CUADERNO II

RELACIONES Y APLICACIONES

Miguel A. Sainz, Joan Serarols, Anna M. Pérez
Dep. de Informática y Matemática Aplicada
Universidad de Girona

RESUMEN: Partiendo del producto cartesiano de conjuntos, definiremos la correspondencia entre conjuntos. Caso particular de correspondencia son las relaciones de equivalencia y orden, que permitirán clasificar y ordenar los elementos de un conjunto. También como caso particular de correspondencia se definirá después que es una función, los diferentes elementos que la forman y sus diferentes tipos

II.1.- CORRESPONDENCIAS Y RELACIONES BINARIAS

Vamos a entrar en la teoría matemática de las relaciones, entendiendo por relación algo que "asocia" elementos de conjuntos. El concepto de relación se va a fundamentar en los conceptos de par ordenado de elementos y de producto cartesiano, que vamos a ver en esta sección.

Intuitivamente considerado, un par ordenado (a,b) es un objeto formado por dos elementos en un cierto "orden", pero el concepto orden no está previamente definido (y además, como veremos, la definición de orden se basa en la de par ordenado). Por ello defininimos como ***par ordenado*** formado por los elementos *a* y *b*, que representaremos por (a,b), al conjunto

$$(a,b) = \{\{a\},\{a,b\}\}$$

Con esta definición quedan distinguidos los elementos *a* y *b*, pues los pares

$$(a,b) = \{\{a\},\{a,b\}\}$$

$$(b,a) = \{\{b\},\{b,a\}\}$$

son conjuntos distintos. Por esta razón los elementos *a* y *b* se denominan

$$a : \textbf{\textit{primer elemento}} \text{ o } \textbf{\textit{primera proyección}}$$

$$b : \textbf{\textit{segundo elemento}} \text{ o } \textbf{\textit{segunda proyección}}$$

Si *a* y *b* coinciden, entonces

$$(a,a) = \{\{a\}\}$$

Según la propia definición, la ***igualdad entre pares*** viene dada por

$$(x,y) = (a,b) \quad \text{equivale a} \quad \{\{x\},\{x,y\}\} = \{\{a\},\{a,b\}\} \quad \text{equivale a} \quad (x = a \ \wedge \ y = b)$$

es decir, la igualdad entre primeros y segundos elementos.

La generalización del concepto de par ordenado a tres, o a un número finito de elementos, es posible, y así, llamaremos ***terna ordenada*** formada por los elementos *a*, *b*, *c* al par ordenado

$$(a,b,c) = ((a,b),c)$$

Según la definición de igualdad entre pares, una igualdad entre ternas lleva consigo que

$$(x,y,z) = (a,b,c) \quad \text{equivale a} \quad ((x,y),z) = ((a,b),c) \quad \text{equivale a} \quad (x = a \ \wedge \ y = b \ \wedge \ z = c)$$

es decir, la igualdad entre primeros, segundos y terceros elementos de ambas ternas. Se define como ***n-pla ordenada*** formada por los elementos $a_1,a_2,...,a_n$

$$(a_1,a_2,...,a_n) \ = \ (...(((a_1,a_2),a_3),a_4),...,a_n)$$

de forma que una igualdad entre dos *n*-plas comporta que sean iguales los elementos homólogos de ambas, es decir

$$(x_1,x_2,...,x_n) = (a_1,a_2,...,a_n) \quad \text{equivale a} \quad (\ x_1 = a_1 \ \wedge \ x_2 = a_2 \ \wedge ... \wedge \ x_n = a_n)$$

Definimos una operación entre dos conjuntos *A* y *B*, que denominaremos ***producto cartesiano***, representándolo por $A\times B$, al conjunto de todos los pares ordenados cuyo primer elemento pertenece a *A* y su segundo elemento pertenece a *B*, es decir,

$$A\times B = \{(a,b) \mid a\in A \ \wedge \ b\in B\}$$

De acuerdo con esta definición los elementos de $A\times B$ vienen caracterizados por

$$(x,y)\in A\times B \quad \text{si y sólo si} \quad x\in A \ \wedge \ y\in \text{B}$$

$$(x,y)\notin A\times B \quad \text{si y sólo si} \quad x\notin A \ \vee \ y\notin B$$

por lo que

$$A\times B \neq B\times A$$

siendo iguales únicamente cuando $A = B$, en cuyo caso se escribe el producto como

$$A^2 = A\times A$$

Ejemplo II.1.1.

Con los conjuntos

$$A = \{1,2,3\} \quad \text{y} \quad B = \{a,b\}$$

formamos el producto cartesiano

$$A\times B = \{(1,a),(2,a),(3,a),(1,b),(2,b),(3,b)\}$$

También puede definirse

$$B\times A = \{(a,1),(a,2),(a,3),(b,1),(b,2),(b,3)\}$$

siendo ambos conjuntos distintos, ya que, p.ej.,

$$(a,1) \neq (1,a)$$

por definición de par ordenado.

Las propiedades más interesantes figuran en la Tabla II.1.1

TABLA II.1.1

Propiedades del producto cartesiano

1) $\emptyset\times A = \emptyset$

2) $A\times B = \emptyset$ equivale a $A = \emptyset \vee B = \emptyset$

3) $A\times(B \cap C) = (A\times B) \cap (A\times C)$

4) $A\times(B \cup C) = (A\times B) \cup (A\times C)$

Demostraciones:

1) Por reducción al absurdo, si $\emptyset\times A \neq \emptyset$, existirá al menos un par $(x,y)\in \emptyset\times A$ por lo que $x\in\emptyset$ e $y\in A$; como el conjunto vacío no tiene elementos, llegamos a una contradicción.

2) Al ser una equivalencia, hemos de comprobar los dos teoremas

Directo :

$$A\times B = \emptyset \text{ implica } A = \emptyset \vee B = \emptyset$$

que podemos demostrar a través de su contrarrecíproco

$$A \neq \emptyset \wedge B \neq \emptyset \text{ implica } A\times B \neq \emptyset$$

ya que si $x\in A$ e $y\in B$, entonces $(x,y)\in A\times B$, por lo tanto $A\times B \neq \emptyset$

Recíproco :

$$A = \emptyset \vee B = \emptyset \text{ implica } A\times B = \emptyset$$

que se obtiene directamente de la propiedad 1.

3) Tratándose de demostrar una igualdad de conjuntos, el esquema de demostración será

$$(x,y)\in A\times(B\cap C) \;\Leftrightarrow\; x\in A \wedge y\in B\cap C \;\Leftrightarrow\; x\in A \wedge (y\in B \wedge y\in C) \;\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\; (x\in A \wedge x\in A) \wedge (y\in B \wedge y\in C) \;\Leftrightarrow\; (x\in A \wedge y\in B) \wedge (x\in A \wedge y\in \mathrm{C}) \;\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\; (x,y)\in A\times B \wedge (x,y)\in A\times C \;\Leftrightarrow\; (x,y)\in (A\times B)\cap (A\times C)$$

4) Análoga a la 3), ejercicio para el lector.

La generalización de producto cartesiano a tres, o a un número finito de conjuntos, se establece de forma natural a partir de los conceptos de terna y *n*-pla ordenada antes vistos. Dados tres conjuntos *A*,*B*,*C* denominamos producto cartesiano al conjunto de todas las ternas ordenadas que tienen el primer elemento en *A*, el segundo en *B* y el tercero en *C*

$$A\times B\times C = \{(a,b,c) \mid a\in A \wedge b\in B \wedge c\in C\}$$

En caso de ser los tres conjuntos iguales usaremos la notación

$$A^3 = A\times A\times A$$

Dados *n* conjuntos $A_1, A_2,..., A_n$ el producto cartesiano será el conjunto de *n*-plas que tienen sus $1^o, 2^o,..., n^o$ elementos pertenecientes respectivamente a $A_1, A_2,..., A_n$, es decir

$$A_1\times A_2\times...\times A_n = \{(a_1,a_2,...,a_n) \mid a_1\in A_1 \wedge a_2\in A_2 \wedge ... \wedge a_n\in A_n\}$$

que en el caso de ser los conjuntos iguales se representa por

$$A^n = A\times A \times\overset{n}{...}\times A$$

Un concepto básico fundamentado en el producto cartesiano es el de correspondencia entre conjuntos. Dados dos conjuntos *A* y *B* llamaremos ***correspondencia*** entre *A* y *B* a cualquier subconjunto de $A\times B$. Una correspondencia es pues un conjunto cuyos elementos son pares ordenados. Puede venir definida por comprensión, mediante una función proposicional $R(x,y)$ sobre *A* y *B*, o bien por extensión, a través de sus pares. Dos elementos *a* y *b* que formen un par en la correspondencia se dice que se corresponden y se simboliza por

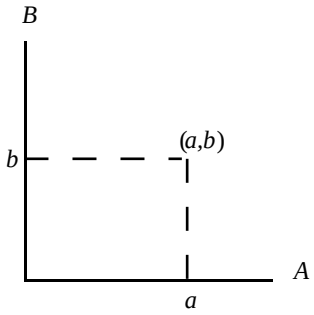
$$a\ R\ b$$

Las correspondencias son susceptibles de ser representadas mediante esquemas gráficos principalmente de dos tipos: el ***diagrama en flechas***, construído con los dos conjuntos *A* y *B*, sus elementos y flechas que individualizan los pares

$$A \longrightarrow B$$
$$a \longrightarrow b$$

y el ***diagrama cartesiano***, en el que cada par queda representado por el punto del plano intersección de una recta horizontal y una vertical que pasan respectivamente por puntos, pertenecientes a dos rectas perpendiculares, representantes del primero y segundo elementos del

par



Ejemplo II.1.2

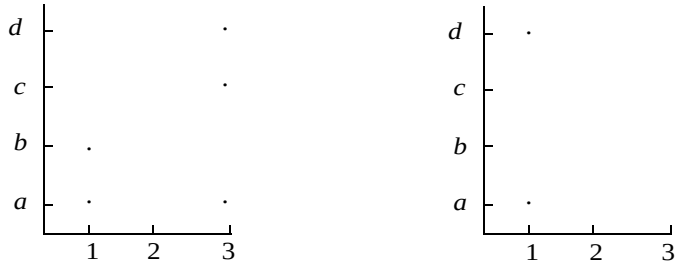
Para los conjuntos $A= \{1,2,3\}$ y $B = \{a,b,c,d\}$, son correspondencias entre A y B los siguientes conjuntos

$$G = \{(1,a),(1,b),(3,a),(3,c),(3,d)\}$$
$$H = \{(1,a),(1,d)\}$$
$$J = \emptyset$$
$$K = A \times B$$

pues todos ellos son subconjuntos de $A \times B$. Los diagramas en flechas de G y H son



y los diagramas cartesianos de estas correspondencias son



Ejemplo II.1.3

Sean los conjuntos referenciales **N** y **Z**; la función proposicional

$$x \; R \; y : \text{ "}y \text{ es el doble de } x \text{ menos 4"}$$

define el conjunto de pares

$$R = \{(0,-4),(1,-2),(2,0),(3,2),...\}$$

y su diagrama en flechas es

$$\begin{array}{rcl} R: \mathbf{N} & \longrightarrow & \mathbf{Z} \\ x & \longrightarrow & y = 2x-4 \end{array}$$

Dada una correspondencia R entre A y B, el conjunto

$$R^{-1} = \{(b,a)\in B\times A \mid (a,b)\in R\}$$

se denomina ***correspondencia inversa*** de R, de forma que

$$y\, R^{-1} x \text{ equivale } x\, R\, y$$

Si R es una correspondencia entre A y B, S entre B y C, se define la ***correspondencia compuesta*** de R y S como el conjunto

$$S\circ R = \{(x,z)\in A\times C \mid (\exists y\in B)\ ((x,y)\in R \ \wedge\ (y,z)\in S)\}$$

es decir, un par de $A\times C$ pertenecerá a la correspondencia compuesta si existe un "eslabón" $y\in B$, que forme par con x en R y con z en S; obviamente, R y S han de tener común el conjunto B para que ésto sea posible, o bien el segundo conjunto de R y el primer conjunto de S deben tener intersección no vacía. Por tanto

$$x\ (S\circ R)\ z \quad \text{equivale a} \quad (\exists y\in B)\ (x\, R\, y \ \wedge\ y\, S\, z)$$

Ejemplo II.1.4

Dadas las correspondencias que indican los diagramas en flechas

$$\begin{array}{rcl} R: A & \longrightarrow & B \\ 1 & \longrightarrow & a \\ 2 & \longrightarrow & b \\ 3 & \longrightarrow & c \\ & & d \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{rcl} S: B & \longrightarrow & C \\ a & \longrightarrow & \alpha \\ b & \longrightarrow & \beta \\ c & \longrightarrow & \gamma \\ d & \longrightarrow & \delta \end{array}$$

tendremos como correspondencia compuesta

$$\begin{array}{rcl} S\circ R: A & \longrightarrow & C \\ 1 & \longrightarrow & \alpha \\ 2 & \longrightarrow & \beta \\ 3 & \longrightarrow & \gamma \\ & & \delta \end{array}$$

ya que, por ejemplo, $(1,\alpha)\in S\circ R$ pues el elemento $a\in B$ verifica $(1,a)\in R$ y $(a,\alpha)\in S$

Una correspondencia R entre dos conjuntos A y B tales que $A = B$ recibe el nombre de ***relación binaria*** sobre el conjunto A. Según los elementos que se relacionan o, lo que es lo mismo, según los pares que forman la relación binaria, pueden verificarse las siguientes propiedades

Reflexiva ($\mathfrak{R}$) : $(\forall a \in A)\ (a\ R\ a)$

Simétrica ($\mathfrak{S}$) : $(\forall a,b \in A)\ (a\ R\ b \ \Rightarrow\ b\ R\ a)$

Antisimétrica ($\mathfrak{A}$) : $(\forall a,b \in A)\ ((a\ R\ b \ \wedge\ b\ R\ a) \ \Rightarrow\ a = b)$

Transitiva ($\mathfrak{T}$) : $(\forall a,b,c \in A)\ ((a\ R\ b \ \wedge\ b\ R\ c) \ \Rightarrow\ a\ R\ c)$

Ejemplo II.1.5

Sobre el conjunto A= {1,2,3,4} la correspondencia

$$G_1 = \{(1,1),(2,2),(2,3),(3,2),(3,4)\}$$

define una relación binaria, que es

no($\mathfrak{R}$) : falta p.ej. el par (3,3).
no($\mathfrak{S}$) : pues falta el par (4,3).
no($\mathfrak{A}$) : por estar (2,3) y (3,2) sin ser 3 = 2.
no($\mathfrak{T}$) : ya que están (2,3) y (3,4) y falta (2,4).

La correspondencia Ø define una relación que es

no($\mathfrak{R}$) : falta p.ej. el par (1,1).
($\mathfrak{S}$) : ya que la proposición $(a,b) \in$ Ø es falsa para cualesquiera a y b.
($\mathfrak{A}$) : por la misma razón que la anterior.
($\mathfrak{T}$) : ya que la proposición $(a,c) \in$ Ø es falsa para cualesquiera a y c.

La correspondencia $G_2 = A \times A$ define una relación que es

($\mathfrak{R}$) : están los pares (1,1),(2,2),(3,3),(4,4).
($\mathfrak{S}$) : ya que para todo a y b se verifica $(a,b) \in G_2$ y $(b,a) \in G_2$.
no($\mathfrak{A}$) : ya que están (3,4) y (4,3) sin ser 3 = 4.
($\mathfrak{T}$) : la proposición $(a,c) \in G_2$ es cierta cualesquiera sean a y c.

Ejemplo II.1.6

La relación binaria $a\ R\ b$: "a y b tienen la misma edad", definida sobre el conjunto de los seres humanos, verifica las propiedades

($\mathfrak{R}$) : pues todo ser humano tiene la misma edad que él mismo.

($\mathfrak{S}$) : pues si *a* tiene la misma edad que *b*, entonces *b* tiene la misma que *a*.

no($\mathfrak{A}$) : pues aunque dos seres humanos tengan la misma edad, éstos no han de ser la misma persona.

($\mathfrak{T}$) : ya que si $a\ R\ b$ y $b\ R\ c$ se verifica que *a*, *b* y *c* tienen la misma edad, entonces $a\ R\ c$.

La relación $a\ R\ b$: "*a* habla un mismo idioma que *b*", sobre el mismo conjunto, es

no($\mathfrak{R}$) : hay seres humanos que no tienen lenguaje oral.

($\mathfrak{S}$) : es evidente.

no($\mathfrak{A}$) : aunque dos seres humanos hablen un mismo idioma no son el mismo ser.

no($\mathfrak{T}$) : como se comprueba si, p. ej., *x* habla francés e inglés, *y* habla inglés y ruso, y *z* habla ruso.

Ejercicios

II.1.- Sean *A*, *B* y *C* tres partes de un referencial *E*. Si $A \neq \emptyset$, demostrar que

$$A\times B = A\times C \ \Rightarrow\ B = C$$

II.2.- En $\mathbf{R}^+$ definimos la relación binaria

$$a\ R\ b \ \Leftrightarrow\ (\exists z\in \mathbf{Z})\ (a,b\in [z,z+1[)$$

Dibujar la representación gráfica de *R*.

II.3.- Averiguar las propiedades de las relaciones binarias sobre el conjunto $A = \{1,2,3,4\}$

$R_1 = \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4)\}$

$R_2 = \{(1,1),(1,2),(2,1))\}$

$R_3 = \{(2,3),(3,4),(2,4)\}$

$R_4 = \{(1,1),(3,1),(1,2),(3,2)\}$

$R_5 = \{(1,1),(1,3),(3,1),(2,3),(3,2)\}$

II.4.- Averiguar las propiedades de las siguientes relaciones binarias sobre **N**:

R_1 : "$x–y$ número impar"

R_2 : "$a+b = 2$"

R_3 : "$a+b = n$ para cierto $n\in\mathbf{N}$"

R_4 : "$b–a = m$ para cierto $m\in\mathbf{N}$", sobre **Z**

II.5.- Averiguar las propiedades de las siguientes relaciones binarias:

a) $a\ R\ b$ si y sólo si $a+b$ es múltiplo de 2, sobre **N**.

b) $a\ R\ b$ si y sólo si $E(\sqrt{a}) = E(\sqrt{b})$, sobre **N**.

c) $a\ R\ b$ si y sólo si $a^2+a = b^2+b$, sobre **Q**.

d) $a\ R\ b$ si y sólo si $a\cdot b$ es el cuadrado de un número natural, sobre **N**.

II.6.- Estudiar las propiedades de las siguientes relaciones binarias definidas en el conjunto de puntos de $\mathbf{R}^2$

a) $(x_1,y_1)\ R\ (x_2,y_2) \Leftrightarrow x_1\cdot y_1 = x_2\cdot y_2$

b) $(x_1,y_1)\ R\ (x_2,y_2) \Leftrightarrow x_1\cdot y_1 = x_2\cdot y_2 \wedge x_1\cdot x_2 \geq 0$

c) $(x_1,y_1)\ R\ (x_2,y_2) \Leftrightarrow x_1 < x_2 \vee (x_1 = x_2 \wedge y_1 \leq y_2)$

II.7.- Sobre el conjunto de las rectas de un plano se definen las relaciones R : ser paralelas y S : ser perpendiculares. Definir $R \cap S$, $R \circ R$, $R \circ S$, $S \circ R$, $S \circ S$ y averiguar sus propiedades.

II.8.- Sean R y S dos relaciones binarias definidas sobre un conjunto A. Evaluar los siguientes teoremas:

R simétrica implica R^{-1} simétrica

R antisimétrica implica R^{-1} antisimétrica

R reflexiva implica $R \cap R^{-1} = \emptyset$

R simétrica implica $R = R^{-1}$

R transitiva implica R^{-1} transitiva

II.2.- RELACIONES DE EQUIVALENCIA Y ORDEN

Una relación binaria sobre un conjunto A que verifique las propiedades reflexiva, simétrica y transitiva se denomina ***relación de equivalencia*** y dos elementos relacionados por ella se dice que son equivalentes. Las relaciones de equivalencia permiten clasificar los elementos de A en clases de equivalencia, constituídas cada una por los elementos relacionados entre sí.

Ejemplo II.2.1

Hemos visto que sobre el conjunto de los seres humanos, la relación binaria dada por $a\ R\ b$: "a tiene la misma edad que b" es ($\mathfrak{R}$),($\mathfrak{S}$) y ($\mathfrak{T}$), luego es una relación de equivalencia. Esta relación permite clasificar los elementos de A en los siguientes subconjuntos :

seres humanos de 0 años

seres humanos de 1 año

. . . . . .

seres humanos de 130 años

hasta agotar los elementos del conjunto. Vemos que esta clasificación es correcta, en el sentido de que todo elemento está en uno y sólo uno de los subconjuntos.

Si sobre un conjunto dado A existe una relación R de equivalencia, llamamos ***clase de equivalencia*** definida por el elemento a al conjunto

$$\langle a\rangle = \{x\in A \mid x\ R\ a\}$$

Así, las clases de equivalencia, constituídas por los elementos del conjunto referencial que tienen en común la propiedad que expresa la relación de equivalencia, van a permitir clasificar los elementos del conjunto. Para ello vamos a demostrar las propiedades que se enuncian en la Tabla II.2.1

TABLA II.2.1

Propiedades de las clases de equivalencia

1) $\langle a\rangle \neq \emptyset$

2) $x\in\langle a\rangle$ implica $\langle x\rangle = \langle a\rangle$

3) $\langle a\rangle \neq \langle b\rangle$ implica $\langle a\rangle \cap \langle b\rangle = \emptyset$

4) Todo elemento de A está en una y sólo una clase

Demostraciones:

1) Todo elemento $a\in A$, por la propiedad (ℜ), verifica $a\ R\ a$, luego $a\in\langle a\rangle$, por lo que

$$\langle a\rangle \neq \emptyset$$

2) Tenemos que demostrar la igualdad de conjuntos $\langle x\rangle = \langle a\rangle$:

si $y\in\langle x\rangle$, entonces $y\ R\ x$, y por (𝔗) y por hipótesis, $y\ R\ a$, luego $y\in\langle a\rangle$

si $y\in\langle a\rangle$, entonces $y\ R\ a$, y por (𝔖), (𝔗) y por hipótesis, $y\ R\ x$, luego $y\in\langle x\rangle$

Esta propiedad significa que el elemento a que usamos para definir a la clase $\langle a\rangle$, no es un elemento privilegiado sino que cualquier otro elemento de la misma, sirve para definirla.

3) Por reducción al absurdo: supongamos que $\langle a\rangle \cap \langle b\rangle \neq \emptyset$; existirá un $x\in\langle a\rangle \cap \langle b\rangle$, esto implica que $x\in\langle a\rangle$ y $x\in\langle b\rangle$, entonces tenemos $x\ R\ a$ y $x\ R\ b$ y por (𝔖) y (𝔗) tenemos $a\ R\ b$, con lo que $a\in\langle b\rangle$ y esto implica $\langle a\rangle = \langle b\rangle$, que es una contradicción con la hipótesis. Esta propiedad significa que dos clases distintas son disjuntas, es decir que ningún elemento de A puede estar en dos clases a la vez.

4) En efecto si $x\in A$, entonces por ℜ, $x\in\langle x\rangle$, luego todo elemento de A está en alguna clase y por 3), sólo puede estar en una clase.

Tenemos que las clases son subconjuntos de A, no vacíos, disjuntos y cuya unión es A, lo que se resume diciendo que las clases constituyen una ***partición*** de A; ello establece una clasificación de los elementos de A, ya que todo elemento está en una y sólo una clase. Recíprocamente toda partición de A en subconjuntos no vacíos, disjuntos y tales que su unión es A definen una relación binaria sobre A

$$x\ R\ y:\ \text{"}x \text{ e } y \text{ pertenecen al mismo subconjunto"}$$

que es una relación de equivalencia cuyas clases son todos los subconjuntos de A.

La clasificación de los elementos de un conjunto en subconjuntos de elementos que verifican una propiedad determinada, es un instrumento muy usado en matemáticas para la construcción de nuevos objetos. Veámoslo en los ejemplos siguientes

Ejemplo II.2.2

Supongamos en geometría intuitiva el plano de puntos, con un sistema de coordenadas. Dados dos puntos $A(a_1,a_2)$ y $B(b_1,b_2)$, al par ordenado que forman lo denominamos ***vector fijo*** de origen A y extremo B; se representa por

$$\overrightarrow{AB}$$

llamando componentes del vector al par (b_1-a_1,b_2-a_2). En el conjunto V de vectores del plano asi definidos, consideramos la relación

$$\overrightarrow{AB}\ R\ \overrightarrow{CD}:\ \text{"}\overrightarrow{AB} \text{ y } \overrightarrow{CD} \text{ tienen las mismas componentes"}$$

Se demuestra fácilmente que es de equivalencia; una clase de equivalencia está formada por todos los vectores que tienen las mismas componentes y se denomina ***vector libre***. Como cualquier elemento puede representar la clase, un vector libre estará representado por cualquier vector fijo perteneciente a él y así se habla del vector libre $\boldsymbol{v}$ representado por el par de puntos A y B.

Ejemplo II.2.3

A partir del conjunto de los números naturales **N**, con las operaciones suma y producto y las propiedades que verifican, vamos a definir los números enteros. Sobre el conjunto $\mathbf{N}\times\mathbf{N}$ de pares de números naturales definimos la relación binaria

$$(x,y)\ R\ (m,n):\ \text{"}x+n\ = y+m\text{"}$$

Esta relación es

$(\mathfrak{R})$: $(x,y)\ R\ (x,y)$ pues $x+y = y+x$

$(\mathfrak{S})$: $(x,y)\ R\ (m,n) \ \Rightarrow\ x+n = y+m \ \Rightarrow\ m+y = n+x \ \Rightarrow\ (m,n)\ R\ (x,y)$

$(\mathfrak{T})$: $(x,y)\ R\ (m,n) \ \wedge\ (m,n)\ \mathrm{R}\ (a,b) \ \Rightarrow\ x+n = y+m \ \wedge\ m+b = a+n \ \Rightarrow$

$$\Rightarrow \quad (x+b)+(m+n) = (y+a)+(m+n) \quad \Rightarrow \quad x+b = y+a \quad \Rightarrow \quad (x,y)\ R\ (a,b)$$

La relación es pues de equivalencia, y una clase determinada es

$$\langle (a,b) \rangle = \{(x,y) \in \mathbf{N}\times\mathbf{N} \mid (x,y)\ R\ (a,b)\}$$

Como

$$(x,y)\ R\ (a,b) \text{ si y sólo si } x+b = y+a$$

esto implica que

$$x-y = a-b \quad \text{si} \quad a \geq b$$
$$y-x = b-a \quad \text{si} \quad a \leq b$$

pues la diferencia de números naturales exige que el minuendo sea mayor o igual que el sustraendo. Tendremos, por ejemplo

$$\langle (3,1) \rangle = \{(2,0),(3,1),(4,2),...\}$$
$$\langle (2,4) \rangle = \{(0,2),(1,3),(2,4),...\}$$
$$\langle (3,3) \rangle = \{(0,0),(1,1),(2,2),...\}$$

de forma que los pares de una clase verifican que el primer elemento o es mayor o igual, o es menor que el segundo y la diferencia entre el mayor y el menor es la misma. Por esta razón, para representar las clases asignaremos un signo +, si el primer elemento de los pares es mayor que el segundo, y – si es al revés, y un número, la diferencia entre el mayor y el menor de las componentes de cualquier par de la clase. La clase constituída por todos los pares que tienen sus elementos iguales se les designa por 0. Así, por ejemplo

$\langle (3,1) \rangle$ se designa por +2

$\langle (2,4) \rangle$ se designa por –2

$\langle (3,3) \rangle$ se designa por 0

Cada una de estas clases se denomina ***número entero***, y el conjunto de todos ellos forma el llamado conjunto **Z** de los números enteros.

El conjunto de todas las clases definidas por una relación de equivalencia se denomina ***conjunto cociente*** y se representa por

$$A/R = \{\langle a \rangle, \langle b \rangle, ...\}$$

Ejemplo II.2.4

Dada la relación definida en $\mathbf{R}\times\mathbf{R}$ por

$$(a,b)\ R\ (c,d) \text{ si y sólo si } a^2+b^2 = c^2+d^2$$

es de equivalencia

($\mathfrak{R}$) : $(a,b)\ R\ (a,b)$ ya que $a^2+b^2 = a^2+b^2$

($\mathfrak{S}$) : $(a,b)\ R\ (c,d) \ \Rightarrow\ a^2+b^2 = c^2+d^2 \ \Rightarrow\ c^2+d^2 = a^2+b^2 \ \Rightarrow\ (c,d)\ R\ (a,b)$

($\mathfrak{T}$) : $\left.\begin{array}{l}(a,b)\ R\ (c,d) \ \Rightarrow\ a^2+b^2 = c^2+d^2 \\ (c,d)\ R\ (e,f) \ \Rightarrow\ c^2+d^2 = e^2+f^2\end{array}\right| \ \Rightarrow\ a^2+b^2 = e^2+f^2 \ \Rightarrow\ (a,b)\ R\ (e,f)$

La clase de equivalencia definida por un par (a,b) es

$$\langle (a,b) \rangle = \{(x,y) \in \mathbf{R}\times\mathbf{R} \mid (x,y)\ R\ (a,b)\} = \{(x,y) \in \mathbf{R}\times\mathbf{R} \mid x^2+y^2 = a^2+b^2\}$$

cuya representación geométrica son los puntos de una circunferencia de centro el origen y radio $(a^2+b^2)^{1/2}$, siendo el conjunto cociente el de todas estas circunferencias.

Una relación binaria R sobre un conjunto A que verifica las propiedades reflexiva, antisimétrica y transitiva se denomina ***relación de orden*** porque, como veremos, permite ordenar los elementos del conjunto sobre el que está definida. En general, una relación de orden sobre un conjunto A se representa por el símbolo $\leq$, de modo que si a y b están relacionados, se escribe

$$a \leq b$$

leyéndose "a ***precede*** a b", o bien "b ***sigue*** a a "

Ejemplo II.2.5

En el conjunto $\mathbf{N}^*$ de los números naturales, excluído el 0, definimos la relación

$$x\ R\ y : \text{"}y \text{ es múltiplo de } x\text{"}$$

Verifica,

($\mathfrak{R}$) : $x\ R\ x$ pues $x = x\cdot 1$

($\mathfrak{A}$) : $(x\ R\ y \ \wedge\ y\ R\ x) \ \Rightarrow\ y = x\cdot m \ \wedge\ x = y\cdot n \ \Rightarrow\ x = (x\cdot n)\cdot m \ \Rightarrow$
$\Rightarrow\ x = x\cdot(m\cdot n) \ \Rightarrow\ m\cdot n = 1 \ \Rightarrow\ m = 1 \ \wedge\ n = 1 \ \Rightarrow\ x = y$

($\mathfrak{T}$) : $(x\ R\ y \ \wedge\ y\ R\ z) \ \Rightarrow\ y = x\cdot m \ \wedge\ z = y\cdot p \ \Rightarrow\ z = x\cdot(m\cdot p) \ \Rightarrow\ x\ R\ z$

siendo pues una relación de orden.

Ejemplo II.2.6

Sea U un conjunto referencial y $\mathfrak{P}(U)$ el conjunto de las partes o subconjuntos de U. Sobre $\mathfrak{P}(U)$ definimos la relación

$$A\ R\ B \text{ si y sólo si } A \subseteq B$$

Las propiedades de la inclusión hacen que sea ($\mathfrak{R}$), ($\mathfrak{A}$) y ($\mathfrak{T}$), es decir, relación de orden.

Ejemplo II.2.7

Sobre $\mathbf{N}$ definimos la relación

$$x\ R\ y \quad \text{si y sólo si} \quad (\exists n \in \mathbf{N})\ (y = x+n)$$

que es de orden ya que es

($\mathfrak{R}$) : $(\forall x \in \mathbf{N})\ (x\ R\ x)$ pues existe $0 \in \mathbf{N}$ tal que $x = x+0$

($\mathfrak{A}$) : $(x\ R\ y \ \wedge\ y\ R\ x) \ \Rightarrow\ (\exists n,m \in \mathbf{N})\ ((y = x+n \ \wedge\ x = y+m) \ \Rightarrow$
$\Rightarrow\ y = y+m+n \ \Rightarrow\ m+n = 0 \ \Rightarrow$
$\Rightarrow\ m = 0 \ \wedge\ n = 0 \ \Rightarrow\ x = y)$

($\mathfrak{T}$) : $(x\ R\ y \ \wedge\ y\ R\ z) \ \Rightarrow\ (\exists n,m \in \mathbf{N})\ ((y = x+n \ \wedge\ z = y+m) \ \Rightarrow$
$\Rightarrow\ z = x+(m+n) \ \Rightarrow\ x\ R\ z)$

que permite ordenar los elementos de $\mathbf{N}$; y así, p.ej., 7 "precede" a 8, pues existe el número natural, el 1, tal que $8 = 7+1$.

Las relaciones detalladas en los dos últimos ejemplos son ambas de orden, pero existe entre ellas una diferencia: en la relación de inclusión sobre $\mathfrak{P}(U)$ dados dos elementos $A,B \in \mathfrak{P}(U)$ puede ocurrir que A esté contenido en B, o bien que B esté contenido en A, o bien ninguna de las dos, es decir, puede que A y B no estén relacionados; sin embargo dados dos números naturales x e y siempre existirá otro número natural n tal que $x = y+n$ o bien que $y = x+n$, con lo cual $y\ R\ x$ o $x\ R\ y$, es decir, están relacionados. Si cualesquiera que sean a y b se verifica

$$a \leq b \quad \vee \quad b \leq a$$

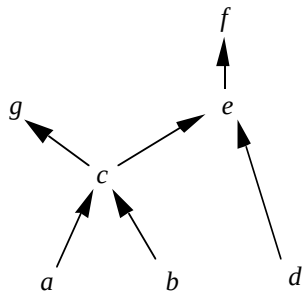
entonces diremos que $\leq$ es una ***relación de orden total***. Si por el contrario, existen elementos de A no relacionados entre sí hablaremos de ***orden parcial***.

Cuando sobre en conjunto A se ha definido una relación de orden diremos que A es un ***conjunto ordenado***, total o parcialmente. Es evidente que si A está ordenado por $\leq$, cualquier subconjunto $B \subseteq A$ está asimismo ordenado por $\leq$.

Una relación de orden puede representarse por un diagrama en árbol, en el que los elementos del conjunto son los "nudos" y las ramas son flechas entre dos elementos, tales que cuando uno precede al otro, el precedente está en un nivel inferior al precedido.

Ejemplo II.2.8

Sobre el conjunto $A = \{a,b,c,d,e,f,g\}$ el diagrama en árbol



representa una relación de orden en la que, por ejemplo, $c \leq g$, $c \leq e$ y $a \leq g$ a través de c y por la propiedad transitiva. La definición por extensión de la relación sería

$$G = \{(a,a),(b,b),(c,c),(d,d),(e,e),(f,f),(g,g),(a,c),(a,g),(a,e),$$

$$(a,f),(b,c),(b,g),(b,e),(b,f),(d,e),(d,f),(c,g),(c,e),(c,f),(e,f)\}$$

Con el fin de hacer más claro el diagrama no se dibujan flechas entre un elemento y él mismo pues se sobreentienden, al ser la relación forzosamente reflexiva.

La ordenación sobre un conjunto particulariza algunos de sus elementos que reciben las siguientes denominaciones:

$a \in A$ es ***primer elemento*** si y sólo si $(\forall x \in A)\ (a \leq x)$

$z \in A$ es ***último elemento*** si y sólo si $(\forall x \in A)\ (x \leq z)$

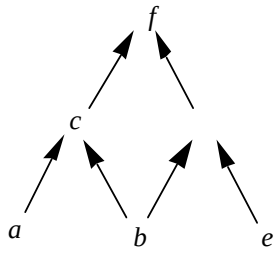
$m \in A$ es ***elemento minimal*** si y sólo si $(\forall x \in A)\ (x \leq m \ \Rightarrow \ x = m)$

$p \in A$ es ***elemento maximal*** si y sólo si $(\forall x \in A)\ (p \leq x \ \Rightarrow \ x = p)$

Primer elemento es pues el que precede a todos y último elemento el que sigue a todos; elemento minimal es aquel al que no le precede ninguno, excepto él mismo, y elemento maximal es aquel al que no le sigue ninguno, excepto él mismo.

Ejemplo II.2.9

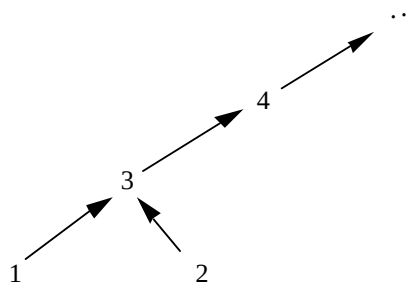
Sobre el conjunto $A = \{a,b,c,d,e,f\}$ ordenado por



no existe primer elemento, último elemento es f, que es también el único maximal,

mientras que elementos minimales lo son a, b y e.

Sobre el conjunto de los números naturales con la ordenación



no existen primer elemento ni último elemento ni tampoco maximales, siendo 1 y 2 elementos minimales.

Como resultados sobre estos elementos especiales tenemos

"a primer elemento implica que a es minimal; u último elemento implica que u es maximal"

lo que es inmediato a partir de las definiciones, y

"El primer elemento y el último, si existen, son únicos"

pues si a y a' fueran ambos primeros elementos tendríamos

$$\left.\begin{array}{l}\text{por ser } a \text{ primer elemento, } a \leq a' \\ \text{por ser } a' \text{ primer elemento, } a' \leq a\end{array}\right| \Rightarrow a = a' \quad \text{por la propiedad } (\mathcal{A})$$

Sea A un conjunto ordenado y B un subconjunto suyo; respecto de B, los elementos de A pueden ser

$c \in A$ es ***cota inferior*** de B si y sólo si $(\forall x \in B)\ (c \leq x)$

$t \in A$ es ***cota superior*** de B si y sólo si $(\forall x \in B)\ (x \leq t)$

de forma que las cotas inferiores y superiores son los elementos de A que preceden o siguen, respectivamente a todo elemento de B. Si las cotas son entre sí comparables cabe hablar de

$i \in A$ es ***ínfimo*** de B si y sólo si
$$\left|\begin{array}{l}i \text{ es cota inferior} \\ \quad \wedge \\ i \text{ sigue a toda otra cota inferior}\end{array}\right.$$

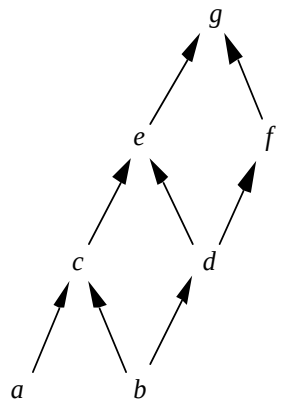
$s \in A$ es ***supremo*** de B si y sólo si
$$\left|\begin{array}{l}s \text{ es cota superior} \\ \quad \wedge \\ s \text{ precede a toda otra cota superior}\end{array}\right.$$

representándose respectivamente por $\inf(B)$ y $\sup(B)$ y que, de manera breve, se definen diciendo que son la mayor de las cotas inferiores y la menor de las cotas superiores.

Si $\inf(B) \in B$ se denomina ***mínimo***. Si $\sup(B) \in B$ se denomina ***máximo***.

Ejemplo II.2.10

En la ordenación



para el subconjunto $B = \{c,e,g\}$ tenemos

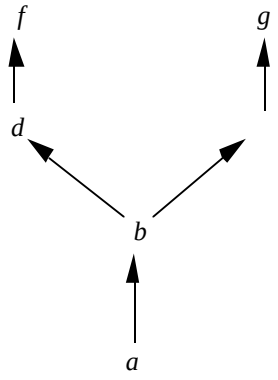
cotas superiores de B : g

cotas inferiores de B : a,b,c

$\sup(B) = g$, que es máximo de B

$\inf(B) = c$, que es mínimo de B

En la ordenación



para el subconjunto $B = \{d,c\}$ tenemos

cotas superiores de B : no hay

cotas inferiores de B : a,b

$\sup(B)$ no hay

$\inf(B) = b$

no existiendo ni el máximo ni el mínimo.

Ejercicios

II.10.- En el conjunto **R** se define la relación

$$a\ R\ b \quad \text{si y sólo si} \quad a-b \in \mathbf{Q}$$

Estudiar sus propiedades y, en el caso de ser de equivalencia hallar las clases y el conjunto cociente.

II.11.- Sea E el conjunto de los puntos de un plano, O un punto de E y $E^* = E-\{O\}$. Sobre E^* se define la relación binaria

$$P\ R\ Q \quad \text{si y sólo si} \quad P, O \text{ y } Q \text{ están alineados.}$$

Demostrar que es de equivalencia y hallar las clases de equivalencia.

II.12.- En **N** se define la siguiente relación binaria

$$a\ R\ b \quad \text{si y sólo si} \quad E(\sqrt{a}) = E(\sqrt{b})$$

Averiguar si es de equivalencia y, en caso afirmativo, definir las clases de equivalencia, cuántos elementos tienen y definir el conjunto cociente.

II.13.- Demostrar que la relación sobre **Q**

$$x\ R\ y \quad \text{si y sólo si} \quad x^2+x = y^2+y$$

es de equivalencia y hallar las clases y el conjunto cociente.

II.14.- Estudiar si las siguientes relaciones son de orden o de equivalencia, hallando en éste último caso las clases de equivalencia

a) En **R** , $x\ R\ y$ si y sólo si $(\exists\ n \in \mathbf{N})(x = 3n+y)$

b) En $\mathbf{R}^2$, $(x,y)\ R\ (x',y')$ si y sólo si $x\cdot y' = y\cdot x'$

c) En $\mathbf{R}-\{1\}$, $x\ R\ y$ si y sólo si $\dfrac{x^2}{x-1} = \dfrac{y^2}{y-1}$

d) En **R** , $x\ R\ y$ si y sólo si $x = 3+y$

e) En $\mathbf{R}-\{0\}$, $x\ R\ y$ si y sólo si $x+1/x = y+1/y$

II.15.- En el conjunto de los números complejos $\mathbf{C} = \{a+bi \mid a \in \mathbf{R} \ \wedge\ b \in \mathbf{R}\}$ se define la relación binaria

$$a+bi \ \le\ c+di \quad \text{si y sólo si} \quad a < c \ \vee\ (\ a = c \ \wedge\ b \le d\ )$$

Probar que es una relación de orden. ¿Es total o parcial?.

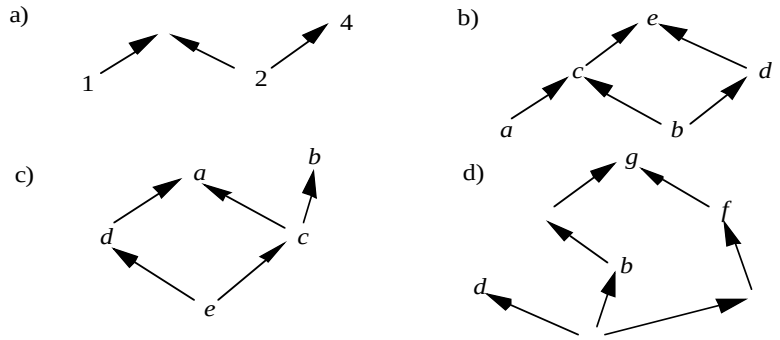
II.16.- En el conjunto A = {divisores de 90}, se define la relación binaria "es divisor de".

a) Demostrar que es una relación de orden. ¿Qué tipo de orden es?. Dibujar su diagrama en árbol.

b) Sea $B = \{3,5,15\} \subset A$, hallar las cotas superiores e inferiores, supremo e ínfimo, máximo y mínimo.

c) Hallar los elementos maximales y minimales de A y de $A-\{1,90\}$.

II.17.- Hallar el primer elemento, último elemento, maximales y minimales de los siguientes conjuntos ordenados por los grafos



II.18.- En el conjunto **Q** de los números racionales se define la relación binaria

$$x\ R\ y \quad \text{si y sólo si} \quad (\exists n \in \mathbf{N})\ (y = x+n)$$

a) Demostrar que R es una relación de orden y averiguar de que tipo.

c) ¿Está el subconjunto $C = \{1/2,2/3\}$ acotado superior o inferiormente?.

II.19.- En el conjunto **N** se considera la relación

$$a\ R\ b \quad \text{si y sólo si} \quad a \text{ divide a } b$$

a) Demostrar que es una relación de orden. ¿Qué tipo de orden es?.

b) Para el conjunto A = { 2,3,6,8,9,18 }

- Dibujar el diagrama con el orden inducido en A.
- Encontrar el sup (A) y el inf (A).
- Encontrar las cotas superiores e inferiores de A.
- Hallar max (A) y min (A), si existen.

II.20.- En el conjunto **Q** de los números racionales, ordenado por la relación $\leq$, hallar las cotas inferiores, superiores, ínfimo y supremo, máximo y mínimo de los subconjuntos

$$A = \{x \in \mathbf{Q} \mid x \geq 0 \ \wedge\ 1 \leq x^2 \leq 9\} \qquad B = \{x \in \mathbf{Q} \mid x \geq 0 \ \wedge\ 2 < x^2 \leq 9\}$$

II.3.- APLICACIONES

Un tipo especial de correspondencia, de enorme importancia en todos los campos de la matemática, es la aplicación o función, nombrada así de manera indistinta. Una correspondencia f entre dos conjuntos X e Y recibe el nombre de ***aplicación*** o ***función***, si a todo elemento del conjunto X le corresponde un solo elemento del conjunto Y; simbólicamente se escribe

$$(\forall x \in X)\ (\exists y \in Y \text{ único})\ (y = f(x))$$

Como notación y nomenclatura especiales se usan las siguientes:

$$\begin{aligned} f:\ & X \longrightarrow Y \\ & x \longrightarrow y = f(x) \end{aligned}$$

X : ***conjunto inicial*** o ***dominio***

Y : ***conjunto final***

$y = f(x)$:
- y es la ***imagen*** de x por f
- x es ***antiimagen*** de y por f

f : nombre de la aplicación

$f(a)$: imagen de un elemento $a \in X$

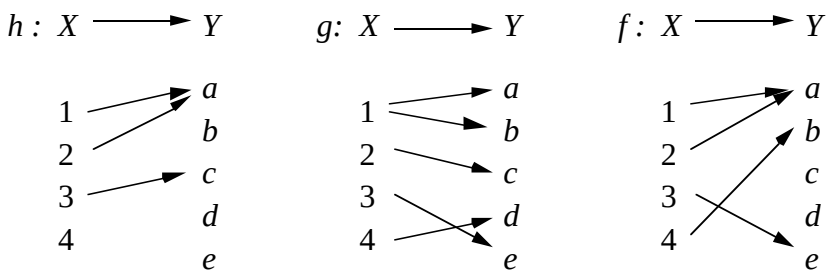
$f^{-1}(t)$: antiimágenes de un elemento $t \in Y$

Ejemplo II.3.1

Sean los conjuntos

$$X = \{1,2,3,4\} \quad \text{e} \quad Y = \{a,b,c,d,e\}$$

y las correspondencias entre X e Y definidas por los diagramas



Se verifica que

h no es aplicación pues 4 no tiene imagen

g no es aplicación pues 1 tiene dos imágenes

f es aplicación pues todo elemento de X tiene imagen única, siendo

dominio: $\{1,2,3,4\}$

conjunto final: $\{a,b,c,d,e\}$

a es imagen de 1: $a = f(1)$

2 es antiimagen de a : $2 = f^{-1}(a)$

Si los conjuntos tienen muchos elementos, la aplicación, no podrá ser definida por extensión sino mediante una función proposicional que, en el caso de tratarse de conjuntos numéricos, es muy frecuente que presente el aspecto de una fórmula que nos indica las operaciones que hay que realizar para hallar la imagen de un elemento.

Ejemplo II.3.2

Sean los conjuntos **N** y **Z**. La fórmula

$$y = 3x-4$$

en la que x representa una variable con valores de **N** e y una variable con valores de **Z**, define una función entre ambos conjuntos, pues para todo $x \in \mathbf{N}$ existe una sóla imagen, que es el entero resultante de efectuar las operaciones indicadas

$$\begin{aligned} f:\ \mathbf{N} &\longrightarrow \mathbf{Z} \\ x &\longrightarrow f(x) = 3x-4 \\ 0 &\longrightarrow f(0) = -4 \\ 1 &\longrightarrow f(1) = -1 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Sin embargo, entre los mismos conjuntos, la fórmula

$$f(x) = \sqrt{x-5}$$

no define una función, pues existen elementos de **N** sin imagen en **Z**, p.ej. 1 y 8

Una aplicación viene determinada por tres objetos

$$(X,Y,\ y = f(x)) \quad \left| \begin{array}{l} \text{Conjunto inicial o dominio : } X \\ \text{Conjunto final : } Y \\ \text{Pares de elementos correspondientes o fórmula : } y = f(x) \end{array} \right.$$

por lo cual es incorrecto decir que $f(x)$ es una aplicación, ya que es la imagen del elemento x, o bien que $y = f(x)$ es una aplicación, ya que una aplicación no la definen sólamente los pares de

elementos correspondientes, sino también los conjuntos inicial y final.

Sin embargo, cuando en Teoría de Funciones se trata con funciones reales de variable real es muy frecuente dar una función mediante una fórmula, con el fin de agilizar las definiciones. Esta imprecisión se salva conviniendo que, mientras no se diga lo contrario

a) el conjunto final de todas las funciones que se manejan es **R**.

b) el conjunto inicial es el subconjunto de **R** más amplio posible tal que al realizar las operaciones que indica la fórmula de la función, el resultado sea un número real.

Ejemplo II.3.3

Si decimos, sea la función $y = (9–x^2)^{1/2}$, en realidad nos referimos a la función

$$\begin{array}{ccc} [-3,3] & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longrightarrow & y = (9-x^2)^{1/2} \end{array}$$

pues $[-3,3]$ es el subconjunto de **R** más amplio para el cual $(9-x^2)^{1/2}$ da por resultado un número real.

Por las razones anteriores, la igualdad de aplicaciones se define así

$f = g$ si y sólo si son iguales

- sus conjuntos iniciales
- sus conjuntos finales
- sus pares : $(\forall x \in X)\ (f(x) = g(x))$

Una aplicación, al ser una correspondencia, tiene una representación gráfica en un diagrama cartesiano, formada por el conjunto de puntos

$$\Gamma = \{(x,f(x)) \mid x \in X\}$$

que para funciones reales de variable real formadas mediante funciones elementales, polinómicas, exponencial, trigonométricas,..., suelen ser puntos situados en una línea.

Ejemplo II.3.4

Las aplicaciones

$$\begin{array}{ccc} f: \mathbf{N} & \longrightarrow & \mathbf{Z} \\ x & \longrightarrow & y = 3x-4 \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} g: \mathbf{N} & \longrightarrow & \mathbf{Q} \\ x & \longrightarrow & y = 3x-4 \end{array}$$

son distintas pues, aunque sus pares coincidan, difieren en sus conjuntos finales. La representación gráfica de f es la recta

$$\Gamma = \{(x,y) \in \mathbf{N}\times\mathbf{Z} \mid y = 3x-4\}$$

Sea una aplicación

$$\begin{aligned} f:\ X &\longrightarrow Y \\ x &\longrightarrow y = f(x) \end{aligned}$$

y sean A un subconjunto de X y B un subconjunto de Y. De forma análoga a como hemos definido la imagen y antiimagen de un elemento, puede definirse la ***imagen de un subconjunto*** como el conjunto que forman las imágenes de sus elementos, es decir

$$f(A) = \{y \in Y \mid (\exists x \in A)\ (y = f(x))\}$$

En particular el conjunto $f(X)$ estará constituído por todas las imágenes, se denomina ***conjunto imagen*** y es un subconjunto del conjunto final Y, pudiendo coincidir con él. Llamaremos ***antiimagen de un subconjunto*** B por la aplicación f, al conjunto que forman las antiimágenes de sus elementos

$$f^{-1}(B) = \{x \in X \mid f(x) \in B\}$$

En particular se verifica

$$f^{-1}(Y) = X$$

ya que todos los elementos de X son antiimágenes de algún elemento de Y, por ser f una aplicación.

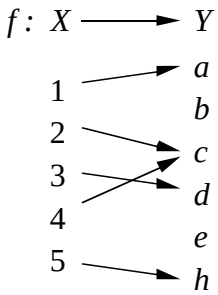
Definamos una correspondencia entre A e Y tal que

$$\begin{aligned} f_A:\ A &\longrightarrow Y \\ x &\longrightarrow f_A(x) = f(x) \end{aligned}$$

es decir, un elemento de A tiene por imagen en la nueva correspondencia f_A la misma que tenía en f. Evidentemente f_A es una aplicación, pues todos los elementos de A tienen imagen única, que se denomina ***restricción*** de f; a f se le denomina ***prolongación*** de f_A.

Ejemplo II.3.5

En la aplicación definida por



es

$$f(\{1,2,3\}) = \{a,c,d\}$$

$f(5) = h$, mientras que $f(\{5\}) = \{h\}$

$f(X) = \{a,c,d,h\}$, que es el conjunto imagen

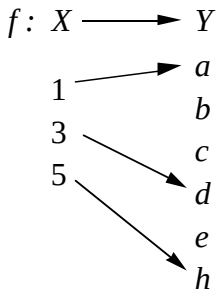
$$f(\emptyset) = \emptyset$$

$$f^{-1}(\{a,b,c\}) = \{1,2,4\}$$

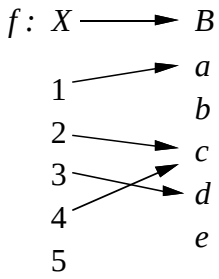
$$f^{-1}(\{b,e\}) = \emptyset$$

$$f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$$

Sea el subconjunto $A = \{1,3,5\}$; la correspondencia



es efectivamente una aplicación, que es la restricción f_A de f al conjunto A. Pero, asi como siempre puede definirse la restricción de f a un subconjunto de X, no puede hacerse lo mismo para un subconjunto de Y; por ejemplo, si $B = \{a,b,c,d,e\}$ al intentar definir la restricción



el elemento $5 \in X$ no tiene imagen y, por tanto, el resultado no es una aplicación.

En general, si en una aplicación restringimos el conjunto inicial, el resultado será una aplicación; pero si restringimos el conjunto final, generalmente hay que variar también el conjunto inicial para que todo elemento siga teniendo una imagen.

Las aplicaciones más sencillas que pueden definirse sobre dos conjuntos son las siguientes:

a) ***Aplicación constante***. Es la aplicación

$$\begin{aligned} f:\ X &\longrightarrow Y \\ x &\longrightarrow f(x) = b \end{aligned}$$

siendo b un cierto elemento de Y; todo elemento de X tiene la misma imagen y, por ello, recibe ese nombre.

b) ***Aplicación idéntica***. Es la aplicación de un conjunto en sí mismo tal que

$$\begin{aligned} I_X :\ X &\longrightarrow X \\ x &\longrightarrow I_X(x) = x \end{aligned}$$

todo elemento de X tiene por imagen él mismo.

c) ***Aplicación característica de un conjunto***. Sea un referencial E y A un subconjunto de E; se denomina aplicación característica de A a la siguiente

$$\begin{aligned} \phi_A :\ E &\longrightarrow \{0,1\} \\ x &\longrightarrow \phi_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{si } x \notin A \end{cases} \end{aligned}$$

La composición de correspondencias y la correspondencia inversa, vistas en la Sección II.1, definen nuevas aplicaciones en la forma que describiremos ahora. Sean las aplicaciones

$$\begin{aligned} f :\ X &\longrightarrow Y \\ x &\longrightarrow y = f(x) \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} g :\ Y &\longrightarrow Z \\ y &\longrightarrow z = g(y) \end{aligned}$$

se define como ***aplicación compuesta***

$$\begin{aligned} g\circ f :\ X &\longrightarrow Z \\ x &\longrightarrow (g\circ f)(x) = g(f(x)) \end{aligned}$$

a la que efectivamente, podemos dar el nombre de aplicación ya que, para cualquier $x \in X$ existe $f(x) \in Y$ único, pues f es una aplicación; por ser g una aplicación que actúa sobre Y, existe $g(f(x))$ único con lo que x tiene una única imagen. Por esto, el conjunto final de f debe coincidir con el inicial de g, o bien ser un subconjunto suyo. Tal como se han definido f y g, no existe la aplicación $f\circ g$ pues los elementos $g(y)$ al pertenecer a Z no tienen imagen mediante f; únicamente para aplicaciones

$$f :\ X \longrightarrow Y \qquad\qquad g :\ Y \longrightarrow X$$

pueden definirse tanto $f\circ g$ como $g\circ f$. La composición de aplicaciones puede ampliarse a más de dos aplicaciones siempre y cuando los conjuntos sobre los que están definidas verifiquen la anterior relación. Para

$$\begin{aligned} f :\ X &\longrightarrow Y \\ x &\longrightarrow y = f(x) \end{aligned} \qquad \begin{aligned} g :\ Y &\longrightarrow Z \\ y &\longrightarrow z = g(y) \end{aligned} \qquad \begin{aligned} h :\ Z &\longrightarrow T \\ z &\longrightarrow t = h(z) \end{aligned}$$

es posible definir la aplicación compuesta de las tres, asociándolas de dos en dos, lo que puede hacerse de dos formas diferentes, que dan la misma aplicación, es decir

$$h\circ(g\circ f) = (h\circ g)\circ f$$

En efecto, como

$$g\circ f:\ X \longrightarrow Z \qquad\qquad h\circ g:\ Y \longrightarrow T$$
$$x \longrightarrow (g\circ f)(x) = g(f(x)) \qquad\qquad y \longrightarrow (h\circ g)(y) = h(g(y))$$

entonces

$$h\circ(g\circ f):\ X \longrightarrow T$$
$$x \longrightarrow (h\circ(g\circ f))(x) = h((g\circ f)(x)) = h(g(f(x)))$$

$$(h\circ g)\circ f:\ X \longrightarrow T$$
$$x \longrightarrow ((h\circ g)\circ f)(x) = (h\circ g)(f(x)) = h(g(f(x)))$$

son aplicaciones iguales, por coincidir los conjuntos inicial y final y las imágenes de un elemento arbitrario $x\in X$.

Si componemos una aplicación con la aplicación idéntica el resultado es la misma aplicación; en efecto

a) Si

$$f:\ X \longrightarrow Y \qquad\qquad I_Y:\ Y \longrightarrow Y$$
$$x \longrightarrow y = f(x) \qquad\qquad y \longrightarrow I_Y(y) = y$$

entonces

$$I_Y\circ f:\ X \longrightarrow Y$$
$$x \longrightarrow (I_Y\circ f)(x) = I_Y(f(x)) = f(x)$$

con lo que $I_Y\circ f = f$

b) Si

$$f:\ X \longrightarrow Y \qquad\qquad I_X:\ X \longrightarrow X$$
$$x \longrightarrow y = f(x) \qquad\qquad x \longrightarrow I_X(x) = x$$

entonces

$$f\circ I_X:\ X \longrightarrow Y$$
$$x \longrightarrow (f\circ I_X)(x) = f(I_X(x)) = f(x)$$

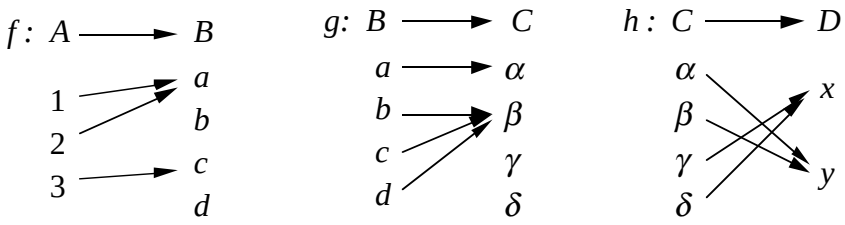
con lo que $f\circ I_X = f$

Ejemplo II.3.6

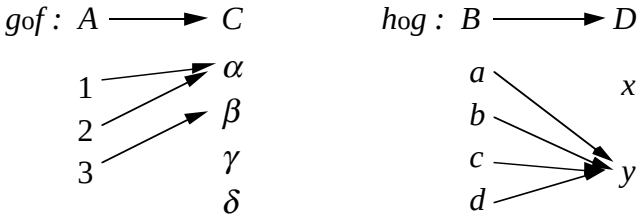
Sean los conjuntos

$$A = \{1,2,3\} \qquad B = \{a,b,c,d\} \qquad C = \{\alpha,\beta,\gamma,\delta\} \qquad D = \{x,y\}$$

y las aplicaciones



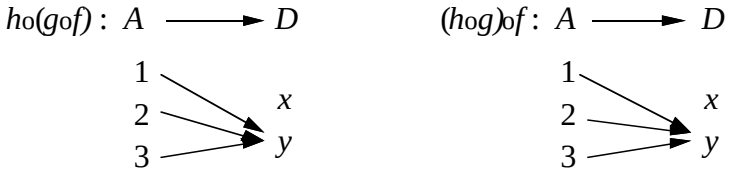
Según la definición de composición de aplicaciones



ya que, por ejemplo,

$$(g\circ f)(2) = g(f(2)) = g(a) = \alpha \qquad (h\circ g)(d) = h(g(d)) = h(\beta) = y$$

Además



ya que, por ejemplo

$$(h\circ(g\circ f))(3) = h((g\circ f)(3)) = h(\beta) = y$$

$$((h\circ g)\circ f)(3) = (h\circ g)(f(3)) = (h\circ g)(c) = y$$

comprobándose así la asociatividad de la composición de aplicaciones, antes demostrada.

Para las funciones definidas por fórmulas

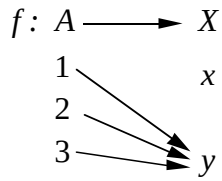
$$f: \mathbf{N} \longrightarrow \mathbf{Z} \qquad x \longrightarrow f(x) = 3x-4 \qquad\qquad g: \mathbf{Z} \longrightarrow \mathbf{R} \qquad x \longrightarrow g(x) = x^{2/3}$$

la función compuesta será

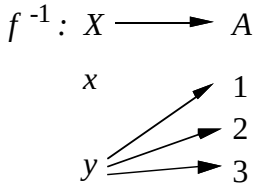
$$g\circ f: \mathbf{N} \longrightarrow \mathbf{R} \qquad x \longrightarrow (g\circ f)(x) = g(f(x)) = g(3x-4) = (3x-4)^{2/3}$$

A partir de la correspondencia inversa, no siempre puede definirse la función inversa ya que

p.ej. la correspondencia inversa de la función



es la correspondencia



que no es una función (p.ej. y tiene tres imágenes); es decir, no para toda función la correspondencia inversa es una función, existiendo únicamente tal función inversa para aquellas que verifican ciertas propiedades de las que vamos a hablar ahora.

Sea una aplicación

$$\begin{aligned} f:\ X &\longrightarrow Y \\ x &\longrightarrow y = f(x) \end{aligned}$$

Diremos que f es ***inyectiva*** cuando a elementos distintos de X siempre corresponden imágenes distintas

$$f \text{ inyectiva} \ \text{ si y sólo si } \ (\forall x_1, x_2 \in X)\ (x_1 \neq x_2 \ \Rightarrow \ f(x_1) \neq f(x_2))$$

o, sustituyendo la implicación por su contrarrecíproca

$$f \text{ inyectiva} \ \text{ si y sólo si } \ (\forall x_1, x_2 \in X)\ (f(x_1) = f(x_2) \ \Rightarrow \ x_1 = x_2)$$

o, mirando desde el conjunto final, si sus elementos tienen como máximo una antiimagen.

Diremos que una aplicación es ***sobreyectiva*** o ***exhaustiva*** cuando todos los elementos del conjunto final tienen como mínimo una antiimagen

$$f \text{ sobreyectiva} \ \text{ si y sólo si } \ (\forall y \in Y)\ (\exists x \in X)\ (y = f(x))$$

lo que equivale a que

$$f(X) = Y$$

es decir, coinciden los conjuntos final e imagen.

Diremos que una aplicación es ***biyectiva*** cuando verifica las anteriores

$$f \text{ biyectiva} \ \text{ si y sólo si } \ f \text{ inyectiva} \ \wedge \ f \text{ sobreyectiva}$$

lo cual, respecto de los elementos del conjunto final, significa

$$f \text{ biyectiva} \text{ si y sólo si } (\forall y \in Y)\ (\exists x \in X \text{ único})\ (y = f(x))$$

es decir, todo elemento del conjunto final tiene una antiimagen. Una aplicación biyectiva se denomina ***biyección***.

Ejemplo II.3.7

Sean las funciones

$$f:\ \mathbf{N} \longrightarrow \mathbf{Z} \qquad\qquad g:\ \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}^+$$
$$x \longrightarrow y = (x+3)^2 \qquad\qquad x \longrightarrow y = (x+3)^2$$

f es inyectiva, ya que sobre **N**

$$f(x_1) = f(x_2) \ \Rightarrow\ (x_1+3)^2 = (x_2+3)^2 \ \Rightarrow\ x_1+3 = x_2+3 \ \Rightarrow\ x_1 = x_2$$

y sin embargo g no lo es, ya que sobre **R**

$$g(x_1) = g(x_2) \ \Rightarrow\ (x_1+3)^2 = (x_2+3)^2 \ \Rightarrow\ (x_1+3 = x_2+3 \ \vee\ x_1+3 = -(x_2+3)) \ \Rightarrow$$
$$\Rightarrow\ (x_1 = x_2 \ \vee\ x_1 = -x_2-6)$$

y hay números que tienen la misma imagen, por ejemplo 2 y −8. En ambas aplicaciones, las antiimágenes de un elemento a del conjunto final se obtienen a través de la ecuación

$$a = (x+3)^2 \ \Rightarrow\ x = a^{1/2}-3$$

por lo que f no es sobreyectiva, pues −1 no tiene antiimagen, y g si lo es, ya que cualquier número real positivo tiene raíz cuadrada, que es un número real.

La composición de aplicaciones conserva la inyectividad, sobreyectividad y biyectividad, es decir, si

$$f:\ X \longrightarrow Y \qquad\qquad g:\ Y \longrightarrow Z$$
$$x \longrightarrow y = f(x) \qquad\qquad y \longrightarrow z = g\,(y)$$

se verifica

a) f y g inyectivas implica $g \circ f$ inyectiva; en efecto

$$(g \circ f)(x_1) = (g \circ f)(x_2) \ \Rightarrow\ g(f(x_1)) = g(f(x_2)) \ \Rightarrow\ f(x_1) = f(x_2) \ \Rightarrow\ x_1 = x_2$$

b) f y g sobreyectivas implica $g \circ f$ sobreyectiva; en efecto

$$(g \circ f)(X) = g(f(X)) = g(Y) = Z$$

c) f y g biyectivas implica $g \circ f$ biyectiva, por las dos anteriores.

Hemos visto que, en general, la correspondencia inversa de una aplicación no es una aplicación y, por ello, no todas las aplicaciones tienen aplicación inversa, sin embargo si

$$f:\ X \longrightarrow Y$$

es biyectiva, todo elemento del conjunto final Y tiene una sola antiimagen en Y, por lo que en la correspondencia inversa

$$f^{-1}:\ Y \longrightarrow X$$

todo elemento del conjunto inicial Y tiene una sola imagen en X por lo que f^{-1} es también una aplicación. Además f^{-1} es biyectiva ya que los elementos de su conjunto final X tienen una sola antiimagen, que es la imagen única que tenían en f. Tenemos pues que si

$$\begin{aligned} f:\ X &\longrightarrow Y \\ x &\longrightarrow y = f(x) \end{aligned}$$

es biyectiva, existe la aplicación inversa

$$\begin{aligned} f^{-1}:\ Y &\longrightarrow X \\ y &\longrightarrow x = f^{-1}(y) \end{aligned}$$

Ejemplo II.3.8

La aplicación

$$\begin{aligned} f:\ \mathbf{N} &\longrightarrow \mathbf{Z} \\ x &\longrightarrow y = 2x-5 \end{aligned}$$

es inyectiva ya que

$$f(x_1) = f(x_2) \ \Rightarrow\ 2x_1-5 = 2x_2-5 \ \Rightarrow\ 2x_1 = 2x_2 \ \Rightarrow\ x_1 = x_2$$

no es sobreyectiva pues, p.ej.,-6 no tiene antiimagen

$$-6 = 2x-5 \ \Rightarrow\ 2x = -1 \ \Rightarrow\ x = -1/2 \notin \mathbf{N}$$

y así f no es biyectiva, luego no tiene aplicación inversa. Vamos a atribuir a f una aplicación inversa, que va a ser la inversa de la restricción biyectiva de f sobre subconjuntos apropiados de **N** y **Z**. Como f es inyectiva no habrá que modificar el conjunto inicial **N**, pero como no es biyectiva habrá que quitar del conjunto final los elementos sin antiimagen; si definimos

$$B = \{y \in \mathbf{Z} \mid y \text{ impar } \wedge\ y \geq -5\}$$

la restricción

$$\begin{aligned} f_B:\ \mathbf{N} &\longrightarrow B \\ x &\longrightarrow y = 2x-5 \end{aligned}$$

es biyectiva, luego podemos definir su inversa que será una aplicación

$$f_B^{-1}:\ B \longrightarrow \mathbf{N}$$

tal que la imagen de un elemento $y \in B$ es la antiimagen que tenía en f

$$y = 2x-5 \ \Rightarrow\ x = (y+5)/2$$

y si seguimos utilizando la letra x para los elementos del conjunto inicial, B, e y para los elementos del conjunto final **N**, tendremos que la aplicación inversa de f, es

$$\begin{aligned} f^{-1}:\ B &\longrightarrow \mathbf{N} \\ x &\longrightarrow y = (x+5)/2 \end{aligned}$$

Respecto a la composición de una aplicación consigo misma se verifican las dos propiedades siguientes:

a) $f:\ X \longrightarrow Y$ biyectiva implica $f^{-1}\circ f = I_X$ y $f\circ f^{-1} = I_Y$

En efecto si

$$\begin{aligned} f:\ X &\longrightarrow Y \\ x &\longrightarrow y = f(x) \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} f^{-1}:\ Y &\longrightarrow X \\ y &\longrightarrow x = f^{-1}(y) \end{aligned}$$

será

$$\begin{aligned} f^{-1}\circ f:\ X &\longrightarrow X \\ x &\longrightarrow (f^{-1}\circ f)(x) = f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(y) = x \end{aligned}$$

y análogamente se prueba que $f\circ f^{-1} = I_Y$.

b) $f:\ X \longrightarrow Y$, $g:\ Y \longrightarrow Z$ biyectivas implica $(g\circ f)^{-1} = f^{-1}\circ g^{-1}$

La demostración consiste en probar que $(g\circ f)^{-1}$ y $f^{-1}\circ g^{-1}$ son dos aplicaciones con los mismos conjuntos inicial y final y las mismas imágenes para cada elemento

$$g\circ f:\ X \longrightarrow Z \text{ biyectiva} \quad \text{implica que existe} \quad (g\circ f)^{-1}:\ Z \longrightarrow X$$

y como

$$g^{-1}:\ Z \longrightarrow Y \qquad\qquad f^{-1}:\ Y \longrightarrow X$$

tendremos

$$f^{-1}\circ g^{-1}:\ Z \longrightarrow X$$

La imagen de un elemento cualquiera del conjunto inicial Z será

$$(g\circ f)^{-1}(z) = x \ \Leftrightarrow\ (g\circ f)(x) = z \ \Leftrightarrow\ g(f(x)) = z \ \Leftrightarrow\ f(x) = g^{-1}(z) \ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad x = f^{-1}(g^{-1}(z)) \quad \Leftrightarrow \quad x = (f^{-1} \circ g^{-1})(z)$$

por lo cual

$$(\forall z \in Z)\ ((g \circ f)^{-1}(z) = (f^{-1} \circ g^{-1})(z))$$

y la demostración queda completada.

Ejercicios

II.21.- Siendo A un subconjunto fijo de E, se consideran las aplicaciones

$$f:\ \mathfrak{P}(E) \longrightarrow \mathfrak{P}(E) \qquad X \longrightarrow Y = A \cap X$$

$$g:\ \mathfrak{P}(E) \longrightarrow \mathfrak{P}(E) \qquad X \longrightarrow Z = A \cup X$$

Hallar $f(\mathfrak{P}(E))$, $\bigcap g(\mathfrak{P}(E))$ y $\bigcup g^{-1}(Z)$.

II.22.- Representar gráficamente las funciones reales de variable real definidas por las fórmulas

$f(x) = E[x]$ $\qquad g(x) = x - E[x]$ $\qquad h(x) = E[x] + (x - E[x])^2$, para $x \in [0,4]$

$$i(x) = E[x](x - E[x]) \qquad j(x) = (-1)^{E[x]}(x - E[x])$$

$k(x) = E[x]\operatorname{sen} x$, para $x \in [-2,2]$ $\qquad l(x) = x^2 - E[x]$, para $x \in [-2,2]$

II.23.- Sean las funciones reales de variable real siguientes:

$$f(x) = 1 - x \qquad g(x) = \frac{1}{x} \qquad h(x) = \frac{x}{1-x}$$

Hallar los campos de existencia de las funciones $h \circ (f \circ g)$, $g \circ (f \circ h)$ así como sus fórmulas.

II.24.- Dada la aplicación de $\mathbf{R} - \{1\}$ en $\mathbf{R}$ definida por

$$f(x) = \frac{x+2}{x-1}$$

calcular $f(A)$ y $(f \circ f)(A)$ en los siguientes casos

a) $A = \{x \in \mathbf{R} \mid 2 \le x \le 3\}$.
b) $A = \{x \in \mathbf{R} \mid 0 \le x \le 3\}$.
c) $A = \{x \in \mathbf{R} \mid x \ge 1\}$.
d) $A = \{x \in \mathbf{R} \mid x < -9\}$.

II.25.- Se consideran las aplicaciones de $\mathbf{R} - \{0,1\}$ en $\mathbf{R}$ dadas por

$$f(x) = x \qquad g(x) = \frac{1}{x} \qquad h(x) = x - 1$$

$$i(x) = \frac{1}{1-x} \qquad j(x) = \frac{x}{x-1} \qquad k(x) = \frac{x-1}{x}$$

Calcular todas las posibles composiciones entre ellas.

II.26.- Clasificar las siguientes funciones

$$f: \mathbf{N} \longrightarrow \mathbf{N} \qquad x \longrightarrow \text{resto de dividir por 5} \qquad\qquad g: \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R} \qquad (x,y) \longrightarrow x-y$$

$$h: \mathbf{N} \longrightarrow \mathbf{N} \qquad x \longrightarrow \text{m.c.d}\,(8,x) \qquad i: \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}^2 \qquad x \longrightarrow (x,-x) \qquad j: \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}^2 \qquad (x,y) \longrightarrow (x, xy-y^3)$$

$$k: \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R} \qquad (x,y) \longrightarrow x-yx \qquad l: \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}^2 \qquad x \longrightarrow (3x,-x^{1/3}) \qquad m: \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{Z} \qquad (x,y) \longrightarrow E(x^2+y^2)$$

$$n: \mathbf{R}^+ \longrightarrow \mathbf{R}^2 \qquad x \longrightarrow (x,\sqrt{x}) \qquad\qquad p: \mathbf{R}^2-\{x^2+y^2 < 1\} \longrightarrow \mathrm{R} \qquad (x,y) \longrightarrow \sqrt{x^2+y^2-1}$$

$$p \circ n \qquad g \circ j \qquad l \circ m \qquad g \circ i \qquad i \circ g$$

II.27.- Sea f una aplicación de **Z** sobre **Z** definida por $f(x) = x^2$. Sean los subconjuntos

$$A = \{-3,-2,0,3,4,9\} \qquad B = \{-1,0,4,7,9,16,81\}$$

a) Averiguar si $f_A : A \longrightarrow B$ es una aplicación.

b) Encontrar una restricción f_A que sea biyectiva.

II.28.- Encontrar una restricción biyectiva de las siguientes funciones definidas en **R** y definir sus inversas

$$f(x) = \text{sen } x \qquad g(x) = x^2-4x+3 \qquad h(x) = \cos x \qquad i(x) = \text{tg } x$$

$$j(x) = \frac{2x+2}{x-3} \qquad k(x) = \frac{x}{1-x}$$

II.29.- Sean dos conjuntos E y F, A y B subconjuntos de E, C y D subconjuntos de F y una aplicación $f : E \longrightarrow F$. Demostrar

a) $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$

b) $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$

c) $f^{-1}(C \cap D) = f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D)$

d) $(f \circ f^{-1})(C) = C \cap f(E)$

EJERCICIOS DE RECAPITULACION

II.30.- Averiguar las propiedades de las siguientes relaciones binarias:

a) $(a,b)\ R\ (c,d)$ si y sólo si $a\cdot d = b\cdot c$, sobre $\mathbf{N}\times\mathbf{N}$.

b) $(a,b)\ R\ (c,d)$ si y sólo si $a+d = b+c$, sobre $\mathbf{Z}\times\mathbf{Z}$.

c) $a\ R\ b$ si y sólo si $a(a+1) = b(b+1)$, sobre $\{-3,-2,-1,0,1,2\}$.

d) $a\ R\ b$ si y sólo si $a-b$ es múltiplo de 6, sobre $\mathbf{Z}$.

II.31.- Estudiar las siguientes relaciones binarias definidas en el conjunto de puntos de $\mathbf{R}^2$

a) $(x_1,y_1)\ R\ (x_2,y_2) \iff x_1 = x_2$

b) $(x_1,y_1)\ R\ (x_2,y_2) \iff y_1-2x_1 = y_2-2x_2$

En caso de que alguna sea de equivalencia, dar una interpretación geométrica de las clases.

II.32.- Determinar las relaciones binarias que pueden definirse sobre un conjunto con dos elementos $\{a,b\}$. Sobre un conjunto E de cardinal n, ¿cuántas relaciones binarias reflexivas pueden definirse? y ¿cuántas reflexivas y simétricas?.

II.33.- Sean R y S dos relaciones binarias definidas sobre un conjunto A. Evaluar los siguientes teoremas:

R transitiva implica $R \circ R = R$

(R transitiva $\wedge$ S transitiva) implica $R \cap S$ transitiva

(R antisimétrica $\wedge$ S antisimétrica) implica $R \cup S$ antisimétrica

(R reflexiva $\wedge$ S reflexiva) implica ($R \cup S$ reflexiva $\wedge$ $R \cap S$ reflexiva)

(R simétrica $\wedge$ R antisimétrica) implica R reflexiva

(R simétrica $\wedge$ S simétrica) implica $R \circ S$ simétrica

II.34.- Sea R una relación de equivalencia definida en un conjunto A, y sea $B \subseteq A$ no vacío. Demostrar que $R \cap (B \times B)$ es una relación de equivalencia en B.

II.35.- En el conjunto $A = \{1,2,3,...,q\}$, con $q \in \mathbf{N}$, se define la siguiente relación:

$a\ R\ b$ si y sólo si m.c.d (a,p) = m.c.d (b,p) , para cierto $p \in \mathbf{N}$

a) Probar que es de equivalencia.

b) En el caso que $q = 13$ y $p = 18$ dar el conjunto cociente A/R.

II.36.- En $\mathbf{R}^+\times\mathbf{R}^+$ definimos la relación

$(a,b)\ R\ (c,d)$ si y sólo si $\log_3 a+\log_3 b = \log_3 c+\log_3 d$

Probar que es de equivalencia, hallar el conjunto cociente y dar, si es posible, una interpretación geométrica de las clases de equivalencia.

II.37.- Sobre el conjunto de puntos interiores a la circunferencia unidad $x^2+y^2 = 1$ se define la siguiente relación binaria

$$P(a,b)\ R\ Q(c,d) \quad \text{si y sólo si} \quad a+d = b+c$$

Demostrar que es de equivalencia y representar gráficamente las clases.

II.38.- En el conjunto de los puntos del plano se define la relación

$$P(a,b)\ R\ Q(c,d) \quad \text{si y sólo si} \quad ab = cd$$

a) Demostrar que R es de equivalencia.

b) A qué clase pertenecen los elementos (3,0),(2,1) y (x,y).

c) Describrir geométricamente las clases de equivalencia.

II.39.- En $\mathbf{Z}(\sqrt{3}) = \{a+b\sqrt{3} \mid a,b\in \mathbf{Z}\}$, se define la siguiente relación binaria

$$\forall x,y\in \mathbf{Z}(\sqrt{3}), \quad x\ R\ y \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x-y}{3}\in \mathbf{Z}(\sqrt{3})$$

Estudiar si es o no una relación de equivalencia. En caso afirmativo, hallar las clases de equivalencia, designando cada clase por su representante más sencillo, y el conjunto cociente.

II.40.- Si R y S son relaciones de equivalencia sobre A. ¿Lo es también $R \circ S$?.

II.41.- Una relación binaria sobre un conjunto E es circular si

$$(\forall x\in E)\ (\forall y\in E)\ (\forall z\in E)\ ((x\ R\ y\ \wedge\ y\ R\ z)\ \Rightarrow\ z\ R\ x)$$

a) Una relación de equivalencia, ¿es circular?.

b) Una relación reflexiva y circular, ¿es de equivalencia?.

II.42.- En $\mathbf{R}$ se define la siguiente relación binaria

$$x\ R\ y \ \Leftrightarrow\ x = y\ \vee\ x+y = 3$$

a) Demostrar que R es una relación de equivalencia.

b) Calcular la clase de equivalencia del número 1.133.

c) Hallar el conjunto cociente.

II.43.- Sean R y S relaciones binarias definidas sobre $\mathbf{Z}$

$$a\ R\ b \ \Leftrightarrow\ |b-a| = 2i \quad \text{con} \quad i\in \mathbf{N} \text{ par}$$

$$a\ R\ b \ \Leftrightarrow\ |b-a| = 2p \quad \text{con} \quad p \in \mathbf{N} \text{ impar}$$

Averiguar si son relaciones de equivalencia.

II.44.- Sea E un conjunto y $\mathfrak{R}$ el conjunto de las relaciones de equivalencia definidas sobre E.

a) Siendo $R_1, R_2 \in \mathfrak{R}$ sea la relación $R_1 \cap R_2$. Demostrar que es de equivalencia y que una clase de equivalencia de $R_1 \cap R_2$ es la intersección de una clase de equivalencia de R_1 y otra de R_2.

b) Demostrar que $R_1 \cup R_2$ es de equivalencia.

c) Diremos que R_1 es más fina que R_2 si

$$(\forall x,y \in E)\ (x\ R_1\ y\ \Rightarrow\ x\ R_2\ y)$$

Demostrar que esta relación de ser más fina es una relación de orden sobre $\mathfrak{R}$. ¿Qué tipo de orden es?. Hallar los elementos minimales, maximales, primero y último.

II.45.- Hallar todas las relaciones de orden y de equivalencia que pueden definirse sobre el conjunto $A = \{a,b\}$.

II.46.- Se define sobre $\mathbf{Z}\times\mathbf{Z}$ la relación binaria

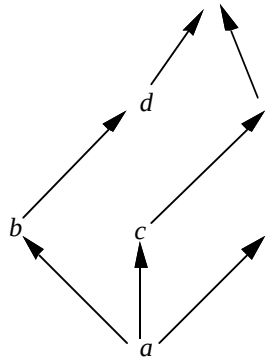
$$(a,b)\ R\ (c,d) \ \Leftrightarrow\ (a-c)+\lambda(b-d) \geq 0 \qquad \text{siendo}\ \ \lambda \in \mathbf{R}$$

a) Estudiarla para $\lambda = 1$, $\lambda = \frac{1}{2}$ y $\lambda = \sqrt{2}$.

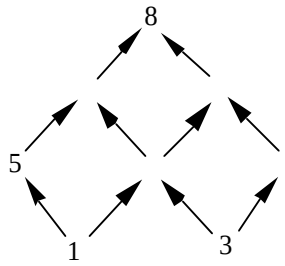
b) ¿Para qué valores de $\lambda \in \mathbf{R}$ es una relación de orden?. ¿Qué tipo de orden es?.

II.47.- Hallar las cotas, supremo, ínfimo, máximo y mínimo de los subconjuntos siguientes

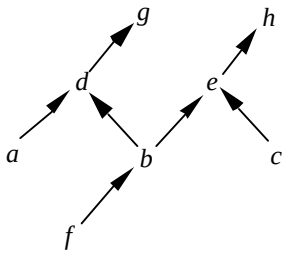
a) $\{b,c,d,e,f\}$ subconjunto de



b) {5,2}, {1,3}, {4,5,7}, {3,5,2}, {1,2,4,7} y {5}, subconjuntos de



c) $\{d,c,f\}$, $\{a,c,g\}$ y $\{a\}$, subconjuntos de



II.48.- En $\mathcal{P}(E)$ ordenado por $\subseteq$, hallar los minimales, maximales, primer y último elemento.

II.49.- En $(\mathbf{R}, \leq)$ sean los subconjuntos

$$A = \{x \in \mathbf{R} \mid x = (1+1/n)^n \text{ con } n \in \mathbf{N}\}$$
$$B = \{x \in \mathbf{R} \mid x = 1/m+1/n \text{ con } m,n \in \mathbf{N}\}$$
$$C = \{x \in \mathbf{R} \mid x = (1 \pm 1/n)^n \text{ con } n \in \mathbf{N}\}$$
$$D = \left\{x \in \mathbf{R} \mid x = \frac{1}{m} + \frac{1}{n} + \frac{1}{p} \text{ con } m,n,p \in \mathbf{N}\right\}$$
$$E = \{x \in \mathbf{R} \mid x^2+6x+5 \leq 0\}$$
$$F = \bigcup_{n \in \mathbf{N}} \left[\frac{1}{n}, 3 - \frac{1}{n}\right]$$

Hallar los supremos e ínfimos de estos conjuntos y averiguar si son máximos o mínimos.

II.50.- En $\mathbf{R}^2$ se define la siguiente relación binaria

$$(a,b)\ R\ (c,d) \iff a \leq c \text{ y } b \leq d$$

Demostrar que es una relación de orden. ¿Qué tipo de orden es?. Hallar las cotas, supremo, ínfimo, máximo y mínimo del subconjunto

$$A = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2+y^2 \leq 1\}$$

II.51.- En el conjunto $\mathbf{N}$ de los números naturales se define la relación $a\ R\ b$ si y sólo si la cifra que indica las unidades de a es menor que la cifra que indica las unidades de b o, si coinciden, la cifra de las decenas de a es menor que las decenas de b y así

sucesivamente, o bien si $a = b$. Demostrar que es una relación de orden. ¿Qué tipo de orden es?, ¿existe primer elemento?, ¿existe último elemento?.

II.52.- Determinar los extremos superiores e inferiores de los siguientes conjuntos, indicando si pertenecen o no al conjunto:

a) $1+(-1)^n+(-1)^n / n$.

b) $1+(-1/2)^n$.

c) Conjunto de los números de parte entera 0 y parte decimal formada por un número finito de doses y treses.

d) $1/m+1/n$ con $m,n \in \mathbf{N}^*$.

II.53.- Sea A un conjunto ordenado por la relación R. Averiguar si son ciertos los siguientes enunciados

a) A parcialmente ordenado implica que existan primer y último elemento.

b) A totalmente ordenado implica que existan primer y último elemento.

c) R^{-1} es una relación de orden sobre A.

d) a primer elemento en R implica a último elemento en R^{-1}.

e) b último elemento en R implica b primer elemento en R^{-1}.

f) a primer elemento implica a único minimal.

g) b último elemento implica b único maximal.

h) Si A es finito y R relación de orden parcial, entonces A tiene minimales y maximales.

II.54.- Si M y N son dos conjuntos finitos con m y n elementos, respectivamente, ¿cuántas correspondencias existen entre M y N y cuántas de ellas son aplicaciones?.

II.55.- Sean f y g dos aplicaciones de $\mathbf{R}^3$ en $\mathbf{R}^3$ definidas por

$$f(x,y,z) = (3x-y,0,z)$$

$$g(x,y,z) = (x-y,z+y,x)$$

Hallar $f \circ g$, $g \circ f$, $f+g$ y $3f^2-2g^3$.

II.56.- Siendo f una aplicación de E en F, decir qué significan las proposiciones siguientes:

a) $(\forall x \in E)\ (\exists y \in F)\ (y = f(x))$.

b) $(\exists y \in F)\ (\forall x \in E)\ (y = f(x))$.

c) $(\forall y \in F)\ (\exists x \in E)\ (y = f(x))$.

d) $\neg(\exists x \in E)\ (\forall y \in F)\ (y = f(x))$.

II.57.- Sean dos conjuntos E y F, A y B subconjuntos de E, C y D subconjuntos de F y una

aplicación $f: E \longrightarrow F$. Demostrar

a) $A \subseteq f^{-1}(f(A))$
b) $f(A-B) \supseteq f(A)-f(B)$
c) $f^{-1}(C-D) = f^{-1}(C)-f^{-1}(D)$

II.58.- Sea S un conjunto finito y una aplicación $f: S \longrightarrow S$. Demostrar que

a) f sobreyectiva implica f inyectiva.
b) f inyectiva implica f sobreyectiva.
c) Si S no es finito a) y b) son falsas.

II.59.- Sea una aplicación $f: A \longrightarrow B$

a) Demostrar que f es sobreyectiva si y sólo si $(\forall B_1 \in \mathcal{P}(B))\ (f(f^{-1}(B_1)) = B_1)$

b) Se define la siguiente relación en $\mathcal{P}(B)$:

$$B_1 \ R \ B_2 \quad \text{si y sólo si} \quad f(f^{-1}(B_1)) \subseteq B_2$$

Demostrar que es una relación de orden si y sólo si f es sobreyectiva.

II.60.- Sea E el conjunto de los subconjuntos finitos de $\mathbf{N}$ y f una aplicación de E en $\mathbf{N}$ tal que

$$f(A) = 0\ , \quad \text{si } A = \emptyset \qquad\qquad f(A) = \sum_{x \in A} x\ , \quad \text{si } A \neq \emptyset$$

a) Calcular $f(\{0,1,2,3,...,n\})$.
b) Clasificar f.
c) Calcular las antiimágenes de 3.

II.61.- Dada la función

$$\begin{aligned} f: \mathbf{R}^+ &\longrightarrow \mathbf{R} \\ x &\longrightarrow f(x) = x/x+1 \end{aligned}$$

a) Hallar $f(\mathbf{R}^+)$.
b) Clasificar f.
c) Calcular $f^n = f \circ f \circ f \circ \overset{n}{\ldots} \circ f$, y clasificarla.
d) Hallar $\bigcap_{n \in \mathbf{N}} f^n(\mathbf{R}^+)$.

II.62.- Sea la aplicación

$$\begin{aligned} f: A &\longrightarrow B \\ x &\longrightarrow f(x) \end{aligned}$$

y sean los subconjuntos $X_1 \subseteq A$, $X_2 \subseteq A$, $Y_1 \subseteq B$, $Y_2 \subseteq B$; demostrar

a) $f(\emptyset) = \emptyset$.

b) $f^{-1}(Y_1) = \emptyset$ implica $Y_1 = \emptyset$.

c) $X_1 \subseteq X_2$ implica $f(X_1) \subseteq f(X_2)$.

d) $f^{-1}(Y_1 \cap Y_2) = f^{-1}(Y_1) \cap f^{-1}(Y_2)$.

e) $f(X_1 \cap X_2) \subseteq f(X_1) \cap f(X_2)$ y si f es inyectiva, $f(X_1 \cap X_2) = f(X_1) \cap f(X_2)$.

f) $f^{-1}(Y_1 \cup Y_2) = f^{-1}(Y_1) \cup f^{-1}(Y_2)$.

g) $f(X_1 \cup X_2) = f(X_1) \cup f(X_2)$.

II.63.- Demostrar que no existe ninguna aplicación biyectiva entre un conjunto A y $\mathbb{P}(A)$.

II.64.- Sea un conjunto A, B un subconjunto suyo y R la relación sobre A

$$X \; R \; Y \quad \text{si y sólo si} \quad X \cap B = Y \cap B$$

Demostrar que es de equivalencia y construir una aplicación biyectiva entre el conjunto cociente $\mathbb{P}(A)/R$ y $\mathbb{P}(B)$.

II.65.- Sea E un referencial y A y B subconjuntos de E. Se define

$$\begin{array}{rcl} f: \mathbb{P}(E) & \longrightarrow & \mathbb{P}(A)\times\mathbb{P}(B) \\ X & \longrightarrow & (X\cap A, X\cap B) \end{array}$$

Averiguar qué condición deben verificar A y B para que f sea inyectiva; lo mismo para que sea sobreyectiva.

II.66.- Sea una aplicación $f: A \longrightarrow B$ y R una relación de equivalencia sobre B; averiguar si es de equivalencia la relación binaria S sobre A

$$x \; S \; y \quad \text{si y sólo si} \quad f(x) \; R \; f(y)$$

II.67.- Sea $f: A \longrightarrow B$ una función, y B un conjunto dotado de la relación de orden "$\leq$". En A definimos la relación binaria

$$x \; R \; y \quad \Leftrightarrow \quad f(x) \leq f(y)$$

Estudiar en qué condiciones R es una relación de orden. ¿Cuándo R será una relación de orden total?.

II.68.- Sea $\mathbb{P}(E)$ el conjunto de las partes de un referencial E y $\mathbf{R}$ el conjunto de los números reales. Se define la aplicación

$$\begin{array}{rcl} f: \mathbb{P}(E) & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ A & \longrightarrow & f(A) \end{array}$$

tal que, si A y B son disjuntos $f(A \cup B) = f(A)+f(B)$. Demostrar

a) $f(\emptyset) = 0$.

b) $f(A \cup B) = f(A)+f(B)-f(A \cap B)$.

c) Como resultado de la fórmula precedente, hallar

$$f(A_1 \cup A_2 \cup A_3) \qquad \text{y} \qquad f(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4)$$

II.69.- Para la aplicación

$$\begin{array}{rcl} f: \mathbf{R}^* & \longrightarrow & \mathbf{R}^* \\ x & \longrightarrow & f(x) = 1/x \end{array}$$

hallar $f \circ f$ y f^{-1}.

II.70.- Sea la aplicación de **Z** en sí mismo dada por

$$f(x) = \begin{cases} x/2 & \text{si } x \text{ es par} \\ 0 & \text{si } x \text{ es impar} \end{cases}$$

a) Clasificarla.

b) Hallar un subconjunto de **Z** tal que la restricción de f a este subconjunto sea biyectiva y definir su inversa.

II.71.- Hallar una restricción biyectiva y su inversa para la función

$$\begin{array}{rcl} f: \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longrightarrow & f(x) = (x+2)/(2x-3) \end{array}$$

II.72.- Dada la aplicación $f(x) = (ax+b)/(cx+d)$, definida sobre un subconjunto de **R**, encontrar su inversa.

II.73.- Dadas las funciones reales de variable real f, g, h definidas por

$$f(x) = 3x+1 \qquad g(x) = x^2 \qquad h(x) = x^3$$

clasificarlas y hallar $g \circ f$, $f \circ g$, $h \circ g \circ f$, $(g \circ f)^{-1}$; haciendo las correspondientes restricciones para que existan.

II.74.- Sean $f: A \longrightarrow B$, $g: B \longrightarrow C$ y $h: C \longrightarrow D$ tres aplicaciones tales que $g \circ f$ y $h \circ f$ son biyectivas. Demostrar que f, g y h son biyectivas.

II.75.- Sea Φ_A la función característica del subconjunto A del referencial E. Demostrar que

$$\Phi_{A \cap B} = \Phi_A \cdot \Phi_B \qquad \Phi_{A \cup B} = \Phi_A + \Phi_B - \Phi_{A \cap B} \qquad \Phi_{E-A} = 1 - \Phi_A$$

BIBLIOGRAFIA

Condamine M. (1971). *Algèbre*. Delagrave. París.

de Burgos J. (1988). *Curso de Algebra y Geometría*. Alhambra. Madrid.

Godement R. (1974). *Algebra*. Tecnos. Madrid.

Lentin A., Rivaud J. (1973). *Algebra Moderna*. Aguilar. Madrid.

Queysanne M. (1985) *Algebra*. Vicens-Vives. Barcelona.

Sainz M.A., Serarols J.L. Pérez A.M. (1994). *Álgebra*. Escuela Politécnica Superior. Gerona.

Xambó S. (1977). *Algebra Lineal y geometrias lineales*. EUNIBAR. Barcelona.