathbf{R}$, el subespacio engendrado por los vectores

$$(1,3,-4),(5,-1,0),(3,-1,-1),(2,4,0)$$

es

$$[(1,3,-4),(5,-1,0),(3,-1,-1),(2,4,0)] =$$
$$= \{\alpha_1(1,3,-4)+\alpha_2(5,-1,0)+\alpha_3(3,-1,-1)+\alpha_4(2,4,0) \mid \alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4 \in \mathbf{R}\} =$$
$$= \{(\alpha_1+5\alpha_2+3\alpha_3+2\alpha_4, 3\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3+4\alpha_4, -4\alpha_1-\alpha_3) \mid \alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4 \in \mathbf{R}\}$$

Para averiguar si el vector (2,2,–2) pertenece a este subespacio debemos verificar si existen escalares $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ tales que

$$\left.\begin{array}{r} \alpha_1+5\alpha_2+3\alpha_3+2\alpha_4 = 2 \\ 3\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3+4\alpha_4 = 2 \\ -4\alpha_1-\alpha_3 = -2 \end{array}\right|$$

Resolviendo este sistema por el método de Gauss-Jordan

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 & 2 & 2 \\ 3 & -1 & -1 & 4 & 2 \\ -4 & 0 & -1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & -16 & -10 & -2 & -4 \\ 0 & 20 & 11 & 8 & 6 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & -8 & -5 & -1 & -2 \\ 0 & 20 & 11 & 8 & 6 \end{pmatrix} \to$$

$$\to \begin{pmatrix} 8 & 0 & -1 & 11 & 6 \\ 0 & -8 & -5 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -3 & 11 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -24 & 0 & 0 & -22 & -16 \\ 0 & 24 & 0 & 58 & 16 \\ 0 & 0 & -3 & 11 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 11/12 & 2/3 \\ 0 & 1 & 0 & 29/12 & 2/3 \\ 0 & 0 & 1 & -11/3 & -2/3 \end{pmatrix}$$

cuya solución es

$$\alpha_1 = (-11\alpha_4+8)/12 \quad , \quad \alpha_2 = (-29\alpha_4+8)/12 \quad , \quad \alpha_3 = (11\alpha_4-2)/3$$

y dando valores arbitrarios a α_4 pueden obtenerse las distintas soluciones del sistema. Esto quiere decir que (2,2,–2) pertenece al subespacio engendrado por los vectores (1,3,–4),(5,–1,0), (3,–1,–1) y (2,4,0) ya que es posible expresarlo como combinación lineal de ellos, además de distintas maneras. Podemos observar que a partir de los datos es posible plantear directamente la matriz del sistema escribiendo todos los vectores del subespacio en columna, y el vector a considerar como combinación lineal de los del espacio, en la última columna

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 & 2 & 2 \\ 3 & -1 & -1 & 4 & 2 \\ -4 & 0 & -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Ejercicios

IV.10.- De los siguientes subconjuntos averiguar cuáles son subespacios

a) $A = \{(x_1,x_2,x_3) \in \mathbf{R}^3 \mid 2x_1-x_2 = 0 \ , \ 2x_1-x_3 = 0\}$

b) $B = \{(x_1,x_2,x_3)\in \mathbf{R}^3 \mid 2x_1-x_2 = 1\ ,\ 2x_1-x_3 = 0\}$

c) $C = \{(x_1,x_2,x_1-3x_2,1)\in \mathbf{R}^4 \mid x_1,x_2\in \mathbf{R}\}$

IV.11.- Averiguar si la unión de dos subespacios vectoriales es otro subespacio vectorial. Demostrarlo mediante un contraejemplo con subespacios de $\mathbf{R}^3$ sobre $\mathbf{R}$.

IV.12.- Averiguar si

$$F = \{P(x)\in \mathbf{R}[x] \mid \mathrm{gr}(P(x)) = 2 \ \wedge\ 2P''(0)+P'(1)+P(2) = 0\}$$

es un subespacio vectorial de $\mathbf{R}[x]$.

IV.13.- Averiguar si son subespacios los siguientes subconjuntos del espacio vectorial F de las funciones reales de variable real

a) $A = \{f\in F \mid f(x^2) = (f(x))^2\}$

b) $B = \{f\in F \mid f(0) = f(2)\}$

c) $C = \{f\in F \mid f(2) = 3+f(-1)\}$

IV.14.- Probar que

$$P = \{f\in F \mid (\forall x\in \mathbf{R})\ (f(-x) = f(x))\} \qquad I = \{f\in F \mid (\forall x\in \mathbf{R})\ (f(-x) = -f(x))\}$$

son subespacios vectoriales del espacio vectorial F de las aplicaciones de $\mathbf{R}$ en $\mathbf{R}$ y que $F = P+I$.

IV.15.- Qué condición deben verificar las coordenadas de un vector de $\mathbf{R}^4$ para que pertenezca a los subespacios $A = [(1,1,0,1),(3,0,2,-3),(1,2,-1,-2)]$ y $B = [(0,2,0,1),(1,0,2,-1)\ (3,1,1,1),(4,3,3,1),(3,4,6,-1)]$.

IV.4.- BASE Y DIMENSION DE UN ESPACIO VECTORIAL

Los espacios vectoriales para los que existe un conjunto generador finito de vectores se denominan espacios de ***dimensión finita***. No todos los espacios son de dimensión finita, es decir, no todos tienen un conjunto generador finito de vectores, de forma que todo vector pueda expresarse como combinación lineal de ellos.

Ejemplo IV.4.1

a) Los espacios vectoriales K^n sobre un cuerpo K, son de dimensión finita, ya que el conjunto de vectores

$$\{(1,0,\ldots,0),(0,1,\ldots,0),\ldots,(0,0,\ldots,1)\}$$

es generador de K^n, pues cualquiera que sea $(a_1,a_2,\ldots,a_n)\in K^n$ tenemos que

$$(a_1,a_2,\ldots,a_n) = a_1(1,0,\ldots,0)+a_2(0,1,\ldots,0)+\ldots+a_n(0,0,\ldots,1)$$

b) El espacio vectorial $K[x]$ de los polinomios sobre un cuerpo K no es de dimensión finita pues no existe un conjunto finito de polinomios $\{P_1,...,P_n\}$ generador de $K[x]$, ya que un polinomio Q cuyo grado sea tal que

$$\text{gr}(Q) > \max(\text{gr}(P_1),...,\text{gr}(P_n))$$

no es expresable como combinación lineal de $P_1,...,P_n$. Sin embargo el conjunto

$$K_n[x] = \{\text{Polinomios sobre } K \text{ de grado} \leq n\}$$

es un subespacio de $K[x]$, como se demuestra fácilmente, de dimensión finita, ya que

$$\{1+0x+...+0x^n,\ 0+1x+...+0x^n,...,0+0x+...+1x^n\}$$

es un conjunto generador $K_n[x]$ al verificar

$$a_0+a_1x+...+a_nx^n = a_0(1+0x+...+0x^n)+a_1(0+1x+...+0x^n)+...+a_n(0+0x+...+1x^n)$$

c) El espacio vectorial sobre $\mathbf{R}$

$$W = \{\text{funciones } f:\ \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}\}$$

tampoco es de dimensión finita, ya que ningún conjunto finito de funciones $\{f_1,...,f_n\}$ pueden generar W; por ejemplo, la funcion $f_1 \cdot ... f_n$ no es combinación lineal de ellas.

Las propiedades más importantes de los espacios vectoriales de dimensión finita, se enuncian en la Tabla siguiente:

TABLA IV.4.1

Propiedades de los espacios vectoriales de dimensión finita

1) Si $(p_1,...,p_n)$ es una permutación de $(1,...,n)$, entonces $[\boldsymbol{x}_1,\ldots,\boldsymbol{x}_n] = [\boldsymbol{x}_{p_1},\ldots,\boldsymbol{x}_{p_n}]$

2) $\beta \neq 0$ implica $[\boldsymbol{x}_1,...,\boldsymbol{x}_i,...,\boldsymbol{x}_n] = [\boldsymbol{x}_1,...,\beta\boldsymbol{x}_i,...,\boldsymbol{x}_n]$

3) $[\boldsymbol{x}_1,\ldots,\boldsymbol{x}_i,\ldots,\boldsymbol{x}_j,\ldots,\boldsymbol{x}_n] = [\boldsymbol{x}_1,\ldots,\boldsymbol{x}_i+\alpha\boldsymbol{x}_j,\ldots,\boldsymbol{x}_j,\ldots,\boldsymbol{x}_n]$

4) $\boldsymbol{x}_i$ combinación lineal de los demás vectores equivale a

$$[\boldsymbol{x}_1,\ldots,\boldsymbol{x}_{i-1},\boldsymbol{x}_i,\boldsymbol{x}_{i+1},\ldots,\boldsymbol{x}_n] = [\boldsymbol{x}_1,\ldots,\boldsymbol{x}_{i-1},\boldsymbol{x}_{i+1},\ldots,\boldsymbol{x}_n]$$

Demostraciones:

Estas propiedades establecen en que condiciones un espacio vectorial generado permanece invariante al manipular los vectores generadores. Un espacio de dimensión finita, permanece invariante cuando en su conjunto generador

1) se reordenan vectores, ya que

$$\boldsymbol{x}\in[\boldsymbol{x}_1,...,\boldsymbol{x}_n] \;\Leftrightarrow\; (\exists\alpha_1,...,\alpha_n\in K)\,(\boldsymbol{x}=\alpha_1\boldsymbol{x}_1+...+\alpha_n\boldsymbol{x}_n) \;\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\; \boldsymbol{x}=\alpha_{p_1}\boldsymbol{x}_{p_1}+...+\alpha_{p_n}\boldsymbol{x}_{p_n} \;\Leftrightarrow\; \boldsymbol{x}\in[\boldsymbol{x}_{p_1},...,\boldsymbol{x}_{p_n}]$$

2) se multiplica un vector generador por un escalar no nulo β

$$\boldsymbol{x}\in[\boldsymbol{x}_1,...,\boldsymbol{x}_i,...,\boldsymbol{x}_n] \;\Leftrightarrow\; (\exists\alpha_1,...,\alpha_i,...,\alpha_n\in K)\,(\boldsymbol{x}=\alpha_1\boldsymbol{x}_1+...+\alpha_i\boldsymbol{x}_i+...+\alpha_n\boldsymbol{x}_n) \;\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\; \boldsymbol{x}=\alpha_1\boldsymbol{x}_1+...+(\alpha_i/\beta)\beta\boldsymbol{x}_i+...+\alpha_n\boldsymbol{x}_n \;\Leftrightarrow\; \boldsymbol{x}\in[\boldsymbol{x}_1,...,\beta\boldsymbol{x}_i,...,\boldsymbol{x}_n]$$

3) se suma a un vector generador $\boldsymbol{x}_i$, un múltiplo de otro vector generador $\alpha\boldsymbol{x}_j$, pues

$$\boldsymbol{x}\in[\boldsymbol{x}_1,...,\boldsymbol{x}_i,...,\boldsymbol{x}_j,...,\boldsymbol{x}_n] \;\Leftrightarrow\; \boldsymbol{x}=\alpha_1\boldsymbol{x}_1+...+\alpha_i\boldsymbol{x}_i+...+\alpha_j\boldsymbol{x}_j...+\alpha_n\boldsymbol{x}_n \;\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\; \boldsymbol{x}=\alpha_1\boldsymbol{x}_1+...+\alpha_i(\boldsymbol{x}_i+\alpha\boldsymbol{x}_j)+...+(\alpha_j-\alpha\alpha_i)\boldsymbol{x}_j+...+\alpha_n\boldsymbol{x}_n \;\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\; \boldsymbol{x}\in[\boldsymbol{x}_1,...,\boldsymbol{x}_i+\alpha\boldsymbol{x}_j,...,\boldsymbol{x}_j\;...,\boldsymbol{x}_n]$$

4) se añade o se quita un vector combinación lineal de los demás generadores; en efecto, si

$$\boldsymbol{x}_i=\beta_1\boldsymbol{x}_1+...+\beta_{i-1}\boldsymbol{x}_{i-1}+\beta_{i+1}\boldsymbol{x}_{i+1}+...+\beta_n\boldsymbol{x}_n$$

entonces

$$\boldsymbol{x}\in[\boldsymbol{x}_1,...,\boldsymbol{x}_{i-1},\boldsymbol{x}_i,\boldsymbol{x}_{i+1},...,\boldsymbol{x}_n] \;\Leftrightarrow\; \boldsymbol{x}=\alpha_1\boldsymbol{x}_1+..+\alpha_{i-1}\boldsymbol{x}_{i-1}+\alpha_i\boldsymbol{x}_i+\alpha_{i+1}\boldsymbol{x}_{i+1}+..+\alpha_n\boldsymbol{x}_n \;\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \boldsymbol{x}=\alpha_1\boldsymbol{x}_1+..+\alpha_{i-1}\boldsymbol{x}_{i-1}+\alpha_i(\beta_1\boldsymbol{x}_1+..+\beta_{i-1}\boldsymbol{x}_{i-1}+\beta_{i+1}\boldsymbol{x}_{i+1}+..+\beta_n\boldsymbol{x}_n)+\alpha_{i+1}\boldsymbol{x}_{i+1}+..+\alpha_n\boldsymbol{x}_n \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\; \boldsymbol{x}=(\alpha_1+\alpha_i\beta_1)\boldsymbol{x}_1+..+(\alpha_{i-1}+\alpha_i\beta_{i-1})\boldsymbol{x}_{i-1}+(\alpha_{i+1}+\alpha_i\beta_{i+1})\boldsymbol{x}_{i+1}+..+(\alpha_n+\alpha_i\beta_n)\boldsymbol{x}_n \;\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\; \boldsymbol{x}\in[\boldsymbol{x}_1,...,\boldsymbol{x}_{i-1},\boldsymbol{x}_{i+1},...,\boldsymbol{x}_n]$$

Recíprocamente, si $[\boldsymbol{x}_1,...,\boldsymbol{x}_{i-1},\boldsymbol{x}_{i+1},...,\boldsymbol{x}_n]=[\boldsymbol{x}_1,...,\boldsymbol{x}_{i-1},\boldsymbol{x}_i,\boldsymbol{x}_{i+1},...,\boldsymbol{x}_n]$, entonces $\boldsymbol{x}_i$ debe ser combinación lineal de los demás ya que si así no fuera, $\boldsymbol{x}_i$ sería un vector del segundo subespacio que no estaría en el primero.

Esta última propiedad 4) sugiere la posibilidad de encontrar un subconjunto minimal generador de un espacio. Para un cierto espacio de dimensión finita

$$[\boldsymbol{x}_1,...,\boldsymbol{x}_n]$$

si en el conjunto generador $\{\boldsymbol{x}_1,...,\boldsymbol{x}_n\}$ existe algún vector combinación lineal de los demás, puede ser suprimido sin variar el espacio generado y este proceso puede ser continuado hasta que no exista ningún vector en el conjunto generador combinación lineal de los demás, ya que su supresión cambiaría el espacio. Un conjunto generador minimal de un espacio vectorial de dimensión finita se denomina ***base del espacio.***

Su obtención y propiedades, dependen del importante concepto de independencia lineal. Un

conjunto de vectores $\{\boldsymbol{x}_1,...,\boldsymbol{x}_n\}$ se dice que es ***linealmente independiente*** (l.i.) si y sólo si la ecuación

$$\alpha_1\boldsymbol{x}_1+...+\alpha_n\boldsymbol{x}_n = \boldsymbol{0}$$

tiene por única solución $\alpha_1 = ... = \alpha_n = 0$. En caso contrario diremos que el conjunto de vectores $\{\boldsymbol{x}_1,...,\boldsymbol{x}_n\}$ es ***linealmente dependiente*** (l.d.) lo que, de acuerdo con la definición anterior, significa que existen escalares no todos nulos $\alpha_1,...,\alpha_n \in K$ tales que

$$\alpha_1\boldsymbol{x}_1+...+\alpha_n\boldsymbol{x}_n = \boldsymbol{0}$$

Ejemplo IV.4.2

a) En el espacio vectorial $\mathbf{R}^3$, el conjunto de vectores $\{(1,1,-1),(0,2,3),(1,4,4)\}$ es l.i., pues resolviendo la ecuación

$$\alpha_1(1,1,-1)+\alpha_2(0,2,3)+\alpha_3(1,4,4) = (0,0,0)$$

por el método de Gauss-Jordan

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & 0 \\ -1 & 3 & 4 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 5 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \to$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

da como soluciones $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$.

b) El subconjunto $\{3,2+3x,5-7x^2,6-x+x^2\}$, del conjunto $\mathbf{R}_2[x]$ de los polinomios de coeficientes reales de grado menor o igual que 2, es l.d.

$$\alpha_1(3)+\alpha_2(2+3x)+\alpha_3(5-7x^2)+\alpha_4(6-x+x^2) = 0+0\cdot x+0\cdot x^2 \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; (3\alpha_1+2\alpha_2+5\alpha_3+6\alpha_4)+(3\alpha_2-\alpha_4)x+(-7\alpha_3+\alpha_4)x^2 = 0+0\cdot x+0\cdot x^2 \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left|\begin{array}{r} 3\alpha_1+2\alpha_2+5\alpha_3+6\alpha_4 = 0 \\ 3\alpha_2-\alpha_4 = 0 \\ -7\alpha_3+\alpha_4 = 0 \end{array}\right.$$

que resuelto por el método de Gauss-Jordan

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 & 6 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -7 & 1 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 9 & 0 & 15 & 20 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -7 & 1 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 63 & 0 & 0 & 155 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -7 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

da la solución $\alpha_1 = -155\alpha_4/63$, $\alpha_2 = \alpha_4/3$, $\alpha_3 = \alpha_4/7$ existiendo infinitas soluciones

que se obtienen dando valores arbitrarios a α_4.

Resumimos en la Tabla IV.4.2 las principales propiedades que caracterizan la independencia lineal de un conjunto de vectores.

TABLA IV.4.2

Propiedades de la independencia lineal

1) $\{\boldsymbol{0}\}$ es l.d.

2) $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$ implica $\{\boldsymbol{x}\}$ es l.i.

3) $\{\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2\}$ l.d. equivale a que existe algún escalar $\alpha \neq 0$ tal que

$$\boldsymbol{x}_2 = \alpha\boldsymbol{x}_1 \quad \text{o} \quad \boldsymbol{x}_1 = \alpha\boldsymbol{x}_2$$

4) $\{\boldsymbol{0},\boldsymbol{x}_1,...,\boldsymbol{x}_n\}$ es l.d. para cualesquiera $\boldsymbol{x}_1,...,\boldsymbol{x}_n$

5) $\boldsymbol{x}_i = \boldsymbol{x}_j$ implica $\{\boldsymbol{x}_1,..,\boldsymbol{x}_i,..,\boldsymbol{x}_j,..,\boldsymbol{x}_n\}$ l.d.

6) $\{\boldsymbol{x}_1,...,\boldsymbol{x}_n\}$ l.i. implica $(\forall\, i \neq j)\ (\boldsymbol{x}_i \neq \boldsymbol{x}_j)$

7) $\{\boldsymbol{x}_1,..,\boldsymbol{x}_n\}$ l.d. equivale a que algún $\boldsymbol{x}_i$ es combinación lineal de los demás

8) $\{\boldsymbol{x}_1,...,\boldsymbol{x}_n\}$ l.d. implica $(\forall \boldsymbol{x} \in V)$ $(\{\boldsymbol{x}_1,...,\boldsymbol{x}_n,\boldsymbol{x}\}$ l.d.)

9) $\{\boldsymbol{x}_1,...,\boldsymbol{x}_n\}$ l.i
$\boldsymbol{x}$ no es combinación lineal de $\boldsymbol{x}_1,...,\boldsymbol{x}_n$ | implican $\{\boldsymbol{x}_1,...,\boldsymbol{x}_n,\boldsymbol{x}\}$ l.i.

10) $\{\boldsymbol{x}_1,...,\boldsymbol{x}_n\}$ l.i.
$\{\boldsymbol{x}_i,...,\boldsymbol{x}_j\} \subseteq \{\boldsymbol{x}_1,...,\boldsymbol{x}_n\}$ | implican $\{\boldsymbol{x}_i,...,\boldsymbol{x}_j\}$ l.i.

Demostraciones:

1) $\{\boldsymbol{0}\}$ l.d. pues cualquier $\alpha \in K$ es solución de la ecuación $\alpha\cdot\boldsymbol{0} = \boldsymbol{0}$.

2) Si $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$, entonces $\{\boldsymbol{x}\}$ es l.i. pues la ecuación $\alpha\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ tiene como única solución $\alpha = 0$.

3) Según la definición de dependencia lineal

$$\{\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2\} \text{ l.d. } \Rightarrow\ \alpha_1\boldsymbol{x}_1+\alpha_2\boldsymbol{x}_2 = \boldsymbol{0} \text{ con algún } \alpha_i \text{ no nulo } \Rightarrow\ \boldsymbol{x}_1 = \frac{\alpha_2}{\alpha_1}\boldsymbol{x}_2 \quad \text{o} \quad \boldsymbol{x}_2 = \frac{\alpha_1}{\alpha_2}\boldsymbol{x}_1$$

y diremos que $\boldsymbol{x}_1$ y $\boldsymbol{x}_2$ son ***vectores proporcionales***.

4) Para cualesquiera que sean los vectores $\boldsymbol{x}_1,...,\boldsymbol{x}_n$, el conjunto $\{\boldsymbol{0},\boldsymbol{x}_1,...,\boldsymbol{x}_n\}$ es l.d. ya que la ecuación $\alpha\cdot\boldsymbol{0}+\alpha_1\boldsymbol{x}_1+...+\alpha_n\boldsymbol{x}_n = \boldsymbol{0}$ tiene por solución $\alpha_1 = ... = \alpha_n = 0$ y α cualquier escalar de *K*.

5) Si en un conjunto hay dos vectores iguales $\boldsymbol{x}_i = \boldsymbol{x}_j$ el conjunto es l.d. ya que puede escribirse

$$0\boldsymbol{x}_1+...+1\boldsymbol{x}_j+...-1\boldsymbol{x}_j+...+0\boldsymbol{x}_n = \boldsymbol{0}$$

con lo que existen escalares no todos nulos soluciones de ecuación.

6) Es la contrarrecíproca de la anterior.

7) Esta propiedad caracteriza a los conjuntos de vectores linealmente dependientes y .

Directo : $\{\boldsymbol{x}_1,...,\boldsymbol{x}_n\}$ l.d. $\Rightarrow$ $\alpha_1\boldsymbol{x}_1+...+\alpha_n\boldsymbol{x}_n = \boldsymbol{0}$ con algún $\alpha_i \neq 0$ $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \alpha_i\boldsymbol{x}_i = -\alpha_1\boldsymbol{x}_1-...-\alpha_{i-1}\boldsymbol{x}_{i-1}-\alpha_{i+1}\boldsymbol{x}_{i+1}-...-\alpha_n\boldsymbol{x}_n = \boldsymbol{0} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{x}_i = -\frac{\alpha_1}{\alpha_i}\boldsymbol{x}_1 - ... - \frac{\alpha_{i-1}}{\alpha_i}\boldsymbol{x}_{i-1} - \frac{\alpha_{i+1}}{\alpha_i}\boldsymbol{x}_{i+1} - ... - \frac{\alpha_n}{\alpha_i}\boldsymbol{x}_n$$

y $\boldsymbol{x}_i$ resulta ser combinación lineal de los demás.

Recíproco: Si $\boldsymbol{x}_i$ es combinación lineal, entonces

$$\boldsymbol{x}_i = \alpha_1\boldsymbol{x}_1+...+\alpha_{i-1}\boldsymbol{x}_{i+1}+\alpha_{i+1}\boldsymbol{x}_{i+1}+...+\alpha_n\boldsymbol{x}_n \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha_1\boldsymbol{x}_1+...+\alpha_{i-1}\boldsymbol{x}_{i-1}+(-1)\boldsymbol{x}_i+\alpha_{i+1}\boldsymbol{x}_{i+1}+...+\alpha_n\boldsymbol{x}_n = \boldsymbol{0}$$

luego $\{\boldsymbol{x}_{1,}...,\boldsymbol{x}_i,...,\boldsymbol{x}_n\}$ es l.d. al existir al menos un coeficiente no nulo.

Las propiedades 8), 9) y 10) expresan que ocurre respecto de la independencia lineal cuando se amplía o se reduce un conjunto de vectores.

8) $\{\boldsymbol{x}_1,...,\boldsymbol{x}_n\}$ l.d. $\Rightarrow$ existe $\boldsymbol{x}_i = \alpha_1\boldsymbol{x}_1+...+\alpha_{i-1}\boldsymbol{x}_{i-1}+\alpha_{i+1}\boldsymbol{x}_{i+1}+...+\alpha_n\boldsymbol{x}_n \Rightarrow$

$\Rightarrow \boldsymbol{x}_i = \alpha_1\boldsymbol{x}_1+...+\alpha_{i-1}\boldsymbol{x}_{i-1}+\alpha_{i+1}\boldsymbol{x}_{i+1}+...+\alpha_n\boldsymbol{x}_n+0\,\boldsymbol{x} \Rightarrow \{\boldsymbol{x}_1,...,\boldsymbol{x}_n,\boldsymbol{x}\}$ l.d.

9) Expresa que si a un conjunto l.i. se le añade otro vector, el conjunto resultante será l.d. si el vector añadido es combinación lineal de los otros, según 4), o l.i. si el vector añadido no es combinación lineal. En efecto, si $\{\boldsymbol{x}_1,..,\boldsymbol{x}_n,\boldsymbol{x}\}$ fuera l.d. tendríamos que un vector $\boldsymbol{x}_i$ sería combinación lineal de los demás

$$\boldsymbol{x}_i = \alpha_1\boldsymbol{x}_1+...+\alpha_{i-1}\boldsymbol{x}_{i-1}+\alpha_{i+1}\boldsymbol{x}_{i+1}+...+\alpha_n\boldsymbol{x}_n+\alpha\boldsymbol{x}$$

con lo que

a) Si $\alpha = 0$, entonces $\{\boldsymbol{x}_1,...,\boldsymbol{x}_n\}$ no sería l.i.

b) Si $\alpha \neq 0$ tendríamos que

$$\boldsymbol{x}=\frac{1}{\alpha}\boldsymbol{x}_i-\frac{\alpha_1}{\alpha}\boldsymbol{x}_1-\ldots-\frac{\alpha_{i-1}}{\alpha}\boldsymbol{x}_{i-1}-\frac{\alpha_{i+1}}{\alpha}\boldsymbol{x}_{i+1}-\ldots-\frac{\alpha_n}{\alpha}\boldsymbol{x}_n$$

lo que va contra la hipótesis.

10) Cualquier subconjunto de un conjunto l.i. continua siéndolo, pues si $\{\boldsymbol{x}_i,\ldots,\boldsymbol{x}_j\}$ fuera l.d., tendríamos

$$\boldsymbol{x}_p=\alpha_i\boldsymbol{x}_i+\ldots+\alpha_{p-1}\boldsymbol{x}_{p-1}+\alpha_{p+1}\boldsymbol{x}_{p+1}+\ldots+\alpha_j\boldsymbol{x}_j \qquad \text{para algún} \qquad i\le p\le j$$

y añadiendo sumandos del tipo $0\boldsymbol{x}_1,\ldots,0\boldsymbol{x}_n$, en el conjunto $\{\boldsymbol{x}_1,\ldots,\boldsymbol{x}_p,\ldots,\boldsymbol{x}_n\}$ el vector $\boldsymbol{x}_p$ sería combinación lineal de los demás y no sería l.i..Sin embargo, queda sin resolver que caracter tiene un subconjunto de un conjunto l.d., ya que depende de los vectores que contenga, como se verá en el siguiente ejemplo.

Ejemplo IV.4.3

En $\mathbf{R}^3$ el conjunto $\{(1,-1,2),(3,0,2),(0,1,4),(-7,-2,-2)\}$ es l.d. ya que la ecuación

$$\alpha_1(1,-1,2)+\alpha_2(3,0,2)+\alpha_3(0,1,4)+\alpha_4(-7,-2,-2)=(0,0,0)$$

resolviendo por el método de Gauss-Jordan

$$\begin{pmatrix}1&3&0&-7&0\\-1&0&1&-2&0\\2&2&4&-2&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&3&0&-7&0\\0&3&1&-9&0\\0&-4&4&12&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&-1&2&0\\0&3&1&-9&0\\0&0&16&0&0\end{pmatrix}\to$$

$$\to\begin{pmatrix}16&0&0&32&0\\0&-48&0&144&0\\0&0&16&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&2&0\\0&1&0&-3&0\\0&0&1&0&0\end{pmatrix}$$

tiene por solución $\alpha_1=-2\alpha_4$, $\alpha_2=3\alpha_4$, $\alpha_3=0$ y α_4 arbitrario. Uno de los vectores, el (1,−1,2), o el (3,0,2), o el (−7,−2,−2), es combinación lineal de los otros. Sin embargo, no lo es el (0,1,4) ya que en la ecuación anterior $\alpha_3=0$ y no puede ser despejado este vector. Además del proceso de resolución anterior se deduce que el conjunto {(1,−1,2),(3,0,2),(0,1,4)}, es decir, los vectores correspondientes a las columnas que después de las transformaciones tiene un 1 y todos los demás elementos 0, es l.i. ya que la solución de la ecuación de la independencia lineal que forman estos tres vectores se obtiene mediante los cálculos anteriores excluyendo la columna de coeficientes de α_4 y la solución es entonces $\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=0$. Sin embargo, es l.d. el subconjunto {(1,−1,2),(3,0,2),(−7,−2,−2)}.

Ejemplo IV.4.4

El conjunto de *m* vectores del espacio vectorial K^n

$$\{(0,\ldots,0,b_{1r},\ldots,b_{1n}),(0,\ldots,0,b_{2s},\ldots,b_{2n}),\ldots,(0,\ldots,0,b_{mv},\ldots,b_{mn})\}$$

con $r < s < ... < v$, $b_{1r} \neq 0$, $b_{2s} \neq 0$,..., $b_{mn} \neq 0$ es l.i.. En efecto, la ecuación de la independencia lineal para estos vectores es

$$\alpha_1(0,..,0,b_{1r},..,b_{1n})+\alpha_2(0,..,0,b_{2s},..,b_{2n})+..+\alpha_m(0,..,0,b_{mv},..,b_{mn}) = (0,..,0,0,..,0)$$

que para resolver bastará con hacer operaciones e igualar las correspondientes componentes, llegando al sistema

$$\left.\begin{array}{l} \alpha_1 b_{1r} = 0 \\ \cdots\cdots\cdots \\ \alpha_1 b_{1s-1} = 0 \\ \\ \alpha_1 b_{1s}+\alpha_2 b_{2s} = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \alpha_1 b_{1v}+\alpha_2 b_{2v}+...+\alpha_m b_{mv}= 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \alpha_1 b_{1n}+\alpha_2 b_{2n}+...+\alpha_m b_{mn}= 0 \end{array}\right| \quad \Rightarrow \quad \alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_m = 0$$

Ejercicios

IV.16.-Estudiar si los siguientes conjuntos de vectores de $\mathbf{R}^4$ son l.i. o l.d.

a) $\{(-5,2,8,-16),(-5,3,17,-14),(1,1,11,6)\}$

b) $\{(0,1,\alpha_1,-1),(1,\alpha_2,-1,0),(0,\alpha_3,-1,1),(4,6,1,\alpha_4)\}$ para $\alpha_1 =$, $\alpha_2 =$, $\alpha_3 =$, $\alpha_4 =$.

c) $\{(0,1,1,1),(1,0,1,-1),(2,2,2,1),(0,0,-1,-1),(0,1,1,0)\}$

IV.17.- Si E es e.v.s. $\mathbf{R}$ y $\{\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,...,\boldsymbol{x}_n\}$ l.i., demostrar que $\{\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_1+\boldsymbol{x}_2,..., \boldsymbol{x}_1+\boldsymbol{x}_2+...+\boldsymbol{x}_n\}$ es también l.i.

IV.18.- Si V es un e.v.s. K y $\{\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,...,\boldsymbol{x}_n\}$ es un conjunto de vectores l.i., demostrar que también lo es $\{a_1\boldsymbol{x}_1,a_2\boldsymbol{x}_2,...,a_n\boldsymbol{x}_n\}$, con $a_i \neq 0$.

IV.19.- En el espacio vectorial de las funciones reales de variable real, demostrar que

$$f_1(x) = e^{2x} \qquad f_2(x) = x^2 \qquad f_3(x) = x$$

forman un conjunto l.i.

La independencia lineal caracteriza a la base de un espacio vectorial, que ya hemos definido como un conjunto generador minimal del espacio, del modo expresado en el siguiente teorema:

"Un conjunto de vectores constituyen una base de un espacio vectorial V de dimensión finita si y sólo si es un conjunto generador linealmente independiente".

Demostración:

Directo: Si los vectores $\boldsymbol{e}_1,\ldots,\boldsymbol{e}_n$ forman base de V, constituyen un conjunto generador

minimal y por tanto l.i., pues si $\{\boldsymbol{e}_1,\ldots,\boldsymbol{e}_n\}$ fuera l.d., algún $\boldsymbol{e}_i$ sería combinación de los otros y por la propiedad 4 de la Tabla IV.2.1

$$V = [\boldsymbol{e}_1,\ldots,\boldsymbol{e}_i,\ldots,\boldsymbol{e}_n] = [\boldsymbol{e}_1,\ldots,\boldsymbol{e}_{i-1},\boldsymbol{e}_{i+1},\ldots,\boldsymbol{e}_n]$$

lo que va contra la hipótesis de que $\{\boldsymbol{e}_1,\ldots,\boldsymbol{e}_n\}$ es conjunto generador minimal.

Recíproco : Si $\{\boldsymbol{e}_1,\ldots,\boldsymbol{e}_i,\ldots,\boldsymbol{e}_n\}$ es un conjunto generador de V linealmente independiente, es un conjunto generador minimal, pues si no lo fuera habría un subconjunto suyo generador de V, quizá el $\{\boldsymbol{e}_1,\ldots,\boldsymbol{e}_{i-1},\boldsymbol{e}_{i+1},\ldots,\boldsymbol{e}_n\}$, en cuyo caso todo vector de V, en particular $\boldsymbol{e}_i$, sería combinación lineal de los éstos por lo que el conjunto $\{\boldsymbol{e}_1,\ldots,\boldsymbol{e}_i,\ldots,\boldsymbol{e}_n\}$ no sería l.i., en contra de la hipótesis.

Otra forma de caracterizar las bases viene expresada en el siguiente teorema:

" Un conjunto de vectores es una base de un espacio vectorial V de dimensión finita si y sólo si es un conjunto linealmente independiente maximal".

Demostración:

Directo : Si los vectores $\boldsymbol{e}_1,\ldots,\boldsymbol{e}_n$ forman una base de V, según el teorema anterior el conjunto $\{\boldsymbol{e}_1,\ldots,\boldsymbol{e}_n\}$ es l.i. y generador de V, por lo que si $\boldsymbol{x}$ es un vector de cualquiera de V, es combinación lineal de $\boldsymbol{e}_1,\ldots,\boldsymbol{e}_n$; entonces $\{\boldsymbol{e}_1,\ldots,\boldsymbol{e}_n,\boldsymbol{x}\}$ es l.d. y lo mismo ocurrirá con cualquier otro subconjunto de vectores que contenga estrictamente al $\{\boldsymbol{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_n\}$.

Recíproco : Si $\{\boldsymbol{e}_1,\ldots,\boldsymbol{e}_n\}$ es un conjunto maximal l.i., es también un conjunto generador de V, pues para cualquier vector $\boldsymbol{x}\in V$, como $\{\boldsymbol{e}_1,\ldots,\boldsymbol{e}_n,\boldsymbol{x}\}$ es l.d., uno de los vectores es combinación lineal de los otros

$$\boldsymbol{e}_i = \alpha_1\boldsymbol{e}_1+\ldots+\alpha_{i-1}\boldsymbol{e}_{i-1}+\alpha_{i+1}\boldsymbol{e}_{i+1}+\ldots+\alpha_n\boldsymbol{e}_n+\alpha\boldsymbol{x}$$

con $\alpha \neq 0$ (ya que si fuera $\alpha = 0$, entonces sería $\boldsymbol{e}_i$ una combinación lineal de $\boldsymbol{e}_1,\ldots,\boldsymbol{e}_{i-1},\boldsymbol{e}_{i+1},\ldots,\boldsymbol{e}_n$ y $\{\mathbf{e}_1,\ldots,\boldsymbol{e}_i,\ldots,\boldsymbol{e}_n\}$ no sería l.i.) por lo que

$$\boldsymbol{x} = -\frac{\alpha_1}{\alpha}\boldsymbol{e}_1 -\ldots- \frac{\alpha_{i-1}}{\alpha}\boldsymbol{e}_{i-1}+ \frac{1}{\alpha}\boldsymbol{e}_i - \frac{\alpha_{i+1}}{\alpha}\boldsymbol{e}_{i+1} -\ldots- \frac{\alpha_n}{\alpha}\boldsymbol{e}_n$$

y $\boldsymbol{x}$ es combinación lineal de ellos; por tanto, según el teorema anterior, al ser $\{\boldsymbol{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_i,\ldots,\boldsymbol{e}_n\}$ un conjunto l.i. y generador, es base de V.

Según estas caracterizaciones antes obtenidas, $(\boldsymbol{e}_1,\ldots,\boldsymbol{e}_n)$ base de V equivale a

a) $\{\boldsymbol{e}_1,\ldots,\boldsymbol{e}_n\}$ es un conjunto generador minimal de V
b) $\{\boldsymbol{e}_1,\ldots,\boldsymbol{e}_n\}$ es un conjunto generador l.i. de V
c) $\{\boldsymbol{e}_1,\ldots,\boldsymbol{e}_n\}$ es un conjunto maximal l.i. de V

Como los vectores $\boldsymbol{e}_1,\ldots,\boldsymbol{e}_n$ de una base forman un conjunto generador, se verifica que

$$(\forall \boldsymbol{x}\in V)\ (\exists \alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n\in K)\ (\boldsymbol{x} = \alpha_1\boldsymbol{e}_1+\ldots+\alpha_n\boldsymbol{e}_n)$$

y al ser un conjunto l.i., estos escalares $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ son únicos, para cada vector, ya que si fuera

$$\left.\begin{array}{l}\boldsymbol{x} = \alpha_1\boldsymbol{e}_1+\ldots+\alpha_n\boldsymbol{e}_n\\ \boldsymbol{x} = \beta_1\boldsymbol{e}_1+\ldots+\beta_n\boldsymbol{e}_n\end{array}\right| \Rightarrow (\alpha_1-\beta_1)\boldsymbol{e}_1+\ldots+(\alpha_n-\beta_n)\boldsymbol{e}_n = 0 \Rightarrow \left|\begin{array}{l}\alpha_1-\beta_1 = 0\\ \ldots\ldots\\ \alpha_n-\beta_n = 0\end{array}\right. \Rightarrow \left|\begin{array}{l}\alpha_1 = \beta_1\\ \ldots\ldots\\ \alpha_n = \beta_n\end{array}\right.$$

Estos escalares, únicos para cada vector respecto una base dada, se denominan ***componentes del vector*** respecto de la base de forma que, fijada una base de *V*, todo vector viene determinado de forma única por sus componentes respecto de ella.

Ejemplo IV.4.5

En el espacio vectorial de $\mathbf{R}^3$ sabemos que, según un ejemplo anterior, los vectores (1,0,0),(0,1,0),(0,0,1) son generadores de $\mathbf{R}^3$ y como son l.i., constituyen una base de este espacio. Las componentes del vector (4,3,2) respecto de ella son

$$(4,3,2) = \alpha_1(1,0,0)+\alpha_2(0,1,0)+\alpha_3(0,0,1) \Rightarrow \alpha_1 = 4,\ \alpha_2 = 3,\ \alpha_3 = 2$$

que coinciden con los elementos que forman la terna que es el vector; por ello, esta base se denomina ***base canónica***. Los vectores (0,0,1),(1,0,0),(0,1,0), en este orden, forman base de $\mathbf{R}^3$ y las componentes del vector (4,3,2) serán:

$$(4,3,2) = \alpha_1(0,0,1)+\alpha_2(1,0,0)+\alpha_3(0,1,0) \Rightarrow \alpha_1 = 2,\ \alpha_2 = 4,\ \alpha_3 = 3$$

distintas de las anteriores, por lo que debemos considerar como distintas ambas bases, aunque estén formadas por los mismos vectores.

Para los espacios vectoriales del tipo K^n sobre *K*, para *K* un cuerpo cualquiera, los vectores (1,0,...,0),(0,1,...,0),...,(0,0,...,1), en este orden, constituyen la ***base canónica*** de K^n, pues las componentes respecto ella de un vector $(a_1,a_2,\ldots,a_n)\in K^n$ son

$$(a_1,a_2,\ldots,a_n) = a_1(1,0,\ldots,0)+a_2(0,1,\ldots,0)+\ldots+a_n(0,0,\ldots,1)$$

que coinciden con los elementos de *K* que forman la *n*–pla que es el vector.

Si los vectores $\boldsymbol{e}_1,\ldots,\boldsymbol{e}_n$ forman una base de *V*, los vectores $\boldsymbol{e}_{i_1},\ldots,\boldsymbol{e}_{i_n}$, para $(i_1,i_2,\ldots,i_n)$ una permutación de (1,2,...,*n*), forman también base de *V*, pues siguen para generadores, por la propiedad 1) de los espacios vectoriales de dimensión finita (Tabla IV.4.1) y l.i. (se comprueba de forma inmediata), pero ambas bases son distintas por ser distintas las componentes de un vector cualquiera. Por esta razón una base de un espacio *V* es una *n*–pla ordenada de vectores generadores de *V* y linealmente independientes.

Si $(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\ldots,\boldsymbol{e}_n)$ es una base cualquiera de *V*, se cumple que

$$\begin{array}{l}\boldsymbol{e}_1 = 1\boldsymbol{e}_1+0\boldsymbol{e}_2+\ldots+0\boldsymbol{e}_n\\ \boldsymbol{e}_2 = 0\boldsymbol{e}_1+1\boldsymbol{e}_2+\ldots+0\boldsymbol{e}_n\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\\ \boldsymbol{e}_n = 0\boldsymbol{e}_1+0\boldsymbol{e}_2+\ldots+1\boldsymbol{e}_n\end{array}$$

de lo que se deduce que sus componentes, respecto de la base que ellos contituyen, son

$$\text{para } \boldsymbol{e}_1 : \ 1,0,\ldots \text{ y } 0$$
$$\text{para } \boldsymbol{e}_2 : \ 0,1,\ldots \text{ y } 0$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\text{para } \boldsymbol{e}_n : \ 0,0,\ldots \text{ y } 1$$

En un espacio de dimensión finita V conocer una base de V equivale a conocer el espacio vectorial, en el sentido de que mediante una base pueden representarse todos los vectores del espacio V, y como esta representación es única respecto a esta base, tendremos que cada vector es identificable con los elementos del cuerpo que son sus componentes.

Ejercicios

IV.20.- De los siguientes subconjuntos, decir cuales son subespacios. En caso de que lo sean, dar una base

a) $A = \{(x,x,x) \mid x \in \mathbf{R}\} \subseteq \mathbf{R}^3$

b) $B = \{(x,y,x-y) \mid x,y \in \mathbf{R}\} \subseteq \mathbf{R}^3$

c) $C = \{(x,2x-y,x-2y) \mid x,y \in \mathbf{R}\} \subseteq \mathbf{R}^3$

d) $D = \{(x,y,1) \mid x,y \in \mathbf{R}\} \subseteq \mathbf{R}^3$

e) $E = \{(x-3y,x,y,y) \mid x,y \in \mathbf{R}\} \subseteq \mathbf{R}^4$

IV.21.- a) Probar que si $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$, y $\boldsymbol{d}$ forman base de $\mathbf{R}^4$, también forman base los vectores

$$\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{a}+\boldsymbol{b},\ \boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c},\ \boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}+\boldsymbol{d}$$

b) Sea el vector de componentes $(1,0,-1,0)$ respecto de la primera base. Hallar sus componentes en la segunda base.

IV.22.- Sean los vectores de $\mathbf{R}^3$

$$\boldsymbol{a} = (2,0,1) \qquad \boldsymbol{b} = (1,-2,2) \qquad \boldsymbol{c} = (1,2,-1) \qquad \boldsymbol{d} = (1,0,1) \qquad \boldsymbol{e} = (0,1,1)$$

a) Hallar una base del subespacio $A = [\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}]$ y averiguar si $(5,4,3) \in A$. Hallar asímismo bases para los subespacios $B = [\boldsymbol{d},\boldsymbol{e}]$ y $A \cap B$.

IV.23.- Dados los vectores de $\mathbf{R}^3$, $\boldsymbol{a}_1 = (1,2,-1)$, $\boldsymbol{a}_2 = (3,-1,2)$, $\boldsymbol{b}_1 = (3,0,-1)$, $\boldsymbol{b}_2 = (2,1,1)$,

a) Averiguar si $(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2)$ y $(\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2)$ forman bases de subespacios de $\mathbf{R}^3$ y expresar el vector $(1,1,1)$, si es posible, en función de dichas bases.

b) Hallar la intersección de estos subespacios y una base de dicha intersección.

IV.24.- Hallar una base de cada uno de los siguientes subespacios:

a) $A = [(4,2,-1),(1,\alpha_1,-3)] \cap [(1,0,\alpha_2),(2,-1,\alpha_3),(4,\alpha_4,3)]$

para $\alpha_1 =$, $\alpha_2 =$, $\alpha_3 =$, $\alpha_4 =$.

b) $B = \left\{ \text{soluciones del sistema: } \begin{array}{r} \alpha_1 x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + \alpha_2 x_2 + x_3 = 0 \\ \alpha_3 x_1 - x_2 + \alpha_4 x_3 + x_4 = 0 \end{array} \right\}$

para $\alpha_1 =$, $\alpha_2 =$, $\alpha_3 =$, $\alpha_4 =$.

IV.25.- En $\mathbf{R}^3$ sean los subespacios

$$A = [(1,0,1),(2,-1,1),(4,-1,3)] \qquad B = [(1,1,1),(1,-1,0),(2,0,1)]$$

Hallar una base del subespacio $A \cap B$.

IV.26- Hallar una base del subespacio $A = [(4,-5,7),(3,-3,4),(1,1,-2),(2,-1,1)]$ y para $B = [(1,-2,3),(3,0,-1)]$. Comparar A y B.

IV.27.- En el espacio vectorial $\mathbf{R}^4$ se consideran los vectores

$$\boldsymbol{v}_1 = (-1,4,-1,2) \qquad \boldsymbol{v}_2 = (5,2,a,-2) \qquad \boldsymbol{v}_3 = (5,13,-4,2) \qquad \boldsymbol{v}_4 = (13,3,-2,b)$$

a) Determinar a y b para que formen una base de $\mathbf{R}^4$.

b) Determinar a y b para que el subespacio vectorial engendrado por los dos primeros vectores coincida con el generado por los dos últimos.

IV.28.- Sea $(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3)$ una base de un subespacio vectorial E sobre $\mathbf{R}$. Tres vectores de este espacio son

$$\boldsymbol{u}_1 = 2\boldsymbol{e}_1+5\boldsymbol{e}_2-\boldsymbol{e}_3 \qquad \boldsymbol{u}_2 = \boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{e}_2+5\boldsymbol{e}_3 \qquad \boldsymbol{u}_3 = 3\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2-\boldsymbol{e}_3$$

¿Es $(\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2,\boldsymbol{u}_3)$ otra base de E?. En caso afirmativo si $\boldsymbol{v} = 3\boldsymbol{e}_1+2\boldsymbol{e}_2-\boldsymbol{e}_3$ expresar $\boldsymbol{v}$ en la base $(\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2,\boldsymbol{u}_3)$.

IV.29.- Sea E un espacio vectorial real de dimensión 3 y $B = \{\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3\}$, $B' = \{\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2,\boldsymbol{u}_3\}$ dos bases de E tales que

$$\boldsymbol{u}_1 = 2\boldsymbol{e}_1+3\boldsymbol{e}_2-\boldsymbol{e}_3 \qquad \boldsymbol{u}_2 = \boldsymbol{e}_2-\boldsymbol{e}_3 \qquad \boldsymbol{u}_3 = 2\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2+2\boldsymbol{e}_3$$

Dado $\boldsymbol{v} = 3\boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{e}_2+4\boldsymbol{e}_3$, hallar sus componentes respecto de la base B'.

IV.30.- Encontrar una base de los siguientes subespacios:

a) $A = \{(x_1,x_2,x_3) \in \mathbf{R}^3 \mid x_1 = x_2\}$

b) $B = [\cos^2 x, \operatorname{sen}^2 x, \cos(2x)]$

c) $C = [-1+x+3x^2, -6+5x+2x^2, 8+4x+8x^2]$

d) $D = [(-1,1,0),(0,\alpha_1,2),(1,1,\alpha_2),(\alpha_3,-1,0),(\alpha_4,0,1)]$ para $\alpha_1 =$, $\alpha_2 =$, $\alpha_3 =$, $\alpha_4 =$.

e) $A \cap D$

IV.31.- Sean x_1,x_2,x_3 tres números reales distintos y los polinomios

$$P_1(x) = (x-x_2)(x-x_3)\ ,\ P_2(x) = (x-x_1)(x-x_3)\ ,\ P_3(x) = (x-x_1)(x-x_2)$$

a) Demostrar que $(P_1(x),P_2(x),P_3(x))$ es una base del espacio vectorial de los polinomios de grado igual o menor que 2.

b) Expresar en función de esta base el polinomio $P(x)$ de grado menor o igual que tres, que verifica

$$P(x_1) = a \quad P(x_2) = b \quad P(x_3) = c \quad \text{con } a,b,c \in \mathbf{R}.$$

IV.32.- En $E = \{f \mid f: \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}\}$, que es un e.v.s.$\mathbf{R}$,

a) Demostrar que $F = \{f(x) = ae^x+bx+c \mid a,b,c \in \mathbf{R}\}$ es un subespacio vectorial de E. Hallar una base de F.

b) Hallar una base de $G = \{f \in F \mid f(0) = 0\}$

IV.33.- Hallar una base del subespacio generado por las funciones de $\mathbf{R}$ en $\mathbf{R}$ $\{f_1,f_2,f_3,f_4,f_5,f_6\}$ siendo

$$f_1 : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R},\ x \longrightarrow 1 \qquad f_2 : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R},\ x \longrightarrow \text{sen}x \qquad f_3 : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R},\ x \longrightarrow \cos x$$

$$f_4 : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R},\ x \longrightarrow \text{sen}(x+1) \qquad f_5 : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R},\ x \longrightarrow \cos^2 x \qquad f_6 : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R},\ x \longrightarrow \text{sin}^2 x$$

y encontrar las componentes de f_i respecto de la base hallada.

Una base espacio vectorial de dimensión finita no es única, como hemos comentado anteriormente; además veamos como a partir de ella pueden construirse otras, según asegura el denominado ***Teorema de Steinitz*:**

" Si la n–pla $(\boldsymbol{e}_1,\ldots,\boldsymbol{e}_n)$ es una base de V y $\{\boldsymbol{b}_1,...,\boldsymbol{b}_m\}$ un conjunto l.i. de vectores de V, se verifica que $m \le n$ y que m vectores de entre los $\boldsymbol{e}_1,\ldots,\boldsymbol{e}_n$ pueden ser sustituídos por los vectores $\boldsymbol{b}_1,...,\boldsymbol{b}_m$ de manera que la n–pla resultante sigue siendo una base de V ".

En efecto, si $(\boldsymbol{e}_1,\ldots,\boldsymbol{e}_n)$ es base de V, entonces $\boldsymbol{b}_1 = \alpha_1\boldsymbol{e}_1+\ldots+\alpha_n\boldsymbol{e}_n$, con algún $\alpha_i \neq 0$ (pues si no tendríamos $\boldsymbol{b}_1 = \boldsymbol{0}$ y $\{\boldsymbol{b}_1,...,\boldsymbol{b}_m\}$ no sería l.i.). Vamos a ver que $\boldsymbol{b}_1$ puede sustituir a cualquier $\boldsymbol{e}_i$ tal que su coeficiente en la igualdad anterior sea distinto de cero, de forma que la n–pla resultante es una base de V; en efecto, supongamos, para fijar ideas, que $\alpha_1 \neq 0$ y vamos a probar que $(\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{e}_2,..,\boldsymbol{e}_n)$ es base de V

1) $\{\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{e}_2,\ldots,\boldsymbol{e}_n\}$ es l.i.pues

$$\beta_1\boldsymbol{b}_1+\beta_2\boldsymbol{e}_2+\ldots+\beta_n\boldsymbol{e}_n = \boldsymbol{0} \ \Rightarrow\ \beta_1(\alpha_1\boldsymbol{e}_1+\alpha_2\boldsymbol{e}_2+\ldots+\alpha_n\boldsymbol{e}_n)+\beta_2\boldsymbol{e}_2+\ldots+\beta_n\boldsymbol{e}_n = \boldsymbol{0} \ \Rightarrow$$
$$\Rightarrow\ \beta_1\alpha_1\boldsymbol{e}_1+(\beta_2+\beta_1\alpha_2)\boldsymbol{e}_2+\ldots+(\beta_n+\beta_1\alpha_n)\boldsymbol{e}_n = \boldsymbol{0} \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left|\begin{array}{l}\beta_1\alpha_1 = 0\\ \beta_2+\beta_1\alpha_2 = 0\\ \ldots\ldots\ldots\\ \beta_n+\beta_1\alpha_n = 0\end{array}\right. \Rightarrow \left|\begin{array}{l}\beta_1 = 0\\ \beta_2 = 0\\ \ldots\ldots\\ \beta_n = 0\end{array}\right.$$

2) $\{\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{e}_2,\ldots,\boldsymbol{e}_n\}$ genera V pues para cualquier vector $\boldsymbol{x}\in V$, como $\{\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\ldots,\boldsymbol{e}_n\}$ genera V es

$$\boldsymbol{x} = \mu_1\boldsymbol{e}_1+\mu_2\boldsymbol{e}_2+\ldots+\mu_n\boldsymbol{e}_n$$

De $\boldsymbol{b}_1 = \alpha_1\boldsymbol{e}_1+\alpha_2\boldsymbol{e}_2+\ldots+\alpha_n\boldsymbol{e}_n$,como hemos supuesto $\alpha_1 \neq 0$, podemos despejar $\boldsymbol{e}_1$ y sustituirlo en la igualdad anterior para obtener

$$\boldsymbol{x} = \mu_1\left(\frac{1}{\alpha_1}\boldsymbol{b}_1 - \frac{\alpha_2}{\alpha_1}\boldsymbol{e}_2 -\ldots- \frac{\alpha_n}{\alpha_1}\boldsymbol{e}_n\right)+\mu_2\boldsymbol{e}_2+\ldots+\mu_n\boldsymbol{e}_n$$

es decir

$$\boldsymbol{x} = \frac{\mu_1}{\alpha_1}\boldsymbol{b}_1+\left(\mu_2- \frac{\mu_1\alpha_2}{\alpha_1}\right)\boldsymbol{e}_2+\ldots+\left(\mu_n - \frac{\mu_1\alpha_n}{\alpha_1}\right)\boldsymbol{e}_n$$

que expresa a $\boldsymbol{x}$ como combinación lineal de $\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{e}_2,..,\boldsymbol{e}_n$.

Aplicamos el mismo razonamiento a la nueva base: como $(\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{e}_2,..,\boldsymbol{e}_n)$ es base de V, entonces $\boldsymbol{b}_2 = \sigma_1\boldsymbol{b}_1+\sigma_2\boldsymbol{e}_2+\sigma_3\boldsymbol{e}_3+\ldots+\sigma_n\boldsymbol{e}_n$, con algún $\sigma_i \neq 0$ para $i = 2,...,n$ (ya que en caso contrario tendríamos $\boldsymbol{b}_2 = \sigma_1\boldsymbol{b}_1$ y $\{\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,...,\boldsymbol{b}_m\}$ no sería l.i.). Entonces $\boldsymbol{b}_2$ puede sustituir a cualquier $\boldsymbol{e}_i$ tal que su coeficiente σ_i sea distinto de cero, de manera que la n–pla resultante es una base de V; en efecto, supongamos, para fijar ideas, que $\sigma_2 \neq 0$ y vamos a probar que $(\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\boldsymbol{e}_3,\ldots,\boldsymbol{e}_n)$ es base de V

1) $\{\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\boldsymbol{e}_3,\ldots,\boldsymbol{e}_n\}$ es l.i.pues

$$\beta_1\boldsymbol{b}_1+\beta_2\boldsymbol{b}_2+\beta_3\boldsymbol{e}_3+\ldots+\beta_n\boldsymbol{e}_n = \boldsymbol{0} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \beta_1\boldsymbol{b}_1+\beta_2(\sigma_1\boldsymbol{b}_1+\sigma_2\boldsymbol{e}_2+\sigma_3\boldsymbol{e}_3+\ldots+\sigma_n\boldsymbol{e}_n)+\beta_3\boldsymbol{e}_3+\ldots+\beta_n\boldsymbol{e}_n = \boldsymbol{0} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\beta_1+\beta_2\sigma_1)\boldsymbol{b}_1+\beta_2\sigma_2\boldsymbol{e}_2+(\beta_3+\beta_2\sigma_3)\boldsymbol{e}_3+\ldots+(\beta_n+\beta_2\sigma_n)\boldsymbol{e}_n = \boldsymbol{0} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left|\begin{array}{l}\beta_1+\beta_2\sigma_1 = 0\\ \beta_2\sigma_2 = 0\\ \beta_3+\beta_2\sigma_3 = 0\\ \ldots\ldots\ldots\\ \beta_n+\beta_2\sigma_n = 0\end{array}\right. \Rightarrow \left|\begin{array}{l}\beta_1 = 0\\ \beta_2 = 0\\ \beta_3 = 0\\ \ldots\ldots\\ \beta_n = 0\end{array}\right.$$

2) El conjunto $\{\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\boldsymbol{e}_3,\ldots,\boldsymbol{e}_n\}$ genera V pues para cualquier vector $\boldsymbol{x}\in V$, como $\{\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3,\ldots,\boldsymbol{e}_n\}$ genera V es

$$\boldsymbol{x} = \gamma_1\boldsymbol{b}_1+\gamma_2\boldsymbol{e}_2+\gamma_3\boldsymbol{e}_3+\ldots+\gamma_n\boldsymbol{e}_n$$

De $\boldsymbol{b}_2 = \sigma_1\boldsymbol{b}_1+\sigma_2\boldsymbol{e}_2+\sigma_3\boldsymbol{e}_3+...+\sigma_n\boldsymbol{e}_n$, al suponer $\sigma_2 \neq 0$, podemos despejar $\boldsymbol{e}_2$ y

sustituirlo en la igualdad anterior para obtener

$$\boldsymbol{x} = \gamma_1\boldsymbol{b}_1+\gamma_2\left(-\frac{\sigma_1}{\sigma_2}\boldsymbol{b}_1+\frac{1}{\sigma_2}\boldsymbol{b}_2-\frac{\sigma_3}{\sigma_2}\boldsymbol{e}_3-\ldots-\frac{\sigma_n}{\sigma_2}\boldsymbol{e}_n\right)+\gamma_3\boldsymbol{e}_3+\ldots+\gamma_n\boldsymbol{e}_n$$

es decir

$$\boldsymbol{x} = \left(\gamma_1-\frac{\gamma_2\sigma_1}{\sigma_2}\right)\boldsymbol{b}_1+\frac{\gamma_2}{\sigma_2}\boldsymbol{b}_2+\left(\gamma_3-\frac{\gamma_2\sigma_3}{\sigma_2}\right)\boldsymbol{e}_3+\ldots+\left(\gamma_n-\frac{\gamma_2\sigma_n}{\sigma_2}\right)\boldsymbol{e}_n$$

que expresa a $\boldsymbol{x}$ como combinación lineal de $\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\boldsymbol{e}_3,\ldots,\boldsymbol{e}_n$.

Reiterando el razonamiento hasta llegar al vector $\boldsymbol{b}_m$, tendremos que $m \le n$, pues si fuera al revés, $m > n$, llegaría un momento que todos los vectores $\boldsymbol{e}_1,\ldots,\boldsymbol{e}_n$ habrían sido sustituídos por n vectores de entre los $\boldsymbol{b}_1,\ldots,\boldsymbol{b}_m$ para la n–pla resultante, $(\boldsymbol{b}_1,\ldots,\boldsymbol{b}_n)$, una base de V por lo que $\boldsymbol{b}_{n+1}$ sería combinación lineal de ellos y $\{\boldsymbol{b}_1,\ldots,\boldsymbol{b}_m\}$ no sería l.i.. Así, al final de este proceso de sustituciones sucesivas, llegamos a una base de V en la cual m de los n vectores $\boldsymbol{e}_1,\ldots,\boldsymbol{e}_n$ han sido sustituídos por $\boldsymbol{b}_1,\ldots,\boldsymbol{b}_m$. La n–pla resultante es una base de V, como queríamos demostrar.

Ejercicios

IV.34.- Averiguar si existe en el espacio $\mathbf{R}^4$ una base que contenga a los vectores $(\alpha_1,3,-1,\alpha_2),(1,0,\alpha_3,2)$ y $(0,1,0,\alpha_4)$, para $\alpha_1 =$, $\alpha_2 =$, $\alpha_3 =$, $\alpha_4 =$.

IV.35.- Comprobar que el conjunto de vectores $A = \{(x,y,z,t)\in \mathbf{R}^4 \mid x = y-3z \ \wedge \ z = 2t \}$ es un subespacio de $\mathbf{R}^4$. Hallar una base y completarla a una base de $\mathbf{R}^4$.

IV.36.- En el espacio vectorial $\mathbf{R}^3$ sobre $\mathbf{R}$ sea el conjunto

$$U = \{(x,y,z)\in \mathbf{R}^3 \mid x+y+z = 0 \}$$

a) Demostrar que U es subespacio de $\mathbf{R}^3$.

b) Demostrar que $((1,0,-1),(0,-1,1))$ es una base de U.

c) Completar esta base para obtener una base de $\mathbf{R}^3$.

Consecuencias del importante teorema de Steinitz son los resultados que vemos a continuación.

Corolario 1

"Todas las bases de un mismo espacio, tienen el mismo número de vectores".

Demostración:

Si $(\boldsymbol{e}_1,\ldots,\boldsymbol{e}_n)$ y $(\boldsymbol{u}_1,\ldots,\boldsymbol{u}_m)$ son bases del espacio vectorial V, entonces

$$\left.\begin{array}{l} (\boldsymbol{e}_1,\ldots,\boldsymbol{e}_n) \text{ base de } V \Rightarrow \{\boldsymbol{e}_1,\ldots,\boldsymbol{e}_n\} \text{ l.i.} \\ \qquad\qquad (\boldsymbol{u}_1,\ldots,\boldsymbol{u}_m) \text{ base de } V \end{array}\right| \Rightarrow n \le m \left.\begin{array}{l} \\ \\ \Rightarrow m = n \end{array}\right|$$

$$\left.\begin{array}{l} (\boldsymbol{u}_1,\ldots,\boldsymbol{u}_m) \text{ base de } V \Rightarrow \{\boldsymbol{u}_1,\ldots,\boldsymbol{u}_m\} \text{ l.i.} \\ \qquad\qquad (\boldsymbol{e}_1,\ldots,\boldsymbol{e}_n) \text{ base de } V \end{array}\right| \Rightarrow m \le n$$

Este número común de vectores que tienen todas las bases de un espacio vectorial V de dimensión finita, se denomina ***dimensión*** de V. El subespacio $\{\boldsymbol{0}\}$ no tiene dimensión, en sentido estricto, pues carece de base, ya que $\{\boldsymbol{0}\}$ es l.d.; sin embargo, definimos que

$$\dim(\{\boldsymbol{0}\}) = 0$$

Corolario 2

" Si $\dim(V) = n$ y $m > n$, entonces cualesquiera que sean los vectores $\boldsymbol{v}_1,\ldots,\boldsymbol{v}_m \in V$ el conjunto $\{\boldsymbol{v}_1,\ldots,\boldsymbol{v}_m\}$ es l.d."

Demostración:

Como $\dim(V) = n$, existe una base de V formada por n vectores; según el Teorema de Steinitz, si $\{\boldsymbol{v}_1,\ldots,\boldsymbol{v}_m\}$ fuera un conjunto l.i., entonces $m \le n$, lo que está contra la hipótesis.

Corolario 3

" Si $\dim(V) = n$ y $\{\boldsymbol{v}_1,\ldots,\boldsymbol{v}_n\}$ es l.i., entonces $(\boldsymbol{v}_1,\ldots,\boldsymbol{v}_n)$ es una base de V ".

Demostración:

Como $\dim(V) = n$, existe una base de V, $(\boldsymbol{e}_1,\ldots,\boldsymbol{e}_n)$, formada por n vectores. Como $\{\boldsymbol{v}_1,\ldots,\boldsymbol{v}_n\}$ es l.i., según el Teorema de Steinitz, los n vectores de la base pueden ser sustituídos por los n vectores l.i. y el resultado sigue para una base.

Corolario 4

"Si $\dim(V) = n$ y $\{\boldsymbol{v}_1,\ldots,\boldsymbol{v}_n\}$ es un conjunto generador de V, entonces $(\boldsymbol{v}_1,\ldots,\boldsymbol{v}_n)$ es una base de V ".

Demostración:

$\{\boldsymbol{v}_1,\ldots,\boldsymbol{v}_n\}$ es también l.i., ya que si no lo fuera existiría un vector $\boldsymbol{v}_i$ combinación lineal de los demás y, según las propiedades de los subespacios generados por un conjunto finito de vectores (Tabla IV.2.1), tendríamos

$$V = [\boldsymbol{v}_1,\ldots,\boldsymbol{v}_{i-1},\boldsymbol{v}_i,\boldsymbol{v}_{i+1},\ldots,\boldsymbol{v}_n] = [\boldsymbol{v}_1,\ldots,\boldsymbol{v}_{i-1},\boldsymbol{v}_{i+1},..,\boldsymbol{v}_n]$$

con lo que sería $\dim(V) < n$, contra lo supuesto.

Corolario 5

" Si $(\boldsymbol{e}_1,\ldots,\boldsymbol{e}_n)$ es una base de V y $\boldsymbol{w}_1,\ldots,\boldsymbol{w}_n$ son vectores de V obtenidos sucesivamente a partir de los $\boldsymbol{e}_1,\ldots,\boldsymbol{e}_n$, permutándolos, multiplicándolos por escalares no nulos o sumando a un vector un múltiplo de otro, entonces $(\boldsymbol{w}_1,\ldots,\boldsymbol{w}_n)$ es una base de V ".

Demostración:

Basta tener en cuenta que, según las propiedades vistas de los espacios generados por un conjunto finito de vectores, estas transformaciones no varían el subespacio generado, luego

$$V = [\boldsymbol{w}_1,\ldots,\boldsymbol{w}_n]$$

y aplicando el corolario anterior, al ser $\dim(E) = n$, es $(\boldsymbol{w}_1,\ldots,\boldsymbol{w}_n)$ una base de V.

Corolario 6

" Si V es un espacio de dimensión finita, y W es subespacio de V, entonces W es también de dimensión finita y

$$\dim(W) \leq \dim(V)$$

y si $\dim(W) = \dim(V)$, entonces $W = V$ "

Demostración:

Como $\dim(V) = n$, existe una base de V, $(\boldsymbol{e}_1,\ldots,\boldsymbol{e}_n)$, formada por n vectores. Si W no fuera de dimensión finita, entonces habría vectores de W, que también lo serían de V, que no serían combinación lineal de ningún conjunto finito de vectores, con lo que V tampoco sería de dimensión finita. Si $(\boldsymbol{u}_1,\ldots,\boldsymbol{u}_m)$ es una base de W, entonces $\{\boldsymbol{u}_1,\ldots,\boldsymbol{u}_m\}$ es l.i.; en consecuencia $m \leq n$, es decir, $\dim(W) \leq \dim(V)$. Si $\dim(W) = \dim(V)$, entonces una base cualquiera de W, al estar formada por n vectores l.i., sería también base para V, por lo que todo vector de V sería también un vector de W, es decir, ambos espacios serían iguales.

Corolario 7

" Si V es un espacio vectorial de dimensión finita y W_1 y W_2 son subespacios de V,

$$\dim(W_1 \cap W_2) \leq \min(\dim(W_1),\dim(W_2))$$

Demostración:

Basta aplicar el corolario 6, teniendo en cuenta que $W_1 \cap W_2$ es subespacio de W_1 y W_2.

Corolario 8

" Si V es un espacio vectorial de dimensión finita y W_1 y W_2 son subespacios de V,

$$\dim(W_1+W_2) = \dim(W_1)+\dim(W_2)-\dim(W_1 \cap W_2))$$

Demostración:

Sean

$(\boldsymbol{u}_1,...,\boldsymbol{u}_r)$ una base de W_1

$(\boldsymbol{v}_1,\ldots,\boldsymbol{v}_s)$ una base de W_2

$(\boldsymbol{e}_1,\ldots,\boldsymbol{e}_m)$ una base de $W_1 \cap W_2$

Como $W_1 \cap W_2$ está contenido en W_1 y W_2 y $\{\boldsymbol{e}_1,\ldots,\boldsymbol{e}_m\}$ es l.i., podemos sustituir estos vectores en las bases de W_1 y W_2 de forma que la r–pla y s–pla resultantes son bases

$(\boldsymbol{e}_1,\ldots,\boldsymbol{e}_m,\boldsymbol{u}_{i(m+1)},...,\boldsymbol{u}_{i(r)})$ es base de W_1 $\qquad$ $(\boldsymbol{e}_1,\ldots,\boldsymbol{e}_m,\boldsymbol{v}_{i(m+1)},\ldots,\boldsymbol{v}_{i(s)})$ es base de W_2

En esta situación, vamos a demostrar que

$$(\boldsymbol{e}_1,\ldots,\boldsymbol{e}_m,\boldsymbol{u}_{i(m+1)},...,\boldsymbol{u}_{i(r)},\boldsymbol{v}_{i(m+1)},\ldots,\boldsymbol{v}_{i(s)}) \text{ es base de } W_1+W_2$$

de donde se deduce inmediatamente

$$\dim(W_1+W_2) = m+(r-m)+(s-m) = r+s-m = \dim(W_1)+\dim(W_2)-\dim(W_1 \cap W_2)$$

En efecto, se verifica

a) El conjunto $\{\boldsymbol{e}_1,\ldots,\boldsymbol{e}_m,\boldsymbol{u}_{i(m+1)},...,\boldsymbol{u}_{i(r)},\boldsymbol{v}_{i(m+1)},\ldots,\boldsymbol{v}_{i(s)}\}$ genera W_1+W_2 ya que para cualquier vector $\boldsymbol{x}$ de W_1+W_2 será

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_1+\boldsymbol{x}_2 \text{ con } \begin{cases} \boldsymbol{x}_1 \in W_1 \Rightarrow \boldsymbol{x}_1 \text{ combinación lineal de la base de } W_1 \\ \boldsymbol{x}_2 \in W_2 \Rightarrow \boldsymbol{x}_2 \text{ combinación lineal de la base de } W_2 \end{cases}$$

por lo que $\boldsymbol{x}$ es combinación lineal de

$$\boldsymbol{e}_1,\ldots,\boldsymbol{e}_m,\boldsymbol{u}_{i(m+1)},...,\boldsymbol{u}_{i(r)},\boldsymbol{v}_{i(m+1)},\ldots,\boldsymbol{v}_{i(s)}$$

b) $\{\boldsymbol{e}_1,\ldots,\boldsymbol{e}_m,\boldsymbol{u}_{i(m+1)},...,\boldsymbol{u}_{i(r)},\boldsymbol{v}_{i(m+1)},\ldots,\boldsymbol{v}_{i(s)}\}$ es l.i. pues partiendo de la ecuación de la independencia lineal

$$(\alpha_1\boldsymbol{e}_1+\ldots+\alpha_m\boldsymbol{e}_m)+(\beta_{m+1}\boldsymbol{u}_{i(m+1)}+\ldots+\beta_r\,\boldsymbol{u}_{i(r)})+(\delta_{m+1}\boldsymbol{v}_{i(m+1)}+\ldots+\delta_s\boldsymbol{v}_{i(s)}) = \boldsymbol{0}$$

se obtiene

$$\delta_{m+1}\boldsymbol{v}_{i(m+1)}+\ldots+\delta_s\boldsymbol{v}_{i(s)} = -\alpha_1\boldsymbol{e}_1-\ldots-\alpha_m\boldsymbol{e}_m-\beta_{m+1}\boldsymbol{u}_{i(m+1)}-\ldots-\beta_r\,\boldsymbol{u}_{i(r)} \in W_1$$

por lo que $\delta_{m+1}\boldsymbol{v}_{i(m+1)}+\ldots+\delta_s\boldsymbol{v}_{i(s)} \in W_1 \cap W_2$, es decir

$$\delta_{m+1}\boldsymbol{v}_{i(m+1)}+\ldots+\delta_s\boldsymbol{v}_{i(s)} = \gamma_1\boldsymbol{e}_1+\ldots+\gamma_m\boldsymbol{e}_m \Rightarrow \delta_{m+1}\boldsymbol{v}_{i(m+1)}+\ldots+\delta_s\boldsymbol{v}_{i(s)}-\gamma_1\boldsymbol{e}_1-\ldots-\gamma_m\boldsymbol{e}_m = \boldsymbol{0}$$

Como $\{\boldsymbol{e}_1,\ldots,\boldsymbol{e}_m,\boldsymbol{v}_{i(m+1)},\ldots,\boldsymbol{v}_{i(s)}\}$ es l.i. serán $\delta_{m+1} =...= \delta_s = 0$, que sustituidos en la ecuación de la independencia lineal hacen que

$$\alpha_1 \boldsymbol{e}_1 + \ldots + \alpha_m \boldsymbol{e}_m + \beta_{m+1} \boldsymbol{u}_{i(m+1)} + \ldots + \beta_r \boldsymbol{u}_{i(r)} = \boldsymbol{0}$$

Como $\{\boldsymbol{e}_1,\ldots,\boldsymbol{e}_m,\boldsymbol{u}_{i(m+1)},\ldots,\boldsymbol{u}_{i(r)}\}$ es l.i., son $\alpha_1 = \ldots = \alpha_m = \beta_{m+1} = \ldots = \beta_r = 0$.

Corolario 9

" Si la suma es directa, entonces $\dim(W_1 \oplus W_2) = \dim(W_1) + \dim(W_2)$".

Demostración:

Basta aplicar el teorema anterior teniendo en cuenta que si la suma es directa, entonces

$$\dim(W_1 \cap W_2) = \dim(\{\boldsymbol{0}\}) = 0$$

Este resultado se generaliza por inducción para la suma directa de más de dos subespacios, de modo que $\dim(W_1 \oplus \ldots \oplus W_n) = \dim(W_1) + \ldots + \dim(W_n)$.

Corolario 10

" Si $(\boldsymbol{e}_{11},\ldots,\boldsymbol{e}_{1n_1})$ es base del subespacio W_1,…,$(\boldsymbol{e}_{m1},\ldots,\boldsymbol{e}_{mn_m})$ es base del subespacio W_m, entonces $(\boldsymbol{e}_{11},\ldots,\boldsymbol{e}_{1n_1},\ldots,\boldsymbol{e}_{m1},\ldots,\boldsymbol{e}_{mn_m})$ es base de $W_1 \oplus \ldots \oplus W_m$".

Demostración:

En efecto, los vectores forman un conjunto l.i. ya que si

$$\alpha_{11}\boldsymbol{e}_{11} + \ldots + \alpha_{1n_1}\boldsymbol{e}_{1n_1} + \ldots + \alpha_{m1}\boldsymbol{e}_{m1} + \ldots + \alpha_{mn_m}\boldsymbol{e}_{mn_m} = \boldsymbol{0}$$

haciendo

$$\alpha_{11}\boldsymbol{e}_{11} + \ldots + \alpha_{1n_1}\boldsymbol{e}_{1n_1} = \boldsymbol{e}_1 \in W_1$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\alpha_{m1}\boldsymbol{e}_{m1} + \ldots + \alpha_{mn_m}\boldsymbol{e}_{mn_m} = \boldsymbol{e}_m \in W_m$$

es $\boldsymbol{e}_1 + \ldots + \boldsymbol{e}_m = \boldsymbol{0}$; como la suma es directa, $\boldsymbol{e}_1 = \boldsymbol{0},\ldots, \boldsymbol{e}_m = \boldsymbol{0}$, por la independencia lineal de los vectores de las bases de cada W_i

$$\alpha_{11} = \ldots = \alpha_{1n_1} = \ldots = \alpha_{m1} = \ldots = \alpha_{mn_m} = 0$$

Además $\{\boldsymbol{e}_{11},\ldots,\boldsymbol{e}_{1n_1},\ldots,\boldsymbol{e}_{m1},\ldots,\boldsymbol{e}_{mn_m}\}$ es un conjunto generador de $W_1 \oplus \ldots \oplus W_m$ pues para cualquier $\boldsymbol{x} \in W_1 \oplus \ldots \oplus W_m$ existen $\boldsymbol{x}_1 \in W_1,\ldots, \boldsymbol{x}_m \in W_m$ tales que $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_1 + \ldots + \boldsymbol{x}_m$ y

$$\boldsymbol{x}_1 = x_{11}\boldsymbol{e}_{11} + \ldots + x_{1n_1}\boldsymbol{e}_{1n_1}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\boldsymbol{x}_m = x_{m1}\boldsymbol{e}_{m1} + \ldots + x_{mn_m}\boldsymbol{e}_{mn_m}$$

luego $\boldsymbol{x} = x_{11}\boldsymbol{e}_{11}+\ldots+x_{1n_1}\boldsymbol{e}_{1n_1}+\ldots+x_{m1}\boldsymbol{e}_{m1}+\ldots+x_{mn_m}\boldsymbol{e}_{mn_m}$.

Ejercicios

IV.37.- Hallar la dimensión de los espacios vectoriales **C** sobre **R** y **C** sobre **C**.

IV.38.- Sean los vectores $\boldsymbol{a} = (\alpha_1,0,\alpha_2)$ $\boldsymbol{b} = (1,-1,\alpha_3)$ y $\boldsymbol{c} = (\alpha_4,1,-1)$ y sea E el espacio vectorial engendrado por estos tres vectores para $\alpha_1 =$, $\alpha_2 =$, $\alpha_3 =$, $\alpha_4 =$

a) Hallar dimensión y una base de E y las componentes de $(5,3,-2)$ respecto de esta base.

b) Hallar la dimensión y una base del subespacio $E \cap [(1,0,1),(0,1,1)]$.

IV.39.- Hallar m y n para que los vectores $(1,1,0,m),(3,-1,n,-1)$ y $(-3,5,n,-4)$ generen un subespacio de $\mathbf{R}^4$ de dimensión menor que tres.

IV.40.- Determinar, según los valores de los parámetros, dimensión y base de los subespacios generados por los siguientes conjuntos de vectores:

a) $A = \{(r,1,1),(1,r,1),(1,1,r)\}$

b) $B = \{(0,r,-s),(-r,0,t),(s,-t,0)\}$

c) $C = \{(a,a,a,a),(a,b,b,b),(a,b,c,c),(a,b,c,d)\}$

con $r,s,a,b,c,d \in \mathbf{R}$.

IV.41.- Sean los subespacios de $\mathbf{R}^5$

$$U = [(1,3,-2,2,3),(1,4,-3,4,2),(2,3,-1,2,9)]$$
$$W = [(1,3,0,2,1),(1,5,-6,6,3),(2,5,3,2,1)]$$

Hallar base y dimensión de los subespacios U, W, $U \cap W$ y $U+W$.

IV.42.- Sea el espacio vectorial V sobre **R** con una base $B = (\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2,\boldsymbol{u}_3)$ y los subespacios

$$E = [\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}] \qquad \text{y} \qquad F = [\boldsymbol{d},\boldsymbol{e},\boldsymbol{f}]$$

con

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{u}_1+3\boldsymbol{u}_3 \qquad \boldsymbol{b} = 2\boldsymbol{u}_1-3\boldsymbol{u}_2+\boldsymbol{u}_3 \qquad \boldsymbol{c} = 4\boldsymbol{u}_1-3\boldsymbol{u}_2+7\boldsymbol{u}_3$$
$$\boldsymbol{d} = \boldsymbol{u}_1+\boldsymbol{u}_2+\boldsymbol{u}_3 \quad \boldsymbol{e} = 2\boldsymbol{u}_1+3\boldsymbol{u}_2+4\boldsymbol{u}_3 \quad \boldsymbol{f} = 3\boldsymbol{u}_1+4\boldsymbol{u}_2+5\boldsymbol{u}_3$$

Hallar bases y dimensión de E, F, $E \cap F$ y $E+F$.

IV.43.- En el espacio vectorial $\mathbf{R}^{2n}$ se consideran los subespacios vectoriales

$$V = \{(x_1,x_2,\ldots,x_{2n}) \in \mathbf{R}^{2n} \mid x_{n+i} = x_i \quad (i = 1,2,\ldots,n)\}$$
$$U = \{(y_1,y_2,\ldots,y_{2n}) \in \mathbf{R}^{2n} \mid y_{2n+1-i} = y_i \quad (i = 1,2,\ldots,n)\}$$

En el caso $n = 2$, se pide hallar la dimensión y una base de V, U, $V \cap U$ y $V+U$.

IV.44.- Sea $(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\boldsymbol{x}_3)$ una base de E *e.v.s* K y los subespacios $E_1 = [\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2+\boldsymbol{x}_3]$, $E_2 = [\boldsymbol{x}_2,\boldsymbol{x}_1+\boldsymbol{x}_3]$ y $E_3 = [\boldsymbol{x}_3,\boldsymbol{x}_1+\boldsymbol{x}_2]$. Hallar una base de $E_1 \cap E_2 \cap E_3$ y su dimensión.

IV.5.- APLICACIONES LINEALES.

Sean U y V dos espacios vectoriales sobre un mismo cuerpo K y f una aplicación

$$\begin{array}{rccc} f: & U & \longrightarrow & V \\ & \boldsymbol{x} & \longrightarrow & f(\boldsymbol{x}) \end{array}$$

Diremos que f es una ***aplicación lineal*** entre U y V, si conserva las operaciones interna y externa, de ambos espacios, es decir

$$1)\ (\forall \boldsymbol{x},\boldsymbol{y} \in U)\ (f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) = f(\boldsymbol{x})+f(\boldsymbol{y}))$$
$$2)\ (\forall \boldsymbol{x} \in U)\ (\forall \lambda \in K)\ (f(\lambda \boldsymbol{x}) = \lambda f(\boldsymbol{x}))$$

Ambas condiciones claramente equivalen a la siguiente:

$$(\forall \boldsymbol{x},\boldsymbol{y} \in U)\ (\forall \lambda,\mu \in K)\ (f(\lambda \boldsymbol{x}+\mu \boldsymbol{y}) = \lambda f(\boldsymbol{x})+\mu f(\boldsymbol{y}))$$

ya que

$$f(\lambda \boldsymbol{x}+\mu \boldsymbol{y}) \overset{1)}{=} f(\lambda \boldsymbol{x})+f(\mu \boldsymbol{y}) \overset{2)}{=} \lambda f(\boldsymbol{x})+\mu f(\boldsymbol{y})$$

y recíprocamente, si en esta segunda condición hacemos

$$\lambda = \mu = 1 \quad \text{se verifica} \quad f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) = f(\boldsymbol{x})+f(\boldsymbol{y})$$

$$\mu = 0 \quad \text{se verifica} \quad f(\lambda \boldsymbol{x}) = \lambda f(\boldsymbol{x})$$

Cuando $V = U$ la aplicación lineal recibe el nombre de ***endomorfismo***. Un subespacio A de U es un ***subespacio invariante*** por un endomorfismo f de U si A es estable por f, es decir si para cualquier vector $\boldsymbol{x} \in A$ es $f(\boldsymbol{x}) \in A$. Por ejemplo U es obviamente invariante por cualquier endomorfismo definido sobre él.

Ejemplo IV.5.1.

La aplicación f de $\mathbf{R}^3$ en $\mathbf{R}^2$ definida por $f(x,y,z) = (x-y, 2z-3y)$ es lineal pues

$$f(\lambda(x_1,x_2,x_3)+\mu(y_1,y_2,y_3)) = f(\lambda x_1+\mu y_1, \lambda x_2+\mu y_2, \lambda x_3+\mu y_3) =$$
$$= ((\lambda x_1+\mu y_1)-(\lambda x_2+\mu y_2), 2(\lambda x_3+\mu y_3)-3(\lambda x_2+\mu y_2))$$

que coincide con

$$\lambda f(x_1,x_2,x_3)+\mu f(y_1,y_2,y_3) = \lambda(x_1-x_2,2x_3-3x_2)+\mu(y_1-y_2,2y_3-3y_2) =$$
$$= (\lambda(x_1-x_2)+\mu\,(y_1-y_2),\lambda(2x_3-3x_2)+\mu(2y_3-3y_2))$$

La aplicación

$$f:\ \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}^3$$
$$(x,y) \longrightarrow (x-y,3x-y,y+2)$$

no es lineal pues son distintos

$$f(\lambda(x_1,x_2)+\mu(y_1,y_2)) = f(\lambda x_1+\mu y_1,\lambda x_2+\mu y_2) =$$
$$= ((\lambda x_1+\mu y_1)-(\lambda x_2+\mu y_2),3(\lambda x_1+\mu y_1)-(\lambda x_2+\mu y_2),(\lambda x_2+\mu y_2)+2)$$
$$\lambda f(x_1,x_2)+\mu f(y_1,y_2) = \lambda(x_1-x_2,3x_1-x_2,x_2+2)+\mu(y_1-y_2,3y_1-y_2,y_2+2) =$$
$$= (\lambda(x_1-x_2)+\mu(y_1-y_2),\lambda(3x_1-x_2)+\mu(3y_1-y_2),\lambda(x_2+2)+\mu(y_2+2))$$

Las propiedades más principales de las aplicaciones lineales están en la siguiente Tabla IV.5.1.

TABLA IV.5.1.

Propiedades de las aplicaciones lineales

1) $f(\boldsymbol{0}_U) = \boldsymbol{0}_V$

2) $f(-\boldsymbol{x}) = -f(\boldsymbol{x})$

3) S subespacio de U implica $f(S)$ subespacio de V

4) W subespacio de V implica $f^{-1}(W)$ subespacio de U, si no es vacío

5) $f(\lambda_1\boldsymbol{u}_1+\ldots+\lambda_n\boldsymbol{u}_n) = \lambda_1 f(\boldsymbol{u}_1)+\ldots+\lambda_n f(\boldsymbol{u}_n)$

6) $f([\boldsymbol{u}_1,\ldots,\boldsymbol{u}_n]) = [f(\boldsymbol{u}_1),\ldots,f(\boldsymbol{u}_n)]$

7) $\{\boldsymbol{u}_1,\ldots,\boldsymbol{u}_n\}$ l.d. implica $\{f(\boldsymbol{u}_1),\ldots,f(\boldsymbol{u}_n)\}$ l.d.

8) f biyectiva y $\{\boldsymbol{z}_1,\ldots,\boldsymbol{z}_m\}$ l.i. implican $\{f^{-1}(\boldsymbol{z}_1),\ldots,f^{-1}(\boldsymbol{z}_m)\}$ l.i.

9) Si f y g son aplicaciones lineales, entonces $f\pm g$, λf y $f\circ g$ son lineales, cuando puedan definirse

---

Demostraciones:

1) Ya que para cualquier vector $\boldsymbol{x}\in U$ es

$$f(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{0}_U) = f(\boldsymbol{x})+f(\boldsymbol{0}_U) \ \Rightarrow\ f(\boldsymbol{0}_U) = \boldsymbol{0}_V$$

De esta propiedad se obtiene que el subespacio $\{\boldsymbol{0}_U\}$ es invariante por cualquier endomorfismo sobre U.

2) Ya que para cualquier vector $\boldsymbol{x}\in U$ es

$$\boldsymbol{0}_V = f(\boldsymbol{0}_U) = f(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x}+(-\boldsymbol{x})) = f(\boldsymbol{x})+f(-\boldsymbol{x}) \quad \Rightarrow \quad f(-\boldsymbol{x}) = -f(\boldsymbol{x})$$

3) Como

$$(\forall \boldsymbol{z}\in f(S))\ (\exists \boldsymbol{x}\in S)\ (f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{z}) \qquad (\forall \boldsymbol{t}\in f(S))\ (\exists \boldsymbol{y}\in S)\ (f(\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{t})$$

para cualesquiera $\lambda,\mu\in K$, por ser S subespacio de U, será

$$\lambda\boldsymbol{z}+\mu\boldsymbol{t} = \lambda f(\boldsymbol{x})+\mu f(\boldsymbol{y}) = f(\lambda\boldsymbol{x}+\mu\boldsymbol{y})\in f(S)$$

4) Como

$$(\forall \boldsymbol{x}\in f^{-1}(W))\ (\exists \boldsymbol{z}\in W)\ (\boldsymbol{z} = f(\boldsymbol{x})) \qquad (\forall \boldsymbol{y}\in f^{-1}(W))\ (\exists \boldsymbol{t}\in W)\ (\boldsymbol{t} = f(\boldsymbol{y}))$$

para cualesquiera $\lambda,\mu\in K$ será

$$f(\lambda\boldsymbol{x}+\mu\boldsymbol{y}) = \lambda f(\boldsymbol{x})+\mu\ f(\boldsymbol{y}) = \lambda\boldsymbol{z}+\mu\ \boldsymbol{t}\in W \quad \Rightarrow \quad \lambda\boldsymbol{x}+\mu\boldsymbol{y}\in f^{-1}(W)$$

por ser W subespacio de V.

5) La definición de aplicación lineal expresa que la imagen de una combinación lineal de dos vectores es combinación lineal de las imágenes con los mismos coeficientes; en este sentido esta propiedad viene a generalizar la definición de aplicación lineal en el sentido de que una aplicación lineal va a conservar las combinaciones lineales. Por inducción sobre el conjunto

$$S = \{z\in \mathbf{N} \mid f(\lambda_1\boldsymbol{u}_1+\ldots+\lambda_z\boldsymbol{u}_z) = \lambda_1 f(\boldsymbol{u}_1)+\ldots+\lambda_z f(\boldsymbol{u}_z)\}$$

que verifica

$1\in S$ pues $f(\lambda_1\boldsymbol{u}_1) = \lambda_1 f(\boldsymbol{u}_1)$

$z\in S \quad \Rightarrow \quad f(\lambda_1\boldsymbol{u}_1+\ldots+\lambda_z\boldsymbol{u}_z) = \lambda_1 f(\boldsymbol{u}_1)+\ldots+\lambda_z f(\boldsymbol{u}_z) \quad \Rightarrow$

$\Rightarrow \quad f(\lambda_1\boldsymbol{u}_1+\ldots+\lambda_z\boldsymbol{u}_z)+\lambda_{z+1} f(\boldsymbol{u}_{z+1}) = (\lambda_1 f(\boldsymbol{u}_1)+\ldots\lambda_z f(\boldsymbol{u}_z))+\lambda_{z+1} f(\boldsymbol{u}_{z+1}) \quad \Rightarrow$

$\Rightarrow \quad f(\lambda_1\boldsymbol{u}_1+\ldots+\lambda_z\boldsymbol{u}_z+\lambda_{z+1}\boldsymbol{u}_{z+1}) = \lambda_1 f(\boldsymbol{u}_1)+\ldots+\lambda_z f(\boldsymbol{u}_z)+\lambda_{z+1} f(\boldsymbol{u}_{z+1}) \quad \Rightarrow \quad z+1\in S$

luego $S = \mathbf{N}$.

6) La propiedad 3) expresa que la imagen de un subespacio es otro subespacio y la 6) precisa esta idea: la imagen de un subespacio de dimensión finita engendrado por unos vectores, es el subespacio de dimensión finita engendrado por los vectores imagen. En efecto,

$$\boldsymbol{z}\in f([\boldsymbol{u}_1,\ldots,\boldsymbol{u}_n]) \quad \Rightarrow \quad (\exists \boldsymbol{x}\in [\boldsymbol{u}_1,\ldots,\boldsymbol{u}_n])\ (\boldsymbol{z} = f(\boldsymbol{x}))$$

y al ser $\boldsymbol{x} = \lambda_1\boldsymbol{u}_1+\ldots+\lambda_n\boldsymbol{u}_n$ tendremos

$$\boldsymbol{z} = f(\lambda_1\boldsymbol{u}_1+\ldots+\lambda_n\boldsymbol{u}_n) = \lambda_1 f(\boldsymbol{u}_1)+\ldots+\lambda_n f(\boldsymbol{u}_n) \;\Rightarrow\; \boldsymbol{z}\in[f(\boldsymbol{u}_1),\ldots,f(\boldsymbol{u}_n)]$$

Recíprocamente

$$\boldsymbol{z}\in[f(\boldsymbol{u}_1),\ldots,f(\boldsymbol{u}_n)] \;\Rightarrow\; \boldsymbol{z} = \lambda_1 f(\boldsymbol{u}_1)+\ldots+\lambda_n f(\boldsymbol{u}_n) = f(\lambda_1\boldsymbol{u}_1+\ldots+\lambda_n\boldsymbol{u}_n) \;\Rightarrow\; \boldsymbol{z}\in f([\boldsymbol{u}_1\ldots\boldsymbol{u}_n])$$

7) $\{\boldsymbol{u}_1,\ldots,\boldsymbol{u}_n\}$ l.d. $\Rightarrow$ existe un $\boldsymbol{u}_i = \alpha_1\boldsymbol{u}_1+\ldots+\alpha_{i-1}\boldsymbol{u}_{i-1}+\alpha_{i+1}\boldsymbol{u}_{i+1}+\ldots+\alpha_n\boldsymbol{u}_n \;\Rightarrow$

$\Rightarrow\; f(\boldsymbol{u}_i) = \alpha_1 f(\boldsymbol{u}_1)+\ldots+\alpha_{i-1} f(\boldsymbol{u}_{i-1})+\alpha_{i+1} f(\boldsymbol{u}_{i+1})+\ldots+\alpha_n f(\boldsymbol{u}_n) \;\Rightarrow$

$\Rightarrow\; \{f(\boldsymbol{u}_1),..,\, f(\boldsymbol{u}_i),..,\, f(\boldsymbol{u}_n)\}$ l.d.

8) Por reducción al absurdo, y según la propiedad anterior

$$\{f^{-1}(\boldsymbol{z}_1),\ldots,\, f^{-1}(\boldsymbol{z}_m)\} \text{ l.d.} \;\Rightarrow\; \{f(f^{-1}(\boldsymbol{z}_1)),\ldots,\, f(f^{-1}(\boldsymbol{z}_m))\} \text{ l.d.} \;\Rightarrow\; \{\boldsymbol{z}_1,\ldots,\boldsymbol{z}_m\} \text{ l.d.}$$

lo que va contra la hipótesis.

9) Si $f: U \longrightarrow V$, $\boldsymbol{x} \longrightarrow f(\boldsymbol{x})$ es lineal, entonces $\lambda f: U \longrightarrow V$, $\boldsymbol{x} \longrightarrow (\lambda f)(\boldsymbol{x}) = \lambda f(\boldsymbol{x})$ es lineal, pues

$$(\lambda f)(\alpha\boldsymbol{x}+\beta\boldsymbol{y}) = \lambda f(\alpha\boldsymbol{x}+\beta\boldsymbol{y}) = \lambda(\alpha f(\boldsymbol{x})+\beta f(\boldsymbol{y})) = \lambda\alpha f(\boldsymbol{x})+\lambda\beta f(\boldsymbol{y})$$

$$\alpha(\lambda f)(\boldsymbol{x})+\beta(\lambda f)(\boldsymbol{y}) = \alpha(\lambda f(\boldsymbol{x}))+\beta(\lambda f(\boldsymbol{y})) = \alpha\lambda f(\boldsymbol{x})+\beta\lambda f(\boldsymbol{y})$$

que son iguales, por conmutatividad de K.

Si $f: U \longrightarrow V$, $\boldsymbol{x} \longrightarrow f(\boldsymbol{x})$ y $g: U \longrightarrow V$, $\boldsymbol{x} \longrightarrow g(\boldsymbol{x})$ son lineales, entonces

$f+g: U \longrightarrow V$, $\boldsymbol{x} \longrightarrow (f+g)(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x})+g(\boldsymbol{x})$ es también una aplicación lineal, ya que

$$(f+g)(\alpha\boldsymbol{x}+\beta\boldsymbol{y}) = f(\alpha\boldsymbol{x}+\beta\boldsymbol{y})+g(\alpha\boldsymbol{x}+\beta\boldsymbol{y}) = \alpha f(\boldsymbol{x})+\beta f(\boldsymbol{y})+\alpha g(\boldsymbol{x})+\beta g(\boldsymbol{y}) =$$
$$= \alpha(f(\boldsymbol{x})+g(\boldsymbol{x}))+\beta(f(\boldsymbol{x})+g(\boldsymbol{y})) = \alpha(f+g)(\boldsymbol{x})+\beta(f+g)(\boldsymbol{y})$$

Si $f: U \longrightarrow V$, $\boldsymbol{x} \longrightarrow f(\boldsymbol{x})$ y $g: V \longrightarrow W$, $\boldsymbol{y} \longrightarrow g(\boldsymbol{y})$ son lineales, entonces

$g\circ f: U \longrightarrow W$, $\boldsymbol{x} \longrightarrow (g\circ f)(\boldsymbol{x}) = g(f(\boldsymbol{x}))$ también es lineal, pues

$$(g\circ f)(\alpha\boldsymbol{x}+\beta\boldsymbol{y}) = g(f(\alpha\boldsymbol{x}+\beta\boldsymbol{y})) = g(\alpha f(\boldsymbol{x})+\beta f(\boldsymbol{y})) = \alpha g(f(\boldsymbol{x}))+\beta g(f(\boldsymbol{y})) = \alpha(g\circ f)(\boldsymbol{x})+\beta(g\circ f)(\boldsymbol{y})$$

Esta última propiedad permite definir las siguientes estructuras algebraicas sobre conjuntos de aplicaciones lineales:

a) Sea $L(U,V)$ el conjunto de aplicaciones lineales de un espacio vectorial U en otro V, ambos sobre el mismo cuerpo. Tenemos entonces que $(L(U,V),+)$ es una estructura

algebraica al ser + una l.c.i. en L(U,V), según la propiedad 9) anterior. Además (L(U,V),+) es un grupo abeliano, pues además de ser conmutativa y asociativa la suma, existe la aplicación neutra

$$\begin{aligned} 0_U :\ U &\longrightarrow V \\ \boldsymbol{x} &\longrightarrow 0_U(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}_V \end{aligned}$$

que es lineal, ya que

$$0_U(\alpha\boldsymbol{x}+\beta\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{0}_V = \alpha 0_U(\boldsymbol{x})+\beta 0_U(\boldsymbol{y})$$

verificando $0_U+f = f$ pues

$$(0_U+f)(\boldsymbol{x}) = 0_U(\boldsymbol{x})+f(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x})$$

y la aplicación opuesta

$$\begin{aligned} (-f) :\ U &\longrightarrow V \\ \boldsymbol{x} &\longrightarrow (-f)(\boldsymbol{x}) = -f(\boldsymbol{x}) \end{aligned}$$

que es lineal, ya que

$$(-f)(\alpha\boldsymbol{x}+\beta\boldsymbol{y}) = -(f(\alpha\boldsymbol{x}+\beta\boldsymbol{y})) = -\alpha f(\boldsymbol{x})-\beta f(\boldsymbol{y}) = \alpha(-f)(\boldsymbol{x})+\beta(-f)(\boldsymbol{y})$$

y $-f+f = 0_U$ pues

$$(-f+f)(\boldsymbol{x}) = (-f)(\boldsymbol{x})+f(\boldsymbol{x}) = -f(\boldsymbol{x})+f(\boldsymbol{x}) = 0_U$$

El conjunto L(U,V) es también un espacio vectorial sobre K ya que además de ser grupo abeliano aditivo, como acabamos de demostrar, se verifica

$(\lambda+\mu)f = \lambda f+\mu f$ pues $((\lambda+\mu)f)(\boldsymbol{x}) = (\lambda+\mu)f(\boldsymbol{x}) = \lambda f(\boldsymbol{x})+\mu f(\boldsymbol{x}) = (\lambda f+\mu f)(\boldsymbol{x})$

$\lambda(f+g) = \lambda f+\lambda g$ pues $((\lambda(f+g))(\boldsymbol{x}) = \lambda(f+g)(\boldsymbol{x}) = \lambda(f(\boldsymbol{x})+g(\boldsymbol{x})) = \lambda f(\boldsymbol{x})+\lambda g(\boldsymbol{x}) = (\lambda f+\lambda g)(\boldsymbol{x})$

$\lambda(\mu f) = (\lambda\mu)f$ pues $\lambda(\mu f)(\boldsymbol{x}) = \lambda((\mu f)(\boldsymbol{x})) = \lambda(\mu f(\boldsymbol{x})) = (\lambda\mu)f(\boldsymbol{x}) = ((\lambda\mu)f)(\boldsymbol{x})$

$1f = f$ pues $(1f)(\boldsymbol{x}) = 1f(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x})$

b) Sea End(U) el conjunto de las aplicaciones lineales de U en U, es decir, de los endomorfismos de U. Se verifica que (End(U),+,o) es un anillo con elemento unidad, pues (End(U),+) es un grupo abeliano (se trata del caso anterior, para $U = V$), la composición de aplicaciones es asociativa según ya vimos, es distributiva respecto a la suma, por verificar

$$f\text{o}(g+h) = (f\text{o}g)+(f\text{o}h)$$

ya que

$$(f\text{o}(g+h))(\boldsymbol{x}) = f((g+h)(\boldsymbol{x})) = f(g(\boldsymbol{x})+h(\boldsymbol{x})) = f(g(\boldsymbol{x}))+f(h(\boldsymbol{x})) = ((f\text{o}g))+(f\text{o}h))(\boldsymbol{x})$$

Esta propiedad distributiva se verifica también en el caso de que $f\in$ L(V,W), $g\in$ L(U,V) y $h\in$ L(U,V). La aplicación elemento unidad es

$$I_U : U \longrightarrow U \qquad \boldsymbol{x} \longrightarrow I_U(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}$$

que es lineal pues $I_U(\alpha\boldsymbol{x}+\beta\boldsymbol{y}) = \alpha\boldsymbol{x}+\beta\boldsymbol{y} = \alpha I_U(\boldsymbol{x})+\beta I_U(\boldsymbol{y})$ y verifica $f \circ I_U = f$.

c) Si GL(U) el conjunto de los endomorfismos de U biyectivos, entonces (GL(U),$\circ$) es un grupo, pues $\circ$ es asociativa, existe elemento unidad, que es la aplicación I_U anterior (pertenece a GL(U) por ser biyectiva) y la aplicación opuesta de $f \in$ GL(U) es su inversa f^{-1} que es biyectiva y lineal ya que si $\boldsymbol{z} = f(\boldsymbol{x})$ y $\boldsymbol{t} = f(\boldsymbol{y})$ y $f^{-1}(\alpha\boldsymbol{z}+\beta\boldsymbol{t}) = \boldsymbol{m}$, entonces

$$f(\boldsymbol{m}) = \alpha\boldsymbol{z}+\beta\boldsymbol{t} = \alpha f(\boldsymbol{x})+\beta f(\boldsymbol{y}) = f(\alpha\boldsymbol{x}+\beta\boldsymbol{y}) \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{m} = \alpha\boldsymbol{x}+\beta\boldsymbol{y}$$

es decir, $f^{-1}(\alpha\boldsymbol{z}+\beta\boldsymbol{t}) = \alpha f^{-1}(\boldsymbol{z})+\beta f^{-1}(\boldsymbol{t})$ y además verifica $f^{-1} \circ f = I_U$ y $f \circ f^{-1} = I_U$.

Ejercicios

IV.45.- Averiguar si son lineales las siguientes aplicaciones:

$$f : \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}^2 \qquad (x,y,z) \longrightarrow (x+y,x+z)$$

$$g : \mathbf{R}^4 \longrightarrow \mathbf{R} \qquad (x,y,z,t) \longrightarrow x-y+z-t$$

$$h : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}^2 \qquad (x,y) \longrightarrow (x^2,y^2)$$

$$i : \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}^3 \qquad (x,y,z) \longrightarrow (x+y,y+z,x+y+z+1)$$

IV.46.- Averiguar si son lineales las aplicaciones de $\mathbf{R}^3$ en $\mathbf{R}^2$ dadas por las fórmulas

a) f de $\mathbf{R}^3$ en $\mathbf{R}^2$ dada por $f(x_1,x_2,x_3) = (3x_1+2x_2+x_3,\ x_1-x_2+x_3\ )$

b) f de $\mathbf{R}_2[x]$ en $\mathbf{R}_2[x]$ dada por $f(a_0+a_1x+a_2x^2) = a_0+(a_0+a_1)x+(a_0+a_1+a_2)x^2$

c) f de $\mathbf{R}_2[x]$ en $\mathbf{R}_2[x]$ dada por $f(P(x)) = P'(x)+P''(x)$

IV.47.- Sea E = {funciones $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ indefinidamente derivables}. Averiguar cuáles de las siguientes aplicaciones son lineales para $\alpha_1 =$, $\alpha_2 =$, $\alpha_3 =$, $\alpha_4 =$.

$$g : E \longrightarrow \mathbf{R} \qquad f \longrightarrow f(\alpha_1)$$

$$h : E \longrightarrow \mathbf{R} \qquad f \longrightarrow f''(\alpha_2)$$

$$i : E \longrightarrow \mathbf{R} \qquad f \longrightarrow f(0)+\alpha_3$$

$$j : E \longrightarrow \mathbf{R} \qquad f \longrightarrow (f'(\alpha_4))^2$$

$$k : E \longrightarrow \mathbf{R} \qquad f \longrightarrow \int_0^1 f(x)\,dx$$

IV.6. NUCLEO, IMAGEN Y RANGO DE UNA APLICACION LINEAL

Dada la aplicación lineal

$$\begin{array}{rcl} f: U & \longrightarrow & V \\ \boldsymbol{x} & \longrightarrow & f(\boldsymbol{x}) \end{array}$$

definimos como núcleo de f el conjunto de vectores del espacio inicial cuya imagen es el vector nulo del espacio final

$$\text{Nuc}(f) = \{\boldsymbol{x} \in U \mid f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}_V\}$$

y la imagen como el conjunto de todos los vectores del espacio final que son imagen de algún vector del espacio inicial

$$\text{Im}(f) = f(U)$$

que verifican las propiedades expuestas en la Tabla IV.6.1.

TABLA IV.6.1

Propiedades de Nuc(f) e Im(f)

1) Nuc(f) es un subespacio de U
2) Im(f) es un subespacio de V
3) Im(f) = V equivale a f sobreyectiva
4) Nuc(f) = $\{\boldsymbol{0}_U\}$ equivale a f inyectiva
5) ($\{\boldsymbol{u}_1,...,\boldsymbol{u}_n\}$l.i. $\Rightarrow$ $\{f(\boldsymbol{u}_1),...,f(\boldsymbol{u}_n)\}$l.i.) equivale a f inyectiva

Demostraciones:

1) Por definición de núcleo

$$(\forall \boldsymbol{x} \in \text{Nuc}(f))\ (f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}_V) \qquad (\forall \boldsymbol{y} \in \text{Nuc}(f))\ (f(\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{0}_V)$$

y para cualesquiera $\alpha,\beta \in K$

$$f(\alpha\boldsymbol{x}+\beta\boldsymbol{y}) = \alpha f(\boldsymbol{x})+\beta f(\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{0}_V \Rightarrow \alpha\boldsymbol{x}+\beta\boldsymbol{y} \in \text{Nuc}(f)$$

2) Por definición de imagen

$$(\forall \boldsymbol{z} \in \text{Im}(f))\ (\exists \boldsymbol{x} \in U)\ (f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{z}) \qquad (\forall \boldsymbol{t} \in \text{Im}(f))\ (\exists \boldsymbol{y} \in U)\ (f(\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{t})$$

y para cualesquiera $\alpha,\beta \in K$

$$\alpha\boldsymbol{z}+\beta\boldsymbol{t} = \alpha f(\boldsymbol{x})+\beta f(\boldsymbol{y}) = f(\alpha\boldsymbol{x}+\beta\boldsymbol{y}) \in \text{Im}(f)$$

3) Es trivial, pues Im(f) es el espacio imagen, que coincidirá con el espacio final si y sólo si

f es sobreyectiva.

4) En efecto, si f es inyectiva tenemos

$$\boldsymbol{x}\in \mathrm{Nuc}(f) \;\Rightarrow\; f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}_V = f(\boldsymbol{0}_U) \;\Rightarrow\; \boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}_U \;\Rightarrow\; \mathrm{Nuc}(f) = \{\boldsymbol{0}_U\}$$

y recíprocamente si $\mathrm{Nuc}(f) = \{\boldsymbol{0}_U\}$, para cualesquiera vectores $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in U$

$$f(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{y}) \;\Rightarrow\; f(\boldsymbol{x})-f(\boldsymbol{y}) = f(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) = f(\boldsymbol{0}_U) = \boldsymbol{0}_V \;\Rightarrow\; \boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\in \mathrm{Nuc}(f) \;\Rightarrow\; \boldsymbol{x}-\boldsymbol{y} = \boldsymbol{0}_U \;\Rightarrow\; \boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$$

5) En las propiedades de las aplicaciones lineales hemos visto que la imagen de un conjunto linealmente dependiente es un conjunto linealmente dependiente; lo que ocurra con la imagen de un conjunto linealmente independiente dependerá del tipo de aplicación, tal como afirma esta equivalencia. En efecto,

Directo: Si $\boldsymbol{x}\in \mathrm{Nuc}(f)$, entonces $f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}_V$ y si fuera $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}_U$, entonces $\{\boldsymbol{x}\}$ l.i. para $\{f(\boldsymbol{x})\}$ l.d., lo que va contra la hipótesis, luego $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}_U$ y f es inyectiva.

Recíproco: $\alpha_1 f(\boldsymbol{u}_1)+\ldots+\alpha_n f(\boldsymbol{u}_n) = \boldsymbol{0}_V \;\Rightarrow\; f(\alpha_1\boldsymbol{u}_1+\ldots+\alpha_n\boldsymbol{u}_n) = \boldsymbol{0}_V \;\Rightarrow$

$$\Rightarrow\; \alpha_1\boldsymbol{u}_1+\ldots+\alpha_n\boldsymbol{u}_n\in \mathrm{Nuc}(f) \;\Rightarrow\; \alpha_1\boldsymbol{u}_1+\ldots+\alpha_n\boldsymbol{u}_n = \boldsymbol{0}_U \;\Rightarrow\; \alpha_1 =\ldots= \alpha_n = 0$$

Ejemplo IV.6.1

La aplicación

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbf{R}^3 & \longrightarrow & \mathbf{R}^2 \\ & (x,y,z) & \longrightarrow & (x-3y,x-y+2z) \end{array}$$

es lineal pues

$$f(\alpha(x_1,x_2,x_3)+\beta(y_1,y_2,y_3)) = f(\alpha x_1+\beta y_1,\alpha x_2+\beta y_2,\alpha x_3+\beta y_3) =$$
$$= (\alpha x_1+\beta y_1-3(\alpha x_2+\beta y_2),(\alpha x_1+\beta y_1)-(\alpha x_2+\beta y_2)+2(\alpha x_3+\beta y_3))$$
$$\alpha f(x_1,x_2,x_3)+\beta f(y_1,y_2,y_3) = \alpha(x_1-3x_2,x_1-x_2+2x_3)+\beta(y_1-3y_2,y_1-y_2+2y_3) =$$
$$= (\alpha(x_1-3x_2)+\beta(y_1-3y_2),\alpha(x_1-x_2+2x_3)+\beta(y_1-y_2+2y_3))$$

y ambos resultados coinciden. Hallemos núcleo e imagen

$$\mathrm{Nuc}(f) = \{(x,y,z)\in \mathbf{R}^3 \mid f(x,y,z) = (0,0)\} = \{(3y,y,-y) \mid y\in \mathbf{R}\}$$

es decir,

$$\left.\begin{array}{r} x-3y = 0 \\ x-y+2z = 0 \end{array}\right| \;\Rightarrow\; \left|\begin{array}{l} x = 3y \\ z = (y-x)/2 \end{array}\right.$$

que es un subespacio; para hallar su base basta tener en cuenta que

$$\mathrm{Nuc}(f) = \{(3y,y,-y) \mid y\in \mathbf{R}\} = \{y(3,1,-1) \mid y\in \mathbf{R}\} = [(3,1,-1)]$$

con lo que $((3,1,-1))$ es una base de $\mathrm{Nuc}(f)$. Para calcular $\mathrm{Im}(f)$, según la definición,

$$(z_1,z_2)\in \mathrm{Im}(f) \iff (\exists (x_1,x_2,x_3)\in \mathbf{R}^3)\ (f(x_1,x_2,x_3) = (z_1,z_2))$$

es decir,

$$\left.\begin{array}{r} x_1-3x_2 = z_1 \\ x_1-x_2+2x_3 = z_2 \end{array}\right| \Rightarrow \left|\begin{array}{l} x_1 = z_1+3x_2 \\ x_3 = (z_2-x_1+x_2)/2 \end{array}\right.$$

luego cualquiera que sean z_1 y z_2 existe antiimagen (x_1,x_2,x_3), y todo vector de $\mathbf{R}^2$ pertenece a la imagen,

$$\mathrm{Im}(f) = \mathbf{R}^2 \Rightarrow ((1,0),(0,1)) \text{ base de } \mathrm{Im}(f)$$

Como $\mathrm{Nuc}(f) \neq \{(0,0,0)\}$, f no es inyectiva y como $\mathrm{Im}(f) = \mathbf{R}^2$, f es sobreyectiva.

A la dimensión del subespacio Im(f) le llamaremos ***rango de la aplicación***

$$\mathrm{rang}(f) = \dim(\mathrm{Im}(f))$$

El conocimiento del rango de una aplicación lineal proporciona resultados interesantes sobre ella, cuando los espacios vectoriales sobre los que está definida son de dimensión finita y que resumidos en la Tabla IV.6.2.

TABLA IV.6.2.

Propiedades del rango de una aplicación lineal $f : U \longrightarrow V$

1) $\mathrm{rang}(f) = \dim(U) - \dim(\mathrm{Nuc}(f))$

2) $\mathrm{rang}(f) \leq \dim(U)$ y $\mathrm{rang}(f) = \dim(U)$ equivale a f inyectiva

3) $\mathrm{rang}(f) \leq \dim(V)$ y $\mathrm{rang}(f) = \dim(V)$ equivale a f sobreyectiva

4) $\dim(U) = \dim(V)$ equivale a (f inyectiva $\Leftrightarrow$ f sobreyectiva $\Leftrightarrow$ f biyectiva)

Demostraciones :

1) Como Nuc(f) es de dimensión finita, por ser subespacio de U, supongamos que

$$(\boldsymbol{u}_1,...,\boldsymbol{u}_n) \text{ base } U \quad \text{y} \quad (\boldsymbol{e}_1,\ldots,\boldsymbol{e}_m) \text{ base de } \mathrm{Nuc}(f)$$

podemos sustituir m vectores $\boldsymbol{u}_i$ por los m vectores $\boldsymbol{e}_i$, y el resultado es una base de U; supongamos, p.ej., que son los m primeros vectores, con lo que $(\boldsymbol{e}_1,..,\boldsymbol{e}_m,\boldsymbol{u}_{m+1},...,\boldsymbol{u}_n)$ será una base de U. Demostremos que $(f(\boldsymbol{u}_{m+1}),...,f(\boldsymbol{u}_n))$ es base de Im(f) probando que forman un conjunto l.i. y generador.

a) $\{f(\boldsymbol{u}_{m+1}),...,f(\boldsymbol{u}_n)\}$ l.i. pues

$$\lambda_{m+1} f(\boldsymbol{u}_{m+1})+...+\lambda_n f(\boldsymbol{u}_n) = \boldsymbol{0}_V \;\Rightarrow\; f(\lambda_{m+1}\boldsymbol{u}_{m+1}+...+\lambda_n\boldsymbol{u}_n) = \boldsymbol{0}_V \;\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\; \lambda_{m+1}\boldsymbol{u}_{m+1}+...+\lambda_n\boldsymbol{u}_n \in \mathrm{Nuc}(f) \;\Rightarrow\; \lambda_{m+1} =...= \lambda_n = 0$$

ya que si existiesen $\lambda_{i_1} \neq 0,...,\lambda_{i_r} \neq 0$ tendríamos

$$\boldsymbol{x} = \lambda_{i_1}\boldsymbol{u}_{i_1}+...+\lambda_{i_r}\boldsymbol{u}_{i_r} \in \mathrm{Nuc}(f) \;\Rightarrow\; \lambda_{i_1}\boldsymbol{u}_{i_1}+...+\lambda_{i_r}\boldsymbol{u}_{i_r} = \alpha_1\boldsymbol{e}_1+\ldots+\alpha_m\boldsymbol{e}_m \;\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\; \{\boldsymbol{u}_{i_1},...,\boldsymbol{u}_{i_r},\boldsymbol{e}_1,...,\boldsymbol{e}_m\} \text{ l.d.}$$

y $(\boldsymbol{e}_1,...,\boldsymbol{e}_m,\boldsymbol{u}_{m+1},...,\boldsymbol{u}_n)$ no sería base de U.

b) Es un conjunto generador de Im(f) ya que

$$(\forall \boldsymbol{z} \in \mathrm{Im}(f))\ (\exists \boldsymbol{x} \in U)\ (\boldsymbol{z} = f(\boldsymbol{x}) \;\Rightarrow\; \boldsymbol{z} = f(\lambda_1\boldsymbol{e}_1+...+\lambda_m\boldsymbol{e}_m+\lambda_{m+1}\boldsymbol{u}_{m+1}+...+\lambda_n\boldsymbol{u}_n) \;\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\; \boldsymbol{z} = \lambda_1 f(\boldsymbol{e}_1)+...+\lambda_m f(\boldsymbol{e}_m)+\lambda_{m+1} f(\boldsymbol{u}_{m+1})+...+\lambda_n f(\boldsymbol{u}_n) \;\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\; \boldsymbol{z} = \lambda_{m+1} f(\boldsymbol{u}_{m+1})+...+\lambda_n f(\boldsymbol{u}_n))$$

ya que $f(\boldsymbol{e}_1) =...= f(\boldsymbol{e}_m) = \boldsymbol{0}_V$ por ser base de Nuc(f).

De a) y b) se deduce que $\dim(\mathrm{Im}(f)) = n-m$, es decir,

$$\mathrm{rang}(f) = \dim(U)-\dim(\mathrm{Nuc}(f))$$

2) Inmediata a partir de la anterior teniendo en cuenta que

$$\mathrm{rang}(f) = \dim(U) \;\Leftrightarrow\; \dim(\mathrm{Nuc}(f)) = 0 \;\Leftrightarrow\; \mathrm{Nuc}(f) = \{\boldsymbol{0}_U\} \;\Leftrightarrow\; f \text{ inyectiva}$$

3) Según la definición de rango, $\mathrm{rang}(f) = \dim(\mathrm{Im}(f)) \leq \dim(V)$ para además

$$\dim(\mathrm{Im}(f)) = \mathrm{rang}(f) = \dim(V) \;\Leftrightarrow\; \mathrm{Img}(f) = V \Leftrightarrow\; f \text{ sobreyectiva}$$

4) Si ambos espacios tienen la misma dimensión, entonces

$$f \text{ inyectiva} \;\Leftrightarrow\; \dim(\mathrm{Nuc}(f)) = 0 \;\Leftrightarrow\; \mathrm{rang}(f) = \dim(U) = \dim(V) \;\Leftrightarrow\; f \text{ sobreyectiva}$$

luego f es biyectiva. En particular, y según esta propiedad, para todo f endomorfismo de U ser f inyectivo equivale a ser sobreyectivo y biyectivo.

Ejemplo IV.6.2

Para la aplicación lineal del ejemplo IV.6.1 anterior, tenemos

$$\mathrm{rang}(f) = \dim(\mathrm{Img}(f)) = 2 \qquad \dim(\mathrm{Nuc}(f)) = 1 \qquad \dim(\mathbf{R}^3) = 3$$

y, efectivamente $\mathrm{rang}(f) = \dim(U)-\dim(\mathrm{Nuc}(f))$. Como $\mathrm{rang}(f) < \dim(\mathbf{R}^3)$, entonces f no es inyectiva. Como $\mathrm{rang}(f) = \dim(\mathbf{R}^2)$ es f sobreyectiva.

Ejercicios

IV.48.- Para la aplicación f de $\mathbf{R}^3$ en $\mathbf{R}^2$ definida por $f(x,y,z) = (x+y/2,x+z/2)$ averiguar su rango, núcleo, imagen y clasificarla. Lo mismo para el endomorfismo f de $\mathbf{R}_2[x]$ dado por $f(P(x)) = P'(x)+P''(x)$.

IV.49.- Sea F el espacio vectorial de las funciones $f: \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ y sea

$$\begin{array}{rcl} \Phi: \mathbf{R}^3 & \longrightarrow & F \\ (a,b,c) & \longrightarrow & f: \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R} \\ & & x \longrightarrow f(x) = a\ \mathrm{sen}^2x+b\ \cos^2x+c \end{array}$$

a) Probar que Φ es lineal.

b) Averiguar el Nuc(Φ), Im(Φ) y si Φ es inyectiva.

c) Si U es el subespacio de las funciones constantes, hallar $\Phi^{-1}(U)$.

IV.50.- Sea la aplicación lineal

$$\begin{array}{rcl} f: \mathbf{R}^3 & \longrightarrow & \mathbf{R}^3 \\ (x,y,z) & \longrightarrow & ((\lambda-2)x+2y-z,2x+\lambda y+2z,2\lambda x+2(\lambda+1)y+(1+\lambda)z) \end{array}$$

con $\lambda \in \mathbf{R}$ dado. Hallar según los valores de λ, el Nuc(f), Im(f) y rang f.

IV.51.- Demostrar que todo endomorfismo inyectivo es necesariamente sobreyectivo.

IV.7.- TEOREMA DE LA CARACTERIZACION DE UNA APLICACION LINEAL

Sean U y V e.v.s. K, $(\boldsymbol{e}_1,\ldots,\boldsymbol{e}_n)$ es una base de U y $\{\boldsymbol{b}_1,...,\boldsymbol{b}_n\}$ un subconjunto de V, en estas condiciones

a) existe una única aplicación lineal f de U en V tal que $f(\boldsymbol{e}_1) = \boldsymbol{b}_1$, ..., $f(\boldsymbol{e}_n) = \boldsymbol{b}_n$.

Además

b) $\{\boldsymbol{b}_1,...,\boldsymbol{b}_n\}$ l.i. equivale a f inyectiva

y si V es de dimensión finita

c) $\{\boldsymbol{b}_1,...,\boldsymbol{b}_n\}$ generan V equivale a f sobreyectiva

d) $(\boldsymbol{b}_1,...,\boldsymbol{b}_n)$ base de V equivale a f biyectiva

Demostración: Veamos sucesivamente los diversos resultados enunciados.

a) En efecto, si $\boldsymbol{x} \in U$, entonces por ser $(\boldsymbol{e}_1,\ldots,\boldsymbol{e}_n)$ una base de U

$$\boldsymbol{x} = \alpha_1\boldsymbol{e}_1+\ldots+\alpha_n\boldsymbol{e}_n$$

y definimos la correspondencia

$$\begin{aligned} f : U &\longrightarrow V \\ \boldsymbol{x} &\longrightarrow f(\boldsymbol{x}) = \alpha_1\boldsymbol{b}_1+\ldots+\alpha_n\boldsymbol{b}_n \end{aligned}$$

que es una aplicación, pues para todo vector $\boldsymbol{x}\in U$ existen y son únicos los escalares $\alpha_1,...,\alpha_n$ que lo expresan como combinación lineal de la base $(\boldsymbol{e}_1,\ldots,\boldsymbol{e}_n)$, luego es único el vector imagen

$$\alpha_1\boldsymbol{b}_1+\ldots+\alpha_n\boldsymbol{b}_n$$

En particular veamos las imágenes de $\boldsymbol{e}_1,\ldots,\boldsymbol{e}_n$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{e}_1 &= 1\cdot\boldsymbol{e}_1+\ldots+0\cdot\boldsymbol{e}_n \;\Rightarrow\; f(\boldsymbol{e}_1) = 1\cdot\boldsymbol{b}_1+\ldots+0\cdot\boldsymbol{b}_n = \boldsymbol{b}_1 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \boldsymbol{e}_n &= 0\cdot\boldsymbol{e}_1+\ldots+1\cdot\boldsymbol{e}_n \;\Rightarrow\; f(\boldsymbol{e}_n) = 0\cdot\boldsymbol{b}_1+\ldots+1\cdot\boldsymbol{b}_n = \boldsymbol{b}_n \end{aligned}$$

Esta aplicación, así definida es lineal; en efecto como

$$(\forall\boldsymbol{x}\in U)\ (\exists\alpha_1,...,\alpha_n\in K)\ (\boldsymbol{x} = \alpha_1\boldsymbol{e}_1+\ldots+\alpha_n\boldsymbol{e}_n)$$

$$(\forall\boldsymbol{y}\in U)\ (\exists\beta_1,...,\beta_n\in K)\ (\boldsymbol{y} = \beta_1\boldsymbol{e}_1+\ldots+\beta_n\boldsymbol{e}_n)$$

para cualesquiera $\lambda,\mu\in K$ tendremos

$$\begin{aligned} f(\lambda\boldsymbol{x}+\mu\boldsymbol{y}) &= f(\lambda(\alpha_1\boldsymbol{e}_1+\ldots+\alpha_n\boldsymbol{e}_n)+\mu(\beta_1\boldsymbol{e}_1+\ldots+\beta_n\boldsymbol{e}_n)) = \\ &= f((\lambda\alpha_1+\mu\beta_1)\boldsymbol{e}_1+\ldots+(\lambda\alpha_n+\mu\beta_n)\boldsymbol{e}_n) = (\lambda\alpha_1+\mu\beta_1)\boldsymbol{b}_1+\ldots+(\lambda\alpha_n+\mu\beta_n)\boldsymbol{b}_n \end{aligned}$$

$$\lambda f(\boldsymbol{x})+\mu f(\boldsymbol{y}) = \lambda(\alpha_1\boldsymbol{b}_1+\ldots+\alpha_n\boldsymbol{b}_n)+\mu(\beta_1\boldsymbol{b}_1+\ldots+\beta_n\boldsymbol{b}_n) = (\lambda\alpha_1+\mu\beta_1)\boldsymbol{b}_1+\ldots+(\lambda\alpha_n+\mu\beta_n)\boldsymbol{b}_n$$

Además f es la única aplicación lineal para la que $f(\boldsymbol{e}_1) = \boldsymbol{b}_1,\ldots,f(\boldsymbol{e}_n) = \boldsymbol{b}_n$ ya que si hubiera otra aplicación lineal con las mismas imágenes para los vectores $\boldsymbol{e}_1,\ldots,\boldsymbol{e}_n$

$$\begin{aligned} g : U &\longrightarrow V \\ \boldsymbol{e}_1 &\longrightarrow g(\boldsymbol{e}_1) = \boldsymbol{b}_1 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \boldsymbol{e}_n &\longrightarrow g(\boldsymbol{e}_n) = \boldsymbol{b}_n \end{aligned}$$

entonces para cualquier vector $\boldsymbol{x} = \alpha_1\boldsymbol{e}_1+\ldots+\alpha_n\boldsymbol{e}_n$ sería

$$g(\boldsymbol{x}) = g(\alpha_1\boldsymbol{e}_1+\ldots+\alpha_n\boldsymbol{e}_n) = \alpha_1 g(\boldsymbol{e}_1)+\ldots+\alpha_n g(\boldsymbol{e}_n) = \alpha_1\boldsymbol{b}_1+\ldots+\alpha_n\boldsymbol{b}_n = f(\boldsymbol{x})$$

La elección de los vectores $\boldsymbol{b}_1,...,\boldsymbol{b}_n$ imagen de los vectores de la base determina una única aplicación lineal; más aún, si el espacio vectorial imagen es de dimensión finita, según sean estos vectores imagen la aplicación será de un tipo u otro. En efecto

b) $\{\boldsymbol{b}_1,...,\boldsymbol{b}_n\}$ l.i. equivale a f inyectiva.

Directo: Si $\boldsymbol{x} = \alpha_1\boldsymbol{e}_1+\ldots+\alpha_n\boldsymbol{e}_n$ e $\boldsymbol{y} = \beta_1\boldsymbol{e}_1+\ldots+\beta_n\boldsymbol{e}_n$ y $f(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{y})$, entonces

$$\alpha_1\boldsymbol{b}_1+\ldots+\alpha_n\boldsymbol{b}_n = \beta_1\boldsymbol{b}_1+\ldots+\beta_n\boldsymbol{b}_n \;\Rightarrow\; (\alpha_1-\beta_1)\boldsymbol{b}_1+\ldots+(\alpha_n-\beta_n)\boldsymbol{b}_n = \boldsymbol{0}_V$$

y como se supone $\{\boldsymbol{b}_1,\ldots,\boldsymbol{b}_n\}$l.i., será

$$\left.\begin{array}{l}\alpha_1-\beta_1 = 0\\ \ldots\ldots\\ \alpha_n-\beta_n = 0\end{array}\right| \;\Rightarrow\; \left.\begin{array}{l}\alpha_1 = \beta_1\\ \ldots\ldots\\ \alpha_n = \beta_n\end{array}\right| \;\Rightarrow\; \boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$$

Recíproco: $\lambda_1\boldsymbol{b}_1+\ldots+\lambda_n\boldsymbol{b}_n = \boldsymbol{0}_V \;\Rightarrow\; f(\lambda_1\boldsymbol{e}_1+\ldots+\lambda_n\boldsymbol{e}_n) = \boldsymbol{0}_V \;\Rightarrow\; \lambda_1\boldsymbol{e}_1+\ldots+\lambda_n\boldsymbol{e}_n \in \mathrm{Nuc}(f)$
y como se supone f inyectiva y $(\boldsymbol{e}_1,\ldots,\boldsymbol{e}_n)$ base de U, entonces

$$\lambda_1\boldsymbol{e}_1+\ldots+\lambda_n\boldsymbol{e}_n = \boldsymbol{0}_U \;\Rightarrow\; \lambda_1 = \ldots = \lambda_n = 0$$

c) El conjunto $\{\boldsymbol{b}_1,\ldots,\boldsymbol{b}_n\}$ es generador de $\mathrm{Im}(f)$ ya que

$$\mathrm{Im}(f) = f(U) = f([\boldsymbol{e}_1,\ldots,\boldsymbol{e}_n]) = [f(\boldsymbol{e}_1),\ldots,f(\boldsymbol{e}_n)] = [\boldsymbol{b}_1,\ldots,\boldsymbol{b}_n]$$

y como se supone que

$$\{\boldsymbol{b}_1,\ldots,\boldsymbol{b}_n\} \text{ genera } V \;\Leftrightarrow\; \mathrm{Im}(f) = V \;\Leftrightarrow\; f \text{ sobreyectiva}$$

d) Reuniendo los resultados anteriores, tenemos

$$(\boldsymbol{b}_1,\ldots,\boldsymbol{b}_n) \text{ base de } V \;\Leftrightarrow\; \left|\begin{array}{l}\{\boldsymbol{b}_1,\ldots,\boldsymbol{b}_n\} \text{ l.i.} \;\Leftrightarrow\; f \text{ inyectiva}\\ \{\boldsymbol{b}_1,\ldots,\boldsymbol{b}_n\} \text{ genera } V \;\Leftrightarrow\; f \text{ sobreyectiva}\end{array}\right.$$

lo que equivale a que f es biyectiva.

Ejemplo IV.7.1

Sean los espacios vectoriales $\mathbf{R}^3$ y $\mathbf{R}^4$. Una base de $\mathbf{R}^3$ es $((1,1,0),(2,0,-1),(0,3,2))$ pues forman un conjunto l.i.; en efecto

$$\begin{pmatrix}1&2&0&0\\1&0&3&0\\0&-1&2&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&0&0\\0&-2&3&0\\0&-1&2&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&3&0\\0&-2&3&0\\0&0&-1&0\end{pmatrix}\to$$

$$\to\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&-2&0&0\\0&0&-1&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix}$$

Según el teorema anterior

$$\begin{array}{rcl} f: \quad \mathbf{R}^3 & \longrightarrow & \mathbf{R}^4\\ (1,1,0) & \longrightarrow & (1,1,0,2)\\ (2,0,-1) & \longrightarrow & (0,0,0,0)\\ (0,3,2) & \longrightarrow & (0,0,2,4)\end{array}$$

define una única aplicación lineal, cuya fórmula se puede hallar haciendo

$$(x,y,z) = \alpha_1(1,1,0)+\alpha_2(2,0,-1)+\alpha_3(0,3,2)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & x \\ 1 & 0 & 3 & y \\ 0 & -1 & 2 & z \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & x \\ 0 & -2 & 3 & y-x \\ 0 & -1 & 2 & z \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & y \\ 0 & -2 & 3 & y-x \\ 0 & 0 & -1 & y-x-2z \end{pmatrix} \to$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 4y-3x-6z \\ 0 & -2 & 0 & 4y-4x-6z \\ 0 & 0 & -1 & y-x-2z \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -3x+4y-6z \\ 0 & 1 & 0 & 2x-2y+3z \\ 0 & 0 & 1 & x-y+2z \end{pmatrix}$$

siendo, por tanto

$$\alpha_1 = -3x+4y-6z$$
$$\alpha_2 = 2x-2y+3z$$
$$\alpha_3 = x-y+2z$$

con lo que

$$(x,y,z) = (-3x+4y-6z)(1,1,0)+(2x-2y+3z)(2,0,-1)+(x-y+2z)(0,3,2) \quad \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \quad f(x,y,z) = (-3x+4y-6z)(1,1,0,2)+(2x-2y+3z)(0,0,0,0)+(x-y+2z)(0,0,2,4) =$$
$$= (-3x+4y-6z,-3x+4y-6z,2x-2y+4z,-2x+4y-4z)$$

Como {(1,1,0,2),(0,0,0,0),(0,0,2,4)} es l.d., entonces f no es inyectiva; como {(1,1,0,2)(0,0,0,0)(0,0,2,4)} no genera $\mathbf{R}^4$, entonces f no es sobreyectiva. Además

$$\text{Nuc}(f) = \{(x,y,z)\in \mathbf{R}^3 \mid f(x,y,z) = (0,0,0,0)\}$$

es decir,

$$\left.\begin{array}{r} -3x+4y-6z = 0 \\ 2x-2y+4z = 0 \\ -2x+4y-4z = 0 \end{array}\right| \quad \text{cuya solución es } z \text{ arbitrario, } y = 0,\ x = -2z$$

por lo que

$$\text{Nuc}(f) = \{(-2z,0,z) \mid z\in \mathbf{R}\} = \{z(-2,0,1) \mid z\in \mathbf{R}\} = [(-2,0,1)]$$

para pues ((−2,0,1)) base de Nuc(f). Según las propiedades del rango

$$\dim(\text{Im}(f)) = \text{rang}(f) = 3-1 = 2$$

y, en efecto, el espacio imagen es

$$\text{Im}(f) = [(1,1,0,2)(0,0,0,0),(0,0,2,4)] = [(1,1,0,2)(0,0,2,4)]$$

siendo ((1,1,0,2)(0,0,2,4)) base de Im f

Dos consecuencias inmediatas se deducen del importante teorema anterior. En primer lugar

"Si V es e.v.s. K de dimensión n, entonces V es algebraicamente identificable con K^n"

En efecto, si $(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,..,\boldsymbol{e}_n)$ es una base de V, la identificación la establece la siguiente aplicación

$$\begin{aligned} V &\longrightarrow K^n \\ \boldsymbol{e}_1 &\longrightarrow (1,0,...,0) \\ \boldsymbol{e}_2 &\longrightarrow (0,1,...,0) \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \boldsymbol{e}_n &\longrightarrow (0,0,...,1) \end{aligned}$$

que es biyectiva por ser los vectores imagen una base de K^n, la base canónica. Consecuencia inmediata de este resultado es que

"Dos espacios vectoriales de dimensión finita son algebraicamente identificables si tienen la misma dimensión".

En efecto, si U y V son e.v.s. K de dimensión n, ambos son identificables con K^n y, por ello, son identificables entre sí.

Ejercicios

IV.52.- Sea la aplicación lineal

$$\begin{aligned} f:\ \mathbf{R}^4 &\longrightarrow \mathbf{R}^4 \\ (1,0,0,0) &\longrightarrow (2,-1,-1,0) \\ (0,1,0,0) &\longrightarrow (-1,1,0,-1) \\ (0,0,1,0) &\longrightarrow (1,0,1,-1) \\ (0,0,0,1) &\longrightarrow (0,-1,-1,2) \end{aligned}$$

a) Hallar $f(2,5,6,8)$, $f(x,y,z,t)$ y $f^{-1}(1,0,0,1)$.

b) Hallar Nuc(f), Im(f), rang f y clasificarla.

IV.53.- Dada la aplicación lineal

$$\begin{aligned} f:\ \mathbf{R}^2 &\longrightarrow \mathbf{R}^2 \\ (1,0) &\longrightarrow (\sqrt{2},1) \\ (0,1) &\longrightarrow (1,\sqrt{2}) \end{aligned}$$

definir, si es posible, f^{-1} y hallar $f^{-1}(0,1)$ y $f^{-1}(x,y)$. Hallar núcleo, imagen y rango de f y f^{-1}.

IV.54.-Dadas las siguientes aplicaciones lineales, hallar sus rangos, bases del núcleo e imagen y clasificarlas:

$$f:\ \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}^4 \qquad h:\ \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}^4$$
$$(1,1,0) \longrightarrow (3,2,0,1) \qquad (2,-1) \longrightarrow (\alpha_1,0,-1,\alpha_2)$$
$$(2,3,1) \longrightarrow (1,-2,1,1) \qquad (4,1) \longrightarrow (\alpha_3,-2,\alpha_4,1)$$
$$(0,-2,1) \longrightarrow (4,0,1,2)$$

para $\alpha_1 =$, $\alpha_2 =$, $\alpha_3 =$, $\alpha_4 =$.

IV.55.-Dadas las siguientes aplicaciones lineales, hallar sus rangos, bases del núcleo e imagen y clasificarlas:

$$i:\ \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}^3 \qquad j:\ \mathbf{R}^4 \longrightarrow \mathbf{R}^2$$
$$(0,1,0) \longrightarrow (0,2,0) \qquad (1,2,-1,-3) \longrightarrow (-5,1)$$
$$(1,0,0) \longrightarrow (1,0,0) \qquad (-3,-1,0,5) \longrightarrow (8,0)$$
$$(1,1,1) \longrightarrow (2,6,0) \qquad (4,2,5,0) \longrightarrow (\alpha_1,\alpha_2)$$
$$(-3,-2,1,7) \longrightarrow (\alpha_3,\alpha_4)$$

para $\alpha_1 =$, $\alpha_2 =$, $\alpha_3 =$, $\alpha_4 =$.

PROCEDIMIENTOS PRÁCTICOS BASICOS

Los procedimientos básicos que forman los elementos constructivos a partir de los cuales pueden abordarse los problemas que tratan sobre las materias desarrolladas en este Cuaderno, son los siguientes:

- Determinar si una estructura es un espacio vectorial.
- Resultados de combinaciones lineales en los e.v. K^n, $K(x)$ y de funciones de A en K.
- Averiguar si un vector es combinación lineal otros.
- Algoritmo de Gauss-Jordan.
- Determinar si un subconjunto es un subespacio.
- Averiguar si un vector pertenece a un espacio de dimensión finita.
- Simplificar conjuntos generadores.
- Averiguar si un conjunto es o no linealmente independiente.
- Hallar una base de un e.v. de dimensión finita.
- Hallar componentes de vectores respecto de una base.
- Obtener bases mediante el teorema de Steinitz.
- Hallar bases de espacios suma e intersección.
- Hallar bases y dimensión de subespacios.
- Averiguar si una aplicación entre espacios vectoriales es lineal.
- Hallar rango imagen y núcleo de una aplicación lineal
- Definir aplicaciones lineales mediante fórmulas o mediante imágenes de vectores de una base

EJERCICIOS DE RECAPITULACION

IV.56.- Sean los vectores de $\mathbf{R}^4$

$$\boldsymbol{v}_1 = (2,3,-1,0),\ \boldsymbol{v}_2 = (-3,1,0,2),\ \boldsymbol{v}_3 = (-4,5,-1,4) \text{ y } \boldsymbol{v}_4 = (9,8,-3,-2)$$

Probar que $[\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2] = [\boldsymbol{v}_3,\boldsymbol{v}_4] = F$ y hallar un subespacio G tal que $F+G = \mathbf{R}^4$.

IV.57.- La ecuación $\lambda_1\boldsymbol{e}_1+\lambda_2\boldsymbol{e}_2+\lambda_3\boldsymbol{e}_3+\lambda_4\boldsymbol{e}_4+\lambda_5\boldsymbol{e}_5 = \boldsymbol{0}$ tiene como solución

$$\lambda_1 = \lambda_2 = -\lambda_3 \qquad \lambda_4 = \lambda_5 = 0$$

Se pide

a) Relación de dependencia, si existe, entre los vectores $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3,\boldsymbol{e}_4,\boldsymbol{e}_5$.

b) Dimensión del subespacio engendrado por los $\boldsymbol{e}_i$.

c) Indicar dos bases de este subespacio.

IV.58.- a) Demostrar que los polinomios $1,\ 1+x,\ 1+x+x^2,\ldots,\ 1+x+x^2+\ldots+x^n$ forman una base del espacio vectorial de los polinomios de grado menor o igual a n. Calcular las componentes del polinomio: $P(x) = 2x^3-2x^2+x-1$ respecto a una base de este tipo.

b) Demostrar que los polinomios $1,(x-a),(x-a)^2,\ldots,(x-a)^n$ forman una base del espacio vectorial de los polinomios de grado menor o igual a n.

c) Demostrar que para un polinomio $P(x)$ de grado n, las componentes respecto la base anterior son

$$P(a)\ ,\ P'(a)\ ,\ \frac{P''(a)}{2!},\ldots,\frac{P^{(n)}(a)}{n!}$$

IV.59.- En $\mathbf{R}^3$ se dan los siguientes conjuntos de vectores:

$$A = \{(1,1,0),(1,0,1),(0,1,1),(0,1,-1)\} \qquad B = \{(3,0,0),(0,4,0),(0,0,2),(0,1,1)\}$$

a) Demostrar que los conjuntos A y B son generadores de $\mathbf{R}^3$.

b) Hallar respecto de la segunda base (B) las componentes de un vector que respecto a la base primera (A) tiene de componentes $(-1,2,-2)$.

c) Generalizar este resultado hallando las componentes b_1,b_2 y b_3 respecto de la segunda base del vector cuyas componentes respecto de la primera son a_1,a_2 y a_3.

IV.60.- Probar que el subespacio generado por los vectores $(1,0,-1),(1,1,0)$ y $(0,1,1)$ coincide con el engendrado por los vectores $(2,1,-1)$ y $(1,2,1)$. Si denominamos F a este subespacio de $\mathbf{R}^3$ probar que $(1,-1,0)$ no pertenece a F. Completar el vector $(4,5,1)\in F$ a una base de F.

IV.61.- En el espacio vectorial $\mathbf{R}^3$ sobre $\mathbf{R}$ sean los subespacios

$S_1 = [(0,1,1),(1,0,2),(-2,3,-1)]$ $\qquad$ $S_2 = [(1,1,3),(-1,4,a)]$

a) Hallar a para que $S_1 = S_2$.

b) Completar una base S_1, hasta obtener una base de $\mathbf{R}^3$. Si llamamos S_3 el subespacio generado por el sistema de vectores añadidos a S_1 para obtener la base de $\mathbf{R}^3$ estudiar si el conjunto $S_1 \cup S_3$ es un subespacio vectorial.

c) Hallar un sistema generador del subespacio vectorial $S_1 \cap S_4$ para S_4 el generado por el conjunto de vectores $\{(1,0,1),(0,0,1),(1,0,0)\}$.

IV.62 .- Sean V y W dos espacios vectoriales reales, de bases $(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3)$ y $(\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2,\boldsymbol{u}_3,\boldsymbol{u}_4)$, respectivamente. Si $\lambda \in \mathbf{R}$, dada la aplicación

$$\begin{aligned} f: V &\longrightarrow W \\ \boldsymbol{e}_1 &\longrightarrow \lambda\boldsymbol{u}_1+\boldsymbol{u}_2 \\ \boldsymbol{e}_2 &\longrightarrow \boldsymbol{u}_3+\boldsymbol{u}_4 \\ \boldsymbol{e}_3 &\longrightarrow \boldsymbol{u}_1+\boldsymbol{u}_2+\boldsymbol{u}_3+\boldsymbol{u}_4 \end{aligned}$$

hallar la ecuación de f, Nuc(f) e Im(f) y averiguar cuándo f es inyectiva.

BIBLIOGRAFIA

de Burgos J. (1988). *Curso de Algebra y Geometría*. Alhambra. Madrid.

Dixmier J. (1974). *Matemáticas Generales.* Editorial Aguilar. Madrid.

Godement R. (1974). *Algebra*. Tecnos. Madrid.

Hoffmann R., Kunze R. (1974). *Algebra Lineal.* Prentice. Madrid.

Lentin A., Rivaud J. (1973). *Algebra Moderna*. Aguilar. Madrid.

Noble B., Daniel J.W. (1988). *Applied Linear Algebra*. Prentice Hall. London.

Puerta F. (1986). *Algebra lineal*. Marcombo. Barcelona.

Queysanne M. (1985) *Algebra*. Vicens-Vives. Barcelona.

Sainz M.A., Serarols J.L. Pérez A.M. (1994). *Álgebra*. Escuela Politécnica Superior. Gerona.

Strang G. (1982). *Algebra Lineal y sus aplicaciones.* Fondo Educativo Interamericano. Méjico.

Xambó S. (1977). *Algebra Lineal y geometrias lineales*. EUNIBAR. Barcelona.