Anàlisi d'un model de suspensió-amortiment

Marta Pellicer i Sabadí

Anàlisi d'un model de suspensió-amortiment

Memòria presentada per Marta Pellicer i Sabadí
per optar al grau de Doctor en Ciències Matemàtiques.

Director: Joan Solà-Morales Rubió

Departament de Matemàtica Aplicada 1
Universitat Politècnica de Catalunya

Barcelona, Maig del 2004

Everything should be made as simple as possible,
but no simpler.

Tot hauria de fer-se de la manera més simple possible,
però no més simple que això.

ALBERT EINSTEIN

Agraïments

Durant aquests anys han estat moltes les persones que, d'una manera o una altra, han posat el seu gra de sorra per fer possible aquesta tesi. No volia deixar passar aquesta oportunitat de donar-los les gràcies.

En primer lloc, gràcies als meus pares i als meus germans per tota la paciència que han tingut per les moltes estones no dedicades.

Als companys del Departament de Matemàtica Aplicada 1, en particular a les meves companyes i companys de despatx, per tots els moments agradables que hem compartit i per totes les preguntes que m'han ajudat a contestar.

A mis profesores Juan Donaire y Mercedes Benito, por enseñarme por primera vez lo que son las Matemáticas de verdad y por ser el principio de un largo pero bonito camino.

Per últim, vull donar les gràcies molt especialment a dues persones sense les quals aquesta tesi no hauria estat possible.

Al meu director de tesi, en Joan Solà-Morales, a qui mai podré agrair prou la dedicació i suport d'aquests anys. Per haver-me donat la confiança de treballar en aquest problema quan no hi havia res massa clar, per la seva paciència en les moltes i interessants discussions que m'han permès aprendre bona part del que sé i per guiar-me quan han anat sorgint tots els entrebancs. Però sobretot, vull donar-li les gràcies per no tenir mai un no quan trucava a la porta i per escoltar-me sempre que ho he necessitat.

I finalment a en Jordi, pel seu suport constant i incondicional, i a qui vull dedicar tots els anys de feina que es recullen en aquesta memòria, ja que ningú com ell sap tot el que aquesta tesi ha significat.

A tots, gràcies ...

Índex

Introducció **11**

1 Modelització i valors propis dominants en el model lineal **25**
1.1 El model lineal. 25
1.1.1 Deducció del model: llei de medis continus. 26
1.1.2 Adimensionalització dels paràmetres. 27
1.1.3 Deducció del model: models reològics. 29
1.2 Valors propis dominants i reducció a equacions diferencials ordinàries. 36

2 Molla elàstica perfecta o $\alpha = 0$ **39**
2.1 Plantejament funcional. 39
2.2 Estudi qualitatiu de les solucions. 44
2.2.1 El conjunt de funcions pròpies de A_0 és complet en $\mathcal{H}$. . 44
2.2.2 Valors propis i comportament asimptòtic de les solucions. 49

3 Molla viscoelàstica amb $\alpha \simeq 0$ **57**
3.1 Plantejament funcional. 57
3.2 Espectre de A_α i valors propis dominants. 63
3.2.1 Resultats previs: convergència d'operadors en sentit generalitzat. 63
3.2.2 Valors propis de A_α. 65
3.2.3 Espectre essencial de A_α. 68
3.2.4 Existència de valors propis dominants quan α és proper a 0. 69

4 Dependència del sistema respecte $\varepsilon \geq 0$ **73**
4.1 El cas $\varepsilon = 0$ 73
4.1.1 Valors propis i funcions pròpies. 73
4.1.2 Existència d'un valor propi dominant doble. 75
4.1.3 Valors propis per $\varepsilon = 0$. 77
4.1.4 Espectre essencial quan $\varepsilon = 0$. 80
4.2 Pertorbació de l'espectre respecte $\varepsilon > 0$. 87

4.2.1 Pertorbació del valor propi doble $\lambda = 0$ per ε petit. . . . 87
4.2.2 Anàlisi de l'equació característica. 89
4.2.3 Espectre essencial de $A_\alpha(\varepsilon)$ quan $\varepsilon > 0$. 96
4.2.4 Rang numèric, convergència generalitzada i valors propis dominants. 97

5 Un model no lineal **113**
5.1 Motivació i deducció del model no lineal. 113
5.2 Existència i unicitat de solució de l'equació no lineal. 116
5.3 Reducció a equacions diferencials ordinàries en el límit. 118
5.3.1 Varietats invariants exponencialment atractores. 118
5.3.2 El teorema de varietats invariants amb la norma $\|\cdot\|_\varepsilon$ . . 124
5.3.3 Conseqüències del teorema d'existència de varietats invariants. 135
5.3.4 Equació límit. 138
5.3.5 Alguns comentaris sobre l'equació límit. 151

A Uniformitat per a acotacions exponencials de semigrups analítics en subespais invariants **153**

B Força externa aplicada a la massa i funcions de transferència. Solucions globalment acotades **173**
B.1 L'equació diferencial ordinària i funció de transferència. 174
B.2 L'equació en derivades parcials. 175

Introducció

Els sistemes de suspensió-amortiment són dispositius molt utilitzats. Per citar dos àmbits on són absolutament presents, podem pensar en els sistemes d'amortiment que trobem en tot tipus de vehicles o també en aquells que formen part de l'estructura de molts edificis, especialment els situats en zones d'alt risc d'activitat sísmica. Essencialment, aquests sistemes estan formats per un dispositiu viscoelàstic o elàstic (una molla amb o sense dissipació interna) i un dispositiu purament dissipatiu o viscós (un amortidor). Aquests dos elements estan lligats, a través d'un dels extrems, al dispositiu en moviment (la roda del cotxe, la paret de l'edifici, ...), que es pot pensar com una massa rígida en moviment sobre la qual s'actuarà per tal de suavitzar-ne possibles vibracions, per exemple.

Per veure amb més detall el funcionament d'aquest tipus de sistemes, centrem-nos per uns moments en l'exemple de l'automòbil. En aquest cas, el sistema de suspensió-amortiment està format per una molla, fixada al cotxe en un dels extrems i a la roda en l'altre (que pensarem com la massa rígida en moviment), i per un amortidor, que actua sobre la molla a través de la roda. Quan accelerem, frenem, girem el volant o la carretera és irregular, es produeix un desplaçament en la càrrega del vehicle que és compensat pel moviment de la molla. També s'evita així que les rodes perdin contacte amb el terra. El paper de l'amortidor és el d'oferir resistència a les excessives oscil.lacions que produeix el sistema de suspensió (la molla), que per si sol trigaria a aturar-se, de manera que, a través de la massa de l'extrem, l'amortidor s'ocupa de dissipar l'excessiu moviment de la molla i obtenir així una conducció més còmoda i controlada.

Clàssicament el moviment d'un sistema molla-massa amb dissipació s'ha modelitzat mitjançant l'equació diferencial ordinària de segon ordre:

$$m\,u''(t) + d\,u'(t) + k\,u(t) = 0 \tag{1}$$

que és l'equació de les oscil.lacions esmorteïdes (vegi's, per exemple, [20]). Aquesta equació modelitza la dinàmica d'una molla de coeficient de recuperació $k > 0$, esmorteïda per una força de fricció de coeficient $d \geq 0$ i que està fixa en un extrem i lligada a una massa rígida $m > 0$ que es mou, en l'altre. Però aquest tipus de models no tenen en compte fenòmens com ara possibles

diferències internes en la deformació, com indica la figura 1, o com la pròpia dissipació interna de la molla (és a dir, pensen la molla com a sistema elàstic i no viscoelàstic). Això ens portarà a proposar una equació en derivades parcials lineal com a model continu (amb infinits graus de llibertat) per aquest sistema i més endavant el generalitzarem amb una versió no lineal.

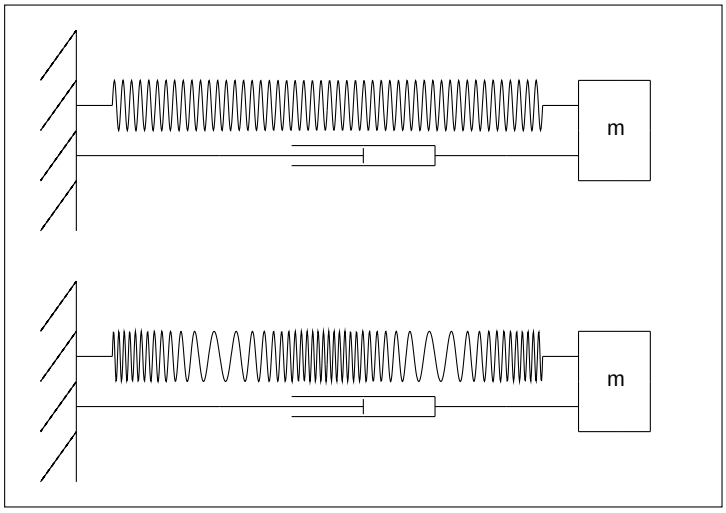


Figura 1: Desplaçament del sistema segons una EDO, a dalt, o una EDP, a baix.

Però, tot i mirar-nos el problema des d'una òptica continua, aquest enfoc no és tan diferent del clàssic, almenys en alguns casos. De fet, el nostre objectiu serà demostrar que sota certes condicions un model en equacions diferencials ordinàries és el *límit*, en algun sentit, del model en derivades parcials. En el cas lineal, l'eina per fer aquesta comparació seran els valors propis dominants i en el cas no lineal, les varietats invariants exponencialment atractores.

La resta d'aquesta introducció està dedicada als antecedents i a la descripció resumida dels principals resultats d'aquesta memòria, ordenats per capítols.

Capítol 1: Modelització i valors propis dominants en el model lineal. Antecedents.

En el capítol 1 es deduirà un model lineal continu per al sistema anterior. El que tenim és el moviment d'un dispositiu viscoelàstic (la molla) que està fix en un extrem i que en l'altre està lligat a una massa rígida en moviment (per exemple, la roda) a través de la qual actua sobre la molla un dispositiu purament dissipatiu (l'amortidor). Des d'un punt de vista del model el que tenim és, essencialment, una equació que modelitza el comportament a l'interior del

dispositiu i unes condicions de contorn que expliquen l'acció de l'amortidor a l'extrem. Tant si utilitzem les lleis físiques de balanç de moviments (secció 1.1.1) com des d'un punt de vista del que es coneix com a models reològics (que, essencialment, consisteixen en una discretització del sistema en components elàstiques i viscoses i que trobarem detallat en la secció 1.1.3) obtenim com a model lineal l'equació següent:

$$\begin{cases} \rho\, u_{tt} - E\, u_{xx} - E_1\, u_{txx} = 0, \quad 0 < x < L,\ t > 0 \\ u(0,t) = 0, \quad t > 0 \\ m\, u_{tt}(L,t) = -E\, u_x(L,t) - E_1\, u_{tx}(L,t) - q\, u_t(L,t), \quad t > 0 \end{cases}$$

on L és la longitud de la molla, ρ la seva densitat lineal i m la massa situada en $x = L$, E i E_1 són els coeficients d'elasticitat i dissipació interna de la molla i q el coeficient de dissipació de l'amortidor que, com veiem, actua sobre el moviment de la molla únicament a través de les condicions de contorn. Ens interessarà, però, escriure l'equació anterior en variables adimensionals. Així, amb els canvis adequats, veurem que el model lineal quedarà com:

$$(2) \qquad \begin{cases} u_{tt} - u_{xx} - \alpha\, u_{txx} = 0, \quad 0 < x < 1,\ t > 0 \\ u(0,t) = 0, \quad t > 0 \\ u_{tt}(1,t) = -\varepsilon\, [u_x(1,t) + \alpha\, u_{tx}(1,t) + r\, u_t(1,t)], \quad t > 0 \end{cases}$$

Es tracta d'una equació d'ones amb dissipació forta (controlada pel paràmetre $\alpha \geq 0$), condicions de contorn Dirichlet homogènies en $x = 0$ i dinàmiques en $x = 1$. Aquest és el model lineal que estudiarem en els capítols 2, 3 i 4 i que pensarem en funció de tres paràmetres: $\alpha \geq 0$, que prové de la viscositat interna de la molla; $r > 0$, que ve de la dissipació externa (l'amortidor); i $\varepsilon \geq 0$ que, essencialment serà $1/m$. De fet, l'interès principal de dedicar aquest capítol 1 a la modelització és el de veure que la física del problema porta a considerar (2) com la primera generalització de l'equació diferencial ordinària clàssica (tot i que aquesta no n'és un cas particular) i també veure que, efectivament, obtenim dissipació forta (o de Kelvin-Voigt) i no feble, com es podria esperar en un primer moment.

Una versió de l'equació (2) ja havia estat proposada anteriorment per M. Grobbelaar-van Dalsen en [19]:

$$(3) \qquad \begin{cases} u_{tt} - u_{xx} - u_{txx} = 0, \quad 0 < x < 1,\ t > 0 \\ u(0,t) = 0,\ t > 0 \\ u_{tt}(l,t) + u_x(l,t) + u_{tx}(l,t) = 0,\ t > 0 \end{cases}$$

Concretament, l'autora formula en termes d'operadors l'equació per $\alpha = \varepsilon = 1$ i $r = 0$, amb una notació que serà utilitzada també per nosaltres, i demostra l'existència d'un semigrup analític per a l'operador associat, sense entrar massa en la modelització o sentit físic de les equacions i els resultats. Aquesta equació

(3) és el problema més proper al nostre problema (2) que nosaltres hem sabut trobar a la literatura. En el nostre cas, però, ens ha semblat important tenir en compte l'efecte de l'amortidor extern en la modelització de sistemes de suspensió-amortiment, cosa que s'ha traduït en el terme amb $r > 0$ a la condició de contorn. També és per entendre correctament l'aparició d'aquest terme que hem volgut ser curosos en tot el procés de modelització.

D'altra banda, i a diferència del treball de Grobbelaar, per a nosaltres ha estat imprescindible fer aparèixer els paràmetres α i ε i posar de manifest el seu significat. I és que, de fet, els nostres resultats tenen a veure precisament amb els límits del model quan $\alpha \to 0$ o $\varepsilon \to 0$.

En el seu treball, Grobbelaar fa referència als resultats que P. Massat (veure [25]) introduïa pel que fa a l'estudi de la generació de semigrups analítics per part de determinats operadors semilineals amb dissipació forta, resultats que seran utilitzats també per nosaltres en aquest sentit (veure el capítol 3):

$$u_{tt} + \alpha\, A\, u_t + A\, u = f(t, u, u_t).$$

Equacions d'ona amb dissipació forta, però condicions de Neumann homogènies, són estudiats també per exemple en el treball de N. Cònsul i J. Solà-Morales [11], des d'un punt de vista de l'estabilitat dels seus equilibris.

La interacció d'un medi elàstic amb una massa rígida és un problema que apareix en la literatura matemàtica des de diferents punts de vista. Amb l'objectiu d'estudiar la control.labilitat del sistema, per exemple, la interacció entre bigues i masses rígides ha estat considerada per autors com C.M. Castro i E. Zuazua (per exemple en [9]). A més, models d'equacions d'ones, però amb dissipació feble (o dissipació tipus Maxwell) en lloc de la dissipació tipus Kelvin-Voigt, units mitjançant masses rígides han estat considerats per A. Freiria Neves, H. de Souza Ribeiro i O. Lopes (veure, per exemple, [16]), essencialment interessats en l'estudi del decaïment de les solucions.

Aquest problema del decaïment de les solucions o de l'estabilitat asimptòtica en els sistemes elàstics amb dissipació també ha estat considerat per altres autors, com ara M. Renardy en [31], on analitza l'estabilitat asimptòtica per certs tipus de semigrups $\mathcal{C}_0$, o autors com K. Liu i Z. Liu en [24]. Aquest darrer treball està dedicat a l'estudi del decaïment exponencial de les solucions de sistemes elàstics que modelitzen bigues fixades pels extrems i amb dissipació del tipus Kelvin-Voigt. També cal dir que en el nostre cas, tot i que l'estabilitat asimptòtica no és l'objectiu principal d'aquesta memòria, en el cas de les solucions del model lineal aquesta serà conseqüència de la dissipativitat de l'operador quan $\alpha = 0$ i de l'existència d'un conjunt finit de valors propis dominants quan $\alpha > 0$, tal i com veurem a continuació i, amb més detall, en les seccions corresponents.

Voldrem comparar l'equació en derivades parcials (2) amb el model clàssic (1). Per fer-ho, utilitzarem com a eina els valors propis dominants. La idea, que

veurem en detall també en el capítol 1, és analitzar l'existència d'un conjunt finit de valors propis amb part real estrictament major que la resta. Si aquest conjunt finit existeix, el comportament de la solució quan $t \to \infty$ ve marcat pel d'aquests valors propis de manera que, en aquest sentit, el comportament d'una equació de dimensió infinita tendeix al comportament d'una equació de dimensió finita i, per tant, el model en derivades parcials admet una equació diferencial ordinària com a límit.

La formulació precisa d'aquestes idees es pot trobar en l'apartat 1.2. El resultat principal (teorema 1.2) ha de considerar-se que està implícit en resultats ben coneguts de la teoria clàssica de semigrups analítics, però l'hem enunciat i demostrat amb precisió a causa del paper fonamental que tindrà en els capítols següents.

Capítols 2, 3 i 4: Anàlisi del model lineal.

L'existència o no d'un conjunt finit de valors propis dominants per a l'equació (2) l'analitzarem per a tres valors dels paràmetres: $\alpha = 0$ o molla purament elàstica en el capítol 2, α propera a 0 o molla poc viscoelàstica en el capítol 3 i ε proper a zero, o massa prou gran, en el capítol 4. El paràmetre de dissipació externa r el pensarem en tots els casos estrictament positiu. Aquests tres casos són rellevants des d'un punt de vista físic, però també des d'un punt de vista matemàtic ja que cobreixen tota la casuística que podem trobar en l'estudi de les equacions límit, com ara veurem.

En aquests capítols es donarà un marc funcional on pensar els models. Per a això, es consideraran els següents espais:

$$X_2 = \{(u,\gamma) \in H^2(0,1) \times \mathbb{C},\ u(1) = \gamma,\ u(0) = 0\} \ \text{ subespai de } H^2(0,1) \times \mathbb{C}\ ;$$

$$X_1 = \{(u,\gamma) \in H^1(0,1) \times \mathbb{C},\ u(1) = \gamma,\ u(0) = 0\} \ \text{ subespai de } H^1(0,1) \times \mathbb{C}\ ;$$

$$X_0 = \{(u,\gamma) \in L^2(0,1) \times \mathbb{C}\}, \quad \text{que és} \ \ L^2(0,1) \times \mathbb{C}.$$

Aquests espais són espais de Hilbert si els dotem dels productes escalars naturals, tot i que en X_1 també podem considerar un producte escalar equivalent (veure lema 2.3). Així, els productes esclars que considerarem en X_1 i X_0 són:

$$\langle (u,u(1)),(v,v(1))\rangle_{X_1} = \int_0^1 u_x\,\overline{v_x}\,dx \ \text{ i } \ \langle (u,\gamma),(v,\beta)\rangle_{X_0} = \int_0^1 u\,\overline{v}\,dx \ + \ \gamma\,\overline{\beta}.$$

Però quan $\varepsilon > 0$ tenim definit un altre producte escalar per X_0, que ens serà molt útil en molts casos:

$$\langle (u,\gamma),(v,\beta)\rangle_{(X_0;\varepsilon)} = \int_0^1 u\,\overline{v}\,dx \ + \ \frac{1}{\varepsilon}\,\gamma\,\overline{\beta}$$

Tots aquests productes escalars són productes equivalents als naturals dels espais on estan definits, tal i com es veu en el lema 2.3. Amb això podrem escriure l'equació en derivades parcials anterior com l'equació d'evolució:

$$\begin{cases} V_t - A_\alpha V = 0, & t \in [0,\infty) \\ V(0) = F_0 \end{cases}$$

on $(A_\alpha, \mathcal{D}(A_\alpha))$ és l'operador amb domini

$$\mathcal{D}(A_\alpha) = \left\{ \begin{pmatrix} (u, u(1)) \\ (v, v(1)) \end{pmatrix} \in X_1 \times X_1,\ (u + \alpha\, v) \in H^2(0,1) \right\} \subset \mathcal{H}$$

amb $\mathcal{H} = X_1 \times X_0$ espai de Hilbert amb el producte escalar corresponent, i si $V = \begin{pmatrix} (u, u(1)) \\ (v, v(1)) \end{pmatrix} \in \mathcal{D}(A_\alpha)$ aleshores A_α ve definit per

$$A_\alpha V = \begin{pmatrix} (v, v(1)) \\ (\,(u + \alpha\, v)_{xx}, -\varepsilon\,(u + \alpha\, v)_x(1) \,-\, \varepsilon\, r\, v(1)\,) \end{pmatrix}.$$

És important ressaltar el fet que comptar amb els dos productes escalars equivalents en $\mathcal{H}$ quan $\varepsilon > 0$ serà fonamental per obtenir alguns resultats d'aquesta tesi.

En el **capítol 2** analitzarem el model quan $\alpha = 0$. En aquest cas, el domini resulta ser $\mathcal{D}(A_0) = X_2 \times X_1$, cosa que també es pot deduir de la definició general anterior, i l'operador ve definit per

$$A_0 V = \begin{pmatrix} (\,v, v(1)\,) \\ (\,u_{xx}\,,\, -\varepsilon u_x(1) - \varepsilon r v(1)\,) \end{pmatrix}.$$

Demostrarem en el teorema 2.4 que A_0 és el generador infinitessimal d'un semigrup $\mathcal{C}_0$ en $\mathcal{H}$ comprovant que es tracta d'un operador maximal monòton. En particular, tindrem garantida l'existència i unicitat de solució pel problema de Cauchy. D'altra banda, des d'un punt de vista del comportament asimptòtic de les solucions, serà important provar la completitud de les funcions pròpies de l'operador A_0 (teorema 2.9), per la qual cosa caldrà usar la teoria d'operadors completament continus de [18], i també el lema 2.11, que enunciem a continuació i que es resumeix en la figura 2.

Lema. *Els valors propis de $(A_0, \mathcal{D}(A_0))$ tenen part real estrictament negativa. De fet, existeix $C > 0$ tal que $-C < Re\,\lambda < 0\ \forall\,\lambda$ valor propi de A_0. A més, els valors propis s'acumulen en la recta $Re\,\lambda = 0$.*

Aquest resultat implicarà que quan $\alpha = 0$ no es pugui parlar d'un subconjunt finit de valors propis dominants ni, per tant, d'una equació diferencial ordinària

com a límit del model en derivades parcials (corol.lari 2.12). No deixa de ser curiós el fet que no existeixi una equació diferencial ordinària límit quan tenim una molla purament elàstica, ja que aquest sembla el cas més semblant al de la modelització clàssica.

Tot i no existir una equació límit de dimensió finita, sí podem provar el següent resultat pel que fa a comportament asimptòtic de les solucions (teorema 2.13 de la memòria):

Teorema. *Quan $\alpha = 0$ totes les solucions tendeixen a zero quan $t \to \infty$, però existeixen solucions que hi tendeixen tan a poc a poc com vulguem.*

En el **capítol 3** pensarem en una molla viscoelàstica amb poca dissipació (és a dir, $\alpha > 0$ però petit). Des del punt de vista de l'operador, demostrarem que A_α és el generador infinitessimal d'un semigrup analític en $\mathcal{H}$, tant quan $\varepsilon > 0$ (que és el que suposarem en tot el capítol) com quan $\varepsilon = 0$ (teoremes 3.3 i 3.9). Des del punt de vista de l'espectre, cal destacar una eina de la teoria clàssica de pertorbacions d'operadors (veure [22]) que resultarà fonamental i que s'introduirà, per primer cop, en la secció 3.2.1: la convergència d'operadors en sentit generalitzat. La idea d'aquest tipus de convergència és que dos operadors són propers quan les seves gràfiques són properes en una certa distància. És, doncs, una generalització del concepte de convergència en norma per operadors no acotats. En aquesta secció 3.2.1 es donaran les definicions i resultats bàsics d'aquest tipus de convergència i també el resultat més rellevant pel que fa a l'anàlisi espectral de famílies d'operadors. Es tracta del teorema de semicontinuïtat superior de l'espectre (de [22]), recollit aquí en el teorema 3.18, que essencialment ens diu que si dos operadors són propers en el sentit anterior aleshores els seus espectres es poden descomposar, en un cert sentit que es precisarà, de la mateixa manera. Això ens portarà a una certa continuïtat dels conjunts finits de valors propis i a una convergència en norma de les projeccions associades que anirem veient a mida que l'anàlisi ho requereixi.

Com utilitzarem aquesta convergència generalitzada en l'estudi de l'espectre? La idea, tant en el capítol 3 com en el 4 és la mateixa: es compararà l'operador amb un operador límit al qual convergirà en sentit generalitzat. En el cas del capítol 3, el nostre operador referència serà l'operador per $\alpha = 0$, A_0. El teorema 3.19 demostrarà que A_α convergeix a A_0 en sentit generalitzat quan $\alpha \to 0$, de manera que una aplicació directa del teorema de semicontinuïtat superior de l'espectre ens permetrà dir que els valors propis de A_α convergeixen sobre compactes als valors propis de A_0 (tal i com es veu en la figura 2), però no podrem parlar d'una convergència global dels espectres. Això ho trobem recollit en el corol.lari 3.20 i l'observació 3.22.

Quan $\alpha > 0$ una altra cosa que es dirà en la secció 3.2.3, però que es demostrarà en el capítol 4, és que tenim espectre essencial i que aquest es

redueix al punt $\{-1/\alpha\}$.

A partir d'aquí, què podem dir dels valors propis dominants de l'operador A_α? El principal resultat en aquest sentit és el que hem obtingut en el teorema 3.23, l'enunciat del qual recollim a continuació.

Teorema. *L'operador A_α, amb $\alpha, \varepsilon > 0$ admet un subconjunt finit de valors propis dominants si α és suficientment petit.*

En primer lloc, cal tenir present que l'espectre del generador d'un semigrup analític està contingut en un sector. Però, d'altra banda, conjunts finits de valors propis de A_α tendeixen a conjunts finits de valors propis de A_0, que hem vist en el capítol anterior que s'acumulen sobre l'eix imaginari. A partir d'un cert α hi haurà valors propis amb part real major que la resta i seran, per tant, dominants. De tota manera, això no implica l'existència d'una equació diferencial límit en un sentit global ja que la convergència dels valors propis de A_α als valors propis de A_0 no és global. Això fa que el tant el paper de valors propis dominants com el seu nombre depengui del valor de α, tal i com il.lustra la figura 2. Així, l'ordre i l'aproximació dels coeficients de l'equació diferencial ordinària límit serà qualitativament diferent per a cada valor de $\alpha > 0$, tal i com es raonarà en les observacions 3.24 i 3.25.

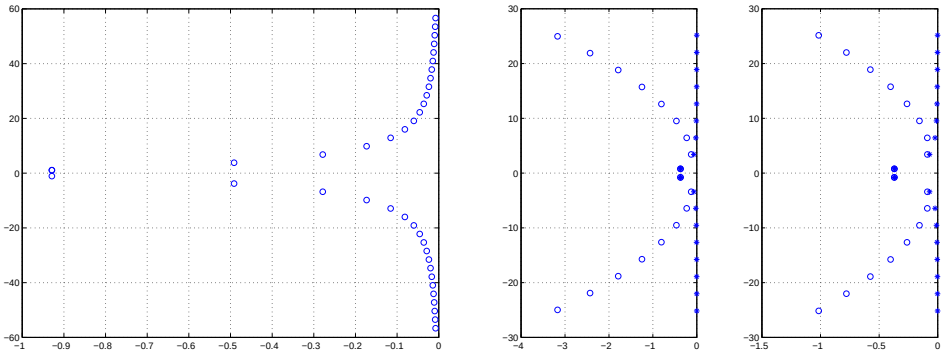


Figura 2: Espectre de A_0 a l'esquerra i, a la dreta, convergència dels valors propis de A_α als de A_0 per diferents valors de α.

En el **capítol 4** ens tornem a mirar l'operador A_α però des del punt de vista del paràmetre ε quan aquest és petit. Això ho fem perquè el cas límit, és a dir, $\varepsilon = 0$ o massa infinitament gran en l'extrem, és un cas en què podem resoldre l'equació (2) de manera totalment explícita. De fet, això ho aprofitarem en l'apartat 4.1 per fer un anàlisi exhaustiu de l'espectre quan $\varepsilon = 0$, i veurem que està format per valors propis, però també per espectre essencial. Si ens mirem els valors propis, el més destacable és l'existència d'un valor propi

dominant doble, que és $\lambda_0 = 0$ (secció 4.1.2). La resta, és a dir, el conjunt $\{\lambda_n^{\pm},\ n = 1, 2, \ldots\}$, s'estudiarà en la secció 4.1.3, on veurem que tenen tots part real estrictament negativa i que, tot i que els primers estan situats sobre la circumferència de centre $-1/\alpha$ i radi $1/\alpha$, els altres són reals i, a partir d'un cert moment, es divideixen en dues subsuccessions: una, $\{\lambda_n^-\}$ que tendeix a $-\infty$ i l'altra, $\{\lambda_n^+\}$, que s'acumula en el punt $-1/\alpha$, tal i com es veu en la figura 3. De fet, en la secció 4.1.4 demostrarem que aquest punt és l'espectre essencial de l'operador quan $\varepsilon = 0$ (corol.lari 4.8).

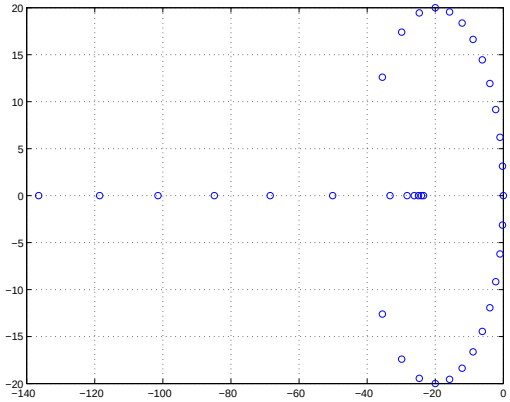


Figura 3: Esquema de l'espectre quan $\varepsilon = 0$.

En l'apartat 4.2 voldrem estudiar l'operador quan ε és petit. Per a fer això, pensarem aquest operador com a pertorbació de l'operador quan $\varepsilon = 0$, que tenim resolt de manera explícita. En termes de l'espectre, en la secció 4.2.1 veurem que quan ε és petit el valor propi doble $\lambda_0 = 0$ es desdobla en dos valors propis complexos conjugats, $\lambda_0^+(\varepsilon)$ i $\lambda_0^-(\varepsilon)$, per als quals trobarem una aproximació explícita en termes de ε. No passarà el mateix per a l'espectre essencial, que quan $\varepsilon > 0$ continuarà essent en punt $\{-1/\alpha\}$ (teorema 4.13). Una anàlisi de l'equació característica dels valors propis i l'estudi del rang numèric ens permetran un cert estudi qualitatiu per la resta de valors propis (seccions 4.2.2 i 4.2.4).

Pel que fa a l'existència de valors propis dominants, la idea serà veure que les pertorbacions del valor propi doble dominant per $\varepsilon = 0$ mantenen aquest caràcter dominant, almenys si ε és prou petit. Per veure això utilitzarem els resultats anteriors i, sobretot, que $A_\alpha(\varepsilon)$ convergeix en sentit generalitzat a $A_\alpha(0)$ quan $\varepsilon \to 0$ (teorema 4.21), de manera que l'espectre de $A_\alpha(\varepsilon)$ serà una pertorbació contínua, en un cert sentit, de l'espectre de $A_\alpha(0)$. La demostració d'aquest teorema serà essencialment tècnica. Tot això ho utilitzarem per demostrar el teorema 4.23:

Teorema. *Existeix un cert $\varepsilon_0 > 0$ per al qual l'operador $(A_\alpha(\varepsilon), \mathcal{D}(A_\alpha))$, amb*

$\alpha > 0$ fixat i $\varepsilon < \varepsilon_0$, admet $\left\{\lambda_0^+(\varepsilon), \lambda_0^-(\varepsilon)\right\}$ (pertorbacions del valor propi doble $\lambda_0(0) = 0$) com a subconjunt finit de valors propis dominants.

Per tant, en el teorema 4.26 obtindrem una equació diferencial ordinària límit si ε és prou petit.

Teorema. *Les solucions del model en derivades parcials lineal convergeixen asimptòticament (en el sentit del teorema 1.2) si ε és suficientment petit a les solucions d'una equació diferencial ordinària lineal d'ordre 2, que en variables dimensionals és:*

$$m\, w''(t) + k_1\, w'(t) + k_0\, w(t) = 0$$

on

$$k_1 = \left(\frac{E_1}{L} + q\right) - \frac{1}{3}\left(\frac{E_1}{L} + q\right)\left(\frac{\rho L}{m}\right) + \left(\frac{4\,E_1}{45\,L} + \frac{q}{15}\right)\left(\frac{\rho L}{m}\right)^2 + \dots$$

$$k_0 = \frac{E}{L}\left[1 - \frac{1}{3}\left(\frac{\rho L}{m}\right) + \frac{4}{45}\left(\frac{\rho L}{m}\right)^2 + \left(\frac{q^2}{45\,E\rho} - \frac{16}{945}\right)\left(\frac{\rho L}{m}\right)^3 + \dots\right]$$

on ara $w = u(L,t)$ i on els paràmetres de l'equació són els paràmetres dimensionals del sistema molla-massa.

Aquesta equació és del tipus de (1), però a través del model en derivades parcials hem obtingut uns coeficients més acurats en funció dels paràmetres del sistema molla-massa.

Amb això acabem l'estudi del model lineal. Des d'un punt de vista global, és important destacar el canvi qualitatiu de l'espectre que es produeix entre $\alpha = 0$, on només podem garantir un semigrup $\mathcal{C}_0$, i $\alpha > 0$ proper a zero (i ε petit), on el semigrup és analític. A part de l'aparició d'espectre essencial, quan $\alpha > 0$ el que tenim són els valors propis continguts en un sector i, essencialment, situats seguint l'esquema dels valors propis per $\varepsilon = 0$. A mida que α es va fent petit, cada cop tenim *menys* valors propis com a pertorbació dels valors propis per $\varepsilon = 0$ que hi ha en l'eix real i més com a pertorbació dels de la circumferència, que va augmentant el radi i el centre de la qual es va acostant a $-\infty$. Això fa que el sector on estan continguts els valors propis es vagi obrint a mida que α es va fent petit. En el pas al límit, la circumferència es trenca i els valors propis passen a acumular-se sobre l'eix imaginari, de manera que ja no estan continguts en cap sector. Hi ha, doncs, un canvi qualitatiu entre el pas al límit quan $\alpha \to 0$ i quan $\varepsilon \to 0$, que sí manté l'estructura de l'espectre. També és important destacar que en aquests capítols ens hem trobat amb els tres casos possibles des del punt de vista de l'equació límit: no existència, existència no uniforme i existència i càlcul de l'equació límit.

Part dels resultats d'aquests capítols, especialment dels capítols 1 i 4, estan recollits en el nostre article [29].

Capítol 5 i apèndix A: El problema no lineal. Antecedents.

En el **capítol 5**, es proposa una generalització del model en derivades parcials (2) en el cas en què actuï una força externa en un dels extrems del sistema de suspensió-amortiment (apartat 5.1). Aquesta força externa la podem pensar des d'un punt de vista físic com un control de retroalimentació i dependrà, per tant, de l'estat actual del sistema. De manera anàloga a la del capítol 1, es deduirà l'equació que, en les variables adimensionals, és la següent:

$$(4)\quad \begin{cases} u_{tt}(x,t) - u_{xx}(x,t) - \alpha u_{txx}(x,t) + \kappa\,\varepsilon f\left(u(1,t), \frac{u_t(1,t)}{\sqrt{\varepsilon}}\right) = 0 \\ u(0,t) = 0 \\ u_{tt}(1,t) = -\varepsilon\left[u_x + \alpha u_{tx} + r u_t\right](1,t) - \kappa\,\varepsilon f\left(u(1,t), \frac{u_t(1,t)}{\sqrt{\varepsilon}}\right) \end{cases}$$

per $x \in (0,1)$, $t > 0$ i on $\kappa > 0$ serà un paràmetre del sistema que pensarem fixat. Es tracta d'una equació d'ones no lineal no local amb dissipació forta i condicions de contorn dinàmiques no lineals en $x = 1$. De nou, ens plantejarem si té sentit pensar una equació diferencial ordinària com a límit del model anterior. L'objectiu de tot el capítol serà veure que sí i per a això l'eina fonamental seran les varietats invariants exponencialment atractores.

La utilització de les varietats invariants exponencialment atractores per trobar equacions límit, és una eina que té el seu origen en l'estudi fet per D. Henry en [21]. Aquestes varietats permeten representar els elements principals de la dinàmica del sistema que s'està considerant mitjançant una equació diferencial ordinària límit. Aquesta teoria ha estat l'origen de molts treballs en els darrers anys. Per a citar-ne només alguns exemples, esmentem els treballs de X. Mora i J. Solà-Morales en [26] i el de À. Calsina, X. Mora i J. Solà-Morales en [3].

El punt de vista que utilitzarem aquí és el que apareix en els treballs de A.N. Carvalho (veure [5], [6]), els treballs de A. N. Carvalho i A.L. Pereira (veure [8]) o, més actualment, en els treballs de A.N. Carvalho i G. Lozada-Cruz en [7] i V.L. Carbone en [4]. En aquests treballs l'estudi de les varietats invariants exponencialment atractores apareix per famílies d'operadors depenents d'un paràmetre. La novetat respecte l'estudi de [21] és el fet que la varietat invariant és la gràfica d'una funció que tendeix a zero en norma $\mathcal{C}^1$ quan el paràmetre es fa petit, cosa que permet obtenir la forma de l'equació diferencial límit d'una manera molt explícita. Cal dir, però, que tots els problemes que s'estudien en les referències anteriors estan generats per operadors autoadjunts, cosa que no passarà en el nostre cas. De fet, que l'operador $A_\alpha(\varepsilon)$, $\alpha, \varepsilon > 0$, no sigui autoadjunt serà la dificultat principal del capítol 5, ja que això complicarà enormement la demostració de certes hipòtesis necessàries per aplicar la teoria de varietats invariants al nostre problema no lineal, tal i com veurem en aquest capítol 5 i també en l'apèndix A.

En l'apartat 5.2 ens assegurarem de l'existència i unicitat de solució per al problema no lineal (teorema 5.4). L'apartat 5.3 serà el principal d'aquest capítol, ja que estarà dedicat a les varietats invariants i a l'equació límit. En la secció 5.3.1 s'introduiran les eines relatives a les varietats invariants exponencialment atractores. El teorema bàsic per nosaltres serà el teorema 5.6, del treball de Carvalho i Lozada-Cruz [7] (els detalls de la demostració els podem trobar en [4]), i que es una generalització de la teoria de varietats invariants de [21] pel cas de famílies d'operadors depenents d'un paràmetre respecte al qual prenem límits. Aquest teorema garanteix, sota certes condicions en l'operador i en la no linealitat, l'existència d'una varietat invariant exponencialment atractora que, a més, té límit zero en una certa norma $\mathcal{C}^1$ quan el paràmetre tendeix a 0. Això és el que ens permetrà escriure explícitament l'equació diferencial límit. Essencialment, aquest teorema ens garanteix l'existència d'una varietat invariant exponencialment atractora que tindrà límit zero en norma $\mathcal{C}^1$ si es reescala el problema no lineal convenientment de forma que enviem a l'infinit tot l'espectre menys un nombre finit de valors propis. La idea del que farem en aquest capítol 5, doncs, és la següent: reescalarem l'equació (4) convenientment respecte el paràmetre ε i provarem que el problema normalitzat està sota les hipòtesis del teorema 5.6. Això es veurà en el teorema 5.9:

Teorema. *El model en derivades parcials no lineal admet, si ε és prou petit, una varietat invariant exponencialment atractora:*

$$S_\varepsilon = \{V = (V_1, V_2) : V_1 = \sigma_\varepsilon(V_2) \in H_1^\varepsilon,\, V_2 \in H_2^\varepsilon\}$$

El flux sobre la varietat invariant S_ε ve donat per $V(t) = V_2(t) + \sigma_\varepsilon(V_2(t))$, on $V_2(t)$ és solució de:

$$\frac{d}{dt} V_2 = A_N(V_2) + P_2^\varepsilon \left[F_N(V_2 + \sigma_\varepsilon(V_2))\right], \quad V_2 \in H_2^\varepsilon$$

A més, $\sigma_\varepsilon : H_2^\varepsilon \to H_1^\varepsilon$ satisfà:

(i) $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \left(\sup\limits_{V_2 \in H_2^\varepsilon} \|\sigma_\varepsilon(V_2)\|_\varepsilon \right) = 0$

(ii) $\|\sigma_\varepsilon(V_2) - \sigma_\varepsilon(W_2)\|_\varepsilon \leq l(\varepsilon)\|V_2 - W_2\|_\varepsilon$ *per a tot* $V_2, W_2 \in H_2^\varepsilon$ *i, a més,* $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} l(\varepsilon) = 0$

Com que F és regular, també és cert que

$$\sup_{V_2 \in H_2^\varepsilon} \|D\sigma_\varepsilon(V_2)\|_{\mathcal{L}(H_2^\varepsilon, H_1^\varepsilon; \|\cdot\|_\varepsilon)} \leq l(\varepsilon)$$

és a dir, σ_ε convergeix a zero en la topologia de $\mathcal{C}^1(H_2^\varepsilon, H_1^\varepsilon; \|\cdot\|_\varepsilon)$ quan $\varepsilon \to 0$.

Aquest resultat ens permetrà escriure l'equació diferencial límit quan $\varepsilon \to 0$ (secció 5.3.4), que resultarà ser l'equació diferencial ordinària no lineal d'ordre 2 següent:

$$u'' + u + \kappa f(u, u') = 0 \tag{5}$$

La idea d'aquest capítol és aquesta, però comprovar que el model no lineal (4) amb el temps reescalat està en les hipòtesis del teorema de varietats invariants 5.6 i deduir l'equació límit seran dues tasques molt tècniques. D'una banda, tal i com es veurà en la secció 5.3.3, ha resultat convenient demostrar l'existència d'una varietat invariant exponencialment atractora en la norma $\|\cdot\|_\varepsilon$ si volem utilitzar això per a demostrar que l'equació (5) és l'equació límit en norma $\mathcal{C}^1$ del model no lineal accelerat. Això vol dir que les hipòtesis del teorema 5.6 s'hauran de comprovar també amb aquesta norma. Això i el fet que certes acotacions que es demanen en aquestes hipòtesis hagin de ser independents del paràmetre ε quan $\varepsilon \to 0$, ha motivat l'aparició de l'**apèndix A**. En aquest apèndix es recullen resultats de convergència generalitzada d'operadors i acotacions uniformes de semigrups i un resultat nou, que motiva aquest apèndix i que serà essencial per demostrar l'existència d'una varietat invariant exponencialment atractora en el nostre cas, serà el teorema A.12. A més, en aquest apèndix també es posarà especialment de manifest la notable dificultat afegida que suposa el fet d'aplicar el teorema de varietats invariants 5.6 quan l'operador no és autoadjunt.

Tot això ens permet demostrar l'existència d'una varietat invariant exponencialment atractora de dimensió 2 si ε és prou petit, que vindrà donada per la gràfica d'una certa funció σ_ε. El fet que σ_ε tingui límit zero en norma $\mathcal{C}^1$, $\|\cdot\|_\varepsilon$ quan $\varepsilon \to 0$ serà determinant a l'hora d'escriure explícitament l'equació diferencial ordinària límit. Escriure amb precisió què significa això en components (secció 5.3.3) i treballar de manera adequada l'equació sobre la varietat invariant (secció 5.3.4) són les dues coses de caràcter tècnic que ens permetran deduir el teorema 5.15:

Teorema. *L'equació sobre la varietat invariant exponencialment atractora de dimensió 2:*

$$\frac{d}{dt} V_2 = A_N(V_2) + P_2^\varepsilon \left[F_N(V_2 + \sigma_\varepsilon(V_2)) \right], \quad V_2 \in H_2^\varepsilon \tag{6}$$

convergeix quan $\varepsilon \to 0$ en la topologia $\mathcal{C}^1$ al sistema bidimensional següent:

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} u(1) \\ w(1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w(1) \\ -u(1) - \kappa f(u(1), w(1)) \end{pmatrix} \tag{7}$$

(on les variables s'anomenaran $u(1), w(1)$). En particular, si (7) és estructuralment estable aleshores, per ε suficientment petit, el flux en la varietat invariant donat per (6) és topològicament equivalent al flux de (7).

Com que el sistema (7) es pot escriure com l'equació diferencial ordinària no lineal (5), haurem trobat ja l'equació diferencial ordinària límit del model en derivades parcials no lineal.

Apèndix B: Oscil.lacions forçades.

Com a apèndix d'aquest treball ja hem comentat els resultats d'anàlisi funcional de l'apèndix A i que s'aplicaran en el cas del model no lineal.

L'**apèndix B**, part del qual es pot trobar publicat en [28], està dedicat a una versió no homogènia del model lineal (2). Concretament, pensarem en el model que s'obté quan sotmetem el sistema a una força periòdica $f(t) = Ae^{i\omega t}$, on A serà l'amplitud de la força i ω en denotarà la freqüència, aplicada en l'extrem $x = 1$. Aquesta força la podem pensar com un control de cicle tancat, és a dir, un control que no depèn de l'estat actual del sistema, però també com una simplificació (en termes de la transformada de Fourier) del cas general en què apliquem sobre la massa una força $f(t) \in L^2(\mathbb{R})$. El model lineal no homogeni que en resulta és, en variables dimensionals, el següent:

$$\begin{cases} \rho\, u_{tt} \;=\; E_1\, u_{txx} + E\, u_{xx}, \quad 0 < x < L,\ t > 0 \\ u(0,t) = 0, \quad t > 0 \\ mu_{tt}(L,t) = -Eu_x(L,t) - E_1 u_{tx}(L,t) - qu_t(L,t) + Ae^{i\omega t}, \quad t > 0 \end{cases}$$

El que ens interessarà estudiar d'aquest model seran les solucions globalment acotades i l'eina per fer-ho seran les funcions de transferència. El resultat més rellevant serà el concepte d'equació diferencial límit diferent del que donaven els valors propis dominants en la primera part de la memòria. En el cas del model lineal no homogeni, l'aproximació a les equacions diferencials ordinàries serà a través dels primers termes de les corresponents funcions de transferència. Això implicarà que una millor aproximació de la solució globalment acotada no s'aconseguirà aproximant millor els coeficients de l'equació diferencial ordinària límit, sinó augmentant l'ordre d'aquesta equació. En altres paraules, l'equació d'ordre 3 aproximarà millor la solució globalment acotada que l'equació límit d'ordre 2 que és:

$$\left(m + \frac{1}{3}\rho L\right)\, z''(t) + \left(\frac{E_1}{L} + q\right)\, z'(t) + \left(\frac{E}{L}\right)\, z(t) = A\, e^{iwt}$$

Finalment, inclourem una simulació de la solució globalment acotada del model en derivades parcials i de l'equació diferencial ordinària que ens permetrà comparar visualment ambdues aproximacions.

Capítol 1

Modelització i valors propis dominants en el model lineal

1.1 El model lineal.

Per a fixar idees, pensarem en els sistemes de suspensió-amortiment que podem trobar, per exemple, en els cotxes (amortidors en general) o també en alguns edificis per tal d'esmorteir els moviments sísmics. Aquests sistemes estan formats per una molla (o dispositiu viscoelàstic) i un amortidor (o dispositiu viscós), que actua sobre la molla a través d'una massa (la roda), situada a l'extrem, esmorteint el moviment total del sistema: en l'automòbil això permet un major control i comoditat en la conducció.

Denotem per $u(x,t)$ el *desplaçament* (posició a temps t menys posició de referència) d'una molla, amb origen $x=0$, on està fixada a una paret immòbil. És a dir, $x_0+u(x_0,t_0)$ és la posició a temps $t=t_0$ de la partícula de la molla que en equilibri ocupa la posició $x=x_0$. I suposem que en $x=L$, que és l'extrem de la molla, aquesta està soldada a una massa rígida m en possible moviment longitudinal i sense deformació interna, sobre la qual actuen les forces viscoelàstiques de la molla i les viscoses de l'amortidor, que també hi està soldat. El model matemàtic d'aquesta situació serà deduït, per dos vies diferents, en les seccions 1.1.1 i 1.1.3, on s'obtindrà el sistema següent:

$$
(1.1)\qquad \begin{cases} u_{tt}-u_{xx}-\alpha\, u_{txx}=0, \quad 0<x<1 \\ \\ u(0,t)=0 \\ \\ u_{tt}(1,t)=-\varepsilon\,[u_x(1,t)+\,\alpha\, u_{tx}(1,t)+\,r\, u_t(1,t)] \end{cases}
$$

on $\alpha\geq 0$ fa el paper del coeficient de dissipació interna de la molla, $r>0$ el del coeficient de viscositat de l'amortidor i $\varepsilon>0$ depèn de la densitat, la massa i la longitud del sistema (vegi's l'apartat 1.1.2). Observem que es tracta d'una

equació d'ones amb dissipació forta tant en l'equació com en les condicions de contorn, que són dinàmiques. Això ens modelitza la viscositat en l'interior i en l'extrem de la molla. Aquest model ja va aparèixer amb els paràmetres fixats amb valors $r = 0$ i $\alpha = \varepsilon = 1$ a [19], tot i que en aquell treball no s'entrava amb detall en la deducció del model.

Una generalització d'aquest model consisteix en considerar una força externa $\Phi(t)$ aplicada a la massa. En aquest cas, el model resultant és similar a l'anterior:

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} - \alpha\, u_{txx} = 0, \quad 0 < x < 1 \\ \\ u(0,t) = 0 \\ \\ u_{tt}(1,t) = -\varepsilon\, [u_x(1,t) + \alpha\, u_{tx}(1,t) + r\, u_t(1,t) - \Phi(t)] \end{cases}$$

Aquest cas s'estudiarà en l'apèndix B per a un cert tipus de força externa. Però nosaltres ens centrarem, d'entrada, en el cas (1.1).

1.1.1 Deducció del model: llei de medis continus.

Dins els models dels medis continus més generals que els sòlids elàstics (descrits essencialment per la llei de Hooke), ens trobem amb els sòlids viscoelàstics, que és com s'anomenen aquells materials que combinen les propietats d'un sòlid elàstic (medi continu que, un cop deformat, recupera el seu estat inicial sense pèrdua d'energia) amb les d'un fluid newtonià o viscós (veure [13]). Aquestes propietats es manifesten en major o menor grau depenent de la rapidesa a la que es faci l'experiment ([1], cap.3). Les equacions que els governen són:

a) equació constitutiva d'un medi *elàstic* en un punt x_0

$$\sigma_e(x_0) = E u_x(x_0)$$

on σ_e representa la força elàstica, E és el mòdul de Young o coeficient elàstic del material i u_x, la deformació relativa del sistema. La força elàstica que actua sobre el segment $a < x < b$ serà doncs:

$$\sigma_e(a,b) = [E u_x]_a^b = \int_a^b E u_{xx} dx$$

b) equació constitutiva per a un medi *viscós* en x_0

$$\sigma_v(x_0) = E_1 u_{tx}(x_0)$$

on σ_v representa ara la força viscosa, E_1 és el coeficient de viscositat del material i u_{tx}, la velocitat de deformació relativa del medi. Com abans, podem

considerar la versió continua d'aquesta força viscosa que actua sobre l'interval $a < x < b$:

$$\sigma_v(a,b) = [E_1 u_{tx}]_a^b = \int_a^b E_1 u_{txx}\, dx\,.$$

Per la llei de Newton (balanç de quantitat de moviment en medis continus), la variació de quantitat de moviment és:

$$\frac{d}{dt}\int_a^b \rho(x) u_t dx = \sigma_e(a,b) + \sigma_v(a,b)$$

d'on s'obté l'equació del sistema de suspensió amb viscositat interna:

$$\rho(x)\, u_{tt} = \overbrace{E_1\, u_{txx}}^{\textit{viscositat de la molla}} + \overbrace{E\, u_{xx}}^{\textit{elasticitat de la molla}}$$

En el nostre cas, suposarem una densitat constant en tots els punts del sistema, de manera que l'equació queda com:

$$\rho\, u_{tt} = E_1\, u_{txx} + E\, u_{xx} \tag{1.2}$$

La condició de contorn en $x = 0$ és:

$$u(0,t) = 0 \tag{1.3}$$

ja que la molla està fixa a la paret; i aplicant la versió discreta de la llei de balanç de moviments en el punt $x = L$, obtenim que la força total en $x = L$ (en la roda) és igual a la força exercida per la molla en $x = L$ més la força exercida per l'amortidor en $x = L$

$$m\, u_{tt}(L) = -\sigma_e(L) - \sigma_v(L) - q\, u_t(L)$$

on q representa el coeficient de fricció de l'amortidor. Així,

$$m\, u_{tt}(L,t) = -E\, u_x(L,t) - E_1\, u_{tx}(L,t) - q\, u_t(L,t) \tag{1.4}$$

1.1.2 Adimensionalització dels paràmetres.

Aplicant un canvi de variable adequat a l'equació (1.2) aconseguim fixar els paràmetres de què depèn i fer-los adimensionals, és a dir, sense dimensió física. Aquest és un aspecte interessant que s'utilitza sovint en física, ja que és una manera de saber realment quins paràmetres influeixen en l'equació i de quina manera (veure [32], cap. 1).

Partim de l'equació (1.2) amb les condicions de contorn (1.3) i (1.4), on els paràmetres sí tenen dimensió física. Efectivament, ρ és una densitat lineal i, per tant, té dimensió $[\frac{m}{L}]$ (m és la massa i L, la longitud), E té dimensió $[\frac{mL}{t^2}]$

(on t =temps), E_1 té dimensió $[\frac{mL}{t}]$ i q té dimensió $[\frac{m}{t}]$. Si ho comprovem, veurem com les dimensions físiques de les equacions són coherents.

El canvi a variables adimensionals que proposem és el següent:

$$x \longleftrightarrow \frac{x}{L}\ , \quad t \longleftrightarrow \frac{t\sqrt{\frac{E}{\rho}}}{L}\ .$$

Ara, la longitud de la molla és 1. També proposem el canvi de funció:

$$u \longleftrightarrow \frac{u}{L}$$

i, en cas que hi hagi una força externa,

$$\Phi \longleftrightarrow \frac{\Phi}{E}$$

I el canvi a paràmetres adimensionals és:

$$\alpha = \frac{E_1}{\sqrt{E\rho}\,L}\ , \quad \varepsilon = \frac{\rho L}{m}\ , \quad r = \frac{q}{\sqrt{E\rho}}$$

Substituint les dimensions físiques de les noves variables, les noves funcions i introduint la notació amb els nous paràmetres, veurem que totes aquestes quantitats ara són, efectivament, adimensionals.

Amb aquest canvi obtenim l'equació (1.5), on tant les variables com els paràmetres han perdut la dimensió física: d'alguna manera hem aconseguit reduir-nos als paràmetres realment importants, els que en realitat controlen el nostre sistema:

$$(1.5) \qquad \begin{cases} u_{tt} - u_{xx} - \alpha\, u_{txx} = 0, \quad 0 < x < 1 \\ \\ u(0,t) = 0 \\ \\ u_{tt}(1,t) = -\varepsilon\ [u_x(1,t) + \alpha\, u_{tx}(1,t) + r\, u_t(1,t)] \end{cases}$$

I, en el cas de tenir una força externa, ens quedaria el sistema següent:

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} - \alpha\, u_{txx} = 0, \quad 0 < x < 1 \\ \\ u(0,t) = 0 \\ \\ u_{tt}(1,t) = -\varepsilon\ [u_x(1,t) + \alpha\, u_{tx}(1,t) + r\, u_t(1,t) - \Phi(t)] \end{cases}$$

Després del canvi de variables, el model ha quedat com una equació en derivades parcials que depèn dels paràmetres α, ε i r, tots ells no negatius;

concretament, es tracta d'una equació d'ones amb *dissipació forta* (controlada per α) provinent de la dissipació interna de la molla en $(0,1)$, amb condició de contorn Dirichlet homogènia en $x = 0$ i una condició de contorn dinàmica en $x = 1$, extrem on hi ha la roda, on també tenim un terme de dissipació forta (discret) que ve de la molla i controlat, per tant, per α, i un terme de dissipació feble controlat per r que ve de l'acció de l'amortidor. El paràmetre ε depèn del pes, la densitat i la longitud del sistema.

Posteriorment, farem tendir ε a zero, deixant α i r constants: en termes dels paràmetres dimensionals, això s'obtindria, per exemple, prenent límits per $m \to \infty$ i deixant els altres paràmetres constants. Igualment, quan fem tendir α a zero, el que farem és enviar E_1 a zero (considerarem una molla amb viscositat interna nul.la), de manera que α serà l'únic paràmetre afectat.

1.1.3 Deducció del model: models reològics.

En aquesta secció seguirem el capítol 6 de Davis ([13]), i Barnes ([1]). Ja hem vist què eren els materials viscoelàstics. La idea dels models reològics mecànics és simular el comportament dels materials viscoelàstics lineals mitjançant la combinació d'uns models simples: la molla (*spring*), que simbolitzarà l'elasticitat, i l'amortidor (*dashpot*), que representarà la viscositat. La combinació d'aquests models en sèrie i/o en paral.lel dóna lloc al que es coneix com models reològics mecànics i pretén ser un model virtual del comportament viscoelàstic del material, que no té perquè estar construït per molles i amortidors. En certa manera, aquests models són una discretització a unitats elementals elàstiques i viscoses d'un medi continu viscoelàstic, portada després a un nivell diferencial (farem el límit d'infinits sistemes d'aquest tipus). És una altra manera, en el fons anàloga a la clàssica, d'enfocar el nostre model. En general, parlem de reologia com la ciència que estudia la deformació i flux dels materials (utilitzada en estudi de plàstics, pintures, tintes per impressió ...).

En aquest tipus de models es representa l'elasticitat per una molla (veure la figura 1.1), que té per equació constitutiva

$$\sigma_e = E\,\varepsilon_e \tag{1.6}$$

on σ_e és la tensió elàstica o *elastic stress*, E és el mòdul de Young (constant d'elasticitat del material) i ε_e, la deformació elàstica relativa o *elastic strain*, tot i que en aquests models σ i ε són utilitzats de manera anàloga a força i extensió (veure, per exemple, [33]).

El comportament viscós es modelitza mitjançant un amortidor, representat típicament per un pistó que es mou en un cilindre amb líquid (veure la figura 1.2). La seva equació constitutiva és:

$$\sigma_v = E_1\,\dot{\varepsilon}_v \tag{1.7}$$

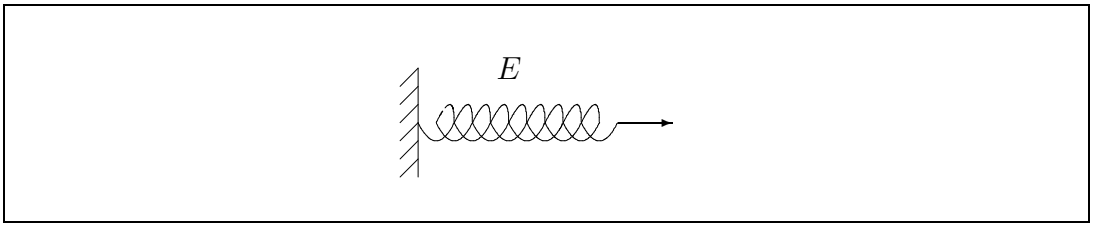


Figura 1.1: Model purament elàstic

on E_1 és la *viscositat* i $\dot{\varepsilon}_v$ és la velocitat de deformació viscosa o *strain rate* ($\dot{} = d/dt$).

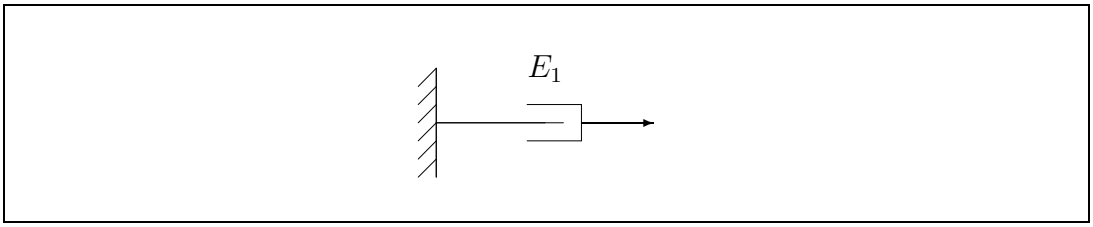


Figura 1.2: Model purament viscós

Aquests dos elements es poden connectar en sèrie o en paral.lel, donant lloc, mitjançant totes les combinacions possibles, als diferents models. De fet, aquests dos tipus de combinacions responen a dos fenòmens físics concrets dels materials viscoelàstics (*stress relaxation* i *creeping*) (els podem trobar en [13]), però la idea física és que en l'acoblament en paral.lel, les deformacions són iguals i sumem les tensions (veure la figura 1.3), i en l'acoblament en sèrie, les tensions elàstica i viscosa són iguals i se sumen les deformacions (veure la figura 1.4). Les possibles combinacions són infinites, però veurem alguns models reològics clàssics (versió discreta), així com la deducció de les equacions d'alguns models continus.

1. Model de Kelvin-Voigt. Aquest model consisteix en una combinació molla-amortidor en paral.lel (veure [13]), tal i com s'indica en la figura 1.3. L'acoblament en paral.lel es tradueix a:

$$\varepsilon_e = \varepsilon_v = \varepsilon \qquad i \qquad \sigma_e + \sigma_v = \sigma$$

Com que tenim (1.6) i (1.7), el model de K-V és:

$$\sigma \;=\; E_1\,\dot{\varepsilon} + E\,\varepsilon \tag{1.8}$$

2. Model de Maxwell. És la mateixa idea que al model anterior, però acoblant els dos elements en sèrie (veure [13]), tal i com indica la figura 1.4

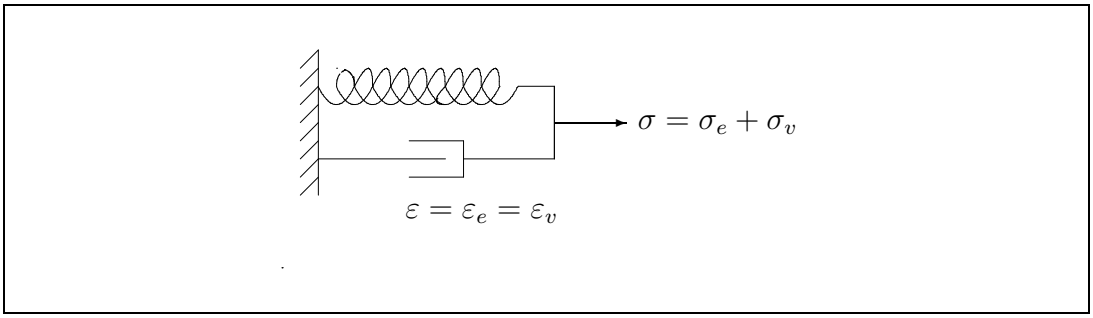


Figura 1.3: Model de Kelvin-Voigt

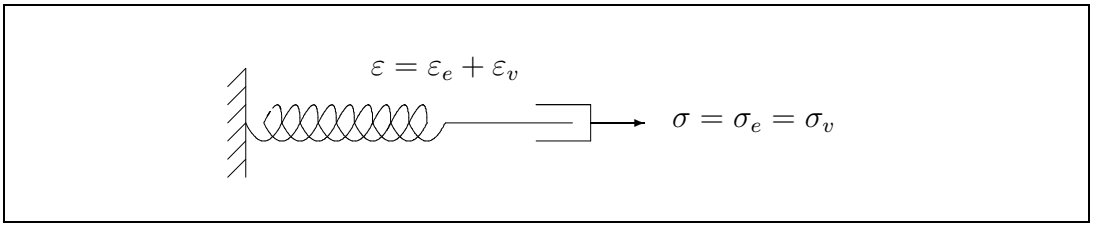


Figura 1.4: Model de Maxwell

En aquest cas,

$$\sigma_e = \sigma_v = \sigma \qquad i \qquad \varepsilon_e + \varepsilon_v = \varepsilon$$

de manera que l'equació del model de Maxwell és l'equació diferencial:

$$\dot{\varepsilon} = \frac{\dot{\sigma}}{E} + \frac{\sigma}{E_1} \tag{1.9}$$

3. Equació d'ones amb dissipació forta o Kelvin-Voigt continu.

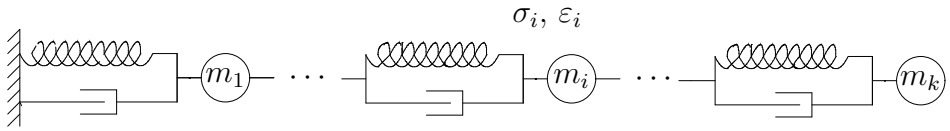


Figura 1.5: Model de Kelvin-Voigt continu

Tenim un material que, a nivell diferencial, el podem pensar com una successió de sistemes de Kelvin-Voigt acoblats en sèrie entre ells, tal i com s'indica en la figura 1.5 (el nostre medi continu es pot pensar com a límit d'aquest sistema discret). Com que la connexió és en sèrie, la tensió que suporta cada unitat interior es dedueix igual per a totes. En el sistema i-èssim tenim l'equació (1.8):

$$\sigma_i = E_1\,\dot{\varepsilon}_i + E\,\varepsilon_i$$

Fent balanç de forces entre el sistema i-èssim i el (i+1)-èssim tenim que la força total aplicada a m_i és $\sigma_{i+1} - \sigma_i$, i:

$$m_i \frac{d^2}{dt^2} u_i(t) = \sigma_{i+1} - \sigma_i$$

on $u_i(t)$ és el desplaçament i-èssim. Escrivint la massa en termes de la longitud i la densitat del sistema, tenim que $m_i = \rho_i\, h$ d'on:

$$\rho_i h \frac{d^2}{dt^2} u_i(t) = E_1 \left[\dot{\varepsilon}_{i+1} - \dot{\varepsilon}_i\right] + E \left[\varepsilon_{i+1} - \varepsilon_i\right] \ .$$

La deformació relativa en un medi discret la podem escriure en termes del desplaçament com variació del desplaçament en el sistema partit per la longitud. En aquest cas tenim:

$$\varepsilon_i = \frac{u_i - u_{i-1}}{h}$$

que substituint-ho en l'equació anterior:

$$\rho_i \frac{d^2 u_i(t)}{dt^2} = E_1 \frac{d}{dt}\left[\frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2}\right] + E \left[\frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2}\right]$$

Si prenem el límit del model diferencial considerant infinits sistemes de Kelvin-Voigt, el que fem és passar de sistema discret a continu fent que $h \to 0$, de manera que el límit del quocient en diferències finites no és res més que la versió discreta de la segona derivada espacial del desplaçament:

$$\lim_{h \to 0} \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2} = (u_i)_{xx}$$

quedant l'equació del desplaçament en el punt i-èssim:

$$\rho_i\, (u_i)_{tt} = E_1\, (u_i)_{xxt} + E (u_i)_{xx}$$

i, per tant, en qualsevol punt interior del sistema tenim:

$$\rho(x)\, u_{tt}(x,t) = E_1\, u_{xxt}(x,t) + E\, u_{xx}(x,t) \tag{1.10}$$

Observem que, de fet, es tracta de la nostra equació abans d'adimensionalitzar (veure equació (1.2)), cosa que ens dóna ja una idea de com discretitzar el nostre sistema molla-massa.

4. Equació d'ones amb dissipació feble o Maxwell continu. L'equació d'ones amb dissipació feble, molt més estudiada que la dissipació forta, també es pot deduir utilitzant la teoria de models reològics.

Pensem-ho com un material que, a nivell diferencial, es pot escriure com una successió de sistemes de Maxwell connectats entre ells en sèrie, tal i com

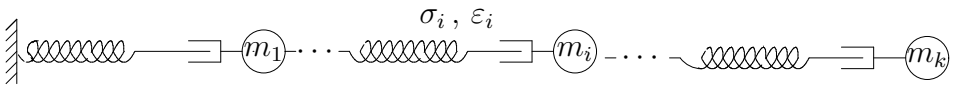


Figura 1.6: Model de Maxwell continu

es veu en la figura 1.6 (altre cop pensem un medi continu com a límit d'aquest sistema discret). En cadascun dels sistemes tenim, de l'equació de Maxwell (veure equació (1.9)), que podem escriure com:

$$\sigma_i = E_1 \left(\dot{\varepsilon}_i - \frac{\dot{\sigma}_i}{E} \right)$$

També fent balanç de forces en una massa m_i qualsevol, tenim que la força total aplicada a m_i és, com abans:

$$m_i \frac{d^2 u_i(t)}{dt^2} = \sigma_{i+1} - \sigma_i$$

d'on, substituint les tensions per la seva expressió anterior, tenim:

$$\begin{aligned} \rho_i \, h \, \frac{d^2 u_i(t)}{dt^2} &= E_1(\dot{\varepsilon}_{i+1} - \dot{\varepsilon}_i) - \frac{E_1}{E} \left(\dot{\sigma}_{i+1} - \dot{\sigma}_i \right) \\ &= E_1(\dot{\varepsilon}_{i+1} - \dot{\varepsilon}_i) - \frac{E_1}{E} \left(m_i \, \frac{d^2}{dt^2} \dot{u}_i(t) \right) \\ &= E_1(\dot{\varepsilon}_{i+1} - \dot{\varepsilon}_i) - \frac{E_1 \, \rho_i \, h}{E} \, (u_i)_{ttt} \end{aligned}$$

Escrivint la deformació en termes del desplaçament, tenim:

$$\rho_i \, h \, (u_i)_{tt} = E_1 \, \frac{d}{dt} \Big(\frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h} \Big) - \frac{E_1 \, h \, \rho_i}{E} (u_i)_{ttt}$$

Dividint per h i prenent límits per $h \to 0$ tenim:

$$\rho_i \, u_{tt} = E_1 \, \frac{d}{dt} (u_i)_{xx} - \frac{E_1 \, \rho_i}{E} (u_i)_{ttt}$$

de manera que l'equació del moviment en un punt qualsevol del sistema és:

$$\rho(x) \, u_{tt} = E_1 \, u_{xxt} - \frac{E_1 \, \rho(x)}{E} \, u_{ttt}$$

Si volem, integrant respecte t a banda i banda el que tenim és:

$$\frac{E_1}{E} \, u_{tt} = \frac{E_1}{\rho(x)} \, u_{xx} - u_t + F(x)$$

amb F(x) qualsevol, que podem suposar, sense pèrdua de generalitat, igual a zero (veure [13], cap.6). Tenim, doncs, deduïda l'equació d'ones amb dissipació feble:

$$\frac{E_1}{E}\ u_{tt} = \frac{E_1}{\rho(x)}\ u_{xx} - u_t$$

5. Equació d'ones amb dissipació forta i condicions de contorn dinàmiques: el nostre cas. Ja hem vist que l'equació amb dimensions del desplaçament en un punt interior del nostre sistema molla-massa és la mateixa que la del medi Kelvin-Voigt continu, que ens representa la discretització de la molla com a sistema viscoelàstic. Però ens falten les condicions de contorn. Pensem doncs en un material tal que, a nivell diferencial, es pugui pensar en l'interior com una successió en sèrie de sistemes de Kelvin-Voigt, l'últim dels quals està acoblat en paral.lel amb un amortidor, tal i com indica la figura 1.7. El sistema està connectat a una massa en aquest extrem (la roda), que no té deformacions internes.

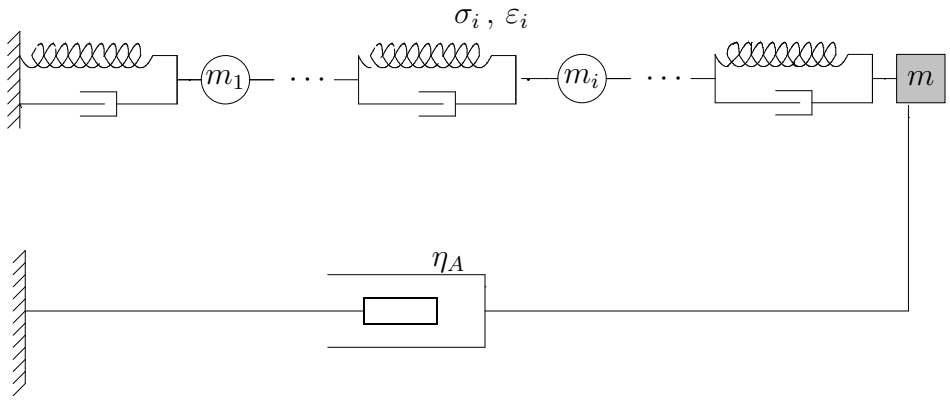


Figura 1.7: Model diferencial del nostre sistema molla-massa

Aquest sistema té com a equació del moviment en qualsevol punt interior l'equació (1.10), en el nostre cas amb densitat constant $\rho(x) = \rho$, i com a condició de contorn en $x = 0$, la Dirichlet homogènia. Falta la condició en l'extrem $x = L$, en la qual només intervenen l'últim dels sistemes Kelvin-Voigt i l'amortidor (l'acció de la resta de la molla hi és present a través d'aquest últim sistema KV, ja que estan connectats en sèrie entre ells).

Per a fixar els termes, anomenarem σ_i i ε_i la tensió i la deformació en l'última component de KV, que tindrà llargada h. Com que, de fet, σ_i és la tensió total de la molla (connexió en sèrie), l'anomenarem σ_M ; per contra, la tensió i deformació en l'amortidor seran, respectivament, σ_A i ε_A. El sistema, de longitud total L està connectat en aquest extrem a un massa m. L'equació en la component KV és:

$$\sigma_M \ = \ E\,\varepsilon_i \ + \ E_1\,\dot{\varepsilon}_i$$

i la de l'amortidor:

$$\sigma_A \;=\; \eta_A\,\dot{\varepsilon}_A$$

Com que la connexió entre ells és en paral.lel, tenim que les tensions se sumen:

$$\sigma_A \;+\; \sigma_M \;=\; \sigma$$

I les deformacions les podem escriure en termes del desplaçament, com en els casos anteriors, però ara ε_i i ε_A són deformacions qualitativament diferents. Per una banda, ε_i és la deformació relativa a nivell diferencial del sistema i-èssim (variació de desplaçament partit per longitud del sistema) i, per tant:

$$\varepsilon_i \;=\; \frac{u_i - u_{i-1}}{h}$$

Però ε_A és la deformació relativa de l'amortidor: com que té una sola component, la variació del desplaçament és, en aquest cas, el desplaçament en $x = L$ menys el desplaçament en $x = 0$, que és nul:

$$\varepsilon_A \;=\; \frac{u(L)}{L}$$

Per tant, en termes de $u(x,t)$, les condicions de contorn queden:

$$\sigma = \sigma_A + \sigma_M = \eta_A\,\frac{d}{dt}\Big(\frac{u(L)}{L}\Big) + E\,\frac{u_i - u_{i-1}}{h} + E_1\,\frac{d}{dt}\Big(\frac{u_i - u_{i-1}}{h}\Big)$$

Com que tenim la massa a l'extrem $\sigma \;=\; -m\,u_{tt}$ tenim:

$$m\,u_{tt}\big|_L \;=\; -\left[E\,\frac{u_i - u_{i-1}}{h} + \frac{\eta_A}{L}\,u_t + E_1\,\frac{d}{dt}\left(\frac{u_i - u_{i-1}}{h}\right)\right]\Bigg|_L$$

Prenent límits per a $h \to 0$ (passem al medi continu), tenim la versió discreta de la primera derivada espacial:

$$\lim_{h\to 0}\,\left(\frac{u_i - u_{i-1}}{h}\right)\Bigg|_L \;=\; u_x(L)$$

Així, la condició de contorn queda:

$$m\,u_{tt}(L,t) \;=\; -\Big(Eu_x + \frac{\eta_A}{L}\,u_t + E_1\,u_{xt}\Big)\,(L,t)$$

on η_A/L és el coeficient de viscositat de l'amortidor, és a dir, el que nosaltres en la condició de contorn dimensional (1.4) en dèiem q. De fet, observem que amb aquesta notació, hem obtingut exactament la condició (1.4).

6. Generalització del cas anterior: la viscositat i l'elasticitat depenen del punt. En aquest cas, tindrem una viscositat $(E_1)_i$ i una elasticitat E_i

dependents del sistema on ens trobem: així, la discretització també s'haurà de fer en aquests coeficients. L'equació en la component de Kelvin-Voigt i-èssima és:

$$\sigma_i \;=\; E_i\,\varepsilon_i \;+\; (E_1)_i\,\dot{\varepsilon}_i$$

Per tant, despés d'aplicar el balanç de forces de sempre entre el sistema i-èssim i el (i+1)-èssim, tenim:

$$\begin{aligned}\rho_i\,h\frac{d^2u_i}{dt^2} \;&=\; \frac{d}{dt}\left((E_1)_{i+1}\frac{u_{i+1}-u_i}{h} \;-\; (E_1)_i\frac{u_i-u_{i-1}}{h}\right) + \\ &+\; E_{i+1}\frac{u_{i+1}-u_i}{h} \;-\; E_i\frac{u_i-u_{i-1}}{h}\end{aligned}$$

Observem les següents aproximacions discretes, per diferències endavant dos cops:

$$\begin{aligned}(E_1(x)\,u_x)_x \;&=\; \lim_{h\to 0}\frac{(E_1)_{i+1}\,(u_x)_{i+1}-(E_1)_i\,(u_x)_i}{h} \\ &=\; \lim_{h\to 0}\frac{(E_1)_{i+1}\dfrac{u_{i+1}-u_i}{h}-(E_1)_i\dfrac{u_i-u_{i-1}}{h}}{h}\end{aligned}$$

Per tant, de fet el que teníem si fem límits per $h\to 0$ és:

$$\rho(x)u_{tt} \;=\; (E_1(x)\,u_x)_{xt} + (E(x)\,u_x)$$

que desenvolupada és la nostra, però amb dos termes afegits:

$$\rho(x)\,u_{tt} \;=\; E_1(x)\,u_{xxt} + (E_1)_x(x)\,u_{xt} + E(x)\,u_{xx} + E_x(x)\,u_x$$

1.2 Valors propis dominants i reducció a equacions diferencials ordinàries.

Considerem l'equació d'evolució

$$\frac{d}{dt}\,x(t) = B\,x(t) \tag{1.11}$$

on B és un operador en un espai de Banach X amb espectre $\sigma(B)$.

Definició 1.1. *Suposem que $\sigma(B)$ conté k valors propis aïllats, de multiplicitat algebraica finita, λ_1, ..., λ_k (repetits segons la multiplicitat) i que existeixen dues constants ω_1, $\omega_2 \in \mathbb{R}$ tals que*

$$Re\,\lambda < \omega_1 < \omega_2 < Re\,\lambda_i \;\;\forall\, i = 1, ..., k\;,\;\; \forall \lambda \in \sigma(B) \setminus \{\lambda_1, ..., \lambda_k\}$$

En aquest cas direm que l'operador B admet un subconjunt finit de ***valors propis dominants*** *$\{\lambda_1, \cdots, \lambda_k\}$.*

Quan tenim aquesta situació, podem separar l'espectre en dues parts σ_1 i σ_2 (en l'apartat 3.2 tractarem aquest tema amb més detall), on $\sigma_2 = \{\lambda_1, \cdots, \lambda_k\}$ i $\sigma_1 = \sigma(B) \setminus \{\lambda_1, \cdots, \lambda_k\}$, de manera que $\sigma(B) = \sigma_1 \cup \sigma_2$. A aquesta descomposició de l'espectre va associada una descomposició de l'espai total X:

$$X = X_1 \oplus X_2$$

essent l'operador B invariant sobre cada subespai. Així, l'operador B restringit al subespai X_1, que denotem per $B_1 = B|_{X_1}$, és un operador de dimensió infinita; i $B_2 = B|_{X_2}$, la restricció de B al subespai X_2, és de dimensió finita. I els espectres són $\sigma(B_1) = \sigma_1$ i $\sigma(B_2) = \sigma_2$. Amb aquesta notació, tota solució de (1.11) es pot escriure com:

$$x(t) = x_1(t) + x_2(t)$$

on $x_1(t) \in X_1$ i $x_2(t) \in X_2$. De fet, si ens mirem les equacions d'evolució donades pels operadors projectats B_1 i B_2 tenim, per una banda, que $x_2(t)$ és solució de:

$$\frac{d}{dt}\, x_2(t) = B_2\, x_2(t)$$

que, com que B_2 és de dimensió finita, és una equació diferencial ordinària de solució $x_2(t) = e^{B_2\, t}\, x_2(0)$. Per l'altra banda, l'operador de dimensió infinita ens dóna l'equació d'evolució:

$$\frac{d}{dt}\, x_1(t) = B_1\, x_1(t)$$

que té per solució $x_1(t) = e^{B_1\, t}\, x_1(0)$.

Suposem a més que l'operador B és generador infinitessimal d'un semigrup analític. En aquest cas, també ho serà l'operador B_1, de manera que podem acotar les solucions de la manera següent:

$$\|x_1(t)\| = \|e^{B_1\, t}\, x_1(0)\| \leq M_1\, e^{\omega_1\, t} \|x_1(0)\|, t \geq 0 \tag{1.12}$$

ja que B_1 genera un semigrup analític i $Re\, \lambda < \omega_1\ \forall \lambda \in \sigma_1$, i:

$$\|x_2(t)\| = \|e^{B_2\, t}\, x_2(0)\| \geq M_2\, e^{\omega_2\, t} \|x_2(0)\|,\ t \geq 0 \tag{1.13}$$

ja que B_2 és de dimensió finita i $Re\, \lambda > \omega_2\ \forall \lambda \in \sigma_2$.

En aquestes condicions tenim el resultat següent:

Teorema 1.2. *Suposem que B és un operador de dimensió infinita, que genera un semigrup analític i que admet un subconjunt finit de valors propis dominants. Sigui $x(t) = x_1(t) + x_2(t)$ solució de l'equació d'evolució (1.11), amb $x_1(t) \in X_1$ i $x_2(t) \in X_2$, amb condicions inicials $x(0) = x_1(0) + x_2(0)$ i $x_2(0) \neq 0$. Llavors, es compleix que:*

$$\lim_{t \to \infty} \frac{\|x(t) - x_2(t)\|}{\|x(t)\|} = 0$$

Observació 1.3. *En aquest cas, és raonable dir que l'equació d'evolució de dimensió infinita $x' = Bx$ té com a* ***límit*** *quan $t \to \infty$ l'equació diferencial ordinària $x_2' = B_2\, x_2$.*

Aquest és un resultat que es dedueix de la teoria clàssica de semigrups analítics, però el paper fonamental que tindrà en els capítols posteriors fa que l'enunciem i el demostrem amb precisió.

Demostració. Observem abans de res que, degut a l'equivalència de normes, tenim la relació:

$$C_1\,(\|x_1\| + \|x_2\|) \leq \|x\| \leq C_2\,(\|x_1\| + \|x_2\|)$$

Així,

$$\frac{\|x(t) - x_2(t)\|}{\|x(t)\|} \leq \frac{\|x_1(t)\|}{C_1\ (\|x_1(t)\| + \|x_2(t)\|)} \leq \frac{\|x_1(t)\|}{C_1 \|x_2(t)\|}$$

Per les desigualtats (1.12) i (1.13):

$$\frac{\|x_1(t)\|}{C_1\,\|x_2(t)\|} \leq \frac{M_1\, e^{\,\omega_1\, t}\|x_1(0)\|}{C_1\, M_2\, e^{\,\omega_2\, t}\|x_2(0)\|} = \frac{M_1\,\|x_1(0)\|}{C_1\, M_2 \|x_2(0)\|}\, e^{(\omega_1 - \omega_2)\, t}$$

Com que $\omega_1 < \omega_2$, tenim $e^{(\omega_1 - \omega_2)\, t} \underset{t\to\infty}{\longrightarrow} 0$, de manera que:

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\|x(t) - x_2(t)\|}{\|x(t)\|} = 0$$

□

Capítol 2

Molla elàstica perfecta o $\alpha = 0$

Ens fixarem ara en el cas $\alpha = 0$, és a dir, considerarem nul.la la viscositat de la molla (no tindrà dissipació interna). Es tracta doncs de l'estudi de l'equació:

$$(2.1) \qquad \begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0, \quad 0 < x < 1, \ t > 0 \\ \\ u(0,t) = 0, \quad t > 0 \\ \\ u_{tt}(1,t) + \varepsilon\, u_x(1,t) + \varepsilon\, r\, u_t(1,t) = 0, \quad t > 0 \\ \\ u(x,0) = u_0(x), \ u_t(x,0) = v_0(x), \quad 0 < x < 1 \\ \\ u(1,0) = \eta \ (= u_0(1)), \ u_t(1,0) = \mu \ (= v_0(1)) \end{cases}$$

on hem afegit ara les condicions inicials i on $u = u(x,t)$, $t \in [0,\infty)$ i els paràmetres adimensionals ε i r són estrictament positius (per tant, sí tindrem dissipació provinent de l'acció de l'amortidor) i fixats en tot el capítol. Volem un marc funcional on plantejar-nos aquesta equació.

2.1 Plantejament funcional.

Definició 2.1 (Brézis, [2]). *Sigui $T : \mathcal{D}(T) \subset X \to X$ un operador lineal no acotat en un espai de Hilbert X. Direm que és un operador* ***monòton*** *si*

$$Re\, \langle TV, V \rangle_X \geq 0, \ \forall\, V \in \mathcal{D}(T)$$

I serà ***maximal monòton*** *si, a més, $\mathcal{R}(I + T) = X$.*

Voldrem escriure l'equació (2.1) com una equació d'evolució del tipus:

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt} V - A_0 V = 0, \qquad t \in [0,\infty) \\ \\ V(0) = F_0 \end{cases}$$

on l'operador $(-A_0, \mathcal{D}(A_0))$ serà maximal monòton (alguns autors, per exemple [27], parlen d'operador dissipatiu). El teorema de Hille-Yosida (o de Lummer-Phillips, amb l'altra notació) ens garanteix que, sota aquestes hipòtesis, A_0 genera un semigrup continu de contraccions (veure [2] per més detalls).

Seguint el plantejament i la notació de [19], definirem l'operador de la manera següent. En general, per a :

$$V = \begin{pmatrix} (\, u, u(1)\,) \\ (\, v, v(1)\,) \end{pmatrix} \in \mathcal{D}(A_0)$$

definim:

$$A_0 V = \begin{pmatrix} (\, v, v(1)\,) \\ (\, u_{xx}, -\varepsilon u_x(1) - \varepsilon r v(1)\,) \end{pmatrix} \quad i \quad V(0) = F_0 = \begin{pmatrix} (\, u_0(x), \eta\,) \\ (\, v_0(x), \mu\,) \end{pmatrix}$$

Així, per a

$$V = \begin{pmatrix} (\, u, u(1)\,) \\ (\, u_t, u_t(1)\,) \end{pmatrix}$$

i l'A_0 i F_0 anteriors, l'equació d'ones inicial es pot escriure com una equació d'evolució del tipus que volíem. Però cal definir els espais on viuen aquests elements. Per a fer-ho, ens cal primer definir uns *espais base*, que denotarem per X_0, X_1 i X_2, on:

$$X_2 = \{(u,\gamma) \in H^2(0,1) \times \mathbb{C},\ u(1) = \gamma,\ u(0) = 0\}, \text{ subespai de } H^2(0,1) \times \mathbb{C},$$

$$X_1 = \{(u,\gamma) \in H^1(0,1) \times \mathbb{C},\ u(1) = \gamma,\ u(0) = 0\}, \text{ subespai de } H^1(0,1) \times \mathbb{C},$$

$$X_0 = \{(u,\gamma) \in L^2(0,1) \times \mathbb{C}\}, \text{ que és exactament } L^2(0,1) \times \mathbb{C}$$

Considerarem en X_1 i X_0 els productes escalars següents:

$$\langle (u, u(1)), (v, v(1)) \rangle_{X_1} = \int_0^1 u_x\, \overline{v}_x\, dx \quad \text{i} \quad \langle (u,\gamma), (v,\beta) \rangle_{X_0} = \int_0^1 u\, \overline{v}\, dx \ + \gamma\, \overline{\beta}.$$

Amb aquestes definicions, els espais naturals on pensar l'operador i el seu domini són:

$$\mathcal{D}(A_0) = X_2 \times X_1 \quad \subset \mathcal{H} \quad \text{on} \quad \mathcal{H} = X_1 \times X_0$$

i $\mathcal{H}$ és un espai de Hilbert amb el producte escalar:

$$\left\langle \begin{pmatrix} (u_1, u_1(1)) \\ (u_0, \gamma_0) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} (v_1, v_1(1)) \\ (v_0, \beta_0) \end{pmatrix} \right\rangle_{\mathcal{H}} = \int_0^1 (u_1)_x (\overline{v}_1)_x\, dx + \int_0^1 u_0 \overline{v}_0\, dx + \gamma_0 \overline{\beta}_0$$

Però quan $\varepsilon > 0$ està fixat, tenim una norma equivalent a l'anterior que ens serà útil en molts casos i que es defineix a partir de

$$\langle (u,\gamma), (v,\beta) \rangle_{(X_0;\,\varepsilon)} = \int_0^1 u\, \overline{v}\, dx \ + \frac{1}{\varepsilon}\, \gamma\, \overline{\beta}$$

i, per tant,

$$\left\langle \begin{pmatrix} (u_1, u_1(1)) \\ (u_0, \gamma_0) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} (v_1, v_1(1)) \\ (v_0, \beta_0) \end{pmatrix} \right\rangle_\varepsilon = \int_0^1 (u_1)_x (\overline{v}_1)_x \, dx + \int_0^1 u_0 \overline{v}_0 \, dx + \frac{1}{\varepsilon} \gamma_0 \overline{\beta}_0$$

Observació 2.2. *Quan $\varepsilon > 0$ i està fixada, tenim dues normes possibles que són equivalents entre elles de manera no uniforme en ε, però quan $\varepsilon = 0$ només té sentit la primera norma, $\| \cdot \|_{\mathcal{H}}$. Poder utilitzar una norma o l'altra, segons ens convingui, serà important en aquest treball.*

Lema 2.3. *Els productes escalars que hem definit en X_1 i X_0 són equivalents als productes habituals en $H^1 \times \mathbb{C}$ i $L^2 \times \mathbb{C}$, respectivament.*

Demostració. a) Sigui $u \in H^1(0,1),\ u(0) = 0$. Vegem que

$$\int_0^1 |u|^2 \, dx \ \leq\ C \int_0^1 |u_x|^2 \, dx \quad amb\ C > 0$$

En particular, en aquest espai, les normes $\| u \|_{H^1}$ i $\| u_x \|_{L^2}$ són equivalents.

Efectivament. Recordem que $\overline{\mathcal{C}^1(0,1)} = H^1(0,1) \subset \mathcal{C}[0,1]$. Podem prendre una successió $\tilde{u}_n \in \mathcal{C}^1(0,1)$ que aproximi $u \in H^1(0,1),\ u(0) = 0$. En particular, si T és l'operador traça, tenim:

$$\| T\tilde{u}_n - Tu \|_{L^1(\partial[0,1])} \leq \| \tilde{u}_n - u \|_{H^1} \to\ 0$$

d'on $\tilde{u}_n(0) \to 0$. Prenem ara $u_n(x) = \tilde{u}_n(x) - \tilde{u}_n(0)$. Tenim $u_n \in \mathcal{C}^1(0,1)$ i $u_n(0) = 0$ i, com que $\tilde{u}_n(0) \to 0$, també és cert que $u_n(x)$ aproximen u en $H^1(0,1)$. Per a aquestes funcions podem escriure:

$$u_n(x) = \int_0^x u_n'(\xi) \, d\xi$$

d'on tenim que $\| u_n \|_{L^2} \leq \| u_n' \|_{L^2}$ i, en particular, es compleix l'enunciat per a aquestes funcions:

$$\| u_n \|_{L^2} \leq \| u_n' \|_{L^2}, \quad \forall u_n \in \mathcal{C}^1(0,1),\ u_n(0) = 0$$

i, per tant:

$$\| u_n \|_{H^1} \leq\ C \| u_n' \|_{L^2}, \quad \forall u_n \in \mathcal{C}^1(0,1),\ u_n(0) = 0$$

Utilitzant aquesta acotació, ho veurem per a les funcions que ens interessen, ja que:

$$\| u \|_{H^1} \leq \| u_n - u \|_{H^1} \ +\ \| u_n \|_{H^1}$$
$$\leq \| u_n - u \|_{H^1} \ + C \| u_n' \|_{L^2} \leq \| u_n - u \|_{H^1} \ + C \| u_n' - u' \|_{L^2} \ + C \| u' \|_{L^2}$$

Prenent límits per $n \to \infty$, tenim ja que:

$$\| u \|_{H^1} \leq C \| u' \|_{L^2}$$

b) Per tant, el producte escalar habitual de $H^1 \times \mathbb{C}$:

$$\langle (u, u(1)), (v, v(1)) \rangle_{H^1 \times \mathbb{C}} = \int_0^1 (u\,\overline{v} + u_x\,\overline{v}_x)\,dx + u(1)\,\overline{v(1)}$$

és equivalent a:

$$\langle (u, u(1)), (v, v(1)) \rangle = \int_0^1 u_x\,\overline{v}_x\,dx + u(1)\,\overline{v(1)}$$

quan $u(0) = v(0) = 0$. Ens queda veure l'equivalència amb el producte escalar a X_1. Però,

$$\int_0^1 |u_x|^2 \leq \int_0^1 |u_x|^2 + |u(1)|^2$$

Tornant a usar aproximacions tipus $u_n(x)$ s'obté que $| u(1) | \leq \left(\int_0^1 |u_x|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$, d'on

$$\int_0^1 |u_x|^2 + |u(1)|^2 \leq K \int_0^1 |u_x|^2$$

c) Comprovar que la norma a $\| \cdot \|_{(X_0;\varepsilon)}$ equival a la de $L^2 \times \mathbb{C}$ és directe per $\varepsilon > 0$. □

Teorema 2.4. *L'operador* $(-A_0, \mathcal{D}(A_0))$ *és maximal monòton en* $\mathcal{H}$ *amb el producte escalar* $\langle , \rangle_\varepsilon$.

Demostració. a) Vegem primer que $-A_0$ és monòton, és a dir, que:

$$Re\,\langle -A_0 V, V \rangle_\varepsilon \geqslant 0,\ \forall\, V = \begin{pmatrix} (u, u(1)) \\ (v, v(1)) \end{pmatrix} \in \mathcal{D}(A_0)$$

Només escrivint qui és l'operador i integrant per parts tenim:

$$Re\langle -A_0 V, V \rangle_\varepsilon =$$

$$= Re\,\left[\langle (-v, -v(1)), (u, u(1)) \rangle_{X_1} + \langle (-u_{xx},\, \varepsilon\, u_x(1) + \varepsilon\, r\, v(1)), (v, v(1)) \rangle_{(X_0;\varepsilon)} \right] =$$

$$= Re\,\left[\int_0^1 -v_x\,\overline{u_x}\,dx + \int_0^1 -u_{xx}\,\overline{v}\,dx + \frac{1}{\varepsilon} \left(\varepsilon\, u_x(1)\,\overline{v(1)} + \varepsilon\, r\, |v(1)|^2 \right) \right] =$$

$$= r\,|v(1)|^2 \geqslant 0$$

d'on tenim que, efectivament, $-A_0$ és monòton.

b) Ens falta veure que $-A_0$ és maximal monòton, és a dir, que també es compleix que $\mathcal{R}(-A_0 + Id) = \mathcal{H}$ o, en altres termes, que

$$\forall\, F = \begin{pmatrix} (f, f(1)) \\ (g, b) \end{pmatrix} \in \mathcal{H},\ \exists V = \begin{pmatrix} (u, u(1)) \\ (v, v(1)) \end{pmatrix} \in \mathcal{D}(A_0)$$

tal que $V - A_0 V = F$. Si ho escrivim, tenim que s'ha de complir que:

$$\begin{pmatrix} (u, u(1)) \\ (v, v(1)) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} (-v, -v(1)) \\ (-u_{xx},\, \varepsilon u_x(1) + \varepsilon r\, v(1)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (f, f(1)) \\ (g, b) \end{pmatrix}$$

Igualant terme a terme, voldrem $u \in H^2(0,1)$ i $v \in H^1(0,1)$ tals que:

$$\begin{cases} u - v = f \\ v - u_{xx} = g \\ v(1) + \varepsilon\, u_x(1) + \varepsilon\, r\, v(1) = b \end{cases}$$

amb $u(0) = 0$ i $v(0) = 0$, i amb $f \in H^1(0,1)$, $g \in L^2(0,1)$ i $b \in \mathbb{C}$ donades. Usant la primera relació, expressarem l'anterior sistema en termes d'una sola variable:

$$v = u - f \ \Rightarrow \begin{cases} -u_{xx} + u = g + f \\ \\ \varepsilon\, u_x(1) + (\varepsilon\, r + 1)\, u(1) = b + (\varepsilon\, r + 1)\, f(1) \end{cases}$$

on $u \in H^2(0,1)$ i $u(0) = 0$. Simplifiquem la notació d'aquesta equació diferencial de segon ordre en u i denotem:

$$h = g + f\ \in L^2,\quad m = \frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon\, r},\quad s = \frac{b}{1 + \varepsilon\, r} + f(1)$$

de manera que l'equació diferencial ordinària queda:

$$\begin{cases} -u_{xx} + u = h \\ m u_x(1) + u(1) = s \end{cases}$$

Amb aquest canvi de notació i fent encara un altre canvi de variable que és $w = u - \dfrac{s}{m+1}\, x$, l'equació que, finalment, resoldrem és:

$$\begin{cases} -w_{xx} + w = \tilde{h} \\ w(0) = 0 \\ m\, w_x(1) + w(1) = 0 \end{cases} \tag{2.2}$$

on $\tilde{h} = h - \dfrac{s}{m+1}\, x\ \in L^2$ i amb $w \in H^2$. Escrivint l'equació en aquesta forma, resulta directe veure, aplicant teorema de Lax-Milgram, que (2.2) té solució i és única. Amb això tenim ja demostrat que $-A_0$ és maximal i monòton. □

Observació 2.5. *El teorema de Hille-Yosida (veure, per exemple, [2]) ens diu que A_0 genera un semigrup continu de contraccions $e^{A_0 t}$ en $\mathcal{H}$. En particular, per a tota condició inicial $F_0 \in \mathcal{D}(A_0)$ tenim existència i unicitat de solució per al problema:*

$$\frac{d}{dt}V - A_0 V = 0$$

amb $V(0) = F_0$. Aquesta solució V és $\mathcal{C}^1((0,\infty);\mathcal{H})$ i $\mathcal{C}^0((0,\infty);\mathcal{D}(A_0))$. A més, el teorema també ens acota en norma les solucions i tenim:

$$\|V(t)\|_\varepsilon \leq \|V(0)\|_\varepsilon \quad i \quad \left\|\frac{d}{dt}V(t)\right\|_\varepsilon = \|A_0 V(t)\|_\varepsilon \leq \|A_0 V(0)\|_\varepsilon,\ \forall t \geq 0\ .$$

En el cas que $F_0 \in \mathcal{H}$ però $F_0 \notin \mathcal{D}(A_0)$ aleshores la solució V és $\mathcal{C}^0((0,\infty);\mathcal{H})$ i és una solució feble. En aquest cas també es compleix que:

$$\|V(t)\|_\varepsilon \leq \|V(0)\|_\varepsilon\ \forall\, t \geq 0\ .$$

Aquest tipus d'acotacions ens seran útils posteriorment.

2.2 Estudi qualitatiu de les solucions.

Mitjançant l'estudi dels valors propis i les funcions pròpies generalitzades de l'operador $(A_0, \mathcal{D}(A_0))$, veurem que quan $\alpha = 0$ no podrem parlar d'un conjunt finit dominant de valors propis. En particular, quan la molla és elàstica perfecta l'equació en derivades parcials no es comportarà, en el límit, com una equació diferencial ordinària. Però tot i això, l'estudi ens permetrà veure que, en aquest cas, totes les solucions de l'equació tendiran a zero quan el temps es fa infinit (perquè la part real dels valors propis serà sempre estrictament negativa) i que hi haurà solucions que aniran a zero tan lentament com vulguem.

Voldrem estudiar solucions del tipus

$$u(x,t) = e^{\lambda t}\, u(x) \tag{2.3}$$

és a dir, ens interessem pels valors propis i les funcions pròpies de l'operador A_0. Veurem que les combinacions lineals de les funcions pròpies generalitzades són denses en $\mathcal{H}$ i quines conseqüències té tot això.

2.2.1 El conjunt de funcions pròpies de A_0 és complet en $\mathcal{H}$.

Ho veurem seguint la teoria d'operadors completament continus de [18], capítol V.10. Abans d'aplicar el resultat de densitat d'aquests autors, cal definir alguns conceptes que apareixen en aquest llibre.

Definició 2.6. *Sigui $K \in \Sigma_\infty$ un operador completament continu en un espai de Hilbert X. Anomenem* ***s-nombres*** *de l'operador K als valors propis de l'operador $K_s = (K^*\,K)^{\frac{1}{2}} \in \Sigma_\infty$, que numerarem en ordre decreixent tenint en compte la multiplicitat:*

$$s_j(K) = \lambda_j(K_s),\ (j = 1, 2, \ldots r(K_s) = dim\mathcal{R}(K_s))$$

Aquests s-nombres tenen un conjunt de propietats en les que no entrarem (veure [18]).

Definició 2.7. *Denotem per Σ_p el següent subespai d'operadors completament continus*

$$\Sigma_p = \{K \in \Sigma_\infty \, t.q. \sum_{j=1}^{\infty} s_j^p\,(K) < \infty\}$$

Teorema 2.8 (Gohberg, Kreĭn [18]). *El conjunt de funcions pròpies generalitzades de l'operador $\tilde{A} = \tilde{T} + \tilde{K}$ és complet en $\mathcal{H}$ sempre que $\tilde{T}$ sigui autoadjunt i amb espectre discret i $\tilde{K}$ pertanyi a algun Σ_p .*

El que farem és demostrar que un cert operador $\tilde{A}$, que no serà exactament A_0 però gairebé, està dins les hipòtesis d'aquest teorema. L'operador que considerarem serà un gir de l'anterior, concretament $\tilde{A} = i\,A_0$, de manera que:

$$\tilde{A}V = \tilde{A}\begin{pmatrix}(u, u(1))\\(v, v(1))\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}(iv, iv(1))\\(iu_{xx},\ -i\varepsilon\,u_x(1) - i\varepsilon\,r\,v(1))\end{pmatrix} \quad \forall\, V \in \mathcal{D}(A_0).$$

Teorema 2.9. *El conjunt de funcions pròpies generalitzades de A_0 és complet en $\mathcal{H}$.*

Demostració. Ho demostrarem veient que les funcions pròpies de $\tilde{A}$ formen un conjunt complet en $\mathcal{H}$. Aquest nou operador $\tilde{A}$ és convenient descomposar-lo com $\tilde{A}V = \tilde{T}V + \tilde{K}V$ on:

$$\tilde{T}\begin{pmatrix}(u, u(1))\\(v, v(1))\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}(iv, iv(1))\\(iu_{xx},\ -i\varepsilon\,u_x(1))\end{pmatrix}$$

representaria l'operador *derivades*, i:

$$\tilde{K}\begin{pmatrix}(u, u(1))\\(v, v(1))\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}(0, 0)\\(0,\ -i\varepsilon\,r\,v(1))\end{pmatrix}$$

seria l'operador de *constants*. Només cal veure que, amb aquesta descomposició, estem dins les hipòtesis del teorema de Gohberg i Krejn.

1. Per veure que $\tilde{T}$ és simètric hem de veure que

$$\langle \tilde{T}\,V\,,\,W\rangle_\varepsilon = \langle\,V\,,\,\tilde{T}W\rangle_\varepsilon$$

per a qualssevol $V = \begin{pmatrix}(u,u(1))\\(v,v(1))\end{pmatrix}$, $W = \begin{pmatrix}(w,w(1))\\(z,z(1))\end{pmatrix} \in \mathcal{D}(A) \subset \mathcal{H}$. Per comprovar la simetria d'aquest producte l'únic que cal és integrar per parts.

2. Vegem que $\tilde{T}$ és autoadjunt i que $\sigma(\tilde{T})$ és discret. La idea és que trobarem $\tilde{T}^{-1}$, operador acotat de $\mathcal{H}$ en $\mathcal{H}$ i veurem que és compacte. Com que coneixem l'estructura dels valors propis d'un operador compacte i els valors propis de $\tilde{T}$ són els inversos dels valors propis de $\tilde{T}^{-1}$, aquesta estructura es mantindrà.

Comencem trobant l'invers de $\tilde{T}$. Partint de l'expressió de $\tilde{T}$,

$$\tilde{T}\underbrace{\begin{pmatrix}(u,u(1))\\(v,v(1))\end{pmatrix}}_{\in\,\mathcal{D}(A)} = \underbrace{\begin{pmatrix}(iv,iv(1))\\(iu_{xx},\,-i\varepsilon\,u_x(1))\end{pmatrix}}_{\in\,\mathcal{H}}$$

podem invertir formalment l'operador i tenim:

$$\tilde{T}^{-1}\underbrace{\begin{pmatrix}(w,w(1))\\(z,\beta)\end{pmatrix}}_{\in\,\mathcal{H}} = \underbrace{\begin{pmatrix}(u,u(1))\\(-iw,-iw(1))\end{pmatrix}}_{\in\,\mathcal{D}(A)}$$

on ara w, z i β estan donades i u és la solució del problema:

$$\text{(2.4)}\qquad \begin{cases} u_{xx} = -iz \\ \\ u(0) = 0 \\ \\ -i\varepsilon\,u_x(1) = \beta \end{cases}$$

Es pot comprovar que $\tilde{T}\circ\tilde{T}^{-1} = Id_{\mathcal{H}}$, $\tilde{T}^{-1}\circ\tilde{T} = Id_{\mathcal{D}(A)}$. I es pot comprovar que l'operador invers està ben definit, és a dir, que el problema (2.4) té solució i que la imatge de l'operador invers està realment en $\mathcal{D}(A)$.

Volem veure que $\tilde{T}^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{H},\mathcal{H})$: hem de trobar $C > 0$ de manera que

$$\left\| \tilde{T}^{-1}\begin{pmatrix}(w,w(1))\\(z,\beta)\end{pmatrix} \right\|_{\varepsilon} \leq C \left\| \begin{pmatrix}(w,w(1))\\(z,\beta)\end{pmatrix} \right\|_{\varepsilon}$$

on:

$$\left\| \tilde{T}^{-1}\begin{pmatrix}(w,w(1))\\(z,\beta)\end{pmatrix} \right\|_{\varepsilon} = \int_0^1 |u_x|^2\,dx + \int_0^1 |w|^2\,dx + \frac{1}{\varepsilon}|w(1)|^2$$

i

$$\left\| \begin{pmatrix}(w,w(1))\\(z,\beta)\end{pmatrix} \right\|_{\varepsilon} = \int_0^1 |w_x|^2\,dx + \int_0^1 |z|^2\,dx + \frac{1}{\varepsilon}|\beta|^2$$

Per a veure-ho, farem una sèrie d'acotacions independents: acotarem cadascun dels tres termes de l'esquerra per algun dels termes de la dreta.

1. u verifica (2.4), de manera que:

$$\int_0^1 u_{xx}\,\overline{u} \;=\; \int_0^1 -i\,z\,\overline{u}$$

i, d'altra banda, si integrem per parts la primera expressió tenim:

$$\int_0^1 u_{xx}\,\overline{u} \;=\; -\int_0^1 |u_x|^2 \;+\; \frac{i\beta}{\varepsilon}\overline{u(1)}$$

Ajuntant les dues coses i prenent mòduls, tenim:

$$\int_0^1 |u_x|^2 \leq \frac{|\beta|}{\varepsilon}|u(1)| \;+\; \int_0^1 |zu| \tag{2.5}$$

Si ens mirem l'últim terme de (2.5), podem acotar-lo per:

$$\int_0^1 |zu| \leq \int_0^1 \frac{1}{2}\left(c^2|z|^2 \;+\; \frac{1}{c^2}|u|^2\right)$$

on c, de moment, és qualsevol real positiu. Tornant a (2.5), tenim:

$$\int_0^1 |u_x|^2 \;\leq\; \frac{|\beta|}{\varepsilon}|u(1)| \;+\; \frac{c^2}{2}\int_0^1 |z|^2 \;+\; \frac{1}{2c^2}\int_0^1 |u|^2$$

Però $u \in H^1$ i $u(0) = 0$, de manera que, pel lema 2.3 existeix $M > 0$ que compleix $\int_0^1 |u|^2 \leq M \int_0^1 |u_x|^2$. Utilitzant aquest resultat, es té que:

$$\left(1 - \frac{M}{2c^2}\right)\int_0^1 |u_x|^2 \;\leq\; \frac{|\beta|}{\varepsilon}|u(1)| \;+\; \frac{c^2}{2}\int_0^1 |z|^2$$

Escollim c de manera que $\left(1 - \dfrac{M}{2c^2}\right) > 0$, com per exemple $1 - \dfrac{M}{2c^2} = \dfrac{1}{2}$. Així:

$$\int_0^1 |u_x|^2 \;\leq\; \frac{2|\beta|}{\varepsilon}|u(1)| \;+\; M\int_0^1 |z|^2\,. \tag{2.6}$$

Aquesta mateixa idea l'aplicarem per a acotar $|u(1)|$, que és el que encara ens molesta en la desigualtat. Com que $u(0) = 0$ tenim:

$$|u(1)| = |\int_0^1 u_x| \leq \int_0^1 1 \cdot |u_x| \leq \int_0^1 \frac{d^2}{2} \;+\; \int_0^1 \frac{1}{2d^2}|u_x|^2$$

on d s'haurà de determinar. Substituint-ho en (2.6) i triant d tal que $\left(1 - \dfrac{|\beta|}{\varepsilon\, d^2}\right) > 0$ (per exemple, $d^2 = \dfrac{2|\beta|}{\varepsilon}$) tenim que:

$$\int_0^1 |u_x|^2 \leq \left(\frac{2|\beta|}{\varepsilon}\right)^2 \;+\; 2M\int_0^1 |z|^2\,. \tag{2.7}$$

2. Acotem ara $\int_0^1 |w|^2$ per algun dels termes de $\left\| \begin{pmatrix} (w, w(1)) \\ (z, \beta) \end{pmatrix} \right\|_\varepsilon$. Per exemple, usant altre cop el lema 2.3:

$$\int_0^1 |w|^2 \leq \tilde{M} \int_0^1 |w_x|^2 \tag{2.8}$$

amb $\tilde{M} > 0$.

3. Ens queda per acotar $\frac{1}{\varepsilon}|w(1)|^2$. Però només utilitzant la desigualtat d'Schwartz, tenim:

$$|w(1)|^2 \leq \int_0^1 |w_x|^2 \tag{2.9}$$

Per últim, només cal ajuntar les desigualtats (2.7), (2.8) i (2.9) i prendre

$$C = \max\left(\frac{4}{\varepsilon}, 2M, \tilde{M} + \frac{1}{\varepsilon}\right) > 0$$

per a tenir la desigualtat que volíem:

$$\left\| \tilde{T}^{-1} \begin{pmatrix} (w, w(1)) \\ (z, \beta) \end{pmatrix} \right\|_\varepsilon \leq C \left\| \begin{pmatrix} (w, w(1)) \\ (z, \beta) \end{pmatrix} \right\|_\varepsilon$$

de manera que $\tilde{T}^{-1}$ és un operador acotat en $\mathcal{H}$.

Amb això no només hem vist que $\tilde{T}$ és simètric sino també que és autoadjunt. Vegem ara que $\tilde{T}^{-1}$ és compacte. Sabem que $\tilde{T}^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{H}, \mathcal{H})$ i que això equival a que $\tilde{T}^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{H}, \mathcal{D}(A))$. Com que la inclusió de $\mathcal{D}(A)$ en $\mathcal{H}$ és compacta, l'operador:

$$\tilde{T}^{-1} : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{D}(A) \hookrightarrow \mathcal{H}$$

és un operador compacte. Com que l'invers d'un operador compacte no té espectre essencial i que el seu espectre només consisteix en valors propis aïllats i de multiplicitat algebraica finita (veure el capítol III.6.8 del [22]), deduïm que el conjunt de valors propis de T és discret.

Per veure que l'operador $\tilde{A}$ està dins les hipòtesis del teorema de Gohberg i Kreĭn només ens queda veure que $\tilde{K} \in \Sigma_p$ per a algun $p < \infty$. Teníem l'operador:

$$\tilde{K}V = \tilde{K} \begin{pmatrix} (u, u(1)) \\ (v, v(1)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (0, 0) \\ (0, -i\varepsilon\, r\, v(1)) \end{pmatrix}$$

Observem que el rang de l'operador és, de fet, $\mathbb{C}$. En particular, $\tilde{K}$ és un operador de rang finit i, per tant, compacte. De manera que ja es compleix la primera condició: $\tilde{K} \in \Sigma_\infty$.

Per a veure que, a més, pertany a algun Σ_p hem de veure com són els s-nombres de $\tilde{K}$ o, el que és el mateix, els valors propis de l'operador $\tilde{K}_s = (\tilde{K}^*\tilde{K})^{\frac{1}{2}}$. Ens cal, doncs, l'adjunt de $\tilde{K}$, que és:

$$\tilde{K^*}\begin{pmatrix}(w, w(1))\\(z, z(1))\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}(0,0)\\(0,\ i\varepsilon\, r\, z(1))\end{pmatrix}$$

Per tant,

$$\tilde{K}_s\begin{pmatrix}(u, u(1))\\(v, v(1))\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}(0,0)\\(0,\ \varepsilon\, r\, v(1))\end{pmatrix}$$

Altre cop ens trobem amb un operador amb rang isomorf a $\mathbb{C}$. En particular, aquest operador H tindrà un sol valor propi, de manera que $\tilde{K}$ té un únic s-nombre $s_1(\tilde{K}) = \|\tilde{K}\|$ (propietats dels s-nombres, veure [18]). Per tant,

$$\sum_{j=1}^{\infty} s_j^p(\tilde{K}) = \|\tilde{K}\|^p < \infty \ \forall p < \infty$$

de manera que $\tilde{K} \in \Sigma_p\ \forall\, p < \infty$, que és el que volíem demostrar.

Hem vist que es compleixen totes les hipòtesis del teorema 2.8 per a l'operador $\tilde{A}$: el conjunt de funcions pròpies generalitzades de $\tilde{A}$ és complet en $\mathcal{H}$ i, per tant, també ho és el de l'operador $A_0 = -i\tilde{A}$. □

2.2.2 Valors propis i comportament asimptòtic de les solucions.

Una conseqüència immediata de la completitud del conjunt de funcions pròpies de A_0 en $\mathcal{H}$ és el nombre de valors propis de A_0.

Lema 2.10. *L'operador $(A_0, \mathcal{D}(A_0))$ té infinits valors propis. A més, ni ells ni cap parcial no s'acumulen en cap punt finit.*

Demostració. La idea és anàloga al que hem fet per veure l'estructura dels valors propis de $\tilde{T}$, en la demostració del teorema 2.9: veurem que A_0 és invertible i que l'operador invers és compacte, de manera que els valors propis de A_0, igual que els de A_0^{-1}, tindran multiplicitat algebraica finita. Però com que les funcions pròpies són completes en $\mathcal{H}$, espai de dimensió infinita, l'única manera que les dues coses siguin possibles (valors propis amb multiplicitat algebraica finita en un espai de dimensió infinita on les funcions pròpies hi són denses) és tenir un nombre infinit de valors propis.

Vegem qui és A_0^{-1}. Si recordem la definició de A_0, podem invertir formalment l'operador, obtenint:

$$A_0^{-1}\underbrace{\begin{pmatrix}(w, w(1))\\(z, \beta)\end{pmatrix}}_{\in\ \mathcal{H}} = \underbrace{\begin{pmatrix}(-u, -u(1))\\(w, w(1))\end{pmatrix}}_{\in\ \mathcal{D}(A_0)}$$

on w, z i β estan donades i u és la solució del problema:

$$\begin{cases} u_{xx} = -z \\ \\ u(0) = 0 \\ \\ \varepsilon u_x(1) = \beta + \varepsilon\, r\, w(1) \end{cases}$$

Aquest problema és pràcticament el (2.4), que tenia solució a l'espai on volíem. Així es veu que que A_0 és invertible. Treballant de manera anàloga que amb $\tilde{T}^{-1}$, podem veure que és un operador acotat de $\mathcal{L}(\mathcal{H}, \mathcal{H})$ i, per les inclusions entre els espais de Sobolev, és compacte (veure demostració del teorema 2.9).

Com que tenim infinits valors propis i ho són d'un operador compacte, tenim $\sigma_p(A_0^{-1}) \to 0$ i, per tant, $\sigma_p(A_0) \to \infty$, amb el que es demostra que els valors propis de A_0 no s'acumulen en cap punt finit. □

Vegem, però, com són aquests infinits valors propis i com influeixen en el comportament asimptòtic de les solucions.

Lema 2.11. *Els valors propis de* $(A_0, \mathcal{D}(A_0))$ *tenen part real estrictament negativa. De fet, existeix* $C > 0$ *tal que* $-C < Re\,\lambda < 0\ \forall\, \lambda$ *valor propi. A més, els valors propis s'acumulen en la recta* $Re\lambda = 0$

Demostració. Considerem l'energia:

$$E(u(x,t)) \,=\, \frac{\varepsilon}{2}\int_0^1 |u_x|^2\, dx \,+\, \frac{\varepsilon}{2}\int_0^1 |u_t|^2\, dx \,+\, \frac{1}{2}\,|u_t(1)|^2$$

De fet, aquesta energia és un múltiple de la norma en $\mathcal{H}$, però la podem pensar com l'energia total de la molla (els dos primers termes corresponen a energia cinètica més la potencial) i l'energia (cinètica) en la massa, que és l'últim terme. Si derivem aquesta energia respecte t, i l'avaluem sobre $u(x,t)$ solució de (2.1) tenim que:

$$\frac{dE\,(u(x,t))}{dt} \,=\, -\varepsilon\, r\,|u_t(1)|^2 \,\leq\, 0$$

on queda demostrat que el sistema és dissipatiu (observem que si $u(x,t)$ és solució de (2.1), $\overline{u}(x,t)$ serà solució del problema conjugat).

D'altra banda, si avaluem l'energia sobre solucions del tipus que busquem (recordem, $u(x,t) \,=\, e^{\lambda t}\, u(x)$) tenim:

$$E(e^{\lambda t}\, u(x)) \,=\, e^{2\,Re\,\lambda t}\,\left(\,\frac{\varepsilon}{2}\int_0^1 |u_x|^2\, dx \,+\, \frac{\varepsilon}{2}\int_0^1 |\lambda u|^2\, dx \,+\, \frac{|\lambda^2|}{2}\,|u(1)|^2\right)$$

que, derivat respecte a t:

$$\frac{d\,E(e^{\lambda\,t}\,u(x))}{dt} \;=\; (2Re\lambda)\,e^{(2Re\lambda)t}\,E_0$$

$$\text{on}\;\; E_0 \;=\; \left(\;\frac{\varepsilon}{2}\int_0^1 |u_x|^{\,2}\,dx \;+\; \frac{\varepsilon}{2}\int_0^1 |\lambda u|^{\,2}\,dx \;+\; \frac{|\lambda^2|}{2}\,|u(1)|^2\right) \;>\; 0$$

Però acabem de veure que la variació de l'energia decreix sobre les solucions de (2.1), cosa que forçosament implica que $Re\,\lambda \leq 0$.

El mateix tipus de demostració ens permet veure que aquesta part real és nul.la únicament si $\lambda = 0$ (perquè cal que $u_t(1) = 0$), que no és valor propi. Per tant, $Re\,\lambda \;<\; 0 \;\;\forall\,\lambda$ valor propi de A_0.

Per a veure que la part real dels valors propis també està acotada inferiorment, continuarem jugant amb l'energia anterior. Si denotem $R = 2\varepsilon r$, podem escriure la derivada de l'energia com:

$$\frac{dE\,(u(x,t))}{dt} \;=\; -\frac{R}{2}\,|u_t(1)|^{\,2} \;\geq$$

$$-\frac{R}{2}\,|u_t(1)|^{\,2} \;-\; \frac{R\varepsilon}{2}\int_0^1 |u_x|^2\,dx \;-\; \frac{R\varepsilon}{2}\int_0^1 |u_t|^2\,dx \;=\; -RE(u(x,t))$$

de manera que hem trobat $R > 0$ tal que $\dfrac{dE\,(u(x,t))}{dt} \;\geq\; -RE(u(x,t))$. D'aquí obtenim una relació entre l'energia d'una solució en qualsevol temps amb la de la solució en temps inicial, ja que, integrant a banda i banda tenim:

$$\ln\;\frac{E(u(x,t))}{E(u(x,0))} \geq\; -Rt$$

d'on,

$$E(u(x,t)) \;\geq\; e^{-Rt}E(u(x,0))$$

que és la relació que estàvem buscant. Escrivint aquesta desigualtat per a solucions de la forma $e^{\lambda t}u(x)$, tenim:

$$e^{2Re(\lambda t)}E(u(x)) \geq e^{-Rt}E(u(x))$$

ja que es pot veure, escrivint cada terme, que $E(e^{\lambda t}\,u(x)) \;=\; e^{2Re(\lambda t)}E(u(x))$. D'aquesta desigualtat, i substituint R pel seu valor, obtenim:

$$Re\,\lambda \;\geq\; -\varepsilon r$$

de manera que si prenem $C > \varepsilon r > 0$ ja tenim una acotació inferior per la part real de qualsevol dels valors propis, tal i com pretenïem.

Només ens queda veure que els valors propis s'acumulen en la recta $Re\lambda = 0$. Per a veure-ho, substituirem en l'equació (2.1) solucions del tipus $u(x,t) = e^{\lambda t}\, u(x)$. Aquesta equació es transforma en el problema següent:

$$\begin{cases} u'' - \lambda^2 u = 0 \\ \\ u(0) = 0 \\ \\ \varepsilon\, u'(1) + u(1)\,(\lambda^2 + \varepsilon\, r\, \lambda) = 0 \end{cases}$$

on $u = u(x)$. Observem que escrivint el problema d'aquesta forma es veu clarament que $\lambda = 0$ no és un valor propi del nostre operador. Resolent-lo, podem veure que solucions d'aquest tipus tenen la forma

$$u(x,t) = e^{\lambda t}\, u(x) \quad \text{on} \quad u(x) = e^{\lambda x} - e^{-\lambda x}$$

i on λ valor propi verifica:

$$e^{2\lambda} = \frac{\lambda + \varepsilon r - \varepsilon}{\lambda + \varepsilon r + \varepsilon} \tag{2.10}$$

Amb aquestes solucions tenim la funció pròpia de l'operador A, de valor propi λ_n, que és $U_n = \begin{pmatrix} (u, u_n(1)) \\ (\lambda_n\, u,\ \lambda_n\, u_n(1)) \end{pmatrix}$.

Pensant els valors propis en la seva forma complexa $\lambda_n = a_n + ib_n\,,\ a_n, b_n \in \mathbb{R}$ i substituint-la en (2.10), obtenim el següent sistema:

$$\begin{cases} e^{2a_n} \cos(2b_n) = \dfrac{a_n + \varepsilon\, r - \varepsilon^2 + {b_n}^2}{(a_n + \varepsilon\, r + \varepsilon)^2 + {b_n}^2} \\ \\ e^{2a_n} \sin(2b_n) = \dfrac{2\,\varepsilon\, b_n}{(a_n + \varepsilon\, r + \varepsilon)^2 + {b_n}^2} \end{cases} \tag{2.11}$$

Hem vist, d'altra banda, que tenim infinits valors propis i que ni ells ni cap parcial no s'acumulen en cap punt finit. Per tant, suposar que les parts reals sí tenen límit finit ($\lim_{n\to\infty} a_n = a$) automàticament comporta que $\lim_{n\to\infty} b_n = \pm\infty$. És a dir, suposem per uns moments que els valors propis s'acumulen en la recta vertical $Re\,\lambda = a$. Automàticament i només prenent límits en el sistema (2.11) per $n \to \infty$ es té que $a = 0$. I això val també per a qualsevol parcial de valors propis tal que les parts real tinguin límit que vulguem prendre.

Però, és cert que les parts reals tenen límit? Suposem que no. Com que si aquest límit existeix ha de ser 0, és el mateix que suposar que $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$. En aquest cas, fixat un $\varepsilon > 0$ existirà una successió parcial $\{a_{n_k}\}$ tal que $-C \leq a_{n_k} \leq -\varepsilon < 0$. Però, fixat ε, aquesta nova successió està acotada: tindrà doncs una nova parcial $\{a_{n_{k_j}}\}$ convergent a $l \in [-C, -\varepsilon]$. Això vol dir

que existeix una parcial de valors propis tal que les seves parts reals tenen límit estrictament negatiu, cosa que no pot passar. Per tant, les parts reals dels valors propis sí tenen límit i

$$\lim_{n\to\infty} a_n \;=\; a \;=\; 0$$

□

Com a exemple il.lustratiu podem veure la figura 2.1, on hi ha dibuixats els primers valors propis , amb els seus conjugats, i s'aprecia clarament el fenomen que acabem de descriure.

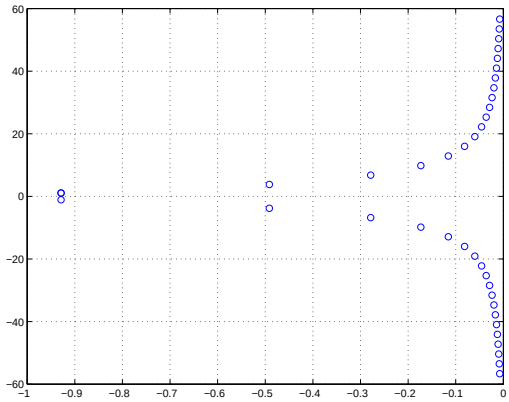


Figura 2.1: $\varepsilon = 5$ i $r = 1$: gràfica dels 20 primers valors propis.

Corol.lari 2.12. *L'operador* $(A_0, \mathcal{D}(A_0))$ *no admet un conjunt finit de valors propis dominants. En particular, el model en derivades parcials no té com a límit una equació diferencial quan* $\alpha = 0$.

Demostració. Com que hi ha infinits valors propis i s'acumulen en $Re\,\lambda = 0$ i sabem que $\lambda = 0$ no és valor propi de l'operador A_0, no podem tenir un subconjunt finit de valors propis dominants. □

Tot i no poder parlar d'equació diferencial ordinària límit quan $\alpha = 0$, sí podem donar certa informació sobre el comportament asimptòtic de les solucions.

Teorema 2.13 (comportament asimptòtic de les solucions). *Totes les solucions de l'equació (2.1) tendeixen a zero quan* $t \to \infty$, *però existeixen solucions que hi tendeixen tan a poc a poc com vulguem.*

Demostració. Hem vist que $\{U_n(x)\}$, el conjunt de funcions pròpies generalitzades, és complet en $\mathcal{H}$. Això vol dir que per un $\delta > 0$ qualsevol, si prenem una condició inicial $V(0)$ existirà una combinació lineal finita d'aquestes funcions a distància menor que δ de la condició inicial, és a dir:

$$\left\| V(0) - \sum_{n=0}^{N} c_n \, U_n \right\|_\varepsilon \leq \delta$$

Sigui $R_0 = V(0) - \sum_{n=0}^{N} c_n \, U_n$. Òbviament, $\|R_0\|_\varepsilon \leq \delta$. Si prenem cadascuna d'aquestes tres quantitats com a condició inicial, tenim unes solucions associades: $V(t)$ la solució amb condició inicial $V(0)$, $R(t)$ la de condició inicial R_0 i si $U(t)$ és la solució associada a la condició inicial $\sum_{n=0}^{N} c_n \, U_n$, tenim:

$$U(t) = \sum_{n=0}^{N} c_n \, e^{\lambda_n \, t} \, P_n(t) U_n$$

on $P_n(t)$ és un polinomi associat al valor propi λ_n. Per la linealitat de l'operador tenim $V(t) - U(t) = R(t)$ i és evident, doncs, que:

$$\|V(t)\|_\varepsilon \leq \left\| \sum_{n=0}^{N} c_n \, P_n(t) \, e^{\lambda_n \, t} \, U_n \right\|_\varepsilon + \|R(t)\|_\varepsilon$$

Però havíem vist que la norma de la solució esta acotada per la norma de la condició inicial, per a tot $t > 0$ (era conseqüència de l'observació 2.5). En el nostre cas, $\|R(t)\|_\varepsilon \leq \|R_0\|_\varepsilon \leq \delta$.

A més, com que els valors propis tenen part real estrictament negativa, tenim:

$$\lim_{t\to\infty} \left\| \sum_{n=0}^{N} c_n \, P_n(t) \, e^{\lambda_n t} \, U_n(x) \right\|_\varepsilon \leq \lim_{t\to\infty} \sum_{n=0}^{N} |c_n \, P_n(t)| \, e^{2(Re\lambda_n)\, t} \, \|U_n(x)\|_\varepsilon = 0$$

Ajuntant aquests dos fets, tenim $\lim_{t\to\infty} \|V(t)\|_\varepsilon = 0$.

Per demostrar que existeixen solucions que van a zero tan lentament com es vulgui demostrarem que per a qualsevol funció contínua $\phi(t) : [0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $|\phi(t)| \neq 0$ i $\lim\limits_{t\to\infty} |\phi(t)| = 0$, existeix $V_0 \in \mathcal{D}(A_0)$ tal que

$$\lim_{t\to\infty} \sup \frac{\|e^{A_0 t} V_0\|_\varepsilon}{|\phi(t)|} = \infty$$

En aquest cas, la solució $e^{A_0 t} V_0$ s'acostaria a zero més lentament que $\phi(t)$. Suposem que això no és cert, és a dir, suposem que existeixi una funció contínua

$\phi(t)$, amb $|\phi(t)| \neq 0$ i $lim_{t\to\infty}|\phi(t)| = 0$ tal que per a qualsevol condició inicial $V_0 \in \mathcal{D}(A_0)$ existeix una constant $C_0 = C_0(V_0)$ tal que

$$\frac{\|e^{A_0 t}V_0\|_\varepsilon}{|\phi(t)|} \leq C_0 \quad \forall\, V_0 \in \mathcal{D}(A_0),\ \forall\, t \geq 0 \tag{2.12}$$

Veurem que arribem a una contradicció. Considerem la següent família d'operadors

$$\Lambda = \left\{ \frac{1}{\phi(t)}\, e^{A_0 t}, t \geq 0 \right\} \subset \mathcal{L}(\mathcal{D}(A_0), \mathcal{H})$$

En (2.12) hem suposat que l'operador $(1/\phi(t))\, e^{A_0 t}$ està acotat per cada $V_0 \in \mathcal{D}(A_0)$. Per tant, el teorema de Banach-Steinhaus ens permet garantir que la família Λ estarà uniformement acotada:

$$\left\| \frac{1}{\phi(t)}\, e^{A_0 t} \right\|_{\mathcal{L}(\mathcal{D}(A_0),\mathcal{H};\,\varepsilon)} = \frac{\left\| e^{A_0 t} \right\|_{\mathcal{L}(\mathcal{D}(A_0),\mathcal{H};\,\varepsilon)}}{|\phi(t)|} \leq C, \quad \forall\, t \geq 0$$

Com que $\lim\limits_{t\to\infty} |\phi(t)| = 0$, l'acotació anterior ens diu que existeix un $t_0 > 0$ tal que

$$\|e^{A_0 t_0}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H},\mathcal{H};\,\varepsilon)} < \frac{1}{e}$$

Les propietats dels semigrups ens diuen que per a qualsevol solució tenim que

$$\|e^{A_0\,(kt_0)}V_0\|_\varepsilon < \frac{1}{e^k}\|V_0\|_\varepsilon \tag{2.13}$$

per a qualsevol $k \in \mathbb{N}$. Però per a funcions pròpies, (2.13) és:

$$|e^{\lambda_n\,(kt_0)}|\, \|U_n\|_\varepsilon < \frac{1}{e^k}\, \|U_n\|_\varepsilon \quad \forall\, \lambda_n \in \sigma(A_0)$$

que, simplificant els termes repetits i prenent logaritmes, implica que:

$$Re\, \lambda_n < \frac{-1}{t_0} \quad \forall\, \lambda_n \in \sigma(A_0)$$

Però això no és cert, ja que les parts reals dels valors propis s'acumulen en el zero. Ja tenim la contradicció i podem concloure que hi ha solucions que van a zero tan lentament com es vulgui. □

Observació 2.14. *El teorema anterior i el lema 2.11 ens han permès veure que, tot i no tenir dissipació interna en la molla, les solucions es dissipen amb el temps. Si repassem la demostració del lema 2.11 veurem que això passa gràcies a l'acció de l'amortidor, ja que el fet que els valors propis tinguin part real estrictament negativa (i no zero) és degut a que* $r > 0$.

Però en què afecta al sistema el fet de tenir una molla sense viscositat interna? Doncs la resposta ens la dóna el teorema 2.13, on hem demostrat que, tot i que totes les solucions tendiran a zero, n'existiran que hi aniran tan lentament com vulguem. La idea és que com que les parts reals dels valors propis s'acumulen en $Re\,\lambda = 0$*, tindrem* λ_k *valors propis de* A_0 *amb part real estrictament negativa i tan propera a zero com vulguem. Les funcions pròpies (en particular, solucions del model) associades a aquests valors propis van a zero amb una velocitat marcada per la part real de* λ_k*, de manera que seran solucions que aniran més lentament a zero com més pròxims a l'eix d'ordenades escollim aquests* λ_k*. En altres paraules, una molla sense dissipació interna genera solucions* semi-permanents *que costa dissipar (les corresponents a freqüències altes), mentre que la resta es dissipen ràpidament.*

Podríem resumir, doncs, que les freqüències altes són controlades per la dissipació de la molla, mentre que de les baixes, en principi, se n'ocupa l'amortidor. Aquesta seria una possible explicació a fets com ara que les petites bandes externes en una carretera són, proporcionalment, molt menys dissipades que alteracions més importants del paviment.

Capítol 3

Molla viscoelàstica amb $\alpha \simeq 0$

En aquest capítol considerem un sistema molla-massa amb dissipació interna de la molla controlada pel paràmetre $\alpha > 0$. L'equació a estudiar és:

$$
(3.1) \qquad \begin{cases} u_{tt} - u_{xx} - \alpha\, u_{txx} = 0 \\ \\ u(0,t) = 0 \\ \\ u_{tt}(1,t) + \varepsilon\, [u_x(1,t) + \alpha\, u_{tx}(1,t) + r\, u_t(1,t)] = 0 \\ \\ u(x,0) = u_0(x),\ u_t(x,0) = v_0(x) \\ \\ u(1,0) = \eta\ (= u_0(1)),\ u_t(1,0) = \mu\ (= v_0(1)) \end{cases}
$$

on $u = u(x,t)$, $0 < x < 1$ i $t \in [0,\infty)$ i on ε, $r > 0$ i els pensarem fixats en tot el capítol. Volem un marc funcional on plantejar-nos aquest problema que sigui coherent amb l'entorn proposat per $\alpha = 0$.

3.1 Plantejament funcional.

Anàlogament al cas de $\alpha = 0$, definirem l'operador $(A_\alpha, \mathcal{D}(A_\alpha))$ de la manera següent. Si

$$
V = \begin{pmatrix} (u, u(1)) \\ (v, v(1)) \end{pmatrix} \in \mathcal{D}(A_\alpha)
$$

definim:

$$
A_\alpha V = \begin{pmatrix} (v, v(1)) \\ (\,(u + \alpha\, v)_{xx}, -\varepsilon\,(u + \alpha\, v)_x(1)\ -\ \varepsilon\, r\, v(1)\,) \end{pmatrix}
$$

$$
V(0) = F_0 = \begin{pmatrix} (u_0(x), \eta) \\ (v_0(x), \mu) \end{pmatrix}
$$

El domini de A_α és l'espai:

$$\mathcal{D}(A_\alpha) = \left\{ \begin{pmatrix} (u, u(1)) \\ (v, v(1)) \end{pmatrix} \in X_1 \times X_1,\ (u + \alpha\, v) \in H^2(0,1) \right\} \subset \mathcal{H}$$

on $\mathcal{H} = X_1 \times X_0$, espais que havíem definit en l'apartat 2.1 del capítol anterior. L'operador A_α actua, doncs, de la manera següent:

$$A_\alpha : \mathcal{D}(A_\alpha) \subset \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$$

Així, per a

$$V = \begin{pmatrix} (u, u(1)) \\ (u_t, u_t(1)) \end{pmatrix}$$

i l'A_α i F_0 anteriors, l'equació (3.1) es pot escriure com l'equació d'evolució

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} V = A_\alpha V, \qquad t \in [0, \infty) \\ \\ V(0) = F_0 \end{cases}$$

Observació 3.1. *Observem que aquest operador i aquests espais són coherents amb l'operador i els espais definits pel cas* $\alpha = 0$ *del capítol anterior. Amb aquesta notació, doncs, l'operador pel cas* $\alpha = 0$ *passa a ser* $(A_0, \mathcal{D}(A_0))$*, que és exactament el mateix operador que* $(A, \mathcal{D}(A))$ *que havíem definit.*

El que volem veure ara és l'existència i unicitat de solucions per aquest operador en termes del semigrup que genera. Per a obtenir aquest resultat, seguirem la demostració que fa Grobbelaar [19], que de fet segueix el resultat de Massat [25], que reproduïm tot seguit (per la definició d'operador sectorial veure la definició A.10, de l'apèndix A):

Teorema 3.2 (Massat [25]). *Suposem que* L *és un operador sectorial en un espai de Banach* X *i que* B *és l'operador definit per:*

$$B = \begin{pmatrix} 0 & Id \\ L & \alpha\, L \end{pmatrix}$$

amb $\alpha > 0$*. Aleshores,* B *genera un semigrup analític* e^{Bt} *en* $X^\beta \times X^\sigma$ *per* $0 \leq \sigma \leq \beta < 1$*, on* X^β *i* X^σ *són els espais* $\mathcal{D}((-L)^\beta)$ *i* $\mathcal{D}((-L)^\sigma)$*, respectivament.*

Teorema 3.3. *L'operador* $(A_\alpha, \mathcal{D}(A_\alpha))$ *és generador infinitessimal d'un semigrup analític* $e^{A_\alpha t}$ *en* $\mathcal{H}$ *quan* $\varepsilon > 0$*.*

Demostració. La idea de la demostració és veure que A_α genera aquest tipus de semigrup, descomposant aquest operador com:

$$A_\alpha V = BV + KV = \begin{pmatrix} (v, v(1)) \\ (\,(u + \alpha\, v)_{xx},\ -\varepsilon\,(u\ + \alpha\, v)_x(1)\,) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} (0,0) \\ (0, -\varepsilon\, r\, v(1)) \end{pmatrix}$$

Veurem que B està dins les hipòtesis del teorema 3.2 i, per tant, generarà un semigrup analític. Observem a més que K és un operador acotat, de manera que A_α és, de fet, una pertorbació acotada de B i, per tant, també serà generador infinitessimal d'un semigrup analític. L'únic detall amb el que haurem d'anar amb compte són els espais on aquests semigrups estan definits.

El primer pas és, doncs, posar l'operador B en la forma que el presenta el teorema de Massat. Per a fer-ho, definirem l'operador $(L, \mathcal{D}(L))$ com:

$$L(u, u(1)) = (u_{xx}, -\varepsilon\, u_x(1))$$

amb

$$\mathcal{D}(L) = X_2 = \{(u,\gamma) \in H^2(0,1)\times\mathbb{C},\ u(1) = \gamma,\ u(0) = 0\} \subset X_0 = L^2(0,1)\times\mathbb{C}$$

(recordem que havíem definit aquests espais base en el capítol 2). Amb aquesta notació tenim:

$$B = \begin{pmatrix} 0 & Id \\ L & \alpha\, L \end{pmatrix}$$

Per aplicar el teorema de Massat vegem que L és sectorial en X_0.

Lema 3.4. *L és sectorial en X_0.*

Demostració. Veurem que és autoadjunt i invertible. Per veure que L és autoadjunt en X_0 amb el producte escalar $(X_0;\, \varepsilon)$, producte que havíem definit en l'apartat 2.1 del capítol anterior, mirem-nos la simetria del producte escalar sobre elements del domini:

$$\langle\, L(u, u(1)), (v, v(1))\,\rangle_{(X_0;\,\varepsilon)} = \int_0^1 u_{xx}\,\overline{v}\,dx \ + \ \frac{1}{\varepsilon}\,\left(-\varepsilon\, u_x(1)\overline{v(1)}\right) =$$

$$= -\int_0^1 u_x\overline{v}_x\,dx = \langle\, (u, u(1)), L(v, v(1))\,\rangle_{(X_0;\,\varepsilon)}$$

Per veure que L és invertible definim

$$L^{-1}(f,\beta) = (u, u(1)),\ \textit{per}\ (f,\beta) \in X_0$$

amb u solució del problema:

$$\begin{cases} u_{xx} = f \\ \\ u(0) = 0 \\ \\ -\varepsilon\, u_x(1) = \beta \end{cases}$$

que té solució única i amb $(u, u(1)) \in X_2$ (recordem que $\varepsilon > 0$). Per tant, L és sectorial en $X_0 = L^2 \times \mathbb{C}$. □

Ara sí podem aplicar el teorema de Massat a B i tenim que B genera un semigrup analític en $X_0^\beta \times X_0^\sigma$ per $0 \leq \sigma \leq \beta < 1$. En particular, B genera un semigrup analític en $X_0^{\frac{1}{2}} \times X_0$ i, per tant, també val per A_α.

L'únic que falta veure és que $X_0^{\frac{1}{2}} = X_1$ (recordem que l'enunciat del teorema era que A_α generava un semigrup analític en $X_1 \times X_0$). Tenim $(L, \mathcal{D}(L))$ amb $L : \mathcal{D}(L) \subset X_0 \longrightarrow X_0$. Per tant, $X_0^{\frac{1}{2}} = \mathcal{D}((-L)^{\frac{1}{2}})$. Aquest espai fraccionari és, de fet, la clausura de $\mathcal{D}(L)$ amb la norma de la potència fraccionària de l'operador, $\|(-L)^{\frac{1}{2}}(u, u(1))\|_{X_0}$ (veure [21]). Observem, però, que com que L és autoadjunt, aquesta norma és, de fet, el producte escalar següent:

$$\langle\, (-L)^{\frac{1}{2}}(u, u(1)), (-L)^{\frac{1}{2}}(u, u(1))\,\rangle_{(X_0;\varepsilon)} =$$
$$= \langle\, -L(u, u(1)), (u, u(1))\,\rangle_{(X_0;\varepsilon)} = \int_0^1 u_x \overline{u}_x \ .$$

Per tant,

$$X_0^{\frac{1}{2}} = \{clausura\ de\ X_2\ amb\ la\ norma\ \int_0^1 u_x \overline{u}_x\} = X_1$$

□

Observació 3.5. *Observem que, tal i com havíem apuntat, el plantejament funcional és coherent amb el fet per $\alpha = 0$.*

Observació 3.6. *El teorema de Massat no parlava dels dominis. Nosaltres, però, sí hem caracteritzat $\mathcal{D}(L)$ i $\mathcal{D}(L^{\frac{1}{2}})$.*

Observació 3.7. *L'argument seguit per a veure que A_α per $\alpha > 0$ genera un semigrup analític no és aplicable quan $\alpha = 0$ ja que en el teorema de Massat cal $\alpha > 0$. Per tant, en el capítol anterior s'ha hagut de buscar una altra manera per a veure si A_0 genera un semigrup i de quin tipus. Tot i això, hem tingut especial cura en treballar amb el mateix espai total $\mathcal{H}$, de manera que els inversos tindran el mateix domini i els podrem comparar.*

Observació 3.8. *Observem que*

$$\mathcal{D}(A_\alpha) \neq \mathcal{D}(L) \times \mathcal{D}(L),$$

perquè de fet B s'aplica de la manera següent:

$$B \begin{pmatrix} (u, u(1)) \\ (v, v(1)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Id & 0 \\ 0 & L \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & Id \\ Id & \alpha\, Id \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (u, u(1)) \\ (v, v(1)) \end{pmatrix}$$

Amb aquesta formulació veiem com el que cal que estigui en $\mathcal{D}(L) = X_2$ és $u + \alpha\, v$, que ja és el que demanem si imposem que:

$$\begin{pmatrix} (u, u(1)) \\ (v, v(1)) \end{pmatrix} \in \mathcal{D}(B) = \mathcal{D}(A_\alpha) \ .$$

Tot i que en tot el capítol hem suposat que $\varepsilon > 0$, fem un petit incís per a donar el següent resultat per $\varepsilon = 0$:

Teorema 3.9. *L'operador* $(A_\alpha, \mathcal{D}(A_\alpha))$ *també és generador infinitessimal d'un semigrup analític en* $\mathcal{H}$ *quan* $\varepsilon = 0$.

Demostració. Denotarem l'operador A_α per $\varepsilon = 0$ com $A_\alpha(0)$. En el teorema anterior hem vist l'analicitat del semigrup generat quan $\varepsilon > 0$ utilitzant el teorema de Massat. Com abans, doncs, escrivim l'operador de manera convenient, que en aquest cas és:

$$A_\alpha(0)V = \begin{pmatrix} (v, v(1)) \\ (\,(u + \alpha\, v)_{xx}, 0\,) \end{pmatrix}$$

Si definim l'operador $(L_0, \mathcal{D}(L_0))$ amb $\mathcal{D}(L_0) = \mathcal{D}(L) \subset X_0$ com

$$L_0(u, u(1)) = (u_{xx}, 0)$$

fàcilment podem veure que

$$A_\alpha(0) = \begin{pmatrix} 0 & Id \\ L_0 & \alpha\, L_0 \end{pmatrix}$$

Com abans, voldríem veure que L_0 és sectorial en X_0 comprovant que és simètric i que $L_0 + a\, Id$ és invertible per algun $a \in \mathbb{R}$. És evident que aquí no podem veure que és simètric amb el producte escalar $\langle\, , \rangle_{(X_0,\varepsilon)}$, perquè no està definit quan $\varepsilon = 0$. Però tampoc és cert que sigui simètric amb $\langle\, , \rangle_{L^2\times\mathbb{C}}$. Així, introduïm un nou producte escalar en X_0 que serà equivalent al de $L^2 \times \mathbb{C}$:

$$\langle\, (u, \alpha), (v, \beta)\, \rangle_{aux} = \int_0^1 (u - \alpha x)(\overline{v} - \overline{\beta} x)\, dx + \alpha\overline{\beta}$$

Utilitzant la desigualtat de Cauchy, comprovem de forma immediata que és equivalent al producte habitual de $L^2 \times \mathbb{C}$. Amb aquest producte escalar, és fàcil veure que L_0 és simètric. Prenem $(u, u(1)), (v, v(1)) \in \mathcal{D}(L)$:

$$\langle\, L_0(u, u(1)), (v, v(1))\, \rangle_{aux} =$$

$$\langle\, (u_{xx}, 0), (v, v(1))\, \rangle_{aux} = \int_0^1 (u_{xx})(\overline{v} - \overline{v}(1)x)\, dx =$$

$$\int_0^1 (-u_x)(\overline{v} - \overline{v}(1)x)_x\, dx = \int_0^1 -u_x\overline{v}_x\, dx + \int_0^1 u_x\overline{v}(1)\, dx =$$

$$\int_0^1 -u_x\overline{v}_x\, dx + u(1)\overline{v}(1) = \langle\, (u, u(1)), L_0(v, v(1))\, \rangle_{\,aux}$$

Només ens queda veure que $L_0 + a\,Id$ és invertible per algun $a \in \mathbb{R}$. Si prenem $a = -1$, definim

$$(L_0 - Id)^{-1}(f, \beta) = (u, u(1)), \quad per\ (f, \beta) \in X_0$$

on u és la solució del problema

$$\begin{cases} u_{xx} - u = f \\ u(0) = 0 \\ -u(1) = \beta \end{cases}$$

que té solució única i amb $(u, u(1)) \in X_2$. Per tant, L_0 és sectorial en X_0 i, de la mateixa manera que en el teorema anterior, tenim que $A_\alpha(0)$ genera un semigrup analític en $\mathcal{H}$. □

Observació 3.10. *Aquest resultat també es pot demostrar comprovant que L_0 és una pertorbació relativament acotada de L_ε, amb la norma de $L^2 \times \mathbb{C}$, amb cota relativa estrictament menor que 1 i, per tant, també serà sectorial. Veure aquesta acotació és una qüestió purament tècnica que, per a una major brevetat, no inclourem aquí.*

Lema 3.11. *L'operador A_α amb $\alpha, \varepsilon > 0$ és dissipatiu en la norma $\|\cdot\|_\varepsilon$.*

Demostració. Definim l'energia

$$E[u(x,t)] = \frac{\varepsilon}{2}\int_0^1 |u_x|^2\,dx + \frac{\varepsilon}{2}\int_0^1 |u_t|^2\,dx + \frac{1}{2}|u_t(1)|^2$$

(que és, de fet, $\varepsilon\|\cdot\|_\varepsilon^2$). És fàcil comprovar que la derivada de l'energia

$$\frac{d}{dt}E[u(x,t)] = \frac{\varepsilon}{2}\int_0^1 [\,u_{xt}\bar{u}_x + \bar{u}_{xt}u_x\,]\,dx +$$

$$\frac{\varepsilon}{2}\int_0^1 [\,(u_{xx} + \alpha u_{txx})\bar{u}_t + (\bar{u}_{xx} + \alpha\bar{u}_{txx})u_t\,]\,dx + \frac{1}{2}[\,u_{tt}(1)\bar{u}_t(1) + \bar{u}_{tt}(1)u_t(1)\,]$$

Si l'avaluem sobre solucions de (3.1) tenim:

$$\frac{d}{dt}E[u(x,t)] = -\varepsilon\alpha\int_0^1 |u_{tx}|^2\,dx - \varepsilon r|u_t(1|^2) \leq 0$$

Per tant, l'operador A_α és dissipatiu en la norma $\|\cdot\|_\varepsilon$ si $\alpha, \varepsilon > 0$. □

3.2 Espectre de A_α i valors propis dominants.

Volem estudiar ara l'espectre de l'operador A_α, comparant-lo, si és possible, amb l'espectre de A_0, que ja hem estudiat en el seu capítol. És a dir, pensarem A_α com una pertorbació de A_0 respecte el paràmetre α, proper a zero. El que veurem és, efectivament, que l'espectre de l'operador pertorbat s'acosta a l'espectre del no pertorbat quan $\alpha \to 0$, però només sobre compactes o, el que és el mateix, només si ens restringim a subconjunts finits de valors propis.

3.2.1 Resultats previs: convergència d'operadors en sentit generalitzat.

La teoria de pertorbacions que utilitzarem està extreta essencialment del capítol IV de Kato, en [22]. Dedicarem, doncs, unes línies per a introduir els conceptes i resultats principals que seran usats més endavant.

Definició 3.12. *Siguin* $G(T)$, $G(S) \subset \mathcal{D}(A_\alpha) \times \mathcal{H}$ *les gràfiques dels operadors tancats* T *i* S*. Definim com a* ***distància*** $\hat{\delta}(T,S)$ ***entre els operadors*** T ***i*** S *la distància entre les seves gràfiques:*

$$\hat{\delta}(T,S) = \hat{\delta}\left(G(T), G(S)\right) = max\left\{\ \delta\left(G(T), G(S)\right),\ \delta\left(G(S), G(T)\right)\ \right\}$$

on, si denotem per B_M *la bola unitat d'un conjunt* M*, tenim*

$$\delta\left(M,N\right) = \sup_{m \in B_M} dist(m,N)$$

Aquesta és la distància que usarem per a comparar dos operadors. En aquest sentit, tenim la següent noció de convergència entre dos operadors tancats.

Definició 3.13. *Direm que* T_n ***convergeix en sentit generalitzat*** *a* T *quan* $n \to \infty$ *si:*

$$\hat{\delta}(T_n, T) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

La idea de la convergència en sentit generalitzat d'operadors serà essencialment la convergència de les seves gràfiques pensades com a subespais de $\mathcal{D}(A_\alpha) \times \mathcal{H}$. De fet, aquest tipus de convergència entre operadors tancats no és més que una generalització per a operadors no acotats de la convergència en norma (per a més detalls, veure [22]). Pot ser complicat comprovar aquest tipus de convergència només amb la definició anterior, però, afortunadament, tenim propietats equivalents a aquesta definició. Només destacarem les que nosaltres utilitzarem en algun moment.

Lema 3.14 (Kato, [22]). *Siguin T i T_n operadors tancats, $n = 1, 2, ...$*

i) Si existeix T^{-1} i és un operador acotat, llavors T_n convergiran a T en sentit generalitzat si i només si per n prou gran, existeix T_n^{-1}, és acotat i $\|T_n^{-1} - T^{-1}\| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$

ii) Si T_n convergeix a T en sentit generalitzat i hi afegim un operador B acotat, tenim també que $T_n + B \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} T + B$ en sentit generalitzat

Observació 3.15. *Aquestes equivalències per a la convergència generalitzada són raonables si pensem en la convergència generalitzada dels operadors com la convergència de les seves gràfiques.*

Per a fixar criteris, seguirem la següent notació: l'**espectre** d'un operador T, $\sigma(T)$, serà per a nosaltres el complementari del **conjunt resolvent**, $\rho(T)$. L'espectre es descomposarà en $\sigma_p(T)$, o conjunt de valors propis aïllats i de multiplicitat algebraica finita, i en $\sigma_{ess}(T)$, és a dir, la resta. Aquestes definicions les veurem amb detall en l'apartat 4.1.4.

Definició 3.16 (Kato, [22]). *Direm que un operador tancat té l'espectre $\sigma(T)$* ***separat en dues parts****, $\sigma'(T)$ i $\sigma''(T)$, quan té una part acotada $\sigma'(T)$ separada de la resta, $\sigma''(T)$, per una corba Γ tancada i simple (i rectificable), continguda en el conjunt resolvent de T, de manera que Γ tanca $\sigma'(T)$ en el seu interior i deixa $\sigma''(T)$ a l'exterior.*

Observació 3.17. *Usualment, $\sigma'(T)$ serà un subconjunt finit de $\sigma(T)$.*

En dimensió finita, sabem que quan pertorbem un operador tenim una certa *continuïtat* dels valors propis (considerant la seva multiplicitat) de l'operador pertorbat respecte als del no pertorbat. Aquest resultat es dóna també en dimensió infinita si ens restringim a subconjunts finits de valors propis, cosa que es deduirà del següent resultat de teoria de pertorbacions que apareix també en el capítol *IV* del [22].

Teorema 3.18 (Semicontinuïtat superior de l'espectre, Kato [22]). *Sigui T un operador tancat en un espai de Banach X amb l'espectre separat en dues parts $\sigma'(T)$ i $\sigma''(T)$ per una corba Γ tancada i simple, i sigui $X = M'(T) \oplus M''(T)$ la descomposició associada de l'espai total X. Aleshores existeix un $\delta > 0$ que dependrà de l'operador T i de la corba Γ amb les propietats següents:*

i) Qualsevol operador S tancat en X tal que $\hat{\delta}(S, T) < \delta$ té l'espectre separat per Γ també en dues parts $\sigma'(S)$ i $\sigma''(S)$, amb $\Gamma \subset \rho(S)$.

ii) En la descomposició de X associada a aquesta separació de l'espectre, $X = M'(S) \oplus M''(S)$, es té que $M'(S)$ i $M''(S)$ són espais isomorfs a $M'(T)$ i $M''(T)$, respectivament. En particular, es mantenen les dimensions d'aquests espais.

iii) A més, aquesta descomposició és contínua en S, és a dir, que la projecció $P[S]$ de X en $M'(S)$ al llarg de $M''(S)$ tendeix en norma a $P[T]$ si $\hat{\delta}(S,T) \to 0$.

És a dir, si considerem un operador *prou proper* al que teníem, l'espectre es pot descomposar *de la mateixa manera*.

L'objectiu d'ara en endavant està clar: voldrem veure que A_α convergeix en sentit generalitzat a A_0 quan $\alpha \to 0$, d'on deduirem la continuïtat de subconjunts finits de valors propis de A_α respecte de α, i també precisarem el sentit de tot això. També veurem què passa amb la resta de valors propis i la resta de l'espectre, si és que tenim espectre essencial.

3.2.2 Valors propis de A_α.

Si volem comparar l'espectre de A_α amb el de A_0, comencem pels valors propis. El que sabem dels valors propis de A_0 és que són aïllats i de multiplicitat algebraica finita. Així, agafar-ne un subconjunt finit $\{\lambda_0, \lambda_1, ..., \lambda_s\}$ és equivalent a separar l'espectre en dues parts:

$$\sigma'(A_0) = \{\lambda_0, \lambda_1, ..., \lambda_s\} \quad i \quad \sigma''(A_0) = \sigma(A_0) \setminus \sigma'(A_0)$$

ja que, com que els valors propis són aïllats, podrem trobar la corba Γ del conjunt resolvent que ens separi l'espectre d'aquesta manera. La descomposició de $\mathcal{H}$ associada és $\mathcal{H} = M'(A_0) \oplus M''(A_0)$ amb $dim\, M'(A_0) = m =$ multiplicitat total de $\{\lambda_0, \lambda_1, ..., \lambda_s\}$, on $m < \infty$.

I aplicar el teorema de separació de l'espectre (teorema 3.18) a aquest tipus de separació ens porta al següent raonament, tal i com fa Kato en el capítol *IV* del [22]. Pel teorema sabem que Γ també ens separarà l'espectre de A_α, $\alpha > 0$, en dues parts $\sigma'(A_\alpha)$ i $\sigma''(A_\alpha)$ i que es manté la dimensió dels espais propis associats a aquesta descomposició, sempre que α sigui *prou petita*. En quin sentit? Doncs α ha de ser prou petita com perquè $\hat{\delta}(A_\alpha, A_0) < \delta$, per un cert $\delta > 0$ que dependrà de A_0 i Γ. I $\hat{\delta}(A_\alpha, A_0) < \delta$ a partir d'un cert α proper a zero si A_α convergeix a A_0 en sentit generalitzat quan $\alpha \to 0$ (veure definició 3.13). En particular, hauríem vist que:

$$dim\, M'(A_\alpha) = dim\, M'(A_\alpha) = m \quad si\ \alpha \sim 0$$

Que la dimensió de l'espai associat a $\sigma'(A_\alpha)$ sigui m en particular vol dir que en l'interior de la corba Γ hi ha un nombre finit de valors propis de A_α amb multiplicitat total m, que és finita. De fet, encara podem afinar més: com que podem repetir l'argument prenent una corba que inclogui un sol valor propi en el seu interior, podem concloure que els valors propis pertorbats dins Γ també són aïllats. Així, $\sigma'(A_\alpha)$ està format únicament per valors propis aïllats i de multiplicitat algebraica finita. A més, com que podem escollir una corba

entorn de cada valor propi tan petita com vulguem, de manera que el valor propi pertorbat haurà de ser també en l'interior d'aquesta corba si α és prou petit, podem afirmar que qualsevol sistema finit de valors propis de A_α varia contínuament en α, si $\alpha \sim 0$, respecte el sistema finit corresponent de valors propis de A_0. En quin sentit parlem de continuïtat? Doncs que en un entorn qualsevol d'un únic valor propi λ_k qualsevol de A_0 de multiplicitat algebraica m_k (la vora d'aquest entorn farà el paper de corba Γ) hi haurà exactament m_k valors propis de A_α, tenint en compte les multiplicitats, si α és prou proper a zero (el com de petit hagi de ser vindrà marcat per l'entorn escollit i pels operadors). Aquesta continuïtat també la tenim en les projeccions, l'operador resolvent, etc., però aquí no hi entrarem.

Per tant, l'únic que ens queda per garantir la continuïtat de subconjunts finits de valors propis és que A_α convergeix a A_0 en sentit generalitzat quan $\alpha \to 0$.

Teorema 3.19. *A_α convergeix en sentit generalitzat a A_0 quan $\alpha \to 0$.*

Demostració. Per a veure la convergència en sentit generalitzat aplicarem una de les propietats equivalents que hem vist en el lema 3.14: com que A_0 i A_α són operadors tancats perquè són generadors d'un semigrup contractiu i d'un semigrup analític, respectivament, el que haurem de veure és que els inversos existeixen i són acotats, i que la norma de la diferència tendeix a zero quan α va a zero.

1. Vegem que els inversos existeixen i són operadors acotats de $\mathcal{H}$. Ja hem vist en la demostració del lema 2.10 de l'apartat 2.2.2 que l'invers de A_0 està definit per:

$$A_0{}^{-1}\begin{pmatrix}(w, w(1))\\(z,\beta)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}(-u_0, -u_0(1))\\(w, w(1))\end{pmatrix}$$

per a tot $\begin{pmatrix}(w, w(1))\\(z,\beta)\end{pmatrix} \in \mathcal{H}$ donat, on u_0 és la solució del problema:

$$\text{(3.2)} \qquad \begin{cases} (u_0)_{xx} = -z \\ \\ u_0(0) = 0 \\ \\ \varepsilon(u_0)_x(1) = \beta + \varepsilon\, r\, w(1) \end{cases}$$

I també hem vist que A_0^{-1} definit d'aquesta manera és un operador continu de $\mathcal{H}$ en $\mathcal{D}(A_0)$. Doncs de manera anàloga definirem l'invers de A_α:

$$A_\alpha{}^{-1}\begin{pmatrix}(w, w(1))\\(z,\beta)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}(-u_\alpha, -u_\alpha(1))\\(w, w(1))\end{pmatrix}$$

per a tot $\begin{pmatrix}(w, w(1))\\(z, \beta)\end{pmatrix} \in \mathcal{H}$ donat, on u_α és ara la solució del problema:

$$(3.3) \qquad \begin{cases} (u_\alpha - \alpha\, w)_{xx} = -z \\ \\ u_\alpha(0) = 0 \\ \\ (\varepsilon\, u_\alpha - \varepsilon\, \alpha\, w)_x(1) = \beta + \varepsilon\, r\, w(1) \end{cases}$$

(hem d'agrupar les variables d'aquesta manera perquè totes les derivades tinguin sentit, tenint en compte els dominis). Observem que tan sols hem afegit a l'equació (3.2) els termes multiplicats per α, de manera que quan fem $\alpha = 0$ recuperem l'expressió per A_0^{-1}. Es pot comprovar que aquest operador està ben definit, que és efectivament l'invers de A_α i que és continu.

2. Vegem que $\|A_\alpha^{-1} - A_0^{-1}\|_\varepsilon \to 0$ quan $\alpha \to 0$. És fàcil veure que l'operador diferència actua de la manera següent:

$$({A_\alpha}^{-1} - {A_0}^{-1}) \begin{pmatrix}(w, w(1))\\(z, \beta)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}(u, u(1))\\(0, 0)\end{pmatrix}$$

on $u = u_0 - u_\alpha$. Si fem un canvi de variables en el problema (3.3) i diem $v = u_\alpha - \alpha\, w$, observarem que v i u_0 són solució del mateix problema (3.2). Així, $v = u_0$, d'on $u = -\alpha\, w$. Amb aquesta apreciació, ara és fàcil acotar la norma de l'operador diferència com:

$$\left\|({A_\alpha}^{-1} - {A_0}^{-1}) \begin{pmatrix}(w, w(1))\\(z, \beta)\end{pmatrix}\right\|_\varepsilon^2 = \alpha^2 \int_0^1 |w_x|^2 \leq\ \alpha^2 \left\|\begin{pmatrix}(w, w(1))\\(z, \beta)\end{pmatrix}\right\|_\varepsilon^2$$

on ara sí és evident que $\|({A_\alpha}^{-1} - {A_0}^{-1})\|_\varepsilon \to 0$ si $\alpha \to 0$. Hem demostrat, doncs, la convergència en sentit generalitzat de A_α a A_0 quan $\alpha \to 0$. □

Corol.lari 3.20. *Els valors propis de A_α convergeixen sobre compactes als valors propis de A_0, quan $\alpha \to 0$, en el sentit que hem descrit.*

Observació 3.21. *Parlar de convergència sobre compactes quan els valors propis són aïllats és una altra manera de dir que ens quedem amb subconjunts finits de valors propis.*

Observació 3.22. *El teorema no ens permet parlar d'una convergència global dels espectres: si ens canvien el conjunt finit de valors propis que voldrem pertorbar (és a dir, la corba tancada Γ), ens canviarà també l'α prou petit a partir del qual els espectres s'assemblen allà dins, ja que aquest α depèn de la corba (veure el teorema 3.18). Si ho pensem a la inversa, si ens donen $\alpha > 0$, sembla lògic pensar en un cert nombre finit* màxim *de valors propis de*

A_α que seran pertorbació dels valors propis de A_0 corresponents, considerant les multiplicitats. És a dir, tindrem un compacte màxim de convergència dels espectres per aquell α donat.

Podríem tenir, però, convergència per la resta de valors propis? Doncs no, perquè mentre els valors propis de A_α, $\alpha > 0$ estan dins un sector (que dependrà de α), els de A_0 s'acosten a l'eix imaginari. De fet, el que s'intueix que passa és que aquest sector es va obrint a mida que α s'acosta a zero, arribant a ser tot el semipla en el cas límit. Així, no podem parlar de continuïtat en la resta de valors propis.

Com a exemple gràfic d'aquest fenomen, vegem la figura 3.1. En aquesta gràfica podem observar com els valors propis de A_α per un $\alpha > 0$ fixat cada cop s'allunyen més dels de A_0.

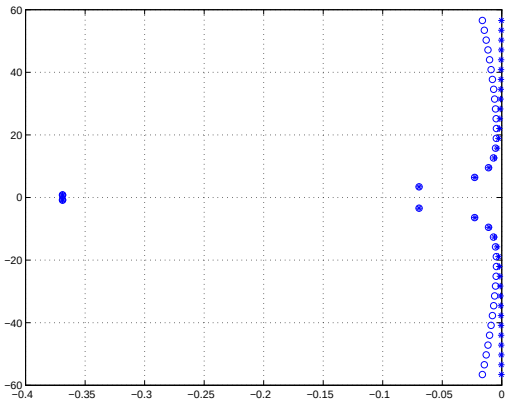


Figura 3.1: Gràfica dels 20 primers valors propis de A_0 (dibuixats en '*') i els de A_α per $\alpha = 10^{-5}$ (dibuixats en 'o').

Hem vist la relació dels valors propis de l'operador pertorbat amb els del no pertorbat, però no hem considerat què passava amb la resta de l'espectre. De fet, a diferència de A_0, A_α amb $\alpha > 0$ tindrà espectre essencial.

3.2.3 Espectre essencial de A_α.

Ja hem vist que l'espectre essencial estava format per tots aquells punts de l'espectre que no fossin valors propis aïllats i de multiplicitat algebraica finita. Ho veurem en detall en el capítol 4, concretament en el teorema 4.13, però podem avançar que quan $\alpha > 0$ es té com a espectre essencial:

$$\sigma_{ess}(A_\alpha) = \left\{ \frac{-1}{\alpha} \right\}$$

Què passa amb l'espectre essencial quan $\alpha = 0$? Hem vist en anteriors apartats que podíem invertir A_0 i que l'invers era un operador compacte, de manera que A_0 no pot tenir espectre essencial. Intuïtivament, a mida que α es va acostant a zero l'espectre essencial (el punt $\frac{-1}{\alpha}$) es va allunyant cap a $-\infty$ fins que, en el cas límit, *desapareix*.

3.2.4 Existència de valors propis dominants quan α és proper a 0.

Com a conclusió dels dos apartats anteriors es pot formular el següent teorema:

Teorema 3.23. *L'operador A_α, amb $\alpha, \varepsilon > 0$ admet un subconjunt finit de valors propis dominants si α és suficientment petit.*

Demostració. Considerem un operador A_α, per $\alpha > 0$ fixada. Com que A_α genera un semigrup analític, els seu espectre estarà contingut en un sector, que denotarem per S_α. També hem vist que l'espectre essencial està format per un únic punt $-1/\alpha$, de manera que és l'únic punt d'acumulació possible de l'espectre dins el sector S_α. Si qualsevol altre punt de l'espectre és aïllat i estan dins aquest sector, n'hi haurà un nombre finit amb part real major que la resta i que $-1/\alpha$ (si α és prou petit, $-1/\alpha$ estarà prou a l'esquerra com perquè això passi): aquest és el subconjunt finit de valors propis dominants. Observem que efectivament hi haurà valors propis a la dreta d'aquest espectre essencial perquè quan α s'acosta a zero, els primers valors propis s'acostaran a l'eix imaginari, tal i com fan els valors propis de A_0. □

Observació 3.24. *Podem observar en el fenomen dels valors propis dominants dos fets curiosos, que no demostrarem amb detall: la dimensió dels subespais dominants no és constant per a tots els $\alpha > 0$; i els valors propis dominants no són necessàriament pertorbacions dels mateixos valors propis de A_0. Com hem dit, no demostrarem aquestes afirmacions, però intuïtivament sembla clar que a mida que α s'acosta a 0, els compactes on $\sigma_p(A_\alpha)$ s'assembla a $\sigma_p(A_0)$ són cada cop més grans. D'altra banda, com més valors propis de A_0 agafem, més a prop estan de l'eix imaginari, de manera que la seva part real és cada vegada més gran. Com que en decréixer α hi ha més valors propis de A_α que s'assemblen a uns valors propis amb part real cada cop més gran, és lògic pensar que els valors propis dominants de A_α seran aquests nous que passen a assemblar-se als de A_0. Dit d'una altra manera, no seran pertorbacions provinents dels mateixos valors propis de A_0, sinó que vindran de valors propis no pertorbats diferents (que potser en l'A_α* anterior *tenien part real menor). Com a il.lustració d'aquest fenomen tenim la figura 3.2: en la gràfica de l'esquerra, el subconjunt finit de $\sigma_p(A_\alpha)$ que és pertorbació de valors propis de A_0 està format pels 4 primers valors propis; d'aquests, els dominants són les pertorbacions del tercer i quart valors propis de A_0. Per contra, en mirar-nos la*

situació per una α menor, el subconjunt pertorbat de valors propis està format ara per 6 elements, dels quals els dominants són les pertorbacions del cinquè i el sisè de A_0: se n'han afegit dos, que abans estaven més enrera, que han passat a ocupar el lloc de dominants.

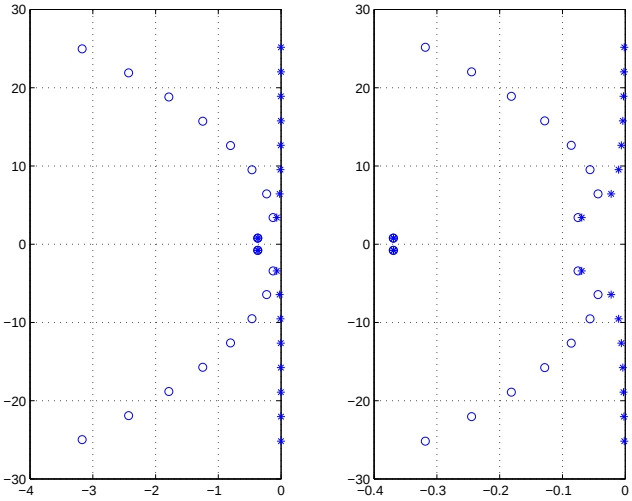


Figura 3.2: Comparació amb els valors propis de A_0 (dibuixats en '*')dels valors propis per $\alpha = 0.01$, a l'esquerra, i per $\alpha = 0.001$ a la dreta (dibuixats en 'o').

Si els valors propis que són dominants es van succeint (els de menor part real són els que després passaran a davant) és de suposar que, per continuïtat, hi hagi un α intermig en què els nous valors propis dominants tinguin la mateixa part real que els antics valors propis dominants: hi ha un moment, doncs, que el nombre de valors propis dominants ha canviat. Aquest raonament intuïtiu té la seva il.lustració gràfica en la figura 3.3, anàloga a l'anterior, on veiem 2 valors propis dominants en la gràfica de l'esquerra , però se n'intueixen 4 en la de la dreta. Per tant, si pensem que el fet de tenir un nombre finit de valors propis dominants ens permet escriure l'equació en derivades parcials com una equació diferencial ordinària (quan $t \to \infty$), el que tindríem és que l'ordre d'aquesta equació no és constant (en el nostre exemple, passaria de 2 a 4).

Observació 3.25. *Per $\alpha > 0$ fixada, l'equació en derivades parcials té com a límit una equació diferencial ordinària, ja que acabem de veure en el teorema l'existència d'un conjunt finit de valors propis dominants en aquest cas. Tot i això, els dos fenòmens anteriors ens fan veure que no és possible obtenir informació sobre l'equació diferencial ordinària límit de manera uniforme per*

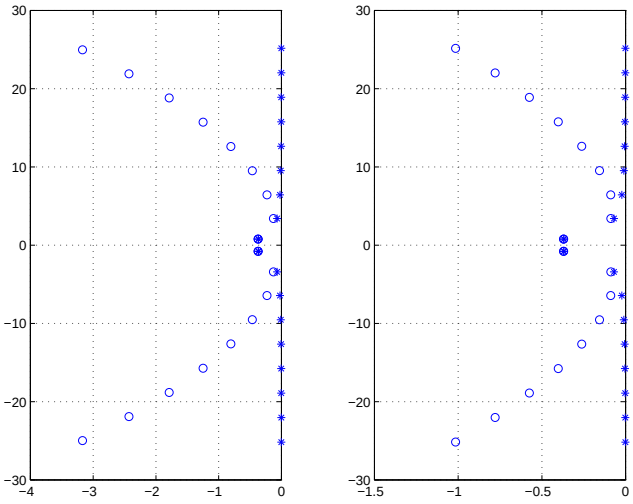


Figura 3.3: Comparació amb els valors propis de A_0 (dibuixats en '*')dels valors propis per $\alpha = 0.01$, a l'esquerra, i per $\alpha = 0.0032$ a la dreta (dibuixats en 'o').

a tots els $\alpha > 0$: per una banda, l'ordre de l'equació diferencial ordinària ens depèn de la dimensió dels espais corresponents als valors propis dominants, que hem observat que varia quan $\alpha \to 0$; i, per l'altra, els coeficients de l'equació diferencial ordinària s'obtindrien a partir de les expressions dels valors propis dominants de A_α, expressions que no podem obtenir de manera general en termes de $\alpha > 0$ ja que no vénen dels mateixos valors propis de A_0 (de manera que no podrem escriure els valors propis dominants com a pertorbacions respecte α d'uns mateixos valors propis de A_0). L'únic que podríem fer, doncs, és estudiar l'equació diferencial ordinària per a cadascun dels $\alpha > 0$, equació que, per exemple, podríem escriure si fóssim capaços de trobar el conjunt de valors propis dominants en cada cas.

Capítol 4

Dependència del sistema respecte $\varepsilon \geq 0$

Tot i que en aquest capítol es pretén l'estudi del problema per a valors de ε propers a zero, té una especial rellevància el cas límit, és a dir, el problema per $\varepsilon = 0$, degut al caràcter explícit de les solucions i dels valors propis. De fet, el problema per ε petit el pensarem com una pertorbació del problema límit. És per això que dediquem un primer apartat a un estudi exhaustiu d'aquest cas.

4.1 El cas $\varepsilon = 0$

El sentit físic de fer zero aquest paràmetre, sense que els altres quedin afectats, és pensar una massa m infinita (recordem que ε és inversament proporcional a la massa m de l'extrem, veure l'apartat 1.1.2). Així, doncs, pensarem en un amortidor viscoelàstic amb una massa a l'extrem infinitament gran. En aquest cas, el problema a resoldre és el següent:

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} - \alpha\, u_{txx} = 0 \\ \\ u(0,t) = 0 \\ \\ u_{tt}(1,t) = 0 \end{cases} \tag{4.1}$$

on $u = u(x,t)$, $x \in (0,1)$, $t > 0$ i $\alpha > 0$. Tot i que els resultats d'aquest capítol valdran per a valors de $\alpha > 0$, es comentaran alguns resultats per $\alpha = 0$.

4.1.1 Valors propis i funcions pròpies.

En aquest cas, els valors propis i les funcions pròpies es poden calcular explícitament. Efectivament, si busquem solucions de la forma $u(x,t) = e^{\lambda t}\, u(x)$ (és a

dir, λ és valor propi i $u(x)$ és funció pròpia) i substituïm en (4.1) ens queda l'equació:

$$\begin{cases} (1+\lambda\,\alpha)\,u_{xx} - \lambda^2 u = 0 \\ \\ u(0) = 0 \\ \\ \lambda^2 u(1) = 0 \end{cases}$$

on, ara, $u = u(x)$. Si suposem d'entrada que $\lambda \neq 0$ i que $\lambda \neq -1/\alpha$ (que són els dos valors crítics del problema) obtenim com a resultat el conjunt $u_n(x,t) = e^{\lambda_n\, t} u_n(x)$, amb:

$$\lambda_n = \frac{-\alpha\,\pi^2\,n^2 \,\pm\, \sqrt{\alpha^2\,\pi^4\,n^4 \,-4\pi^2\,n^2}}{2}\,,\ n = 1,2,3,...$$

$$\text{i} \quad u_n(x) = e^{i\,n\,\pi\,x} - e^{-i\,n\,\pi\,x}\,,\ n = 1,2,3,...$$

Però ens havíem deixat dos valors possibles per a λ: $-1/\alpha$ i 0 (observem que aquest últim cas es podrà incloure en l'anterior expressió de λ_n amb $n = 0$). Vegem si són possibles valors propis. Si ens fixem primerament en $\lambda = -1/\alpha$, tenim que u ha de ser solució de:

$$\begin{cases} u = 0, \quad 0 < x < 1 \\ \\ u(0) = 0, \quad u(1) = 0 \end{cases}$$

és a dir, forçosament la funció pròpia corresponent seria $u \equiv 0$, que no és funció pròpia. Així, $\lambda = -1/\alpha$ no és valor propi.

Mirem-nos ara $\lambda = 0$. En aquest cas veurem que, no només tenim un valor propi sinó que té multiplicitat algebraica doble. Efectivament, si $\lambda = 0$ l'equació á resoldre és:

$$\begin{cases} u_{xx} = 0, \quad 0 < x < 1 \\ \\ u(0) = 0 \end{cases}$$

que té per solució totes les funcions de la forma $u(x) = k\,x,\ k \in \mathbb{R}$. Per tant, $\lambda = 0$ és valor propi de funció pròpia $u(x,t) = e^{0t}\,x = x$. Però $\lambda = 0$ també dóna lloc a una solució no trivial del tipus $u(x,t) = e^{\lambda t} u_0(x) + t e^{\lambda t} u_1(x)$, que en aquest cas és $u(x,t) = u_0(x) + t u_1(x)$, ja que si ho substituïm en (4.1) tenim que:

$$u_0(x) = c_0\,x, \quad u_1(x) = c_1\,x \quad \text{per } c_0, c_1 \in \mathbb{R}$$

Així, tenim aquest valor propi amb multiplicitat algebraica igual a 2 (podem comprovar que no és superior a 2 veient que les funcions de la forma $u(x,t) = u_0(x) + t u_1(x) + t^2 u_2(x)$, amb $u_2(x) \neq 0$ no són solució de (4.1)).

Per tant, recopilant, els valors propis i les solucions associades pel cas $\varepsilon = 0$ són:

$$\lambda_n = \frac{-\alpha\,\pi^2\,n^2 \,\pm\, \sqrt{\alpha^2\,\pi^4\,n^4 \,-\, 4\pi^2\,n^2}}{2}\,,\ n = 0, 1, 2, 3, ...$$

i

$$u_n(x,t) = e^{\lambda_n\,t}\big(e^{i\,n\,\pi\,x} - e^{-i\,n\,\pi\,x}\big)\,,\ n = 1, 2, 3, ...$$

ó

$$u_n(x,t) = c_0\,x + c_1\,x\,t \ \text{ si } n = 0$$

Observem que el valor de r (recordem, la viscositat de l'amortidor) no influeix en el resultat del problema per $\varepsilon = 0$: òbviament, ja que r apareixia multiplicada per ε en les condicions de contorn (veure l'equació (1.1)). Si ho pensem des d'un punt de vista físic, té cert sentit pensar que la fricció que actua en l'extrem on hi ha la roda deguda a la viscositat de l'amortidor deixa de tenir rellevància davant el fet de tenir-hi una massa infinita, però sí en canvi continua essent important el valor de α, relacionat amb la viscositat interna de la molla.

4.1.2 Existència d'un valor propi dominant doble.

Tot i tenir-los explícitament, és convenient fer un estudi qualitatiu d'aquests infinits valors propis. Una de les primeres coses que es poden observar és que $\lambda = 0$ és valor propi dominant quan $\varepsilon = 0$ i $\alpha > 0$. La manera de veure-ho és utilitzant energies, tal i com s'ha fet en la secció 2.2.2. De fet, utilitzarem la mateixa energia que en aquest apartat, però sense multiplicar-la per ε.

Així, prenem

$$E(u(x,t)) \,=\, \frac{1}{2}\int_0^1 |u_x|^{\,2}\,dx \,+\, \frac{1}{2}\int_0^1 |u_t|^{\,2}\,dx \,+\, \frac{1}{2}\,|u_t(1)|^{\,2}$$

Si ens mirem la derivada d'aquesta energia sobre solucions $u(x,t)$ de (4.1), després d'integrar per parts tenim:

$$\frac{d}{dt}E(u(x,t)) \,=\, -\alpha\int_0^1 |u_{tx}|^2\,dx \,+\, Re\Big[\overline{u}_x\,u_t \,+\, \alpha\,\overline{u}_t\,u_{tx}\Big]\Big|_0^1$$

Si ens mirem aquesta expressió per a solucions de la forma $u(x,t) = e^{\lambda\,t}u(x)$, se'ns simplifica degut a les condicions de contorn de (4.1), ja que:

$$u(0,t) = 0 \Leftrightarrow e^{\lambda\,t}u(0) = 0 \Rightarrow u(0) = 0$$

$$\text{i} \quad u_{tt}(1,t) = 0 \Leftrightarrow \lambda^2\,e^{\lambda\,t}u(1) = 0 \Rightarrow u(1) = 0$$

Observem que d'aquestes condicions es dedueix que:

$$u_t(0,t) = \lambda\,e^{\lambda\,t}u(0) = 0 \quad i \quad u_t(1,t) = \lambda\,e^{\lambda\,t}u(1) = 0$$

de manera que la derivada de l'energia queda com:

$$\frac{d}{dt}E(u(x,t)) \;=\; -\alpha \int_0^1 |u_{tx}|^2\, dx \;\leq\; 0$$

Mirem-nos ara aquesta energia directament sobre solucions de la forma $u(x,t) = e^{\lambda t}u(x)$. En aquest cas, la derivada és:

$$\frac{d}{dt}E(u(x,t)) \;=\; Re\,\lambda\, e^{2\,Re\lambda t}E_0$$

on $E_0 = \left(\int_0^1 |u_x|^2\, dx + \int_0^1 |\lambda u|^2\, dx + |\lambda u(1)|^2 \right) \geq 0$. I havíem vist que per a solucions d'aquest tipus l'energia era decreixent, de manera que l'única opció és que $Re\lambda \leq 0$. De fet, repassant els càlculs es pot comprovar com, suposant que $\alpha > 0$, tenim que $Re\lambda < 0$ si λ és un valor propi diferent de zero. Per tant, $\lambda = 0$ és un valor propi doble dominant si $\varepsilon = 0$ i $\alpha > 0$.

Si considerem, però, $\alpha = 0$ podem reescriure els valors propis calculats en l'apartat anterior:

$$\lambda_n = n\pi i,\;\; n \in \mathbb{Z}$$

i continuem tenint $\lambda = 0$ com a valor propi doble. És a dir, que tots els valors propis estan situats sobre la mateixa recta vertical $Re\lambda = 0$. Per tant, és evident que no tenim cap subconjunt finit de valors propis amb part real major estrictament que la resta: no tenim, doncs, un subconjunt finit de valors propis dominants. De fet, en el capítol 2 ja havíem vist aquest resultat, però considerant valors estrictament positius de ε.

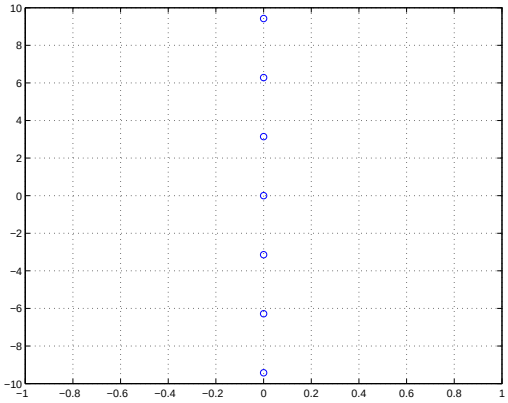


Figura 4.1: Valors propis per $\alpha = 0$.

4.1.3 Valors propis per $\varepsilon = 0$.

El fet de tenir explícitament els valors propis en aquest cas permet, per exemple, estudiar quina geometria tenen com a conjunt, sempre en funció de $\alpha > 0$. Si ens mirem els valors propis, el primer que podem observar és que, a priori, en podem tenir de reals i complexos. Concretament, tindrem tres possibilitats:

1. $0 < n < 2/\alpha\pi$. En aquest cas, tindrem λ_n complexos. Observem, però, que per α fixat tindrem un nombre finit de valors propis no reals, ja que hi ha un nombre finit de $n < 2/\alpha\pi$, amb $n \in \mathbb{N}$.

2. $n = 2/\alpha\pi$. Això passa si tenim $\alpha = 2/\pi m$ per algun $m \in \mathbb{N}$. En aquest cas, $\lambda_n = -2/\alpha$ serà també valor propi doble.

3. $n > 2/\alpha\pi$. Observem que tenim infinits λ_n en aquesta situació (de fet, segons el valor de α pot arribar a ser la única situació possible). En aquest cas, són valors propis reals.

El que farem és veure la geometria en cadascun d'aquests casos i cap a on tendeixen els valors propis quan $n \to \infty$.

1. $0 < n < 2/\alpha\pi$. Com ja hem comentat, hi ha un nombre finit de valors propis complexos, si és que n'hi ha algun: observem que si $(2/\alpha\pi) < 1$ no tindrem cap $n \in \mathbb{N}$ menor que aquesta quantitat i, per tant, no tindrem λ_n complexos. En particular, com menor sigui α, més valors propis complexos tindrem. Però si $0 < n < 2/\alpha\pi$, els valors propis són:

$$\lambda_n = \frac{1}{2}\Big(-\alpha\,\pi^2\,n^2 \pm i\pi n\,\sqrt{4 - \alpha^2\,\pi^2\,n^2}\Big)$$

Si ens mirem la part real d'aquests valors propis, $Re\,\lambda_n = -\alpha\pi^2 n^2/2$, podem observar que és *decreixent* en n, de manera que, en particular, els valors propis complexos compleixen que:

$$Re\,\lambda_n \leq Re\,\lambda_1 = \frac{-\alpha\pi^2}{2} < 0,\ \forall\, 0 < n < \frac{2}{\alpha\pi}$$

A més, podem comprovar que aquest conjunt de valors propis complexos estan situats sobre una circumferència de centre $(-1/\alpha, 0)$ i radi $1/\alpha$, tal com il.lustra la figura 4.2.

2. $n = 2/\alpha\pi$. Ja hem vist que en aquest cas tenim $\lambda_n = -2/\alpha$ també com a valor propi doble. Per veure quina posició ocuparia en l'espai respecte els possibles valors propis complexos només cal comprovar que:

$$\frac{-2}{\alpha} < \frac{-\alpha\,\pi^2\,n^2}{2} < 0,\ \forall\, 0 < n < \frac{2}{\alpha\pi}$$

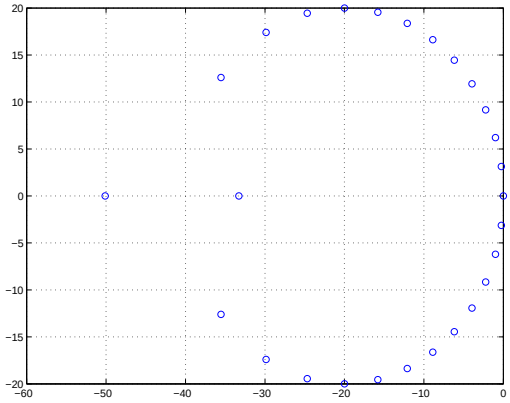


Figura 4.2: $\alpha = 0.05$: existència de valors propis complexos.

per veure que aquest valor propi és menor que les parts reals dels valors propis complexos anteriors: continua, doncs, la successió decreixent en n (veure la figura 4.3).

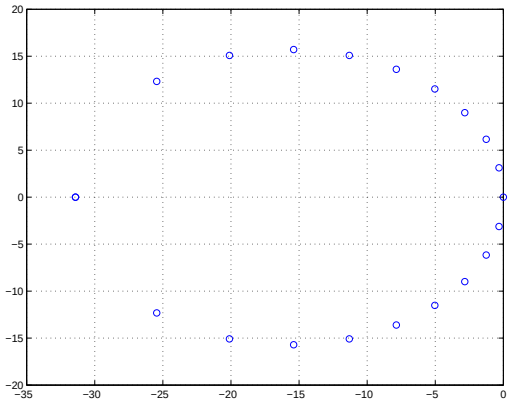


Figura 4.3: $\alpha = \dfrac{2}{10\pi}$: existència d'un segon valor propi doble, $\lambda = -10\,\pi$.

3. $n > 2/\alpha\pi$. En aquest cas, que inclou els infinits valors propis excepte, potser, els primers, ens trobem amb els valors propis reals:

$$\lambda_n = \frac{-\alpha\,\pi^2\,n^2 \,\pm\, \sqrt{\alpha^2\,\pi^4\,n^4 \,-\, 4\pi^2\,n^2}}{2}\,,\ n > \frac{2}{\alpha\pi}$$

Distingirem entre λ_n^+ i λ_n^-, segons si ens quedem amb el signe positiu o amb el negatiu. Observem, però, que tant si ens quedem amb un signe com amb l'altre tenim valors propis estrictament negatius: per a λ_n^- és evident; i per λ_n^+, només cal recordar que $n > 2/\alpha\pi$, que és a la condició necessària i suficient a

la qual s'arriba si s'imposa que $\lambda_n^+ < 0$. Per tant, quan $\varepsilon = 0$ tots els valors propis verifiquen que $Re\,\lambda_n < 0,\ \forall\, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

Els lemes següents ens donen el comportament asimptòtic dels valors propis, que podem trobar resumit en la figura 4.4.

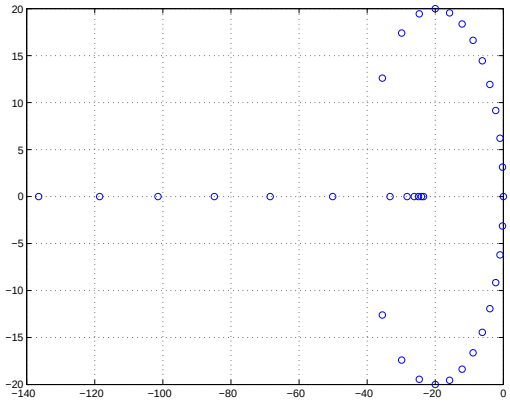


Figura 4.4: $\alpha = 0.05$: gràfica dels valors propis reals.

Lema 4.1. *El subconjunt de valors propis* $\{\lambda_n^+,\ n > 2/\alpha\pi\}$ *té límit fora del conjunt de valors propis. Concretament,*

$$\lim_{n\to\infty} \lambda_n^+ \;=\; \frac{-1}{\alpha}$$

i hi tendeixen per l'esquerra.

Observació 4.2. *El límit d'aquesta subsuccessió no és valor propi, tal i com ja hem comprovat al principi d'aquest capítol. Veurem més endavant que és l'únic punt de l'espectre essencial de l'operador corresponent al problema per* $\varepsilon = 0$.

Demostració. Només cal fer els càlculs. Escrivim els λ_n^+ com

$$2\,\lambda_n^+ \;=\; -\alpha\,\pi^2\,n^2 \;+\; \alpha\,\pi^2\,n^2\,\sqrt{1 - \frac{4}{\alpha^2\,\pi^2\,n^2}} \;= -\frac{1}{\alpha} + o\Big(\frac{1}{n^2}\Big)$$

d'on ja tenim que $\lambda_n^+ \;\to\; -1/\alpha$ quan $n \to \infty$. Per veure que hi tendeixen per l'esquerra, en tenim prou amb comprovar que $\lambda_n^+ < -1/\alpha$, que es compleix simplement pel fet que $n > 2/\alpha\pi$. □

Lema 4.3. *El subconjunt de valors propis* $\{\lambda_n^-,\ n > 2/\alpha\pi\}$ *té límit* $-\infty$. *A més,* $\lambda_n^- < -2/\alpha$ *i és decreixent en* $n > 2/\alpha\pi$.

Demostració. És directa utilitzant la definició dels λ_n^-. □

4.1.4 Espectre essencial quan $\varepsilon = 0$.

Per a facilitar la notació, en aquest capítol denotarem l'operador corresponent com $A_\alpha(\varepsilon)$. Així, l'operador corresponent al problema d'aquest apartat, per al qual hem trobat i analitzat els valors propis, el denotarem com $A_\alpha(0)$.

Volem estudiar l'espectre essencial de $A_\alpha(0)$ per $\alpha > 0$ fixat que, més endavant, ens permetrà trobar l'espectre essencial de $A_\alpha(\varepsilon)$ per $\varepsilon > 0$. Hi ha diverses definicions d'espectre essencial, cadascuna d'elles amb les propietats corresponents. Nosaltres utilitzarem la que s'utilitza en [21] i que s'introdueix en [18].

Definició 4.4 (Gohberg, Kreĭn [18]). *Sigui T un operador lineal en un espai de Banach X amb domini $\mathcal{D}(T) \subset X$. Diem que $\lambda \in \sigma(T)$ és un* ***valor propi normal*** *de l'operador T si λ és un punt aïllat de $\sigma(T)$, de multiplicitat algebraica finita i el rang de $T - \lambda Id$ és tancat en X.*

Diem que $\lambda \in \mathbb{C}$ és un ***punt normal*** *de l'operador T si o bé $\lambda \in \rho(T)$ o bé λ és un valor propi normal de T.*

Anomenem ***espectre essencial de*** *T, que denotem per $\sigma_{ess}(T)$, a qualsevol $\lambda \in \sigma(T)$ que no sigui valor propi normal.*

Amb aquesta definició, l'espectre essencial té la propietat de ser invariant per pertorbacions relativament compactes de l'operador, en el sentit del següent teorema.

Teorema 4.5 (Henry [21]). *Sigui $T + S$ una pertorbació relativament compacta de l'operador tancat T, és a dir, S és un operador lineal que compleix que $\mathcal{D}(S) \supset \mathcal{D}(T)$ i que $S(T - \lambda_0 Id)^{-1}$ és compacte per algun $\lambda_0 \in \mathbb{C}$. Sigui $\mathcal{U}$ un subconjunt obert connex qualsevol de $\mathbb{C}$ format únicament per punts normals de T. Llavors, o bé $\mathcal{U}$ conté únicament punts normals de $T + S$ o bé conté únicament valors propis de $T + S$.*

Mirem-nos qui són exactament aquests operadors en el nostre cas. En primer lloc, l'operador corresponent al problema (4.1), és:

$$A_\alpha(0) \begin{pmatrix} (u, u(1)) \\ (v, v(1)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (v, v(1)) \\ (\,(u + \alpha\, v)_{xx}, 0\,) \end{pmatrix}$$

amb domini

$$\mathcal{D}(A_\alpha(0)) = \mathcal{D}(A_\alpha) = \left\{ \begin{pmatrix} (u, u(1)) \\ (v, v(1)) \end{pmatrix} \in X_1 \times X_1,\ (u + \alpha\, v) \in H^2 \right\} \subset \mathcal{H}$$

tal i com ja havíem vist en el capítol anterior, quan ens miràvem l'operador respecte el paràmetre α. Tot i que allà treballàvem amb $\varepsilon > 0$, els espais per $A_\alpha(0)$ continuen essent els mateixos.

Un cop definit l'operador, voldrem trobar $\sigma_{ess}(A_\alpha(0))$. Però per a fer-ho no treballarem directament amb aquest operador, sinó amb una pertorbació d'aquest. Així, definim:

$$(A_\alpha(0)+B)\begin{pmatrix}(u,u(1))\\(v,v(1))\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}(v,v(1))\\(\,(u+\alpha\,v)_{xx},0\,)\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}(0,0)\\\left(-\dfrac{1}{\alpha}\,v,0\right)\end{pmatrix}$$

Observem que es tracta de treballar amb el problema pertorbat

$$(4.2)\qquad \begin{cases}\dfrac{d}{dt}(u_t-\alpha\,u_{xx})=\dfrac{-1}{\alpha}\,(u_t-\alpha\,u_{xx}),\quad 0<x<1,\ t>0\\[2ex] u(0,t)=0,\quad t>0\\[2ex] u_{tt}(1,t)=0,\quad t>0\end{cases}$$

on ja s'intueix el canvi de variables que convindrà utilitzar.

Teorema 4.6. *L'espectre essencial de l'operador pertorbat és:*

$$\sigma_{ess}\,(A_\alpha(0)+B)\;=\left\{\frac{-1}{\alpha}\right\}$$

Demostració. Treballar amb el problema pertorbat (4.2) ens dóna de forma natural un canvi de variables. Siguin $\begin{pmatrix}(f,f(1))\\(g,b)\end{pmatrix}$ les noves variables, obtingudes de les anteriors mitjançant el canvi:

$$\begin{pmatrix}(u,u(1))\\(v,v(1))\end{pmatrix}\in\mathcal{D}(A_\alpha)\;\longrightarrow\;\begin{pmatrix}(f,f(1))\\(g,b)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}(u,u(1))\\(\,v-\alpha\,u_{xx},v(1)\,)\end{pmatrix}$$

és a dir, la identitat sobre la primera component $(u,u(1))\in X_1\subset H^1(0,1)\times\mathbb{C}$ i un canvi on intervenen segones derivades en l'altra component. El problema d'aquest canvi formal és que no està clar que u_{xx} estigui definida si partim de $(u,u(1))\in X_1\subset H^1(0,1)\times\mathbb{C}$. Usualment, es pensa aquesta segona derivada en l'espai $H^{-1}(0,1)$, és a dir, l'espai dual de $H^1_0(0,1)$. Així, u_{xx} el podem definir com l'operador sobre elements de $H^1_0(0,1)$ que actua de la manera següent:

$$\langle u_{xx},\varphi\rangle=-\int_0^1 u_{xx}\,\varphi=\int_0^1 u_x\,\varphi_x,\ \forall\varphi\in H^1_0(0,1)$$

on ara totes les derivades sí tenen sentit. D'aquí tenim que $g=v-\alpha\,u_{xx}$ està definit com a element de $H^{-1}(0,1)$.

També teníem una relació entre u i v que s'haurà de traduir per les noves variables f i g: com que $(u+\alpha\,v)\in H^2(0,1)$ caldrà que $f+\alpha\,(g+\alpha\,u_{xx})\in$

$H^2(0,1)$. Però $f = u$, de manera que podem escriure aquesta condició com $f+\alpha\,(g+\alpha\,f_{xx}) \in H^2(0,1)$. Amb aquestes consideracions, podem donar l'espai E on viuen aquestes noves variables, definit a partir del domini de les velles:

$$\mathrm{E} = \left\{ \begin{pmatrix} (f, f(1)) \\ (g, b) \end{pmatrix},\ (f, f(1)) \in X_1,\ g \in H^{-1}(0,1), \right.$$
$$\left. f + \alpha(g + \alpha f_{xx}) \in H^2(0,1),\ b = g + \alpha f_{xx}|_{x=1} \right\}$$

de manera que tenim $\mathrm{E} \subset X$, on:

$$X = \left\{ \begin{pmatrix} (f, f(1)) \\ (g, b) \end{pmatrix} \in X_1 \times (H^{-1}(0,1) \times \mathbb{C}),\ g + \alpha f_{xx} \in L^2(0,1) \right\}$$

amb la norma obtinguda aplicant el canvi de variables a la norma en $\mathcal{H}$:

$$\left\| \begin{pmatrix} (f, f(1)) \\ (g, b) \end{pmatrix} \right\|_X = \int_0^1 |f_x|^2\, dx + \int_0^1 |g + \alpha f_{xx}|^2\, dx + |b|^2\ .$$

En aquestes noves variables f i g podem escriure $A_\alpha(0) + B$ com l'operador triangular superior:

$$(A_\alpha(0) + B) \begin{pmatrix} (f, f(1)) \\ (g, b) \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} f, f(1) \\ g, b \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} T_1 & T_2 \\ 0 & T_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (f, f(1)) \\ (g, b) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\alpha\,\partial_x^2 f + g, b) \\ (-\dfrac{1}{\alpha}\, g, 0) \end{pmatrix}$$

Si volem, per a més claredat, podem escriure l'operador anterior de forma desenvolupada:

$$\begin{pmatrix} \alpha\,\partial_x^2 & 0 & Id & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{\alpha}\, Id & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f \\ f(1) \\ g \\ b \end{pmatrix}$$

on:

$$T_1 : X_1 \longrightarrow H^{-1} \times \mathbb{C} \ \text{ amb } \ T_1 = \begin{pmatrix} \alpha\,\partial_x^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\ ,$$

$$T_2 : H^{-1} \times \mathbb{C} \longrightarrow H^{-1} \times \mathbb{C} \ \text{ amb } \ T_2 = \begin{pmatrix} Id & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \ \text{ i}$$

$$T_3 : H^{-1} \times \mathbb{C} \longrightarrow H^{-1} \times \mathbb{C} \ \text{ amb } \ T_3 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\alpha}\, Id & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

El que farem és, seguint la idea de [11], relacionar el conjunt resolvent i els valors propis d'un operador del tipus de T amb els de T_1, T_2 i T_3. En general,

tindrem que λ pertany al conjunt resolvent de $\begin{pmatrix} T_1 & T_2 \\ 0 & T_3 \end{pmatrix}$ si ens permet resoldre el problema

$$\left[\begin{pmatrix} T_1 & T_2 \\ 0 & T_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda\, Id & 0 \\ 0 & \lambda\, Id \end{pmatrix}\right] \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix}$$

amb $\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix}$ donats. És fàcil veure que aquest problema es pot resoldre si i només si λ està en el conjunt resolvent de T_1 i en el conjunt resolvent de T_3. Dit d'una altra manera,

$$\lambda \in \sigma \begin{pmatrix} T_1 & T_2 \\ 0 & T_3 \end{pmatrix} = \mathbb{C} \setminus \rho \begin{pmatrix} T_1 & T_2 \\ 0 & T_3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \ \lambda \in \mathbb{C} \setminus (\rho(T_1) \cap \rho(T_3)) \ \Leftrightarrow$$

$$\lambda \notin \rho(T_1) \ \acute{o} \ \lambda \notin \rho(T_3) \ \Leftrightarrow \ \lambda \in (\sigma(T_1) \cup \sigma(T_3))$$

Un senzill càlcul ens permet veure que:

$$\sigma(T_1) = \left\{0, -k\pi^2, k = 1, 2, \ldots\right\} \ , \quad \sigma(T_3) = \left\{\frac{-1}{\alpha}, 0\right\}$$

i, com que $(T_1 - \lambda Id)^{-1}$ és un operador compacte, els punts de $\sigma(T_1)$ són valors propis normals de T_1, és a dir, punts aïllats de $\sigma(T_1)$, de multiplicitat algebraica finita i tals que el rang de $(T_1 - \lambda Id)$ és tancat en $H^{-1}(0,1) \times \mathbb{C}$ per a tot $\lambda \in \sigma(T_1)$.

Com que els punts de l'espectre del nostre operador triangular vindran de $\sigma(T_1)$ o de $\sigma(T_3)$, vegem si són valors propis normals o no de T. Haurem de distingir els diferents casos. Una primera opció és que $\lambda = -1/\alpha$. Si ens el mirem en l'operador $T = A_\alpha(0) + B$:

$$\begin{pmatrix} \alpha\, \partial_x^2 & 0 & Id & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -\dfrac{1}{\alpha}\, Id & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

podem comprovar que tots els vectors de la forma

$$\begin{pmatrix} s(x) \\ 0 \\ -\dfrac{1}{\alpha} s(x) - \alpha\, s''(x) \\ 0 \end{pmatrix}$$

són vectors propis de valor propi $-1/\alpha$ de l'operador triangular, per tot $s(x)$ del domini. Per tant, $-1/\alpha$ té multiplicitat algebraica infinita com a punt

de l'espectre de $T = A_\alpha(0) + B$. És a dir, pertany a l'espectre essencial de $A_\alpha(0) + B$.

L'altra opció és que $\lambda \in \sigma(T)$, $\lambda \neq -1/\alpha$. Si $\lambda \in \sigma(T)$ vol dir que $\lambda \in \sigma(T_1)$ o $\lambda \in \sigma(T_3)$. Però com que $\sigma(T_1)$ i $\sigma(T_3)$ estan formats per punts normals, que en particular són valors propis aïllats en cada conjunt i de multiplicitat algebraica finita, també és cert que λ serà un punt aïllat de $\sigma(T)$ i que la seva multiplicitat algebraica serà finita. Només queda veure com és el rang de $T - \lambda Id$ en X. En aquest cas tenim dues possibilitats:

1. $\lambda \neq 0$. Per veure que $\mathcal{R}(T - \lambda Id)$ és tancat en X suposem que tenim:

$$\mathcal{R}(T - \lambda Id) \ni Y_n = \begin{pmatrix} f_n(x) \\ f_n(1) \\ g_n(x) \\ b_n \end{pmatrix} \xrightarrow{\| \ \|_X} Y = \begin{pmatrix} f(x) \\ f(1) \\ g(x) \\ b \end{pmatrix}$$

i demostrarem que $Y \in \mathcal{R}(T-\lambda Id)$. Com que $Y_n \in \mathcal{R}(T-\lambda Id)$ aleshores existeix:

$$X_n = \begin{pmatrix} r_n(x) \\ r_n(1) \\ s_n(x) \\ c_n \end{pmatrix} \in E$$

tal que:

$$\alpha r_n''(x) - \lambda r_n(x) + s_n(x) = f_n(x)$$

$$-\lambda r_n(1) + c_n = f_n(1)$$

$$(-1/\alpha - \lambda)\, s_n(x) = g_n(x)$$

$$-\lambda c_n = b_n$$

i volem veure que existeix $X = (r(x), r(1), s(x), c)^T \in E$ tal que:

$$\alpha r''(x) - \lambda r(x) + s(x) = f(x) \tag{4.3}$$

$$-\lambda r(1) + c = f(1) \tag{4.4}$$

$$(-1/\alpha - \lambda)\, s(x) = g(x) \tag{4.5}$$

$$-\lambda c = b \tag{4.6}$$

De les equacions (4.5) i (4.6) tenim:

$$s(x) := \frac{-1}{\lambda + 1/\alpha} g(x) \in H^{-1}(0,1) \quad \text{i} \quad c = \frac{-b}{\lambda} \in \mathbb{C}.$$

Com que $(f_n(x), f_n(1), s_n(x), b_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} (f(x), f(1), s(x), b)$ en X (on ja hem descrit quin era el producte escalar que considerem), es pot veure que:

$$\alpha r_n''(x) - \lambda r_n(x) = -s_n(x) + f_n(x) \overset{H^{-1}(0,1)}{\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}} -s(x) + f(x)$$

$$-\lambda r_n(1) = -c_n + f_n(1) \underset{n\to\infty}{\overset{\mathbb{C}}{\longrightarrow}} c + f(1)$$

I com que λ és un valor propi normal de T_1, el rang de $T_1 - \lambda Id$ és tancat en $H^{-1}(0,1) \times \mathbb{C}$, de manera que existeix $(r(x), r(1)) \in X_1$ tal que:

$$\alpha r''(x) - \lambda r(x) = -s(x) + f(x) \quad \text{i} \quad -\lambda r(1) = -c + f(1).$$

Només queda comprovar que $(r(x), r(1), s(x), c)$ està en E, és a dir, falta comprovar que:

(a) $r + \alpha(s + \alpha r'') \in H^2(0,1)$

(b) $s + \alpha r''|_{x=1} = c$

Comprovar (b) és directe de les equacions (4.3) i (4.4). I per comprovar la regularitat de $r + \alpha(s + \alpha r'')$ veurem que està en $H^1(0,1)$ i que la segona derivada està en $L^2(0,1)$.

De l'equació (4.3) tenim que $s + \alpha r'' = (\lambda r + f) \in H^1(0,1)$. I com que $r \in H^1(0,1)$, ja tenim que $r + \alpha(s + \alpha r'') \in H^1(0,1)$.

Per veure que la segona derivada és de $L^2(0,1)$, veurem que:

$$[r + \alpha(s + \alpha r'')]'' + \mu\,[r + \alpha(s + \alpha r'')] \in L^2(0,1)$$

per un cert $\mu \in \mathbb{C}$. Per l'equació (4.3) tenim que:

$$[r + \alpha(s + \alpha r'')]'' + \mu\,[r + \alpha(s + \alpha r'')] = [r + \alpha(\lambda r + f)]'' + \mu\,[r + \alpha(s + \alpha r'')]$$

I si derivem formalment l'expressió anterior, prenem $\mu = (-1/\alpha^2 - \lambda/\alpha)$ i utilitzem l'equació (4.5) tenim:

$$[r + \alpha(\lambda r + f)]'' + \mu\,[r + \alpha(s + \alpha r'')] = g + \alpha f'' + \frac{1}{\alpha}\left(\frac{-1}{\alpha} - \lambda\right) r$$

Com que $(f(x), f(1), g(x), b)^T \in X$, tenim $(g + \alpha f'') \in L^2(0,1)$, de manera que podem concloure que $[r + \alpha(s + \alpha r'')]'' \in L^2(0,1)$ i, per tant, el rang de $T - \lambda Id$ és tancat en X.

Així, qualsevol $\lambda \in \sigma(T)$, $\lambda \neq 0, -1/\alpha$ és un valor propi normal de l'operador $T = A_\alpha(0) + B$.

2. $\lambda = 0$. Aplicarem la mateixa idea que en el cas anterior per veure que el rang de T és tancat en X, és a dir, voldrem veure que si:

$$\mathcal{R}(T) \ni Y_n = \begin{pmatrix} f_n(x) \\ 0 \\ g_n(x) \\ 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\| \|_X} Y = \begin{pmatrix} f(x) \\ 0 \\ g(x) \\ 0 \end{pmatrix}$$

aleshores $Y \in \mathcal{R}(T)$. Per a això cal trobar $(r(x), r(1), s(x), c)^T \in E$ tal que:

$$\alpha r''(x) + s(x) = f(x) \tag{4.7}$$

$$c = 0 \tag{4.8}$$

$$-1/\alpha\, s(x) = g(x) \tag{4.9}$$

De les equacions (4.8) i (4.9) tenim $s(x) := -\alpha g(x) \in H^{-1}(0,1)$ i $c := 0$. I, de la mateixa manera que en el cas anterior, com que el rang de $T_1 - 0Id$ és tancat en $H^{-1}(0,1) \times \mathbb{C}$, existeix $(r(x), r(1)) \in X_1$ amb $r(x)$ verificant l'equació (4.7).

Veure que $(r(x), r(1), s(x), c)^T$ està en E és exactament el mateix que en el cas $\lambda \neq 0$ (prendrem, en aquest cas, $\mu = -1/\alpha^2$). Per tant, el rang de T és tancat en X, cosa que conclou que $\lambda = 0$ és un valor propi normal de l'operador T.

Tot això demostra que l'espectre essencial de l'operador pertorbat està format per un únic punt, que és $-1/\alpha$ □

Lema 4.7. *L'operador $A_\alpha(0) + B$ és una pertorbació relativament compacta de $A_\alpha(0)$.*

Demostració. Prenem un $\lambda \in \rho(A_\alpha(0))$ i considerem l'operador $(A_\alpha(0) - \lambda\, Id)^{-1}$, que és un operador continu de $\mathcal{H}$ en $\mathcal{D}(A_\alpha)$. I B sobre $(A_\alpha(0) - \lambda\, Id)^{-1}$ actua essencialment com a la inclusió de la segona component, que està en $H^1(0,1)$, en $L^2(0,1)$, que és una inclusió compacta. Per tant, $A_\alpha(0) + B$ és una pertorbació relativament compacta de $A_\alpha(0)$. □

Corol.lari 4.8. *L'espectre essencial de l'operador no pertorbat $A_\alpha(0)$ és:*

$$\sigma_{ess}\left(A_\alpha(0)\right) = \left\{ \frac{-1}{\alpha} \right\}$$

Demostració. Per al nostre argument utilitzarem el teorema 4.5 abans enunciat. Acabem de veure que $\sigma_{ess}\left(A_\alpha(0) + B\right) = \{-1/\alpha\}$. Per tant, la resta de punts del pla són *punts normals* de l'operador (recordem la definició 4.4). És a dir, el conjunt obert $\mathcal{U} = \mathbb{C} \setminus \{-1/\alpha\}$ conté només punts normals de $A_\alpha(0) + B$.

D'altra banda, l'operador $A_\alpha(0)$ es pot pensar també com una pertorbació relativament compacta de $A_\alpha(0) + B$ (veure lema 4.7). Així, aplicant el teorema 4.5, tindrem que el conjunt $\mathcal{U}$ està format o bé només per valors propis de $A_\alpha(0)$ o bé només per punts normals de $A_\alpha(0)$. Òbviament només la segona opció és vàlida, ja que hem vist en l'apartat 4.1.1 qui eren els valors propis de $A_\alpha(0)$. Per tant, $\sigma_{ess}(A_\alpha(0))$ ha d'estar contingut en el complementari de $\mathcal{U}$:

$$\sigma_{ess}(A_\alpha(0)) \subseteq \left\{\frac{-1}{\alpha}\right\}$$

Altre cop, això ens deixa dues opcions: o bé $\sigma_{ess}(A_\alpha(0)) = \emptyset$, o bé $\sigma_{ess}\left(A_\alpha(0)\right) = \{-1/\alpha\}$. Si suposem la primera, que $A_\alpha(0)$ no té espectre essencial, podem repetir l'argument anterior pensant l'operador $A_\alpha(0) + B$ com pertorbació relativament compacta de $A_\alpha(0)$. En aquest cas, l'obert escollit seria $\mathcal{U} = \mathbb{C}$, format només per punts normals de $A_\alpha(0)$, de manera que pel teorema 4.5 tindríem $\sigma_{ess}\left(A_\alpha(0) + B\right) = \emptyset$, que òbviament és fals. Per tant, l'única opció possible és que:

$$\sigma_{ess}(A_\alpha(0)) = \left\{\frac{-1}{\alpha}\right\}$$

□

4.2 Pertorbació de l'espectre respecte $\varepsilon > 0$.

Ja hem vist que el sentit físic d'aquest cas és suposar una massa *m prou gran* en l'extrem de la molla. Matemàticament, però, pensarem aquest problema com una pertorbació del problema per $\varepsilon = 0$ i veurem que se'n mantenen els resultats principals.

4.2.1 Pertorbació del valor propi doble $\lambda = 0$ per ε petit.

Per fer notar la dependència dels valors propis respecte del paràmetre ε, escriurem $\lambda_k(\varepsilon)$ per a referir-nos al k-èssim valor propi en el problema per $\varepsilon \geq 0$. Així, denotem per $\lambda_0(0) = 0$ el valor propi doble dominant quan $\varepsilon = 0$. Si pertorbem el problema considerant un $\varepsilon > 0$ la intuïció ens porta a pensar que els valors propis pertorbats corresponents a $\lambda_0(0)$, que podem denotar per $\lambda_0^+(\varepsilon)$ i $\lambda_0^-(\varepsilon)$, haurien de ser també dominants si ε és petit. Efectivament, és el que passarà.

Per veure-ho, comencem veient analíticament unes aproximacions de $\lambda_0^\pm(\varepsilon)$

quan ε és prou petit. En aquest cas recuperem el problema de referència (1.1):

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} - \alpha\, u_{txx} = 0, \quad 0 < x < 1 \\ \\ u(0,t) = 0 \\ \\ u_{tt}(1,t) = -\varepsilon\ [u_x(1,t) + \alpha\, u_{tx}(1,t) + r\, u_t(1,t)] \end{cases}$$

on $u = u(x,t)$, $\varepsilon > 0$ i α, $r > 0$. Si busquem solucions de la forma $e^{\lambda t}u(x)$, tal i com fèiem en l'apartat 2.2.2, però ara per $\alpha > 0$, obtenim com a solucions associades:

$$u(x) = e^{\sqrt{\frac{\lambda^2}{1+\lambda\alpha}}\, x} - e^{-\sqrt{\frac{\lambda^2}{1+\lambda\alpha}}\, x}$$

i els valors propis λ han de complir la següent relació o equació característica:

$$e^{\frac{\lambda}{\sqrt{1+\lambda\alpha}}} \left[\lambda + \frac{\varepsilon(1+\lambda\alpha)}{\sqrt{1+\lambda\alpha}} + \varepsilon\, r\right] = e^{\frac{-\lambda}{\sqrt{1+\lambda\alpha}}} \left[\lambda - \frac{\varepsilon(1+\lambda\alpha)}{\sqrt{1+\lambda\alpha}} + \varepsilon\, r\right] \tag{4.10}$$

En l'apartat 4.2.2 analitzarem amb més detall aquesta equació, però de moment podem pensar aquesta expressió dels valors propis com una funció de (ε, λ) igualada a zero, a la qual aplicarem el teorema de la funció implícita en $\mathbb{C}^2$ en un entorn prou petit del punt $(\varepsilon_0, \lambda_0) = (0,0)$, de manera que podrem expressar ε com a funció de λ en un entorn del valor propi doble dominant. Per tant, tenim ε com a funció holomorfa de λ:

$$\varepsilon = \varepsilon(\lambda) = \varepsilon_0 + \varepsilon_1\lambda + \varepsilon_2\lambda^2 + O(\lambda^3)$$

Sabem que l'entorn on això és cert és un entorn de $(\varepsilon_0, \lambda_0) = (0,0)$, de manera que forçosament $\varepsilon_0 = 0$. A partir d'aquí, si substituïm aquesta expressió en (4.10), on haurem escrit cada terme com la sèrie de Taylor en λ, entorn de $\lambda = 0$, obtenim que:

$$\varepsilon_1 = 0 \quad i \quad \varepsilon_2 = -1$$

Així, podem pensar ε com

$$\varepsilon(\lambda) = -\lambda^2 + O(\lambda^3)$$

i, traient factor comú a λ^2, podem pensar-ho com:

$$-\varepsilon(\lambda) = \lambda^2\varphi(\lambda)$$

on $\varphi(\lambda) = 1 + O(\lambda)$. Si fem el canvi de variables $\delta = \lambda\sqrt{\varphi(\lambda)}$, tenim $-\varepsilon = \delta^2$ i λ en funció de δ. Per tant, podem repetir l'argument i tenim:

$$\lambda = \lambda(\delta) = \lambda_0 + \lambda_1\,\delta + \lambda_2\,\delta^2 + O(\delta^3)$$

d'on sabem ja que $\lambda_0 = 0$ pel mateix motiu que abans. Amb aquesta apreciació i pensant l'equació (4.10) com a productes de sèries de Taylor en la variable δ, els càlculs ens porten a trobar el valor, per exemple, dels dos primers coeficients de λ, obtenint les següents aproximacions d'ordre 1 per a les pertorbacions respecte δ del valor propi doble $\lambda_0(0)$, que és:

$$\lambda(\delta) = \delta + \frac{\alpha + r}{2}\,\delta^2 + O(\delta^3)$$

Però hem vist que $-\varepsilon = \delta^2$ o, equivalentment, $\lambda = \lambda(\pm i\sqrt{\varepsilon})$ ja que $\varepsilon > 0$. Per tant, l'anterior expressió la podem posar en termes de ε, obtenint les següents aproximacions d'ordre 1 per a les pertorbacions respecte ε del valor propi doble $\lambda_0(0)$, que són:

$$\lambda_0^+(\varepsilon) = i\sqrt{\varepsilon} - \frac{\alpha + r}{2}\,\varepsilon - i\,\frac{4 + 3(\alpha + r)^2}{24}\,(\sqrt{\varepsilon})^3 + \frac{\alpha + r}{6}\,\varepsilon^2 + \\ +\; i\,\frac{176 + 360(\alpha + r)^2 - 45(\alpha + r)^4}{5760}\,(\sqrt{\varepsilon})^5 - \left(\frac{2\alpha}{45} + \frac{r}{30}\right)\varepsilon^3 + O((\sqrt{\varepsilon})^7)$$

i el conjugat:

$$\lambda_0^-(\varepsilon) = \overline{\lambda_0^+(\varepsilon)}.$$

Observem que en fer $\varepsilon = 0$ recuperem el valor propi doble (de multiplicitat algebraica 2), que era $\lambda_0(0) := \lambda_0^+(0) = \lambda_0^-(0)$. Així, el valor propi doble pel cas $\varepsilon = 0$ s'ha desdoblat en dos nous valors propis (complexos conjugats) quan pensem ε propera a zero. Ara que sabem com es pertorba el valor propi $\lambda_0(0) = 0$, veurem que no perd el fet de ser dominant respecte la resta de l'espectre.

4.2.2 Anàlisi de l'equació característica.

Un anàlisi més acurat de l'equació característica dels valors propis (4.10) ens permetrà, en aquest apartat, deduir algunes propietats dels valors propis quan $\varepsilon > 0$. A diferència del cas $\varepsilon = 0$, en què els valors propis eren explícits, ara caldrà un anàlisi qualitatiu de l'equació característica per tenir aquest tipus de resultats. Veurem, però, que hi ha certa analogia entre els dos casos.

El primer resultat ens servirà per situar els valors propis en el pla en funció dels paràmetres ε, r i α, tots ells positius. Per veure-ho, escriurem per una banda l'equació característica en una nova variable z i, per l'altra, obtindrem certes acotacions sobre els termes de l'equació que ens dividiran el pla en regions. Si volem que es compleixi l'equació característica, aquestes acotacions només seran compatibles en algunes de les regions anteriors i això ens permetrà situar els valors propis només en aquestes parts del pla. En un segon resultat analitzarem el comportament asimptòtic dels valors propis.

Comencem, doncs, introduint una nova variable z que definim com

$$z = \sqrt{1 + \lambda\alpha}\ . \tag{4.11}$$

Així, els valors propis (o solucions de l'equació característica (4.10)) els tenim en funció de la nova variable com

$$\lambda = \frac{z^2 - 1}{\alpha}$$

Imposem el canvi de variable en l'equació característica (4.10) i obtenim:

$$\left(\frac{z^2-1}{\alpha} + \varepsilon z + \varepsilon r\right) e^{\frac{z^2-1}{\alpha z}} = \left(\frac{z^2-1}{\alpha} - \varepsilon z + \varepsilon r\right) e^{-\frac{z^2-1}{\alpha z}}$$

que de forma abreujada denotarem per

$$A(z)\, B(z) = A'(z)\, B'(z) \tag{4.12}$$

on

$$A(z) = \left(\frac{z^2-1}{\alpha} + \varepsilon z + \varepsilon r\right), \quad B(z) = e^{\frac{z^2-1}{\alpha z}}$$
$$A'(z) = \left(\frac{z^2-1}{\alpha} - \varepsilon z + \varepsilon r\right), \quad B'(z) = e^{-\frac{z^2-1}{\alpha z}}$$

Voldrem dividir el pla en diverses zones:

a) $\{\, z \in \mathbb{C}\,;\, |B(z)| < 1\}$, $\{\, z \in \mathbb{C}\,;\, |B(z)| = 1\}$ i $\{\, z \in \mathbb{C}\,;\, |B(z)| > 1\}$

b) $\{\, z \in \mathbb{C}\,;\, |B'(z)| < 1\}$, $\{\, z \in \mathbb{C}\,;\, |B'(z)| = 1\}$ i $\{\, z \in \mathbb{C}\,;\, |B'(z)| > 1\}$

c) $\{\, z \in \mathbb{C}\,;\, |A(z)| < |A'(z)|\}$, $\{\, z \in \mathbb{C}\,;\, |A(z)| = |A'(z)|\}$ i

$\{\, z \in \mathbb{C}\,;\, |A(z)| > |A'(z)|\}$

i analitzarem després en quines zones aquestes acotacions són compatibles amb l'equació característica (4.12).

Comencem amb $|B(z)|$. Aquest mòdul serà menor, igual o major que 1 quan la part real de l'exponent sigui menor, igual o major que 0. Per tant, si escrivim $z = x + iy$, el que voldrem és estudiar el signe de

$$Re\left(\frac{z^2-1}{\alpha z}\right) = \frac{x\ (x^2+y^2-1)}{\alpha\,(x^2+y^2)} \tag{4.13}$$

segons els valors de x, y. I com que $\alpha > 0$, el signe de (4.13) és el mateix que el signe del numerador, $x\ (x^2+y^2-1)$, que depèn de la part real de la nova variable i de la situació de la variable respecte de la circumferència de radi 1. Així, de manera immediata, el pla ens queda dividit en les següents regions:

a.1) $|B(z)| < 1$ si

$$x > 0 \quad i \quad x^2 + y^2 - 1 < 0$$

o bé si

$$x < 0 \quad i \quad x^2 + y^2 - 1 > 0$$

a.2) $|B(z)| = 1$ si

$$x = 0 \quad (\text{z imaginaris purs})$$

o bé si

$$x^2 + y^2 - 1 = 0 \quad (\text{z pertany a la circumferència unitat})$$

a.3) $|B(z)| > 1$ si

$$x > 0 \quad i \quad x^2 + y^2 - 1 > 0$$

o bé si

$$x < 0 \quad i \quad x^2 + y^2 - 1 < 0$$

Això queda resumit en la part esquerra de la figura 4.5. Anàlogament, $|B'(z)|$ divideix el pla en tres regions, que són les mateixes que en el cas anterior, però amb les acotacions al revés:

b.1) $|B'(z)| < 1$ si

$$x > 0 \quad i \quad x^2 + y^2 - 1 > 0$$

o bé si

$$x < 0 \quad i \quad x^2 + y^2 - 1 < 0$$

b.2) $|B'(z)| = 1$ si

$$x = 0 \quad (\text{z imaginaris purs})$$

o bé si

$$x^2 + y^2 - 1 = 0 \quad (\text{z pertany a la circumferència unitat})$$

b.3) $|B'(z)| > 1$ si

$$x > 0 \quad \text{i} \quad x^2 + y^2 - 1 < 0$$

o bé si

$$x < 0 \quad \text{i} \quad x^2 + y^2 - 1 > 0$$

situació que queda resumida en la gràfica de la dreta de la figura 4.5.

Per últim, volíem comparar els mòduls de $|A(z)|$ i $|A'(z)|$. Per fer-ho, escrivim de nou $z = x + iy$ en les expressions de $A(z)$ i $A'(z)$, i podem veure com

$$|A(z)|^2 - |A'(z)|^2 = \frac{4\varepsilon x\,(x^2 + y^2 - 1 + \varepsilon r\alpha)}{\alpha} \tag{4.14}$$

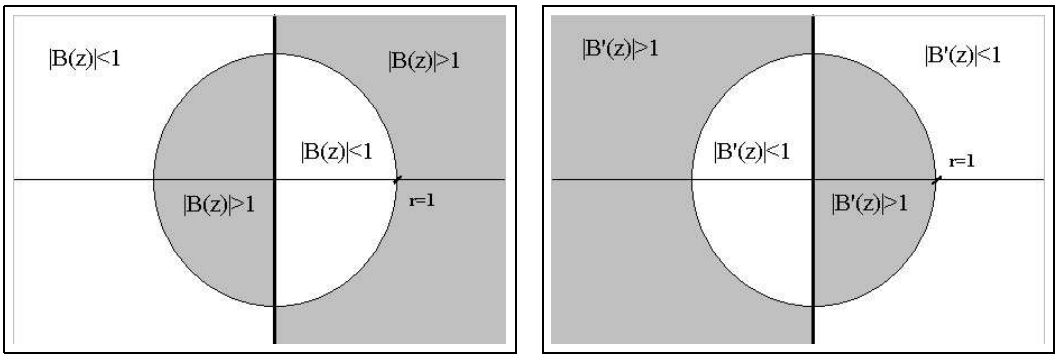


Figura 4.5: Regions del pla que ens donen $|B(z)|$ i $|B'(z)|$.

Per tant, comparar $|A(z)|$ amb $|A'(z)|$ és estudiar el signe de (4.14) o, el que és el mateix, el signe de $x\,(x^2+y^2-1+\varepsilon r\alpha)$. Aquí haurem de distingir dos casos:

i) $\varepsilon\, r\, \alpha \geq 1$. En aquest cas, $(x^2+y^2-1+\varepsilon r\alpha)$ és sempre positiu, de manera que el signe el determina x. Així, tindrem que

   c.1) $|A(z)| < |A'(z)|$ si i només si $x < 0$

   c.2) $|A(z)| = |A'(z)|$ si i només si $x = 0$

   c.3) $|A(z)| > |A'(z)|$ si i només si $x > 0$

   és a dir, les regions determinades pels dos semiplans.

ii) $\varepsilon\, r\, \alpha < 1$. En aquest cas, $(x^2+y^2-1+\varepsilon r\alpha)$ és l'equació d'una circumferència de centre $(0,0)$ i radi $\sqrt{1-\varepsilon r\alpha} < 1$, que ara també intervé en la determinació del signe que ens interessa. Així,

   c.1) $|A(z)| < |A'(z)|$ si

$$x < 0 \quad \text{i} \quad x^2+y^2-1+\varepsilon r\alpha > 0$$

   o bé

$$x > 0 \quad \text{i} \quad x^2+y^2-1+\varepsilon r\alpha < 0$$

   c.2) $|A(z)| = |A'(z)|$ si

$$x = 0$$

   o bé

$$x^2+y^2-1+\varepsilon r\alpha = 0$$

c.3) $|A(z)| > |A'(z)|$ si

$$x < 0 \quad \text{i} \quad x^2 + y^2 - 1 + \varepsilon r\alpha < 0$$

o bé

$$x > 0 \quad \text{i} \quad x^2 + y^2 - 1 + \varepsilon r\alpha > 0$$

Observem que quan ε va a zero, la circumferència anterior tendirà a la circumferència de radi 1 per l'interior.

Tot això queda resumit en la gràfica 4.6.

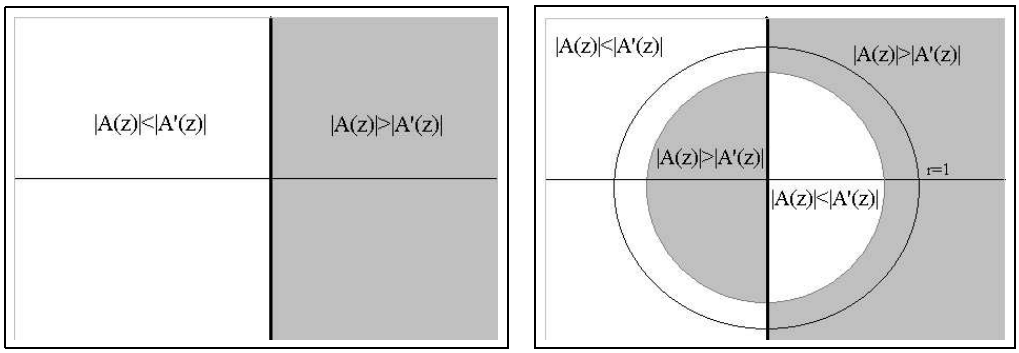


Figura 4.6: A l'esquerra el cas $\varepsilon r\alpha \geq 1$; a la dreta, $\varepsilon r\alpha < 1$.

Per tant, el pla ens ha quedat dividit en diverses regions i hem de veure quines són compatibles amb tenir solucions de l'equació característica. Així, la situació queda resumida en el següent teorema:

Teorema 4.9. *Els valors propis λ de l'operador $A_\alpha(\varepsilon)$ quan $\alpha\,, \varepsilon > 0$ estan localitzats en les següents regions:*

1. *si $\varepsilon r\alpha \geq 1$ només tindrem valors propis tals que*

$$\lambda \in (-\infty, -1/\alpha] \qquad \text{ó bé} \qquad \left|\lambda + \frac{1}{\alpha}\right| < \frac{1}{\alpha}$$

és a dir, en la semirecta $\lambda \in (-\infty, -1/\alpha]$ i en l'interior (estrictament) de la circumferència centrada en $(-1/\alpha, 0)$ i de radi $1/\alpha$, tal i com es veu en la figura 4.7.

2. *si $\varepsilon r\alpha < 1$ aquests només es podran trobar en*

$$\lambda \in (-\infty, -1/\alpha] \quad \text{o bé en} \quad \left\{\left|\lambda + \frac{1}{\alpha}\right| < \frac{1}{\alpha}\right\} \cap \left\{\left|\lambda + \frac{1}{\alpha}\right| > \frac{1}{\alpha} - \varepsilon r\right\}$$

és a dir, en la semirecta $(-\infty, -1/\alpha]$ i en l'interior de la corona circular determinada per les circumferències centrades en $(-1/\alpha, 0)$ i de radis $1/\alpha$ i $1/\alpha - \varepsilon r$, tal i com s'indica en la figura 4.7.

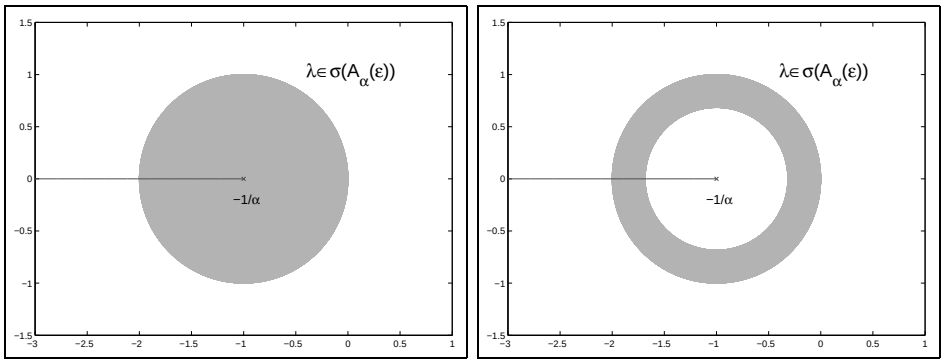


Figura 4.7: A l'esquerra, situació dels valors propis en el pla pel cas $\varepsilon r\alpha \geq 1$; a la dreta, per $\varepsilon r\alpha < 1$.

Observació 4.10. *Quan ε s'acosta a 0, els valors propis tendeixen a situar-se a la circumferència de centre $(-1/\alpha, 0)$ i radi $1/\alpha$, i a la semirecta $(-\infty, -1/\alpha]$. Això és coherent amb l'anàlisi explícit dels valors propis quan $\varepsilon = 0$ que hem fet en l'apartat 4.1.3.*

Demostració. Les úniques regions del pla en $z \in \mathbb{C}$ que ens han donat les acotacions per $|A(z)|$, $|A'(z)|$, $|B(z)|$ i $|B'(z)|$ que, a més, són compatibles amb l'equació (4.12) són les següents:

1. si $\varepsilon r\alpha \geq 1$ només tenim z solucions de l'equació (4.12) si

$$x = 0 \qquad \text{ó} \qquad x^2 + y^2 - 1 < 0$$

és a dir, sobre $Re(z) = 0$ i en l'interior (estrictament) de la circumferència de radi 1. Desfent el canvi de variables (4.11) tenim de manera immediata on estan localitzats els valors propis λ.

2. si $\varepsilon r\alpha < 1$ només tenim z solucions de l'equació (4.12) si

$$x = 0 \qquad \text{ó} \qquad \{x^2 + y^2 - 1 < 0\} \cap \{x^2 + y^2 - (1 - \varepsilon r\alpha) > 0\}$$

és a dir, sobre $Re(z) = 0$ i en l'interior de la corona circular delimitada per les circumferències centrades en $(0, 0)$ i radis 1 i $\sqrt{1 - \varepsilon r\alpha}$. Si desfem el canvi de variables (4.11) per expressar aquesta condició en termes dels valors propis del nostre operador, obtenim les regions de l'enunciat.

□

Vegem ara un altre punt de vista per l'equació característica que ens permetrà veure on s'acumulen els valors propis.

Teorema 4.11. *Quan* $\alpha > 0$, $\varepsilon \geq 0$ *existeix una successió de valors propis de l'operador* $A_\alpha(\varepsilon)$ *que s'acumulen en* $-1/\alpha$ *i una successió de valors propis que s'acumulen en l'infinit.*

Observació 4.12. *En l'apartat 4.2.3 veurem que* $-1/\alpha$ *és, de fet, l'únic punt de l'espectre essencial de l'operador* $A_\alpha(\varepsilon)$ *quan* $\varepsilon \geq 0$. *Per tant, el teorema 4.11 ens diu que l'infinit i* $-1/\alpha$ *són els únics llocs on s'acumulen els valors propis.*

Demostració. Per $\varepsilon = 0$ ho havíem vist en l'apartat 4.1.3. Per tant, fixem $\varepsilon > 0$. Essencialment, del que es tracta és de mirar-nos l'equació característica dels valors propis com una funció a la qual aplicarem el Gran Teorema de Picard (com a referència, vegi's [12]). Recordem que el Gran Teorema de Picard garanteix que si f és una funció analítica amb una singularitat essencial en $z = a$ aleshores, en qualsevol entorn de $z = a$, f assumeix tots els valors, amb una possible excepció, i un nombre infinit de vegades.

A quina funció ho aplicarem? Per veure que hi ha valors propis que s'acumulen en $-1/\alpha$, partim de l'equació característica dels valors propis (4.10) a la qual apliquem el mateix canvi (4.11), és a dir, $z = \sqrt{1 + \lambda\alpha}$. Amb aquest canvi, podem pensar l'equació (4.10) com

$$f(z) = 1 \qquad \text{on} \qquad f(z) = e^{2\left(\frac{z^2-1}{\alpha z}\right)} \left(\frac{z^2 - 1 + \varepsilon\alpha z + \varepsilon\alpha r}{z^2 - 1 - \varepsilon\alpha z + \varepsilon\alpha r}\right) \tag{4.15}$$

Les solucions $\{z_n\}$ ens donen els λ_n valors propis de $A_\alpha(\varepsilon)$. El que volem veure és que existeix una successió $\{z_{n_k}\}$ tals que $f(z_{n_k}) = 1$ i que $lim_{n_k \to \infty} |z_{n_k}| = 0$. Així, els corresponents λ_{n_k} seran una successió de valors propis de $A_\alpha(\varepsilon)$ que s'acumularan en $-1/\alpha$. Fixem-nos en la funció $f(z)$, que està formada per una exponencial i dos polinomis en z de grau dos. Considerem el següent obert :

$$E_0 = D_{1/n_0} \setminus \{0\}$$

on D_{1/n_0} és el disc obert de centre 0 i radi $1/n_0$, que hem triat de manera que els polinomis $z^2 - 1 + \varepsilon\alpha z + \varepsilon\alpha r$ i $z^2 - 1 - \varepsilon\alpha z + \varepsilon\alpha r$ no tinguin cap zero en E_0. Sigui la successió decreixent d'oberts $\{E_k\}_k$ definida per

$$E_k = D_{\frac{1}{n_0+k}} \setminus \{0\}$$

Com que $E_{k+1} \subset E_k \subset E_0$ per a tota $k > 0$, tenim en cadascun d'aquests oberts que $f(z) \neq 0$ si $z \in E_k$ i que, per construcció, la única singularitat de $f(z)$ és la singularitat essencial que té l'exponencial en $z = 0$. Aplicant el Gran Teorema de Picard, podem afirmar que f pren el valor 1 infinits cops en cadascun d'aquests entorns E_k. Així, podem triar $z_{n_k} \in (E_k \setminus E_{k-1})$ de

manera que $f(z_{n_k}) = 1$ i, com que la successió de discs D_{1/n_k} convergeix a $\{0\}$, aquests z_{n_k} compleixen que

$$\lim_{n_k \to \infty} z_{n_k} = 0$$

Si expressem aquests resultats en les variables inicials, podem afirmar que existeix una successió de λ_{n_k} solució de l'equació (4.10) tals que

$$\lim_{n_k \to \infty} \lambda_{n_k} = \frac{-1}{\alpha}$$

És a dir, tenim una successió de valors propis λ_{n_k} que s'acumulen en $-1/\alpha$. Vegem ara que existeix una successió de valors propis que s'acumulen en l'infinit. Havíem vist que l'equació característica equivalia a l'equació (4.15). Afegim un nou canvi de variables, $w = 1/z$, i l'equació característica equival a l'equació

$$g(w) = 1 \qquad \text{on} \qquad g(w) = e^{2\left(\frac{1-w^2}{\alpha w}\right)} \left(\frac{(\varepsilon r\alpha - 1)w^2 + \varepsilon\alpha w + 1}{(\varepsilon r\alpha - 1)w^2 - \varepsilon\alpha w + 1}\right)$$

El mateix raonament anterior val per $g(w)$, que també té una singularitat essencial en $w = 0$. Tenim, doncs, una successió $\{w_{n_j}\}$ amb $g(w_{n_j}) = 1$ tals que $lim_{n_j \to \infty} w_{n_j} = 0$. Desfent els canvis, tenim una successió de valors propis λ_{n_j} tals que $lim_{n_j \to \infty} |\lambda_{n_j}| = \infty$. Observem que, com que w_{n_j} poden tendir a zero en totes direccions, hem hagut de considerar el mòdul de λ_{n_j}. □

4.2.3 Espectre essencial de $A_\alpha(\varepsilon)$ quan $\varepsilon > 0$.

Si veiem que $A_\alpha(\varepsilon),\ \varepsilon > 0,\ \alpha > 0$ és una pertorbació relativament compacta de l'operador tancat $A_\alpha(0)$, el teorema 4.5 ens permetrà veure que l'espectre essencial no canviarà.

Teorema 4.13. *L'espectre essencial de l'operador $A_\alpha(\varepsilon)$, $\varepsilon, \alpha > 0$, és:*

$$\sigma_{ess}(A_\alpha(\varepsilon)) = \left\{\frac{-1}{\alpha}\right\}$$

Demostració. L'operador $A_\alpha(\varepsilon)$ el podem descomposar de la manera següent:

$$A_\alpha(\varepsilon) \begin{pmatrix} (u, u(1)) \\ (v, v(1)) \end{pmatrix} = (A_\alpha(0) + B_\varepsilon) \begin{pmatrix} (u, u(1)) \\ (v, v(1)) \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} (v, v(1)) \\ ((u + \alpha\, v)_{xx}, 0) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} (0, 0) \\ (\, 0, -\varepsilon\, [(u + \alpha\, v)_x(1) + r\, v(1)]\,) \end{pmatrix}$$

Observem que B_ε és un operador de rang finit i que $\mathcal{D}(A_\alpha(0)) \subset \mathcal{D}(B_\varepsilon) \subset \mathcal{H}$. Així, la composició $B_\varepsilon \left(A_\alpha(0) - \lambda_0 \, Id\right)^{-1}$ amb $\lambda_0 \in \rho(A_\alpha(0))$ ens porta a:

$$\mathcal{H} \hookrightarrow \mathcal{D}(A_\alpha) \hookrightarrow \mathcal{H}$$

on $\mathcal{H} \hookrightarrow \mathcal{D}(A_\alpha)$ inclusió contínua perquè $\left(A_\alpha(0) - \lambda_0 \, Id\right)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{H}, \mathcal{D}(A_\alpha))$ $\forall \ \lambda_0 \in \rho(A_\alpha(0))$; i on la segona inclusió és compacta ja que B_ε és un operador de rang finit i, en particular, compacte.

Així, l'operador B_ε és una pertorbació relativament compacta de $A_\alpha(0)$, de manera que seguint el mateix raonament fet en el corol.lari 4.8, podem afirmar que:

$$\sigma_{ess}(A_\alpha(\varepsilon)) = \sigma_{ess}(A_\alpha(0)) = \left\{ \frac{-1}{\alpha} \right\} \ .$$

□

4.2.4 Rang numèric, convergència generalitzada i valors propis dominants.

Situarem els valors propis en un sector que no dependrà de ε. Amb l'ajut de teoria de pertorbacions, veurem que $\lambda_0^+(\varepsilon)$ i $\lambda_0^-(\varepsilon)$, aproximacions que tenen sentit per ε pròxim a zero, són els valors propis més a la dreta de tots. I si ε prou petit, també estaran a la dreta de l'espectre essencial, $\{-1/\alpha\}$, ja que $\alpha > 0$ està fixada. De manera que el que seria esperable passa: la pertorbació del valor propi dominant per $\varepsilon = 0$ és també valor propi dominant per ε prou proper a zero (i veurem amb més exactitud què vol dir aquest *prou proper*).

En aquest apartat, doncs, serà important l'eina que ens donarà el sector independent de ε que, sota certes hipòtesis, contindrà l'espectre de tots els $A_\alpha(\varepsilon)$: el rang numèric. Seguirem la definició i teoremes del capítol V.3 del Kato [22].

Definició 4.14. *Sigui T un operador en un espai de Hilbert H. El* ***rang numèric*** *de T ó $\Theta(T)$ és el subconjunt del pla complex següent:*

$$\Theta(T) = \{\langle Tu, u\rangle \in \mathbb{C},\ u \in \mathcal{D}(T),\ \|u\| = 1\}$$

Observació 4.15. *Tot i que podríem usar el fet que els operadors generen un semigrup analític per $\varepsilon > 0$ per a buscar el sector que contindria l'espectre de cada operador, tindríem el problema que els sectors, possiblement, dependrien de ε.*

Definició 4.16. *Sigui Γ la clausura de $\Theta(T)$. Definim el conjunt Δ com el complementari de Γ:*

$$\Delta = \mathbb{C} \setminus \Gamma$$

Proposició 4.17 (Kato, [22]). *El rang numèric és un conjunt convex. Per tant,* Δ *és un conjunt obert o bé connex o bé amb dues components connexes* Δ_1 *i* Δ_2 *(en el cas en què* Γ *sigui una banda vertical).*

El que ens interessarà a nosaltres per a relacionar aquests conjunts amb l'espectre és el següent resultat del Kato.

Teorema 4.18 (Kato, [22]). *Sigui* T *un operador tancat en un espai de Hilbert* H*. Per a qualsevol* $\xi \in \Delta$*,* $T - \xi Id$ *té rang tancat, la dimensió del nucli de* $T - \xi Id$ *és 0 i la codimensió del rang de* $T - \xi Id$ *és constant* $\forall \xi \in \Delta$ *(o bé en cada component de* Δ*). Aquest valor constant s'anomena l'****índex de deficiència de*** T *(*$def(T - \xi Id)$*). En el cas que* $def(T - \xi Id) = 0$ *per a algun* $\xi \in \Delta$ *llavors* Δ *és un subconjunt del conjunt resolvent de* T *i* $\|R(\xi, T)\| \leq 1/dist(\xi, \Gamma)$ *(el resultat és anàleg quan* Δ *té dues components).*

Comencem, doncs, trobant el rang numèric dels nostres operadors $\Theta(A_\alpha(\varepsilon))$, $\varepsilon > 0$. Recordem qui era aquest operador, ja definit en el capítol 3:

$$A_\alpha(\varepsilon)V = \begin{pmatrix} (v, v(1)) \\ (\,(u + \alpha\, v)_{xx}, -\varepsilon\,(u\, +\, \alpha\, v)_x(1)\, -\, \varepsilon\, r\, v(1)\,) \end{pmatrix}$$

amb domini

$$\mathcal{D}(A_\alpha(\varepsilon)) = \mathcal{D}(A_\alpha) = \left\{ \begin{pmatrix} (u, u(1)) \\ (v, v(1)) \end{pmatrix} \in X_1 \times X_1,\, (u + \alpha\, v) \in X_2 \right\} \subset \mathcal{H}$$

En el nostre cas, com que $\varepsilon > 0$, el producte escalar que considerem és $\langle\ ,\ \rangle_\varepsilon$ i es pot comprovar que:

$$\langle A_\alpha(\varepsilon)V, V\rangle_\varepsilon = -\alpha \int_0^1 |v_x|^2 \, - \, r|v(1)|^2 - 2i\, Im \int_0^1 u_x \overline{v_x}$$

per a tots els $V \in \mathcal{D}(A_\alpha(\varepsilon))$ tals que $\|V\|_\varepsilon = 1$. Si ens mirem la part real i la part imaginària del producte escalar, que pensarem com un complex μ, i les comparem, usant que $\|V\|_\varepsilon = 1$, tenim:

$$|Im\, \mu| = 2\, |Im \int_0^1 u_x \overline{v}_x\, | \leq 2 \left(\int_0^1 |v_x|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

i, per tant, tot $\mu \in \Theta(A_\alpha(\varepsilon))$ verifica que:

$$|Im\, \mu| \leq 2 \left| \frac{-Re\, \mu - r|v(1)|^2}{\alpha} \right|^{\frac{1}{2}}$$

És a dir, el rang numèric està contingut en el sector parabòlic:

$$S_\alpha = \{ y = \pm\, 2\sqrt{\frac{-x}{\alpha}},\, x < 0 \}$$

No donem exactament qui és aquest rang numèric, però aquesta localització serà suficient per a l'ús que en farem.

Teorema 4.19. *L'espectre dels operadors* $A_\alpha(\varepsilon)$, $\forall\, \varepsilon > 0$, $\alpha > 0$ *està contingut en el sector parabòlic*

$$S_\alpha = \left\{ y = \pm\, 2\sqrt{\frac{-x}{\alpha}},\, x < 0 \right\}$$

per a tots els $\varepsilon > 0$.

Demostració. Ja hem vist que $\Theta(A_\alpha(\varepsilon))$ està contingut en aquest sector $\forall\, \varepsilon > 0$, de manera que només queda veure que l'espectre està en el rang numèric comprovant les hipòtesis del teorema 4.18: observem que $\xi = 1$ no està en el rang numèric, així que comprovarem que l'índex de deficiència és 0 veient que $\mathcal{R}(A_\alpha(\varepsilon) - Id) = \mathcal{H}$.

Si ens mirem com actua aquest nou operador aplicat sobre un element V qualsevol de $\mathcal{D}(A_\alpha)$, tenim:

$$(A_\alpha(\varepsilon) - Id)\, V = \begin{pmatrix} (v-u,\, v(1)-u(1)) \\ (\,(u+\alpha\, v)_{xx} - v,\, -\varepsilon\, [u_x(1) \,+\, \alpha\, v_x(1) \,+\, r\, v(1)] - v(1)\,) \end{pmatrix}$$

que, efectivament, està en $\mathcal{H} = X_1 \times X_0$. Per a veure que el rang és complet, prenem un element qualsevol de l'espai total, $F = \begin{pmatrix} (f, f(1)) \\ (g, b) \end{pmatrix} \in \mathcal{H}$ i hem de trobar $V = \begin{pmatrix} (u, u(1)) \\ (v, v(1)) \end{pmatrix} \in \mathcal{D}(\mathcal{H})$ tal que $(A_\alpha(\varepsilon) - Id)\, V = F$. Si escrivim aquesta igualtat terme a terme, aquesta es tradueix en resoldre el problema següent:

$$\begin{cases} v - u = f \\ \\ v(1) - u(1) = f(1) \\ \\ u_{xx} + \alpha v_{xx} - v = g \\ \\ -\varepsilon\, [u_x(1) + \alpha v_x(1) + r v(1)] - v(1) = b \end{cases}$$

amb $(f, f(1)) \in X_1$, $g \in L^2(0,1)$, $b \in \mathbb{C}$ donats i $u(0) = v(0) = 0$. Mitjançant dos canvis de variable es pot veure que aquest problema té solució única en l'espai que volem. Definirem en primer lloc una nova variable $w = u + \alpha\, v$. Amb aquesta notació, podem expressar $v = (w - u)/\alpha$ i així el problema es

transforma en:

$$\begin{cases} \dfrac{w-u}{\alpha} - u = f \\ \dfrac{w(1)-u(1)}{\alpha} - u(1) = f(1) \\ w_{xx} - \dfrac{w-u}{\alpha} = g \\ -\varepsilon \left[w_x(1) + \dfrac{r}{\alpha}(w(1)-u(1)) \right] - \dfrac{w(1)-u(1)}{\alpha} = b \end{cases}$$

i w també verifica que $w(0) = 0$. Utilitzem ara la primera equació per a fer el nou canvi de variable $u = (w - \alpha\, f)/(1+\alpha)$ i expressar el problema en termes d'una única incògnita, w. Així, hem de resoldre:

$$\begin{cases} w_{xx} - \dfrac{w}{1+\alpha} = g + \dfrac{f}{1+\alpha} \\ w(0) = 0 \\ -\varepsilon w_x(1) - \dfrac{1+\varepsilon\, r}{1+\alpha} w(1) = b + \dfrac{1+\varepsilon\, r}{1+\alpha} f(1) \end{cases}$$

Com que $g + \dfrac{f}{1+\alpha} \in L^2(0,1)$, existeix una única $w \in H^2(0,1)$ solució del problema anterior. Si recuperem les nostres incògnites inicials:

$$V = \begin{pmatrix} u, & u(1) \\ v, & v(1) \end{pmatrix} = \frac{1}{1+\alpha} \begin{pmatrix} w - \alpha f, & w(1) - \alpha f(1) \\ w + f, & w(1) + f(1) \end{pmatrix}$$

tenim que, efectivament, V està en $\mathcal{D}(A_\alpha(\varepsilon))$. Com que hem vist que el rang de l'operador $A_\alpha(\varepsilon) - Id$ és complet, el teorema de Kato 4.18 ens garanteix que l'espectre de $A_\alpha(\varepsilon)$ està contingut en $\Theta(A_\alpha(\varepsilon))$. □

Observació 4.20. *Observem que quan α s'acosta a 0, l'angle del sector que conté l'espectre de $A_\alpha(\varepsilon)$ seria cada cop més gran, arribant a ser tot el semiplà negatiu en el cas límit $\alpha = 0$. Això és coherent amb els resultats obtinguts en el capítol 2. L'ús del rang numèric ens ha donat, amb uns càlculs senzills en aquest cas, el mateix tipus d'informació que es podria derivar del fet que l'operador sigui sectorial.*

Tot això ho hem fet per a tenir localitzat l'espectre de $A_\alpha(\varepsilon)$, α, $\varepsilon > 0$. Però el nostre objectiu continua essent el de demostrar que $A_\alpha(\varepsilon)$ té un subconjunt finit de valors propis dominants i que aquests són $\lambda_0^+(\varepsilon)$ i $\lambda_0^-(\varepsilon)$. El resultat

principal que usarem per a demostrar-ho és el teorema 3.18 (al capítol 3), un teorema de pertorbació de Kato, i el raonament que hem fet partint d'aquest teorema en l'apartat 3.2.2 , també seguint [22]. Essencialment, aquest teorema ens permetia parlar de continuïtat respecte un cert paràmetre de conjunts finits de valors propis si l'operador pertorbat convergia en sentit generalitzat al no pertorbat. Per tant, el primer que veurem és aquesta convergència en sentit generalitzat dels operadors.

Teorema 4.21. *$A_\alpha(\varepsilon)$ convergeix en sentit generalitzat a $A_\alpha(0)$ quan $\varepsilon \to 0$, per $\alpha > 0$ fixat.*

Demostració. És, essencialment, una demostració tècnica que consisteix en acotar la norma d'un operador diferència per una quantitat que tendirà a zero quan $\varepsilon \to 0$ (recordem la definició 3.13 de convergència generalitzada, al capítol 3, i les propietats equivalents que ens donava el lema 3.14).

El primer problema és, però, que $A_\alpha(0)$ no és un operador invertible. Així, no podrem veure la convergència en sentit generalitzat de $A_\alpha(\varepsilon)$ a $A_\alpha(0)$ directament; però que aquesta convergència és certa és equivalent a comprovar la convergència en sentit generalitzat d'uns operadors *traslladats*, que sí seran invertibles si els traslladem convenientment. En el nostre cas, comprovarem que:

$$(A_\alpha(\varepsilon) - Id) \underset{\varepsilon \to 0}{\longrightarrow} (A_\alpha(0) - Id)$$

en sentit generalitzat veient que

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \left\| (A_\alpha(\varepsilon) - Id)^{-1} - (A_\alpha(0) - Id)^{-1} \right\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H},\mathcal{H})} = 0 \tag{4.16}$$

Com a incís direm que en [22] es pot veure com efectivament, les pertorbacions acotades dels operadors mantenen la convergència en sentit generalitzat d'aquests. Intuïtivament, aquesta equivalència és clara, ja que en restar-los la identitat l'únic que hem fet és traslladar les gràfiques, que és el que ens donava la mesura de la convergència generalitzada.

Vegem la convergència generalitzada dels operadors traslladats. El primer que cal veure és que els inversos de $A_\alpha(\varepsilon) - Id$ i $A_\alpha(0) - Id$ existeixen i són operadors continus, ja que 1 no pertany ni a $\sigma(A_\alpha(\varepsilon))$ ni a $\sigma(A_\alpha(0))$. De fet, acabem de veure la manera d'invertir-los, però ho tornarem a escriure per clarificar les notacions. Per $\begin{pmatrix} (f, f(1)) \\ (g, b) \end{pmatrix} \in \mathcal{H}$ i $\varepsilon > 0$ fixats, definim l'operador:

$$(A_\alpha(\varepsilon) - Id)^{-1} \begin{pmatrix} (f, f(1)) \\ (g, b) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (u, u(1)) \\ (v, v(1)) \end{pmatrix}$$

amb

$$\begin{pmatrix} (u, u(1)) \\ (v, v(1)) \end{pmatrix} = \frac{1}{1+\alpha} \begin{pmatrix} (w^\varepsilon - \alpha f, w^\varepsilon(1) - \alpha f(1)) \\ (w^\varepsilon + f, w^\varepsilon(1) + f(1)) \end{pmatrix}$$

on w^ε és la solució del problema:

$$\begin{cases} {w^\varepsilon}_{xx} - \dfrac{w^\varepsilon}{1+\alpha} = g + \dfrac{f}{1+\alpha} \\ \\ w^\varepsilon(0) = 0 \\ \\ -\varepsilon\, {w^\varepsilon}_x(1) - \dfrac{1+\varepsilon\, r}{1+\alpha}\, w^\varepsilon(1) = b + \dfrac{1+\varepsilon\, r}{1+\alpha}\, f(1) \end{cases}$$

Aquest problema té solució única en $H^2(0,1)$, de manera que $(A_\alpha(\varepsilon) - Id)^{-1}$ està ben definit com a operador de $\mathcal{H}$ en $\mathcal{D}(A_\alpha)$; i es pot comprovar que és l'invers de $A_\alpha(\varepsilon) - Id$.

Anàlogament, definim l'invers de $A_\alpha(0) - Id$ com:

$$(A_\alpha(0) - Id)^{-1} \begin{pmatrix} (f, f(1)) \\ (g, b) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (u, u(1)) \\ (v, v(1)) \end{pmatrix} = \frac{1}{1+\alpha} \begin{pmatrix} (w^0 - \alpha f, (w^0 - \alpha f)(1)) \\ (w^0 + f, (w^0 + f)(1)) \end{pmatrix}$$

on w^0 és la solució del problema:

$$\begin{cases} {w^0}_{xx} - \dfrac{w^0}{1+\alpha} = g + \dfrac{f}{1+\alpha} \\ \\ w^0(0) = 0 \\ \\ -\dfrac{1}{1+\alpha}\, w^0(1) = b + \dfrac{1}{1+\alpha}\, f(1) \end{cases} \tag{4.17}$$

També té solució única en $H^2(0,1)$, de manera que l'operador està ben definit i és, efectivament, l'invers.

Vegem ara que podem acotar la norma de l'operador diferència tal i com hem indicat. Per acotar la norma de l'operador diferència dels inversos, vegem primer com actua aquest operador sobre un element de $\mathcal{H}$ qualsevol. És directe veure que:

$$\left[(A_\alpha(\varepsilon) - Id)^{-1} - (A_\alpha(0) - Id)^{-1}\right] \begin{pmatrix} (f, f(1)) \\ (g, b) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left(\dfrac{w^\varepsilon - w^0}{1+\alpha}, \dfrac{(w^\varepsilon - w^0)(1)}{1+\alpha} \right) \\ \left(\dfrac{w^\varepsilon - w^0}{1+\alpha}, \dfrac{(w^\varepsilon - w^0)(1)}{1+\alpha} \right) \end{pmatrix}$$

Si diem $w := w^\varepsilon - w^0$, el que tenim és que w és la solució de:

$$\begin{cases} w_{xx} - \dfrac{1}{1+\alpha}\, w = 0 \\ \\ w(0) = 0 \\ \\ -\varepsilon w_x(1) - \dfrac{1+\varepsilon\, r}{1+\alpha}\, w(1) = \varepsilon w_x^0(1) + \dfrac{\varepsilon\, r}{1+\alpha}(w^0(1) + f(1)) \end{cases} \tag{4.18}$$

on w^0 és la solució de l'equació (4.17). Es pot comprovar que (4.18) té solució única en $H^2(0,1)$. Trobar la norma $\|\cdot\|_{\mathcal{H}}$ de l'operador diferència dels inversos és trobar una constant $C > 0$ tal que:

$$\frac{1}{(1+\alpha)^2}\left(\int_0^1 |w_x|^2 + \int_0^1 |w|^2 + |w(1)|^2\right) \leq C\left(\int_0^1 |f_x|^2 + \int_0^1 |g|^2 + |b|^2\right)$$

De fet, el que veurem és que, per ε és prou petit, aquesta constant està acotada per una altra $C(\varepsilon)$ que depèn de ε i que $lim_{\varepsilon\to 0} C(\varepsilon) = 0$. Per tant $lim_{\varepsilon\to 0} C = 0$, amb la qual cosa haurem comprovat la convergència generalitzada dels operadors corresponents. Aquesta demostració, molt tècnica, la resumim en els dos passos principals:

a) Veurem que si ε és prou petit, tenim

$$\frac{1}{(1+\alpha)^2}\left(\int_0^1 |w_x|^2 + \int_0^1 |w|^2 + |w(1)|^2\right) \leq \frac{\varepsilon\,(1+\alpha)}{1+\varepsilon\, r}|K(w^0)|^2$$

on $K(w^0)$ serà una constant que dependrà de w^0. Observem que com que w^0 és solució de (4.17), on no intervé ε, $K(w^0)$ és una constant que no dependrà de ε.

b) Veurem que existeix una constant K tal que

$$|K(w^0)|^2 \leq K\left\|\begin{pmatrix}(f, f(1))\\(g, b)\end{pmatrix}\right\|^2_{\mathcal{H}}$$

Per tant, haurem vist que $C \leq C(\varepsilon) = \dfrac{\varepsilon\,(1+\alpha)}{1+\varepsilon\, r}K$. Com que K no depèn de ε és evident que $C(\varepsilon) \to 0$ quan $\varepsilon \to 0$, de manera que

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \left\|\left[(A_\alpha(\varepsilon) - Id)^{-1} - (A_\alpha(0) - Id)^{-1}\right]\right\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H},\mathcal{H})} = 0$$

Vegem la primera part:

(a) Multiplicant l'equació del problema (4.18) per $\overline{w}$ i integrant per parts, tenim:

$$\int_0^1 |w_x|^2 + \frac{1}{1+\alpha}\int_0^1 |w|^2 = w_x(1)\,\overline{w(1)} \tag{4.19}$$

Però $w_x(1)$ intervé en les condicions de contorn del problema (4.18), d'on:

$$w_x(1)\,\overline{w(1)} = \left[-w_x^0(1) - \frac{r}{1+\alpha}w^0(1) - \frac{r}{1+\alpha}f(1) - \frac{1+\varepsilon\, r}{\varepsilon\,(1+\alpha)}w(1)\right]\overline{w(1)}$$

A partir d'ara,

$$K(w^0) := w_x^0(1) + \frac{r}{1+\alpha} w^0(1) + \frac{r}{1+\alpha} f(1)$$

Amb aquesta notació, (4.19) equival a:

$$\int_0^1 |w_x|^2 + \frac{1}{1+\alpha} \int_0^1 |w|^2 + \frac{1+\varepsilon\, r}{\varepsilon\,(1+\alpha)} |w(1)|^2 \leq |K(w^0)||w(1)| \tag{4.20}$$

Mirem-nos (4.20) amb deteniment. Si la suma de termes positius és menor o igual que una quantitat, també serà veritat per cadascun dels termes. En particular:

$$\frac{1+\varepsilon\, r}{\varepsilon\,(1+\alpha)} |w(1)|^2 \leq |K(w^0)||w(1)|$$

d'on:

$$|w(1)| \leq \frac{\varepsilon\,(1+\alpha)}{1+\varepsilon\, r} |K(w^0)|$$

D'aquesta manera, l'expressió (4.20) implica:

$$\int_0^1 |w_x|^2 + \frac{1}{1+\alpha} \int_0^1 |w|^2 + \frac{1+\varepsilon\, r}{\varepsilon\,(1+\alpha)} |w(1)|^2 \leq \frac{\varepsilon\,(1+\alpha)}{1+\varepsilon\, r} |K(w^0)|^2 \tag{4.21}$$

Observem, però, que:

$$\frac{1}{(1+\alpha)^2} \left(\int_0^1 |w_x|^2 + \int_0^1 |w|^2 + \frac{1}{\varepsilon} |w(1)|^2 \right) \leq$$

$$\int_0^1 |w_x|^2 + \frac{1}{1+\alpha} \int_0^1 |w|^2 + \frac{1+\varepsilon\, r}{\varepsilon\,(1+\alpha)} |w(1)|^2 \tag{4.22}$$

I que, si $\varepsilon < 1$:

$$\frac{1}{(1+\alpha)^2} \left(\int_0^1 |w_x|^2 + \int_0^1 |w|^2 + |w(1)|^2 \right) \leq$$

$$\frac{1}{(1+\alpha)^2} \left(\int_0^1 |w_x|^2 + \int_0^1 |w|^2 + \frac{1}{\varepsilon} |w(1)|^2 \right)$$

I, si ho ajuntem amb (4.21), tenim el que volíem:

$$\frac{1}{(1+\alpha)^2} \left(\int_0^1 |w_x|^2 + \int_0^1 |w|^2 + |w(1)|^2 \right) \leq \frac{\varepsilon\,(1+\alpha)}{1+\varepsilon\, r} |K(w^0)|^2 \quad si\ \varepsilon < 1$$

Vegem la segona part:

(b) Per acotar $K(w^0) = w_x^0(1) + \frac{r}{1+\alpha} w^0(1) + \frac{r}{1+\alpha} f(1)$ per termes de $\left\| \begin{pmatrix} f, & f(1) \\ g, & b \end{pmatrix} \right\|_{\mathcal{H}}$ haurem de fer diverses acotacions.

1. És evident que $|f(1)|$ el podem acotar convenientment. De fet, com que $f(0) = 0$, és immediata la desigualtat:

$$|f(1)| \leq \left(\int_0^1 |f_x|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \tag{4.23}$$

2. Mirem-nos $|w_x^0(1)|$. La idea és usar que per a qualsevol funció $f, f' \in L^2(0,1)$ es té que $|f(x_0)|^2 \leq 2\|f\|_{L^2}^2 + \|f'\|_{L^2}^2$, $\forall\, x_0 \in (0,1)$. Com que $w^0 \in H^2(0,1)$, tenim:

$$|w_x^0(1)|^2 \leq 2\|w_x^0\|_{L^2(0,1)}^2 + \|w_{xx}^0\|_{L^2(0,1)}^2 \tag{4.24}$$

Per a treballar $\|w_x^0\|_{L^2(0,1)}$, usarem un problema auxiliar. Sigui w^{aux} la solució de:

$$\begin{cases} {w^{aux}}_{xx} - \dfrac{w^{aux}}{1+\alpha} = 0 \\ \\ w^{aux}(0) = 0 \\ \\ w^{aux}(1) = -(1+\alpha)\, b - f(1) \end{cases}$$

De fet, podem trobar w^{aux} explícitament.

$$w^{aux}(x) = -\frac{(1+\alpha)\, b + f(1)}{\sinh \dfrac{1}{\sqrt{1+\alpha}}} \sinh \frac{x}{\sqrt{1+\alpha}}$$

I treballem ara amb la nova funció $w^1 := w^0 - w^{aux}$, que és solució del mateix problema que w^0, el (4.17), però amb condicions de contorn Dirichlet homogènies:

$$\begin{cases} {w^1}_{xx} - \dfrac{w^1}{1+\alpha} = g + \dfrac{f}{1+\alpha} \\ \\ w^1(0) = 0 \\ \\ w^1(1) = 0 \end{cases}$$

En aquesta nova equació podrem fer unes acotacions que ens aniran bé per aconseguir el nostre objectiu. Multiplicant l'equació per $-\overline{w}^1$ i integrant per parts, obtenim la següent desigualtat per a la nova funció:

$$\int_0^1 |w_x^1|^2 + \frac{1}{1+\alpha} \int_0^1 |w^1|^2 \leq \left\| g + \frac{f}{1+\alpha} \right\|_{L^2(0,1)} \left\| w^1 \right\|_{L^2(0,1)}$$

Usant la desigualtat de Cauchy que ja havíem utilitzat en anteriors acotacions:

$$a\,b \leq \frac{1}{2c^2}\,a^2 + \frac{c^2}{2}\,b^2\ ,\ \forall\, a,\, b,\, c \in \mathbb{R}$$

(l'aplicarem sovint, triant la c que més ens convingui cada vegada) tenim en aquest cas:

$$\left\| g + \frac{f}{1+\alpha} \right\|_{L^2} \left\| w^1 \right\|_{L^2} \leq \frac{1}{2c^2} \left\| g + \frac{f}{1+\alpha} \right\|_{L^2}^2 + \frac{c^2}{2} \left\| w^1 \right\|_{L^2}^2$$

Prenent $c = \sqrt{\dfrac{2}{1+\alpha}}$ aconseguim que se'ns anul.lin els termes amb $\|w^1\|_{L^2}^2$, i ajuntant-ho amb la desigualtat (2) podem arribar a:

$$\int_0^1 |w_x^1|^2 \leq \frac{1+\alpha}{2} \int_0^1 |g|^2 + \frac{C}{2\,(1+\alpha)} \int_0^1 |f_x|^2 \tag{4.25}$$

on $C > 0$ és la constant del lema 2.3, del capítol 2. D'altra banda, està clar que podem acotar $\int_0^1 |w_x^{aux}|^2$ en termes que ens interessen, ja que la tenim explícitament:

$$\int_0^1 |w_x^{aux}|^2 \leq k_1 |b|^2 \,+\, k_2 \int_0^1 |f_x|^2 \tag{4.26}$$

on $k_1, k_2 > 0$ són constants que no entrarem a determinar. Usant les desigualtats (4.25) i (4.26) i recordant que $w^0 = w^1 + w^{aux}$, podrem acotar $\int_0^1 |w_x^0|^2$:

$$\int_0^1 |w_x^0|^2 \leq 2 \int_0^1 |w_x^1|^2 + 2 \int_0^1 |w^{aux}|^2 \leq$$

$$(1+\alpha) \int_0^1 |g|^2 + \left(\frac{C}{1+\alpha} + 2k_2 \right) \int_0^1 |f_x|^2 + 2k_1\,|b|^2$$

Podem resumir aquesta desigualtat prenent k_3 com el màxim d'aquestes constants, de manera que:

$$\int_0^1 |w_x^0|^2 \leq k_3 \left(\int_0^1 |g|^2 + \int_0^1 |f_x|^2 + |b|^2 \right) \tag{4.27}$$

3. Ens quedaria acotar $\int_0^1 |w_{xx}^0|^2$, cosa que resulta directa usant el problema (4.17):

$$\int_0^1 |w_{xx}^0|^2 \leq \frac{C}{1+\alpha} \int_0^1 |w_x^0|^2 \,+\, \int_0^1 |g|^2 \,+\, \frac{C}{1+\alpha} \int_0^1 |f_x|^2 \tag{4.28}$$

on $C > 0$ torna a ser la constant del lema 2.3.

4. Amb el que hem vist, podem acotar $|w_x^0(1)|$. Hem vist que

$$|w_x^0(1)|^2 \leq 2\int_0^1 |w_x^0|^2 + \int_0^1 |w_{xx}^0|^2$$

Si usem les acotacions (4.27) i (4.28) i escollint k_4 com el màxim de totes les constants que intervenen podem escriure que:

$$|w_x^0(1)|^2 \leq k_4 \left(\int_0^1 |g|^2 + \int_0^1 |f_x|^2 + |b|^2\right) \tag{4.29}$$

5. Mirem-nos $|w^0(1)|$. De les condicions de contorn del problema (4.17) veiem que:

$$|w^0(1)| \leq (1+\alpha)\,|b| + |f(1)| \tag{4.30}$$

Tot el que hem vist era per acotar $|K(w^0)|$. Però,

$$|K(w^0)| \leq |w_x^0(1)| + \frac{r}{1+\alpha}|w^0(1)| + \frac{r}{1+\alpha}|f(1)|$$

que són termes que ja hem treballat. Per les desigualtats (4.23), (4.29) i (4.30) podem afirmar que existeix una constant $K > 0$ tal que:

$$|K(w^0)|^2 \leq K\left(\int_0^1 |g|^2 + \int_0^1 |f_x|^2 + |b|^2\right) = K\left\|\begin{pmatrix}(f, f(1))\\(g,b)\end{pmatrix}\right\|_{\mathcal{H}}^2$$

que és el que volíem veure.

Podem concloure, doncs, que $A_\alpha(\varepsilon)$ convergeix a $A_\alpha(0)$ en sentit generalitzat quan $\varepsilon \to 0$ en la norma $\|\cdot\|_{\mathcal{H}}$, per $\alpha > 0$ fixat. □

Observació 4.22. *Hem demostrat el teorema anterior amb una norma independent de ε, però és igualment cert que:*

$$\left\|(A_\alpha(\varepsilon) - Id)^{-1} - (A_\alpha(0) - Id)^{-1}\right\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H},\mathcal{H};\,\varepsilon)} \underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} 0$$

on la norma és ara $\|\cdot\|_\varepsilon$. Efectivament, ja que durant la demostració hem vist en (4.22) que

$$\frac{1}{(1+\alpha)^2}\left(\int_0^1 |w_x|^2 + \int_0^1 |w|^2 + \frac{1}{\varepsilon}\,|w(1)|^2\right) \leq$$
$$\leq \int_0^1 |w_x|^2 + \frac{1}{1+\alpha}\int_0^1 |w|^2 + \frac{1+\varepsilon\, r}{\varepsilon\,(1+\alpha)}|w(1)|^2$$

I també és cert que com que

$$\left\|\begin{pmatrix}(f, f(1))\\(g,b)\end{pmatrix}\right\|_{\mathcal{H}} \leq \left\|\begin{pmatrix}(f, f(1))\\(g,b)\end{pmatrix}\right\|_{\varepsilon}$$

si $\varepsilon < 1$*, de l'última de les acotacions es desprén també que*

$$|K(w^0)|^2 \leq K \left(\int_0^1 |g|^2 + \int_0^1 |f_x|^2 + |b|^2 \right) \leq K \left\| \begin{pmatrix} (f, f(1)) \\ (g, b) \end{pmatrix} \right\|_\varepsilon^2$$

si $\varepsilon < 1$*. Per tant, de manera anàloga a la demostració anterior tenim que*

$$\frac{1}{(1+\alpha)^2} \left(\int_0^1 |w_x|^2 + \int_0^1 |w|^2 + \frac{1}{\varepsilon} |w(1)|^2 \right) \leq \frac{\varepsilon(1+\alpha)}{1+\varepsilon r} K \left\| \begin{pmatrix} (f, f(1)) \\ (g, b) \end{pmatrix} \right\|_\varepsilon^2$$

si $\varepsilon < 1$*, amb* K *la mateixa d'abans. Així doncs,*

$$\left\| (A_\alpha(\varepsilon) - Id)^{-1} - (A_\alpha(0) - Id)^{-1} \right\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H}, \mathcal{H}; \varepsilon)} \underset{\varepsilon \to 0}{\longrightarrow} 0$$

de manera que tenim la convergència generalitzada també en la família de normes $\| \cdot \|_\varepsilon$*. El que cal remarcar d'aquest resultat és que la convergència generalitzada la tenim en una norma que canvia amb el paràmetre respecte el qual fem el límit. De fet, si pensem que aquest tipus de convergència mesura la distància entre les gràfiques dels operadors, el que hem obtingut és que la distància és petita amb una distància cada cop més gran. Per tant, les gràfiques dels operadors no només són properes sinó que ho són quan les comparem amb una distància d'ordre* $1/\sqrt{\varepsilon}$*.*

Teorema 4.23 (Existència d'un conjunt finit de valors propis dominants.). *Existeix un cert* $\varepsilon_0 > 0$ *per al qual l'operador* $(A_\alpha(\varepsilon), \mathcal{D}(A_\alpha))$*, amb* $\alpha > 0$ *fixat i* $\varepsilon < \varepsilon_0$*, admet* $\left\{ \lambda_0^+(\varepsilon), \lambda_0^-(\varepsilon) \right\}$ *(pertorbacions del valor propi doble* $\lambda_0(0) = 0$*) com a subconjunt finit de valors propis dominants.*

Demostració. Degut a la convergència generalitzada dels operadors, sabem que si tanquem un nombre finit de valors propis de $A_\alpha(0)$ en una corba Γ, hi haurà un ε prou petit a partir del qual tots els $A_\alpha(\varepsilon)$ tindran allà dins el mateix nombre de valors propis (amb multiplicitat) que $A_\alpha(0)$ (veure el teorema de semicontinuïtat 3.18 i l'apartat 3.2.2). Així només caldrà escollir la corba adequada per a concloure el que volem.

Tenim $\alpha > 0$ fixat. Sigui R_α un rectangle de centre $(0, 0)$ amb les propietats següents. L'amplada ha de ser prou petita com perquè l'únic valor propi de $A_\alpha(0)$ que contingui aquest rectangle R_α sigui $\lambda_0(0) = 0$ (que, recordem, té multiplicitat algebraica igual a 2), i també prou petita com perquè $-1/\alpha \notin R_\alpha$. Si repassem com són els valors propis de $A_\alpha(0)$, veurem que això queda garantit sempre que triem una amplada menor que $2\, min\left\{1/\alpha, \alpha\, \pi^2/2\right\}$. Un cop tenim l'amplada, ens mirem la franja vertical entorn l'origen que li correspon, F_α: en aquesta franja, el sector parabòlic S_α té una alçada màxima. Doncs considerarem un rectangle R_α d'alçada superior a aquesta (veure la figura 4.8).

Un rectangle R_α qualsevol, d'aquestes característiques, ens permet triar Γ_α com la corba tancada que en defineix la vora. Aquesta serà la corba vàlida.

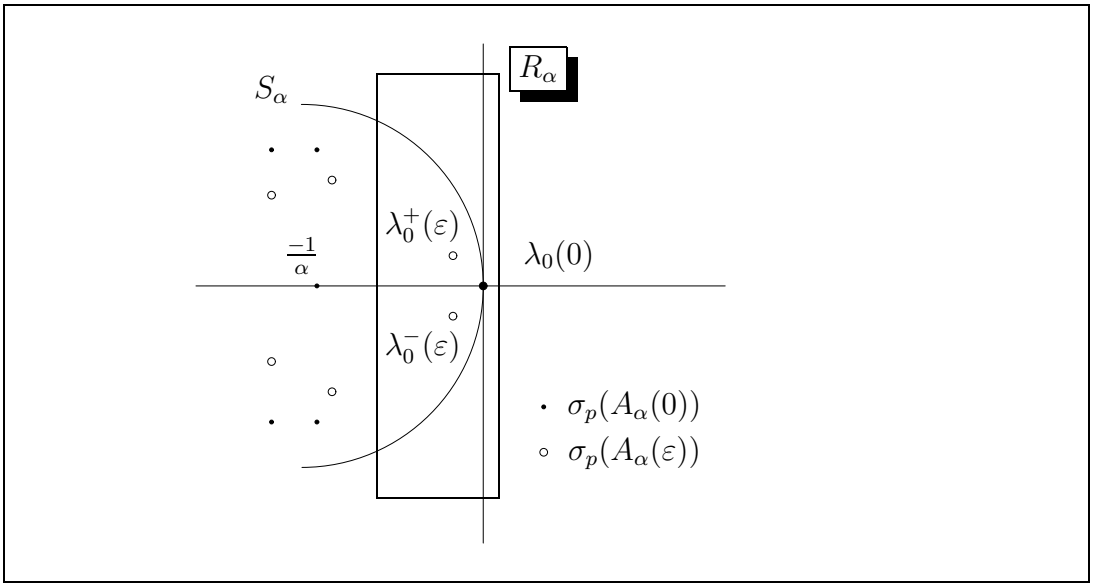


Figura 4.8: Esquema per a la demostració del teorema

El teorema 3.18 de semicontinuïtat de Kato (al capítol 3) ens garanteix que existeix un $\varepsilon_0 > 0$, que depèn de Γ_α i de $A_\alpha(0)$, tal que si $\varepsilon < \varepsilon_0$ llavors $A_\alpha(\varepsilon)$ té exactament 2 valors propis allà dins, ja que dins Γ_α l'únic valor propi de $A_\alpha(0)$ és $\lambda_0(0) = 0$, de multiplicitat 2. Observem que el teorema de la funció implícita ens havia permès trobar-los: $\lambda_0^+(\varepsilon)$ i $\lambda_0^-(\varepsilon)$, si ε_0 és prou petit com per a poder treballar en l'entorn que ens dóna el teorema de la funció implícita (si no és així, escollim el mínim i ja està).

Podem dir també que en la franja vertical F_α no hi ha més espectre de $A_\alpha(\varepsilon)$, ja que tota la part de F_α que no està continguda en R_α està fora del sector S_α, on viu aquest espectre (recordem que hem escollit R_α amb prou alçada com perquè això sigui així). Per tant, garantim que no tenim elements de l'espectre de $A_\alpha(\varepsilon)$ amb part real igual o superior a la dels valors propis de dins R_α. I amb l'espectre essencial tampoc tenim problemes, perquè hem triat Γ_α per tal que $-1/\alpha$ n'estigui a l'esquerra.

En resum, $Re\,(\lambda_0^+(\varepsilon)) = Re\,(\lambda_0^-(\varepsilon)) \geq Re\,\lambda$ per a tot $\lambda \in \sigma(A_\alpha(\varepsilon))$ si $\varepsilon < \varepsilon_0$. És a dir, si $\varepsilon < \varepsilon_0$, l'operador $A_\alpha(\varepsilon)$ té $\{\lambda_0^+(\varepsilon), \lambda_0^-(\varepsilon)\}$ com a subconjunt finit de valors propis dominants. Dit d'una altra manera, si ε és prou petit, les pertorbacions del valor propi doble dominant de $A_\alpha(0)$ són també valors propis dominants de l'operador pertorbat $A_\alpha(\varepsilon)$, de manera que pertorbacions petites de l'operador $A_\alpha(0)$ mantenen el caràcter dominant d'aquests conjunts de valors propis. □

Observació 4.24. *Observem que la corba Γ_α que hem triat per a fer aquest argument no ens depèn de ε i, per tant, serà universal per a tots els $A_\alpha(\varepsilon)$*

si $\varepsilon < \varepsilon_0$*. Però aquesta corba sí depèn de l'*$\alpha > 0$ *fixat i, per tant, també en depèn el* ε_0 *ja que, recordem el teorema 3.18,* ε_0 *ens depèn de la corba que escollim.*

Observació 4.25. *Si la corba* Γ_α *que escollim admet més valors propis de* $A_\alpha(0)$ *en el seu interior, a part de* $\lambda_0(0) = 0$*, el mateix argument ens permet concloure que també hi haurà un subconjunt finit de valors propis dominants en aquest cas, que potser no seran* $\lambda_0^+(\varepsilon)$ *i* $\lambda_0^-(\varepsilon)$*.*

El que intuïtivament passarà és que no caldrà un ε_0 *tan petit com en el cas anterior per a tenir valors propis dominants que no siguin les pertorbacions de* $\lambda_0(0) = 0$*. És a dir, a partir d'un cert* ε_0' *ja podrem garantir l'existència d'un subconjunt finit de valors propis dominants i si, a més, ens quedem amb un* $\varepsilon < \varepsilon_0$*, podrem garantir que els dominants de l'operador pertorbat són pertorbacions del valor propi dominant doble del cas no pertorbat.*

Teorema 4.26 (Equació límit). *El comportament asimptòtic (en el sentit del teorema 1.2) de les solucions del model en derivades parcials (4.1) ve donat, si* ε *és suficientment petit, per l'equació diferencial ordinària lineal d'ordre 2 que, en variables dimensionals, és:*

$$m\, w''(t) + k_1\, w'(t) + k_0\, w(t) = 0 \tag{4.31}$$

on

$$k_1 = \left(\frac{E_1}{L} + q\right) - \frac{1}{3}\left(\frac{E_1}{L} + q\right)\left(\frac{\rho L}{m}\right) + \left(\frac{4\,E_1}{45\,L} + \frac{q}{15}\right)\left(\frac{\rho L}{m}\right)^2 + \dots$$

$$k_0 = \frac{E}{L}\left[1 - \frac{1}{3}\left(\frac{\rho L}{m}\right) + \frac{4}{45}\left(\frac{\rho L}{m}\right)^2 + \left(\frac{q^2}{45\,E\rho} - \frac{16}{945}\right)\left(\frac{\rho L}{m}\right)^3 + \dots\right]$$

on ara $w = u(L,t)$ *i on els paràmetres de l'equació són els paràmetres dimensionals del sistema molla-massa.*

Demostració. Hem vist en el teorema anterior que si ε és prou petit, es pot prendre com a valors propis dominants de $A_\alpha(\varepsilon)$ a $\left\{\lambda_0^+(\varepsilon), \lambda_0^-(\varepsilon)\right\}$, per als quals hem donat una aproximació en l'apartat 4.2.1 en termes de ε:

$$\lambda_0^+(\varepsilon) \simeq i\sqrt{\varepsilon} - \frac{\alpha + r}{2}\,\varepsilon - i\,\frac{4 + 3(\alpha+r)^2}{24}\,(\sqrt{\varepsilon})^3 + \frac{\alpha+r}{6}\,\varepsilon^2 +$$

$$+\, i\,\frac{176 + 360(\alpha+r)^2 - 45(\alpha+r)^4}{5760}\,(\sqrt{\varepsilon})^5 - \left(\frac{2\alpha}{45} + \frac{r}{30}\right)\varepsilon^3$$

$$\lambda_0^-(i\sqrt{\varepsilon}) = \overline{\lambda_0^+(\varepsilon)}$$

Per tant, podem donar una aproximació de l'equació diferencial ordinària que generen els dos valors propis anteriors, que resulta ser l'equació:

$$w''(t) + \tilde{k}_1\, w'(t) + \tilde{k}_0\, w(t) = 0 \tag{4.32}$$

on

$$\tilde{k}_1 = (\alpha + r)\,\varepsilon - \frac{\alpha + r}{3}\,\varepsilon^2 + \left(\frac{4\alpha}{45} + \frac{r}{15}\right)\varepsilon^3 + \dots$$

$$\tilde{k}_0 = \varepsilon - \frac{1}{3}\,\varepsilon^2 + \left(\frac{r^2}{45} - \frac{16}{945}\right)\varepsilon^3 + \dots\ .$$

Aquesta equació diferencial ordinària és el límit quan $t \to \infty$ del model en derivades parcials (4.1) en el sentit que hem introduït en el capítol 1, si ε és prou petit com perquè $\{\lambda_0^+(\varepsilon), \lambda_0^-(\varepsilon)\}$ siguin valors propis dominants. Com que el subespai de valors propis dominants té dimensió 2, l'ordre de l'equació diferencial límit també és 2. I, òbviament, depèn del paràmetre pertorbador ε.

L'equació (4.32) no té dimensió física, tal i com havíem buscat en l'apartat 1.1.2 del capítol 1. Desfent els canvis de variable, funció i paràmetres introduïts en aquest apartat, podem recuperar la versió dimensional de l'equació diferencial ordinària (4.32), que resulta ser l'equació (4.31).

Per interpretar les solucions de l'equació diferencial ordinària (4.31), només cal denotar per $v_r(x)$ i $v_i(x)$ la part real i la part imaginària de les funcions pròpies associades a $\{\lambda_0^+(\varepsilon), \lambda_0^-(\varepsilon)\}$ en el problema en derivades parcials. Amb aquesta notació, el teorema ens diu que per temps grans (i masses prou grans) les solucions $u(x,t)$ del model en derivades parcials (concretament en la seva versió dimensional, introduïda en el capítol 1) es poden aproximar per:

$$u(x,t) \simeq A(t)v_r(x) + B(t)v_i(x),$$

on $A(t)$ i $B(t)$ són les solucions de (4.31). És per aquest motiu que la solució $w(t) \equiv A(t)v_r(L) + B(t)v_i(L)$ té sentit com a aproximació de $u(L,t)$. □

Escrita d'aquesta manera, podem comparar l'equació diferencial ordinària (4.31), límit del model en derivades parcials que havíem proposat, amb el model clàssic de l'equació de la molla amb fregament (recordem l'equació (1) de la introducció). Observarem que el coeficient d'amortiment de la molla clàssica ha quedat substituït aquí per una combinació dels dos paràmetres que determinen la viscositat del sistema: E_1 per a la viscositat interna i r per a la fricció de l'amortidor en l'extrem. Pel que fa al coeficient de recuperació de la molla en el model clàssic, ens trobem ara amb un terme més extens, però on intervenen tots els paràmetres del nostre sistema molla-massa, cosa absolutament coherent si pensem el coeficient de recuperació és, per a la molla clàssica, un coeficient indicatiu del sistema.

Capítol 5

Un model no lineal

5.1 Motivació i deducció del model no lineal.

Com en el cas lineal, considerarem el desplaçament $u(x,t)$ d'una molla viscoelàstica de longitud L i coeficients elàstic i viscós E i E_1, respectivament, que en l'extrem $x = L$ està unida a una massa rígida m sobre la qual actua una força dissipativa externa de coeficient viscós q. La diferència amb el sistema lineal està en les condicions que es consideren sobre l'extrem $x = 0$. Fins ara, aquest extrem l'havíem pensat fix, però té sentit imposar que aquest extrem es mogui amb una acceleració que depengui de la diferència de desplaçament i de velocitat de desplaçament entre els dos extrems de la molla. Mitjançant aquesta acceleració es pretén controlar el desplaçament de la molla, comprimint-la o estirant-la en funció del seu estat actual i d'un desplaçament objectiu (per exemple, una longitud fixada de la molla). Així, una acceleració positiva implicaria aplicar la força en el sentit positiu del moviment i, per tant, estaríem comprimint la molla; per contra, una acceleració negativa l'estiraria (veure la figura 5.1). Per no estirar o comprimir infinitament el sistema, l'acceleració que considerem estarà acotada.

Des d'un punt de vista físic, podem pensar que aquesta acceleració s'aplica en $x = 0$ a través d'un motor mòbil de massa gran, però fixada, que actua sobre aquest extrem de la molla. El fet que la massa del motor sigui gran ens permet menysprear la força exercida per la molla i l'amortidor sobre $x = 0$ en una primera aproximació, i per tant només es té en compte la força exercida pel motor.

Des d'un punt de vista del model, l'acció d'aquest motor es tradueix en una condició de contorn en $x = 0$ que ara analitzarem. Sigui $f(z_1, z_2)$, $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, una funció Lipschitz de constant de Lipschitz L_f, acotada per N_f i prou regular. Considerem una acceleració aplicada a la molla en $x = 0$ de la forma següent:

$$u_{tt}(0) = \kappa^* \, f_m(u(L,t) - u(0,t), u_t(L,t) - u_t(0,t)) \tag{5.1}$$

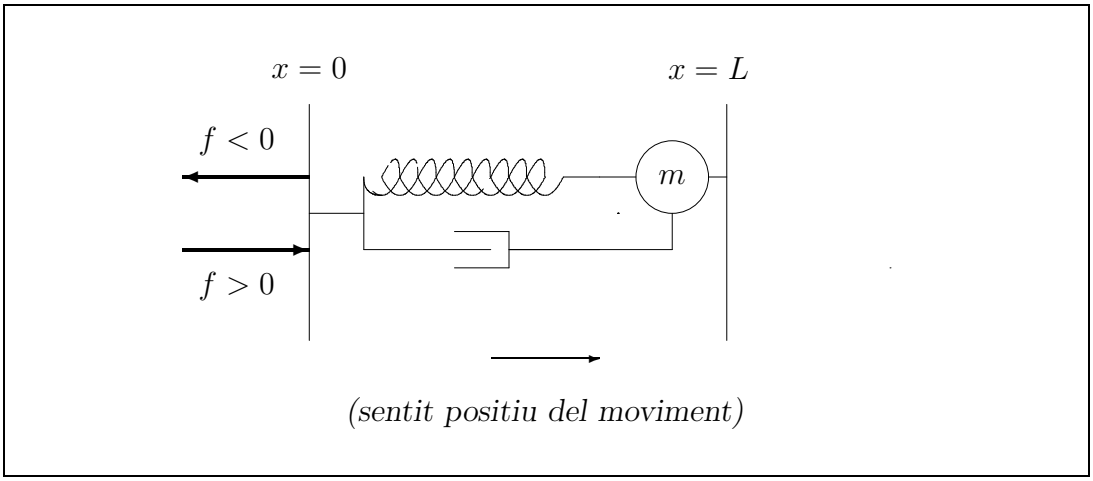


Figura 5.1: Model no lineal

on, per raons que es veuran més endavant i que estan relacionades amb el fet de poder prendre límits quan $\rho L/m \to 0$, s'agafarà de la forma:

$$f_m(z_1, z_2) := \frac{\rho\, L}{m}\, f\left(\frac{z_1}{L}, \frac{\sqrt{m}}{\sqrt{EL}}\, z_2\right)$$

i on $\kappa^* > 0$ és un paràmetre que introduïm per tal que les dimensions de (5.1) siguin consistents, ja que $f_m(u(L,t) - u(0,t), u_t(L,t) - u_t(0,t))$ no té dimensions físiques (i recordem que $\rho L/m$ tampoc). Així, les dimensions de κ^* són $\kappa^* = [L/t^2]$. Fixem-nos en el sentit físic de (5.1). Estem pensant en una acceleració aplicada sobre $x = 0$ que depèn de la diferència de desplaçament i de velocitat entre els dos extrems del sistema. Aquesta acceleració és petita quan la massa m és molt més gran que la massa del motor. D'altra banda, podem pensar aquesta acceleració com un control extern que apliquem al sistema a través de l'extrem $x = 0$, l'objectiu del qual serà forçar el sistema per tal que es desplaci de la manera que ens interessi.

Un exemple senzill el tenim en:

$$f_m\left((u(L,t) - u(0,t), u_t(L,t) - u_t(0,t))\right) = \frac{\rho L}{m}\, \tanh\left(\beta\left[u(L,t) - u(0,t)\right]\right)$$

on $\beta > 0$ constant. La condició de contorn en $x = 0$ per a una acceleració d'aquest tipus només depèn de la diferència de desplaçament entre $x = L$ i $x = 0$ i queda com:

$$u_{tt}(0,t) = \kappa^*\, \frac{\rho L}{m}\, \tanh\left(\beta\left[u(L,t) - u(0,t)\right]\right)$$

En aquest cas l'objectiu del control introduït en $x = 0$ en la forma de la tanh seria aconseguir una molla en equilibri $u(x,t) \equiv 0$ ó, el que és el mateix, una

molla de longitud L per a tot temps. I β, que és la pendent d'aquesta funció no lineal, ens marcaria la velocitat amb la qual retornem a aquest equilibri.

Però tornem a la formulació general del model. Si $u(x,t)$ és el desplaçament de la molla en el sistema de referència estàndard, havíem vist en el capítol 1 que:

$$\rho\, u_{tt}\,(x,t) - E\, u_{xx}\,(x,t) - E_1\, u_{xxt}\,(x,t) = 0, \quad x \in (0,L),\ t > 0 \tag{5.2}$$

i, de manera anàloga a la del capítol 1 es pot veure que:

$$m\, u_{tt}(L,t) + E\, u_x(L,t) + E_1\, u_{tx}(L,t) + q\ [u_t(L,t) - u_t(0,t)] = 0 \tag{5.3}$$

Observem que ha canviat lleugerament el terme de la dissipació externa (el que multiplica q) en la condició de contorn respecte el model lineal de la primera part de la memòria. Això és degut a que l'amortidor extern també estaria lligat a $x = 0$ i, per tant, es mouria amb aquest extrem. Ens interessarà, però, un sistema de referència respecte el qual l'extrem $x = 0$ no es mogui. Amb aquest objectiu, introduïm la següent funció:

$$z(x,t) = u(x,t) - u(0,t) \tag{5.4}$$

És a dir, $z(x,t)$ expressaria el desplaçament de la molla en un sistema de referència on $x = 0$ estaria fixat. Amb aquesta nova funció, la condició (5.1) es pot escriure com

$$u_{tt}(0,t) = \kappa^*\, f_m(z(L,t), z_t(L,t)) \tag{5.5}$$

Aplicant el canvi de sistema de referència (5.4) (i, per tant, (5.5)) a les equacions (5.2) i (5.3) obtenim les equacions del moviment en el nou sistema de referència, que, fent un abús en la notació, tornarem a denotar per $u(x,t)$. L'equació del moviment és:

$$\rho\, u_{tt}(x,t) - E\, u_{xx}(x,t) - E_1\, u_{xxt}(x,t) + \rho\, \kappa^*\, f_m(u(L,t), u_t(L,t)) = 0$$

i les condicions de contorn:

$$u(0,t) = 0$$

$$\text{i} \qquad [m u_{tt} + E u_x + E_1 u_{tx} + q\, u_t]\,(L,t) + m\, \kappa^* f_m(u(L,t), u_t(L,t)) = 0$$

Observem que la no linealitat que apareix en l'equació i en la condició en $x = L$ és la mateixa en els dos casos. En particular, en l'equació tenim una no linealitat no local que depèn només del punt en l'extrem $x = L$.

Tal i com hem fet en el capítol 1 per al model lineal, voldrem mirar-nos les equacions des d'un punt de vista adimensional. Els canvis en les variables, les funcions i els paràmetres són els mateixos que en el capítol 1 (per a la funció

donarem el mateix canvi que donàvem en el cas lineal: és a dir, $u \longleftrightarrow u/L$). Amb això, el model no lineal adimensional és:

$$(5.6)\quad \begin{cases} u_{tt}(x,t) - u_{xx}(x,t) - \alpha u_{txx}(x,t) + \kappa\,\varepsilon f\left(u(1,t), \frac{u_t(1,t)}{\sqrt{\varepsilon}}\right) = 0 \\ \\ u(0,t) = 0 \\ \\ u_{tt}(1,t) = -\varepsilon\left[u_x + \alpha u_{tx} + r u_t\right](1,t) - \kappa\,\varepsilon f\left(u(1,t), \frac{u_t(1,t)}{\sqrt{\varepsilon}}\right) \end{cases}$$

per $x \in (0,1),\ t > 0$ i on el nou paràmetre $\kappa > 0$, que pensarem fixat en tot el capítol, es defineix com:

$$\kappa = \frac{\rho\,\kappa^*\,L}{E}$$

Observació 5.1. *El model no lineal (5.6) té com a linealització ($f \equiv 0$) el model lineal estudiat en la primera part de la memòria. Per tant, podrem utilitzar tots els resultats anteriors en l'anàlisi del model obtingut.*

De nou, tenim una proposta diferent per a un sistema fins ara estudiat des del punt de vista de les equacions diferencials ordinàries. I el nostre objectiu serà veure també quan el model en derivades parcials no lineal (5.6) admet una equació diferencial ordinària no lineal com a límit en algun sentit que caldrà precisar. Veurem en l'apartat 5.3.4 que quan $\varepsilon \to 0$ l'equació límit, amb el temps convenientment re-escalat, és:

$$u'' + u + \kappa f(u, u') = 0 \tag{5.7}$$

Això voldrà dir que les solucions de (5.6) tendeixen a les solucions de (5.7) quan $\varepsilon \to 0$ i $t \to \infty$. És en aquest sentit que, tal i com s'apuntava al principi, aplicar la força en $x = 0$ es pot pensar com un control extern a través d'aquest extrem, l'objectiu del qual és obtenir un cert desplaçament del sistema. Això serà possible si aquest desplaçament objectiu és solució de l'equació diferencial ordinària no lineal (5.7) i, en aquest cas, la força que haurem d'aplicar en $x = 0$ serà la donada per f.

L'existència d'una equació límit i la demostració que es tracta de l'equació anterior són dues coses que veurem en l'apartat 5.3, essencialment utilitzant la teoria de varietats invariants atractores. Però primer de tot ens hem d'assegurar que (5.6) és un problema ben posat.

5.2 Existència i unicitat de solució de l'equació no lineal.

Per a veure l'existència i la unicitat de solució pel problema de valor inicial en el model no lineal, usarem els resultats clàssics d'existència i unicitat. Consi-

derem la següent equació d'evolució no lineal

$$\text{(5.8)} \qquad \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} - Tx = f(t,x), \qquad t > t_0 \\ \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

on T és un operador sectorial en un espai de Banach X amb $Re\,\sigma(T) < 0$. Sigui $\alpha \in [0,1)$, denotem per $(-T)^\alpha$ la potència fraccionària α de $-T$ i definim $X^\alpha = \mathcal{D}((-T)^\alpha)$ amb la norma $\|x\|_\alpha = \|(-T)^\alpha x\|_X$, que està definida per $\alpha \geq 0$ ja que T és sectorial en X. Suposem que la no linealitat està definida en $f : U \subset \mathbb{R} \times X^\alpha \to X$, per algun $0 \leq \alpha < 1$, on U és un obert de $\mathbb{R} \times X^\alpha$. Suposem que $f(t,x)$ és localment Hölder contínua en t i localment Lipschitz en $x \in U$. És a dir, per a cada $(t_1, x_1) \in U$ existeix un entorn $V \subset U$ del punt tal que $\forall\ (t,x) \in V$ i $\forall\ (s,y) \in V$ tenim

$$\|f(t,x) - f(s,y)\| \leq L\left(|t-s|^\theta + \|x-y\|_\alpha\right)$$

per certes $L > 0$, $\theta > 0$.

Teorema 5.2 (Pazy [27]). *Sota les hipòtesis anteriors, per a $(t_0, x_0) \in U$ qualsevol existeix un $\tau = \tau(t_0, x_0) > t_0$ tal que l'equació (5.8) té una única solució $x \in C\left([t_0, \tau); X\right) \cap C^1\left((t_0, \tau); X\right)$ definida en (t_0, τ) i amb condició inicial $x(t_0) = x_0$.*

En el nostre cas, l'equació no lineal (5.6) es pot escriure com l'equació d'evolució:

$$\text{(5.9)} \qquad \begin{cases} \dfrac{dV}{dt} - A_\alpha(\varepsilon)V = F_\varepsilon(V), \qquad t > 0 \\ \\ V(0) = V_0 \end{cases}$$

on $A_\alpha(\varepsilon)$ és l'operador lineal que ja havíem definit com:

$$A_\alpha(\varepsilon)V = \begin{pmatrix} (v, v(1)) \\ \left((u + \alpha\, v)_{xx}, -\varepsilon\,(u + \alpha\, v)_x(1) \;-\; \varepsilon\, r\, v(1)\right) \end{pmatrix}$$

on:

$$V \in \mathcal{D}(A_\alpha(\varepsilon)) = \left\{ \begin{pmatrix} (u, u(1)) \\ (v, v(1)) \end{pmatrix} \in X_1 \times X_1,\ (u + \alpha\, v) \in H^2(0,1) \right\} \subset \mathcal{H}.$$

I la no linealitat F_ε no depèn en aquest cas de t i està definida en tot $\mathcal{H}$ de la manera següent:

$$F_\varepsilon \begin{pmatrix} (u, u(1)) \\ (v, \beta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (0,0) \\ \left(-\kappa\,\varepsilon f(u(1), \frac{\beta}{\sqrt{\varepsilon}}), -\kappa\,\varepsilon f(u(1), \frac{\beta}{\sqrt{\varepsilon}})\right) \end{pmatrix}.$$

Per tant, la potència fraccionària és $\alpha = 0$ en aquest cas perquè $\mathcal{H} = \mathcal{D}((-A_\alpha(\varepsilon))^0)$.

Observació 5.3. *Hi ha un petit abús de notació en utilitzar α com a potència fraccionària i com a paràmetre de viscositat interna del sistema. Tot i això, no hi ha cap moment de conflicte amb aquesta notació i per això l'hem mantingut.*

Teorema 5.4 (Existència i unicitat de solució). *L'equació no lineal (5.9) per $\alpha > 0$ admet una única solució local per a cada condició inicial $V_0 \in \mathcal{H}$.*

Demostració. Hem vist en el capítol 3 que $A_\alpha(\varepsilon)$ és sectorial si $\alpha > 0$. Com que F_ε no depèn de t, per a veure l'existència i unicitat de solució del model (5.9) només cal veure que F_ε és localment Lipschitz en $V \in \mathcal{D}((-A_\varepsilon)^0) = \mathcal{H}$, això és trobar $L_{F_\varepsilon} > 0$ tal que

$$\|F_\varepsilon(V_1) - F_\varepsilon(V_2)\|_{\mathcal{H}} \leq L_{F_\varepsilon}\|V_1 - V_2\|_{\mathcal{H}} \quad \forall\, V_1, V_2 \in \mathcal{H}$$

Un senzill càlcul ens permet veure que $L_{F_\varepsilon} = \kappa\sqrt{2\varepsilon}\, L_f$, on L_f és la constant de Lipschitz de f. □

5.3 Reducció a equacions diferencials ordinàries en el límit.

Per a comparar el model en derivades parcials no lineal amb el model no lineal en equacions diferencials ordinàries, l'eina que utilitzarem són les *varietats invariants exponencialment atractores*.

5.3.1 Varietats invariants exponencialment atractores.

La teoria de les varietats invariants exponencialment atractores que ara veurem es basa en l'estudi fet en [21]. Aquestes varietats permeten representar els elements principals de la dinàmica del sistema que s'està considerant mitjançant una equació diferencial ordinària límit. Aquesta teoria ha estat l'origen de molts treballs en els darrers anys. Per a citar-ne només alguns exemples, esmentem [26] i [3].

El punt de vista que utilitzarem aquí és el que en les referències de A.N. Carvalho en [5], A.N. Carvalho i G. Lozada-Cruz en [7] i V.L. Carbone en [4], en el que la forma de l'equació diferencial límit s'obté d'una manera molt explícita. Per a una major claredat, els elements bàsics d'aquesta teoria (definicions bàsiques, teoremes d'existència, ...) s'inclouen a continuació.

Siguin X, Y espais de Banach i $T : \mathcal{D}(T) \subset X \to X$ un operador sectorial amb $Re\,\sigma(T) < 0$. Denotem per $(-T)^\alpha$ la potència fraccionària de $-T$ i per X^α el seu domini, com havíem definit abans. Sigui $B : \mathcal{D}(B) \subset Y \to Y$ un generador d'un $\mathcal{C}^0$-grup d'operadors lineals continus.

Definició 5.5. *Considerem $h : X^\alpha \times Y^\alpha \to X$ i $g : X^\alpha \times Y^\alpha \to Y$ funcions contínues localment Lipschitz. Diem que un conjunt $S \subset X^\alpha \times Y^\alpha$ és una* varietat invariant *per a l'equació diferencial*

$$\begin{cases} \dot{x} = Tx + h(x,y) \\ \dot{y} = By + g(x,y) \end{cases} \tag{5.10}$$

si existeix $\sigma : Y^\alpha \to X^\alpha$ tal que $S = \{(x,y) \in X^\alpha \times Y^\alpha : x = \sigma(y)\}$ i per a qualsevol $(x_0, y_0) \in S$ existeix una solució $(x(\cdot), y(\cdot))$ de (5.10) $\forall t \in \mathbb{R}$ amb $x(0) = x_0$ i $y(0) = y_0$ tal que $(x(t), y(t)) \in S$ $\forall t \in \mathbb{R}$.

Diem que una varietat invariant S és exponencialment atractora *si existeixen γ i K constants positives tals que*

$$\|x(t) - \sigma(y(t))\|_{X^\alpha} \leq K e^{-\gamma t} \|x(0) - \sigma(y(0))\|_{X^\alpha}$$

per a tota solució $(x(t), y(t))$ de (5.10).

Teorema 5.6 (Existència de varietats invariants límit, [7], [5] i [4]). *Siguin X_ε i Y_ε una família d'espais de Banach, $T_\varepsilon : \mathcal{D}(T_\varepsilon) \subset X_\varepsilon \to X_\varepsilon$ una família d'operadors sectorials i $B_\varepsilon : \mathcal{D}(B_\varepsilon) \subset Y_\varepsilon \to Y_\varepsilon$ una família de generadors de $\mathcal{C}^0$-grups d'operadors lineals continus. Suposem que $h_\varepsilon : X_\varepsilon^\alpha \times Y_\varepsilon^\alpha \to X_\varepsilon$ i $g_\varepsilon : X_\varepsilon^\alpha \times Y_\varepsilon^\alpha \to Y_\varepsilon$ són funcions que satisfan les següents propietats:*

1. $\|h_\varepsilon(x,y) - h_\varepsilon(x',y')\|_{X_\varepsilon} \leq L_h \left(\|x - x'\|_{X_\varepsilon^\alpha} + \|y - y'\|_{Y_\varepsilon^\alpha} \right)$
2. $\|h_\varepsilon(x,y)\|_{X_\varepsilon} \leq N_h$
3. $\|g_\varepsilon(x,y) - g_\varepsilon(x',y')\|_{Y_\varepsilon} \leq L_g \left(\|x - x'\|_{X_\varepsilon^\alpha} + \|y - y'\|_{Y_\varepsilon^\alpha} \right)$
4. $\|g_\varepsilon(x,y)\|_{Y_\varepsilon} \leq N_g$

   per a cada (x,y), (x',y') de $X_\varepsilon^\alpha \times Y_\varepsilon^\alpha$. I suposem, a més, que tenim les següents acotacions:

5. $\| e^{T_\varepsilon t} w\|_{X_\varepsilon^\alpha} \leq M_T \, e^{-\beta(\varepsilon) t} \|w\|_{X_\varepsilon^\alpha}$, $t \geq 0$
6. $\| e^{T_\varepsilon t} w\|_{X_\varepsilon^\alpha} \leq M_T \, t^{-\alpha} e^{-\beta(\varepsilon) t} \|w\|_{X_\varepsilon}$, $t > 0$
7. $\| e^{B_\varepsilon t} z\|_{Y_\varepsilon^\alpha} \leq M_B \, e^{-\rho(\varepsilon) t} \|z\|_{Y_\varepsilon^\alpha}$, $t \leq 0$
8. $\| e^{B_\varepsilon t} z\|_{Y_\varepsilon^\alpha} \leq M_B \, t^{-\alpha} e^{\rho(\varepsilon) t} \|z\|_{Y_\varepsilon}$, $t > 0$

per a qualsevol $w \in X_\varepsilon^\alpha$ i $z \in Y_\varepsilon^\alpha$. Es considera el sistema dèbilment acoblat següent

$$\begin{cases} \dot{x} = T_\varepsilon \, x + h_\varepsilon(x,y) \\ \dot{y} = B_\varepsilon \, y + g_\varepsilon(x,y) \end{cases} \tag{5.11}$$

Si $\beta(\varepsilon) - \rho(\varepsilon) \to \infty$ quan $\varepsilon \to 0$, aleshores per ε suficientment petit existeix una varietat invariant exponencialment atractora per l'equació (5.11):

$$S_\varepsilon = \{(x, y) : x = \sigma_\varepsilon(y),\, y \in Y_\varepsilon^\alpha\}$$

on $\sigma_\varepsilon : Y_\varepsilon^\alpha \to X_\varepsilon^\alpha$ satisfà

(i) si diem $s(\varepsilon) = \sup_{y \in Y_\varepsilon^\alpha} \|\sigma_\varepsilon(y)\|_{X_\varepsilon^\alpha}$, tenim que $s(\varepsilon) \to 0$ quan $\varepsilon \to 0$

(ii) $\|\sigma_\varepsilon(y) - \sigma_\varepsilon(z)\|_{X_\varepsilon^\alpha} \leq l(\varepsilon)\|y - z\|_{Y_\varepsilon^\alpha}$ i $l(\varepsilon) \to 0$ quan $\varepsilon \to 0$

Si h_ε i g_ε són prou regulars aleshores també ho és σ_ε i la seva derivada $D\sigma_\varepsilon$ satisfà:

$$\sup_{y \in Y_\varepsilon^\alpha} \|D\sigma_\varepsilon(y)\|_{L(Y_\varepsilon^\alpha, X_\varepsilon^\alpha)} \leq l(\varepsilon)\,.$$

Observació 5.7. *Tal i com passava en el cas lineal quan teníem subconjunts finits de valors propis dominants, si tenim una varietat invariant exponencialment atractora amb les propietats que s'obtenen en el teorema anterior podem considerar l'equació $\dot{y} = B_\varepsilon y + g_\varepsilon(\sigma_\varepsilon(y), y)$ com a límit del sistema (5.11) quan $t \to \infty$ si ε és prou petit. De fet, en el nostre cas aquesta equació límit es mourà en un espai Y_ε que serà de dimensió finita i, per tant, tindrem una equació diferencial ordinària (no lineal) com a límit de l'equació en derivades parcials no lineal (5.6). Però com que sabem, a més, que $\sigma_\varepsilon \to 0$ en norma $\mathcal{C}^1$, en el nostre cas ens serà possible determinar el límit d'aquesta equació quan $\varepsilon \to 0$.*

La idea principal d'aquest resultat consisteix en separar l'espai en dues parts, en una de les quals l'espectre tendirà a $-\infty$ i, per tant, la part que dominarà el comportament de la solució serà l'altra. La demostració d'aquest teorema, basada en la teoria de [21] la podem trobar en [4].

Voldrem veure l'existència d'una varietat invariant exponencialment atractora per a l'equació no lineal (5.9), però per a poder aplicar el teorema 5.6 primer haurem de reescriure l'equació com un sistema del tipus (5.11) que haurà de complir les hipòtesis del teorema 5.6 amb l'exponent fraccionari $\alpha = 0$ en el nostre cas (noti's de nou l'abús de notació per α, que ha denotat fins ara tant l'exponent fraccionari, que a partir d'ara serà zero, com el paràmetre de viscositat interna del sistema, que considerem estrictament positiu en tot el capítol).

Per escriure el nostre problema de manera convenient per aplicar el teorema 5.6, ens interessarà en primer lloc aplicar el següent canvi de temps a l'equació (5.6):

$$t \longleftrightarrow t\sqrt{\varepsilon} \tag{5.12}$$

Si partim de (5.6) i li apliquem aquest canvi en el temps, obtenim:

$$\begin{cases} \varepsilon u_{tt}(x,t) - u_{xx}(x,t) - \alpha\sqrt{\varepsilon}u_{txx}(x,t) + \kappa\,\varepsilon f\left(u(1,t), u_t(1,t)\right) = 0 \\ \\ u(0,t) = 0 \\ \\ u_{tt}(1,t) = -\left[u_x + \alpha\sqrt{\varepsilon}u_{tx} + r\sqrt{\varepsilon}u_t\right](1,t) - \kappa f\left(u(1,t), u_t(1,t)\right) \end{cases}$$

per $x \in (0,1)$ i $t > 0$, i que en termes d'operadors es pot escriure com:

$$\frac{d}{dt}\,V - A_N\,V = F_N(V) \tag{5.13}$$

per a tot $V \in \mathcal{D}(A_\alpha)$, on

$$A_N \begin{pmatrix} (u, u(1)) \\ (v, v(1)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\,v, \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\,v(1)\right) \\ \left(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\,(u + \alpha\,v)_{xx}\,, -\sqrt{\varepsilon}\,(u + \alpha\,v)_x(1) \;-\; \sqrt{\varepsilon}\,r\,v(1)\right) \end{pmatrix}$$

i

$$F_N \begin{pmatrix} (u, u(1)) \\ (v, v(1)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (0,0) \\ \left(-\kappa\,\sqrt{\varepsilon}\,f\left(u(1), \frac{v(1)}{\sqrt{\varepsilon}}\right), -\kappa\,\sqrt{\varepsilon}\,f\left(u(1), \frac{v(1)}{\sqrt{\varepsilon}}\right)\right) \end{pmatrix}.$$

El subíndex N ens recorda que els operadors estan normalitzats, en el sentit que intervenen en el problema amb el temps re-escalat. Per a una major claredat en la notació, a partir d'ara escriurem $A_\varepsilon := A_\alpha(\varepsilon)$ per $\varepsilon \geq 0$ i, per tant, $A_0 := A_\alpha(0)$. El que hem obtingut en (5.13) és l'operador $\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\,A_\varepsilon$, de manera que és evident que si $\lambda \in \sigma(A_\varepsilon)$ aleshores $\mu = \lambda/\sqrt{\varepsilon}$ està en $\sigma(A_N) = \sigma(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\,A_\varepsilon)$. Essencialment el que hem fet és un canvi de temps per tal de precipitar els esdeveniments i veure què passa quan $\varepsilon \to 0$.

Volem descomposar l'equació (5.13) de manera que ens quedi un sistema del tipus (5.11). Descomposarem l'espai en dos subespais invariants per l'operador $\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\,A_\varepsilon$, tal i com es fa en [21] i ens mirarem l'equació d'evolució restringida a cadascun d'aquests subespais. Així doncs, en la línia de [21], considerem els conjunts espectrals següents:

$$\sigma_2^\varepsilon = \{\mu_0^+(\varepsilon), \mu_0^-(\varepsilon)\} = \left\{\frac{\lambda_0^+(\varepsilon)}{\sqrt{\varepsilon}}, \frac{\lambda_0^-(\varepsilon)}{\sqrt{\varepsilon}}\right\} \subset \sigma\left(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\,A_\varepsilon\right)$$

que està acotat, i

$$\sigma_1^\varepsilon = \sigma\left(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\,A_\varepsilon\right) \setminus \sigma_2^\varepsilon \subset \sigma\left(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\,A_\varepsilon\right).$$

on $\lambda_0^+(\varepsilon)$ i $\lambda_0^-(\varepsilon)$, definides en el capítol 4, són les pertorbacions de $\lambda_0(0) = 0$ (el valor propi doble de A_0) quan ε és prou petit. Pel que havíem vist en el capítol 4, $\sigma(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\, A_\varepsilon)$ està separat en σ_1^ε i σ_2^ε en el sentit de la definició 3.16, de manera que les projeccions associades ens donen una descomposició de l'espai. Així, considerem les projeccions associades a cadascun d'aquests conjunts espectrals, P_1^ε i P_2^ε, i definim

$$H_1^\varepsilon = P_1^\varepsilon(\mathcal{H}), \quad H_2^\varepsilon = P_2^\varepsilon(\mathcal{H}).$$

En particular, H_2^ε és un subespai de dimensió dos generat per les funcions pròpies associades a σ_2^ε:

$$H_2^\varepsilon = \left\{\Psi_\varepsilon^1, \Psi_\varepsilon^2\right\} \tag{5.14}$$

on, si denotem per $C(\varepsilon)$ a:

$$C(\varepsilon) = \frac{\lambda_0^+(\varepsilon)\, i}{\sqrt{1 + \lambda_0^+(\varepsilon)\alpha}} \tag{5.15}$$

i per:

$$\phi_\varepsilon^1(x) = \sin C(\varepsilon)x \ , \quad \phi_\varepsilon^2(x) = \sin \overline{C(\varepsilon)}x \tag{5.16}$$

aleshores les funcions pròpies són:

$$\Psi_\varepsilon^1 = \begin{pmatrix} (\phi_\varepsilon^1(x), \phi_\varepsilon^1(1)) \\ (\lambda_0^+\phi_\varepsilon^1(x), \lambda_0^+\phi_\varepsilon^1(1)) \end{pmatrix} \ , \quad \Psi_\varepsilon^2 = \begin{pmatrix} (\phi_\varepsilon^2(x), \phi_\varepsilon^2(1)) \\ (\lambda_0^-\phi_\varepsilon^2(x), \lambda_0^-\phi_\varepsilon^2(1)) \end{pmatrix} \tag{5.17}$$

Els resultats de subespais invariants de [21] ens diuen que els anteriors subespais permeten separar l'espai total en dos subespais invariants per $\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\, A_\varepsilon$, és a dir, $\mathcal{H} = H_1^\varepsilon \oplus H_2^\varepsilon$ on H_1^ε i H_2^ε són invariants per $\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\, A_\varepsilon$. A més, també ens diuen que l'operador:

$$A_2^\varepsilon = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \left(A_\varepsilon|_{H_2^\varepsilon}\right) : H_2^\varepsilon \longrightarrow H_2^\varepsilon$$

està acotat i compleix que $\sigma\left(A_2^\varepsilon\right) = \sigma_2^\varepsilon$. Com que σ_2^ε està format per dos valors propis, tenim $dim(H_2^\varepsilon) = 2 < \infty$. També és cert que $\mathcal{D}(A_1^\varepsilon) = \mathcal{D}(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\, A_\varepsilon) \cap H_1^\varepsilon$ i $\sigma_1^\varepsilon = \sigma\left(A_1^\varepsilon\right)$, on $A_1^\varepsilon = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \left(A_\varepsilon|_{H_1^\varepsilon}\right)$. A més, com que $\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\, A_\varepsilon$ és sectorial quan $\alpha > 0$ perquè A_ε ho és, tenim que A_1^ε també és sectorial quan $\alpha > 0$ (en H_1^ε). Pels resultats obtinguts per l'espectre de A_ε en el capítol 4 també sabem que:

$$\sigma_2^\varepsilon = \{\mu_0^\pm(\varepsilon)\} = \left\{\frac{\lambda_0^\pm(\varepsilon)}{\sqrt{\varepsilon}}\right\} \underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} \{\pm i\}$$

i que:

$$Re(\sigma_1^\varepsilon) < \frac{-c(\alpha)}{\sqrt{\varepsilon}} \underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} -\infty$$

on $c(\alpha) = min\{1/\alpha,\, \alpha\pi^2/2\} > 0$. Aquesta descomposició de l'espectre també ens permet descomposar la part no lineal de la manera següent. Considerem

$$h_\varepsilon : H_1^\varepsilon \oplus H_2^\varepsilon \longrightarrow H_1^\varepsilon \qquad i \qquad g_\varepsilon : H_1^\varepsilon \oplus H_2^\varepsilon \longrightarrow H_2^\varepsilon$$

definides per $h_\varepsilon(V) = P_1^\varepsilon\left(F_N(V)\right)$ i $g_\varepsilon(V) = P_2^\varepsilon\left(F_N(V)\right)\ \forall\, V \in \mathcal{H}$, que corresponen, efectivament, a la descomposició de F_N en $H_1^\varepsilon \oplus H_2^\varepsilon$, és a dir:

$$F_N(V) = \left(P_1^\varepsilon\left(F_N(V)\right),\, P_2^\varepsilon\left(F_N(V)\right)\right) = \left(h_\varepsilon(V), g_\varepsilon(V)\right)$$

Amb tots aquests elements, podem dir que l'equació d'evolució (5.13) es pot escriure com el sistema:

$$\text{(5.18)} \qquad \begin{cases} \dfrac{d}{dt}\, V_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\, \left(A_\varepsilon|_{H_1^\varepsilon}\right)\right)\, V_1 + h_\varepsilon(V_1, V_2) \\ \\ \dfrac{d}{dt}\, V_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\, \left(A_\varepsilon|_{H_2^\varepsilon}\right)\right)\, V_2 + g_\varepsilon(V_1, V_2) \end{cases}$$

que és un sistema del tipus que volíem i per al qual comprovarem si són certes les hipòtesis del teorema 5.6. Si és així, tindrem garantida l'existència d'una varietat invariant exponencialment atractora que ens permetrà dir que (5.18), en el límit, es comportarà essencialment com l'equació diferencial ordinària no lineal sobre la varietat de dimensió finita H_2^ε si ε és prou petit.

Observació 5.8. *El subespai generat per $\{\lambda_0^+/\sqrt{\varepsilon}, \lambda_0^-/\sqrt{\varepsilon}\}$, valors propis de A_N, és el mateix que el generat per $\{\lambda_0^+, \lambda_0^-\}$, valors propis de l'operador sense normalitzar A_ε, si $\varepsilon > 0$. Ara bé, en el cas de $\varepsilon = 0$, el subespai generat pel valor propi doble de A_0, $\lambda(0) = 0$, està format per les funcions pròpies generalitzades:*

$$H_2^0 = \left\{ \begin{pmatrix} (x,1) \\ (0,0) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} (0,0) \\ (x,1) \end{pmatrix} \right\}$$

que en aquest cas no es corresponen a funcions pròpies de A_N per $\varepsilon = 0$ (entre d'altres coses, perquè no té sentit aquest operador normalitzat quan $\varepsilon = 0$).

Com que A_ε convergeix a A_0 en sentit generalitzat quan $\varepsilon \to 0$ amb la norma $\|\cdot\|_{\mathcal{H}}$ (recordem el teorema 4.21), les projeccions corresponents a aquests dos subespais convergeixen en norma:

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \|P_2^\varepsilon - P_2^0\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H},\mathcal{H})} = 0$$

on P_2^0 la tenim explícitament sobre els elements de $\mathcal{D}(A_\alpha)$:

$$P_2^0 : \mathcal{D}(A_\alpha) \subset \mathcal{H} = H_1^0 \oplus H_2^0 \longrightarrow H_2^0$$

$$\begin{pmatrix} (u, u(1)) \\ (v, v(1)) \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} (u(1)x\,,\, u(1)) \\ (v(1)x\,,\, v(1)) \end{pmatrix}$$

A més, la convergència en sentit generalitzat ens diu també que els espais H_2^ε i H_2^0 són isomorfs si ε és prou petit. De fet, trobarem aquest isomorfisme en l'apartat 5.3.4.

És evident que el mateix argument val pels subespais H_1^ε i H_1^0.

5.3.2 El teorema de varietats invariants amb la norma $\|\cdot\|_\varepsilon$

Teorema 5.9 (existència de varietats invariants). *El sistema (5.18) admet, si ε és prou petit, una varietat invariant exponencialment atractora:*

$$S_\varepsilon = \{V = (V_1, V_2) : V_1 = \sigma_\varepsilon(V_2),\, V_2 \in H_2^\varepsilon\}$$

El flux sobre la varietat invariant S_ε ve donat per $V(t) = V_2(t) + \sigma_\varepsilon(V_2(t))$, on $V_2(t)$ és solució de:

$$\frac{d}{dt} V_2 = A_N\left(V_2\right) + P_2^\varepsilon\left[F_N\left(V_2 + \sigma_\varepsilon(V_2)\right)\right], \quad V_2 \in H_2^\varepsilon \tag{5.19}$$

A més, $\sigma_\varepsilon : H_2^\varepsilon \to H_1^\varepsilon$ satisfà:

(i) $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\left(\sup\limits_{V_2\in H_2^\varepsilon} \|\sigma_\varepsilon(V_2)\|_\varepsilon\right) = 0$

(ii) $\|\sigma_\varepsilon(V_2) - \sigma_\varepsilon(W_2)\|_\varepsilon \le l(\varepsilon)\|V_2 - W_2\|_\varepsilon$ *per a tot* $V_2, W_2 \in H_2^\varepsilon$ *i, a més,*

$\lim\limits_{\varepsilon\to 0} l(\varepsilon) = 0$

Com que F és regular, també és cert que

$$\sup_{V_2\in H_2^\varepsilon} \|D\sigma_\varepsilon(V_2)\|_{\mathcal{L}(H_2^\varepsilon, H_1^\varepsilon;\, \|\cdot\|_\varepsilon)} \le l(\varepsilon)$$

és a dir, σ_ε convergeix a zero en la topologia de $\mathcal{C}^1(H_2^\varepsilon, H_1^\varepsilon; \|\cdot\|_\varepsilon)$ quan $\varepsilon \to 0$.

Demostrar aquest teorema és veure que es compleixen cadascuna de les hipòtesis del teorema 5.6 amb la norma $\|\cdot\|_\varepsilon$, cosa que veurem en tres lemes per separat. Hem escrit ja el problema de manera que aquestes hipòtesis siguin el més fàcil possible de comprovar, però tot i això ens trobarem amb algunes dificultats de tipus tècnic. La hipòtesi que portarà més feina és la hipòtesi 5 (lema 5.11), per a la qual caldran els resultats d'anàlisi funcional i convergència generalitzada d'operadors que, per a una major claredat, donem separadament en l'apèndix A. El fet que es tracti de resultats vàlids per a operadors generals i no només per al nostre problema particular, ha fet convenient considerar-los en un capítol a part. Passem ja a comprovar que estem en les hipòtesis del teorema de varietats invariants.

Lema 5.10 (hipòtesis 1-4). *Si* $h_\varepsilon(V) = P_1^\varepsilon(F_N(V))$ *i* $g_\varepsilon(V) = P_2^\varepsilon(F_N(V))$, $V \in \mathcal{H}$, *llavors per a tot* $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$, *on* $\varepsilon_0 > 0$ *fixat, existeixen constants* L_h, N_h, L_g *i* N_g *independents de* ε *tals que*

1. $\|h_\varepsilon(V_1) - h_\varepsilon(V_2)\|_\varepsilon \leq L_h \|V_1 - V_2\|_\varepsilon$
2. $\|h_\varepsilon(V)\|_\varepsilon \leq N_h$
3. $\|g_\varepsilon(V_1) - g_\varepsilon(V_2)\|_\varepsilon \leq L_g \|V_1 - V_2\|_\varepsilon$
4. $\|g_\varepsilon(V)\|_\varepsilon \leq N_g$

per a tot V, V_1, $V_2 \in \mathcal{H}$, *on la norma* $\|\cdot\|_\varepsilon$ *és la definida en el capítol 2.*

Demostració. Per veure que les projeccions de F_N en cada subespai invariant són Lipschitz i acotades en la norma $\|\cdot\|_\varepsilon$ independentment de $\varepsilon > 0$ si ε és prou petit, cal veure que F_N ho és i que les projeccions sobre elements d'aquest tipus estan acotades independentment de ε.

Comencem veient que F_N és Lipschitz en la norma $\|\cdot\|_\varepsilon$, cosa que és directa si escrivim qui són les normes de cada cosa. Considerem $V_1, V_2 \in \mathcal{H}$ i tenim:

$$\|F_N(V_1) - F_N(V_2)\|_\varepsilon^2 =$$

$$\kappa^2 \varepsilon \left\| \begin{pmatrix} (0,0) \\ \left(f(u_1(1), \frac{v_1(1)}{\sqrt{\varepsilon}}) - f(u_2(1), \frac{v_2(1)}{\sqrt{\varepsilon}}), f(u_1(1), \frac{v_1(1)}{\sqrt{\varepsilon}}) - f(u_2(1), \frac{v_2(1)}{\sqrt{\varepsilon}})\right) \end{pmatrix} \right\|_\varepsilon^2 =$$

$$= (1+\varepsilon)\,\kappa^2 \left| f\left(u_1(1), \frac{v_1(1)}{\sqrt{\varepsilon}}\right) - f\left(u_2(1), \frac{v_2(1)}{\sqrt{\varepsilon}}\right)\right|^2 \tag{5.20}$$

Com que al principi del capítol hem vist que f era Lipschitz (amb constant de Lipschitz L_f), tenim:

$$(5.20) \leq (1+\varepsilon)\,\kappa^2 L_f^2 \left[|u_1(1) - u_2(1)|^2 + \frac{|v_1(1) - v_2(1)|^2}{\varepsilon} \right] \tag{5.21}$$

I com que $u_1(0) = u_2(0) = 0$, podem acotar el valor en $x = 1$ d'aquestes funcions pel de la integral de la seva derivada, tal i com tenim a continuació:

$$(5.21) \leq (1+\varepsilon)\,\kappa^2 L_f^2 \left[\int_0^1 |(u_1)_x - (u_2)_x|^2 dx + \frac{|v_1(1) - v_2(1)|^2}{\varepsilon} \right] \tag{5.22}$$

que és immediat veure que

$$(5.22) \leq (1+\varepsilon)\,\kappa^2 L_f^2 \|V_1 - V_2\|_\varepsilon^2 \tag{5.23}$$

Per tant, F_N és Lipschitz en la norma $\|\cdot\|_\varepsilon$ amb constant de Lipschitz donada per (5.23). Si fixem ε_0, llavors per a tot $\varepsilon < \varepsilon_0$ tenim una constant de Lipschitz independent de ε, $L_{F_N} = \sqrt{1+\varepsilon_0}\,\kappa L_f$.

Veure que F_N és acotada en la norma $\|\cdot\|_\varepsilon$ és encara més fàcil:

$$\|F_N(V)\|_\varepsilon^2 = \left\| \begin{pmatrix} (0,0) \\ \left(-\kappa\sqrt{\varepsilon} f(u(1), \frac{v(1)}{\sqrt{\varepsilon}}), -\kappa\sqrt{\varepsilon} f(u(1), \frac{v(1)}{\sqrt{\varepsilon}})\right) \end{pmatrix} \right\|^2 =$$

$$= (1+\varepsilon)\kappa^2 \left| f(u(1), \frac{v(1)}{\sqrt{\varepsilon}}) \right|^2 \leq (1+\varepsilon)\kappa^2 N_f^2$$

ja que f està acotada per N_f en tot punt. Per tant, si $\varepsilon < \varepsilon_0$, tenim que F_N està uniformement acotada per $N_F = \sqrt{1+\varepsilon_0}\,\kappa N_f$.

Però les hipòtesis del teorema de varietats invariants demanen les anteriors acotacions quan projectem la no linealitat en cadascun dels subespais invariants. En certa manera, el que volem veure és que els operadors P_1^ε i P_2^ε estan acotats amb la norma $\|\cdot\|_\varepsilon$ independentment de ε, si ε és prou petit, almenys quan projectem elements del tipus:

$$\begin{pmatrix} (0,0) \\ (a,a) \end{pmatrix}$$

on $a \in \mathbb{C}$ qualsevol (ja que aquesta és la forma que té $F_N(V)$). De fet, si una de les projeccions està acotada també ho estarà l'altra, de manera que ens ho mirarem per la projecció sobre els subespai de dimensió finita, P_2^ε, que compararem amb la projecció sobre el subespai generat pel valor propi doble de $A_\alpha(0)$, tal i com acabem de veure en l'observació 5.8. Efectivament, com que:

$$P_2^\varepsilon \begin{pmatrix} (0,0) \\ (a,a) \end{pmatrix} = a\, P_2^\varepsilon \begin{pmatrix} (0,0) \\ (1,1) \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} (b_1\phi_\varepsilon^1 + b_2\phi_\varepsilon^2, b_1\phi_\varepsilon^1(1) + b_2\phi_\varepsilon^2(1)) \\ (b_1\lambda_0^+\phi_\varepsilon^1 + b_2\lambda_0^-\phi_\varepsilon^2, b_1\lambda_0^+\phi_\varepsilon^1(1) + b_2\lambda_0^-\phi_\varepsilon^2(1)) \end{pmatrix}$$

$$P_2^0 \begin{pmatrix} (0,0) \\ (a,a) \end{pmatrix} = a\, P_2^0 \begin{pmatrix} (0,0) \\ (1,1) \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} (0,0) \\ (x,1) \end{pmatrix}$$

tenim que:

$$\frac{\left\| P_2^\varepsilon \begin{pmatrix} (0,0) \\ (a,a) \end{pmatrix} \right\|_\varepsilon}{\left\| \begin{pmatrix} (0,0) \\ (a,a) \end{pmatrix} \right\|_\varepsilon} \leq \frac{\left\| P_2^0 \begin{pmatrix} (0,0) \\ (a,a) \end{pmatrix} \right\|_\varepsilon + \left\| (P_2^\varepsilon - P_2^0) \begin{pmatrix} (0,0) \\ (a,a) \end{pmatrix} \right\|_\varepsilon}{\left\| \begin{pmatrix} (0,0) \\ (a,a) \end{pmatrix} \right\|_\varepsilon} =$$

$$= \frac{\left[\int_0^1 |x|^2\, dx + \frac{1}{\varepsilon}|1|^2\right]^{1/2}}{\left[\int_0^1 |1|^2\, dx + \frac{1}{\varepsilon}|1|^2\right]^{1/2}} + \tag{5.24}$$

$$+\frac{\left[\int_0^1 \left(|(b_1\phi_\varepsilon^1+b_2\phi_\varepsilon^2)_x|^2+|b_1\lambda_0^+\phi_\varepsilon^1+b_2\lambda_0^-\phi_\varepsilon^2-x|^2\right)\,dx+\frac{|b_1\lambda_0^+\phi_\varepsilon^1(1)+b_2\lambda_0^-\phi_\varepsilon^2(1)-1|^2}{\varepsilon}\right]^{1/2}}{\left[\int_0^1|1|^2\,dx+\frac{1}{\varepsilon}|1|^2\right]^{1/2}}$$

Prenent límits quan $\varepsilon\to 0$, tenim en el primer terme:

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\int_0^1|x|^2\,dx+\frac{1}{\varepsilon}|1|^2}{\int_0^1|1|^2\,dx+\frac{1}{\varepsilon}|1|^2}=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\frac{\varepsilon+3}{3\varepsilon}}{\frac{\varepsilon+1}{\varepsilon}}=1$$

I com que l'observació 5.8 ens diu que, en particular:

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\left\|(P_2^\varepsilon-P_2^0)\begin{pmatrix}(0,0)\\(1,1)\end{pmatrix}\right\|_{\mathcal{H}}^2}{\left\|\begin{pmatrix}(0,0)\\(1,1)\end{pmatrix}\right\|_{\mathcal{H}}^2}=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\int_0^1|(b_1\phi_\varepsilon^1+b_2\phi_\varepsilon^2)_x|^2\,dx}{2}+$$

$$+\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\int_0^1|b_1\lambda_0^+\phi_\varepsilon^1+b_2\lambda_0^-\phi_\varepsilon^2-x|^2\,dx}{2}+\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{|b_1\lambda_0^+\phi_\varepsilon^1(1)+b_2\lambda_0^-\phi_\varepsilon^2(1)-1|^2}{2}=0$$

aleshores el segon terme de (5.24) també convergeix a 0, ja que el podem acotar pels termes anteriors:

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\int_0^1\left(|(b_1\phi_\varepsilon^1+b_2\phi_\varepsilon^2)_x|^2+|b_1\lambda_0^+\phi_\varepsilon^1+b_2\lambda_0^-\phi_\varepsilon^2-x|^2\right)\,dx}{1+\frac{1}{\varepsilon}}+$$

$$+\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\frac{1}{\varepsilon}|b_1\lambda_0^+\phi_\varepsilon^1(1)+b_2\lambda_0^-\phi_\varepsilon^2(1)-1|^2}{1+\frac{1}{\varepsilon}}\leq$$

$$\leq\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\int_0^1\left(|(b_1\phi_\varepsilon^1+b_2\phi_\varepsilon^2)_x|^2+|b_1\lambda_0^+\phi_\varepsilon^1+b_2\lambda_0^-\phi_\varepsilon^2-x|^2\right)\,dx}{1}+$$

$$+\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\frac{1}{\varepsilon}|b_1\lambda_0^+\phi_\varepsilon^1(1)+b_2\lambda_0^-\phi_\varepsilon^2(1)-1|^2}{\frac{1}{\varepsilon}}=0$$

Per tant, podem concloure que les projeccions P_1^ε i P_2^ε d'elements del tipus $F_N(V)$ estan acotades amb la norma $\|\cdot\|_\varepsilon$ si ε és prou petit. Ajuntant això amb el fet que F_N és Lipschitz i acotada en aquesta norma, tenim ja demostrat el lema. □

En la demostració del següent lema seran essencials els resultats que es recullen en l'apèndix A. De la mateixa manera, utilitzarem algunes definicions i notacions d'aquest apèndix que, per brevetat, no tornarem a incloure aquí.

Lema 5.11 (hipòtesi 5). *L'operador A_ε amb $\varepsilon > 0$ verifica els següents punts:*

(a) A_ε és una pertorbació relativament acotada de A_0 en la norma $\|\cdot\|_{\mathcal{H}}$, amb cotes relatives independents de ε si $\varepsilon < \varepsilon_a$ per un cert $\varepsilon_a > 0$.

(b) Existeixen $\varepsilon_b > 0$ i un sector Σ centrat en un cert $c > 0$ i d'angle $\pi/2+\delta_0'$, $\delta_0' \in (0, \pi/2]$, i existeix una constant $M > 0$, tot independent de ε si $\varepsilon < \varepsilon_b$, tals que:

$$\overline{\Sigma} \subset \rho(A_\varepsilon) \quad si\ \varepsilon < \varepsilon_b \quad i$$

$$\|R(\lambda, A_\varepsilon)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H},\mathcal{H})} \leq \frac{M}{|\lambda|} \quad \forall\, \lambda \in \overline{\Sigma} \quad si\ \varepsilon < \varepsilon_b$$

(c) Existeix $M' \geq 1$ independent de ε tal que

$$\left\| e^{\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \left(A_\varepsilon|_{H_1^\varepsilon}\right) t} V \right\|_\varepsilon \leq M'\, e^{\frac{-c(\alpha)}{\sqrt[4]{\varepsilon}}\, t}\, \|V\|_\varepsilon \qquad si\ \varepsilon < \varepsilon_c \tag{5.25}$$

per a tot $V \in H_1^\varepsilon$, on $0 < c(\alpha) < min\{1/\alpha\,,\, \alpha\pi^2/2\}$.

Observació 5.12. *Ja hem vist que en el nostre cas l'exponent fraccionari era 0, de manera que la hipòtesi 5 i 6 del teorema de varietats invariants són, per nosaltres, la mateixa. A més, noti's que (a) i (b) estan relacionats amb l'operador sense normalitzar i que en (b) i en (c) els resultats s'obtenen per a normes diferents.*

L'objectiu d'aquest lema és l'acotació uniforme del semigrup, és a dir, (c). On estarà la dificultat en demostrar (5.25)? Sabem que si el semigrup és analític, M' està relacionada amb la cota de l'operador resolvent i l'exponent amb la de la part real de l'espectre. Com que hem vist que $A_\varepsilon|_{H_1^\varepsilon}$ genera un semigrup analític en H_1^ε, tindríem de forma directa una acotació de la forma (5.25), però amb $M = M(\varepsilon) \geq 1$ i podria ser que $M(\varepsilon) \to \infty$ quan $\varepsilon \to 0$. D'altra banda, si l'operador fos autoadjunt, automàticament tindríem l'acotació amb $M = 1$ i, per tant, independent de ε. De fet, aquest és el cas d'articles com [17], [5], [7], etc. Però A_ε no és autoadjunt, de manera que aquesta acotació serà bastant més delicada en el nostre cas.

Per veure això utilitzarem fortament en els resultats que, utilitzant la convergència generalitzada d'operadors i acotacions uniformes de semigrups, es dedueixen en l'apèndix A.

Demostració. L'esquema de la demostració és veure l'apartat (a), el qual s'utilitza en la prova de (b) que, a la vegada, permet demostrar (c).

(a) Comencem veient que A_ε és una pertorbació relativament acotada de A_0 amb cotes relatives independents de ε si aquest és prou petit, és a dir:

$$\|\,(A_\varepsilon - A_0)\,V\|_{\mathcal{H}} \leq a\,\|A_0\,V\|_{\mathcal{H}} + b\,\|V\|_{\mathcal{H}}, \quad V = \begin{pmatrix} (u, u(1)) \\ (v, v(1)) \end{pmatrix} \in \mathcal{D}(A_\varepsilon)$$

on $a, b \in \mathbb{C}$ són independents de ε si aquest és prou petit. Si escrivim les normes anteriors, hem de trobar $a, b \in \mathbb{C}$ tals que:

$$\varepsilon^2 \left|(u+\alpha v)_x(1) + rv(1)\right|^2 \leq \tag{5.26}$$

$$a\left[\int_0^1 |v_x|^2 dx + \int_0^1 |(u+\alpha v)_{xx}|^2 dx\right] + b\left[\int_0^1 |u_x|^2 dx + \int_0^1 |v|^2 dx + |v(1)|^2\right]$$

Comencem. Per la desigualtat de Cauchy, tenim:

$$\varepsilon^2 \left|(u+\alpha v)_x(1) + rv(1)\right|^2 \leq \varepsilon^2 \left((1+c_1)\left|(u+\alpha v)_x(1)\right|^2 + \left(1+\frac{1}{c_1}\right) r^2 |v(1)|^2\right)$$

on $c_1 > 0$ qualsevol. Només ens cal, doncs, trobar l'acotació adequada per $|(u+\alpha v)_x(1)|^2$. Utilitzant primer que si $f \in H^1(0,1)$ aleshores $|f(1)|^2 \leq \|f'\|^2_{L^2(0,1)} + 2\|f\|^2_{L^2(0,1)}$ i després la desigualtat de Cauchy, tenim:

$$|(u+\alpha v)_x(1)|^2 \leq \int_0^1 |(u+\alpha v)_{xx}|^2 dx + 2\int_0^1 |(u+\alpha v)_x|^2 dx \leq$$

$$\int_0^1 |(u+\alpha v)_{xx}|^2 dx + 2(1+c_2)\int_0^1 |u_x|^2 dx + 2\left(1+\frac{1}{c_2}\right)\alpha^2 \int_0^1 |v_x|^2 dx$$

per $c_2 > 0$ qualsevol. Ajuntant-ho tot en (5.26) tenim

$$\|\left(A_\varepsilon - A_0\right) V\|^2_{\mathcal{H}} \leq (\varepsilon a(\alpha))^2 \|A_0\, V\|^2_{\mathcal{H}} + (\varepsilon b(r))^2 \|V\|^2_{\mathcal{H}}$$

on

$$a^2(\alpha) = max\left\{2(1+c_1)\left(1+\frac{1}{c_2}\right)\alpha^2\,,\,(1+c_1)\right\}$$

$$b^2(r) = max\left\{2(1+c_1)\,(1+c_2)\,,\,\left(1+\frac{1}{c_1}\right) r^2\right\}$$

per $c_1, c_2 > 0$ qualssevol. Així, si fixem $\varepsilon_a > 0$ les cotes relatives són $\varepsilon_a\, a(\alpha)$ i $\varepsilon_a\, b(r)$ si $\varepsilon < \varepsilon_a$, ambdues independents de ε.

(b) Utilitzarem l'apartat anterior per veure les acotacions de la resolvent en norma $\|\cdot\|_{\mathcal{H}}$ i que seran independents de ε si aquest és prou petit. Essencialment, això es dedueix d'aplicar un resultat de [14] recollit al final de l'apèndix A, concretament el lema A.16 i la següent observació A.17, de manera que només caldrà comprovar que estem dins les hipòtesis de l'enunciat de A.16. Així, ens fixem en l'operador A_0 que és sectorial, de manera que existeix $\delta_0 \in (0, \pi/2]$ i $M_0 \geq 1$ tals que

$$\overline{\Sigma}_{\pi/2+\delta_0} \setminus \{0\} = \{z \in \mathbb{C}, |arg(z)| \leq \pi/2 + \delta_0\} \setminus \{0\} \subset \rho(A_0)$$

i

$$\|R(\lambda, A_0)\| \leq \frac{M_0}{|\lambda|} \quad \forall\, 0 \neq \lambda \in \overline{\Sigma}_{\pi/2+\delta_0}$$

(la notació per als sectors i definicions estan donades en l'apèndix A). D'altra banda, hem vist en l'apartat (a) que A_ε és una pertorbació relativament acotada de A_0, amb cota relativa $a_0 = \varepsilon_a\, a(\alpha)$ si $\varepsilon < \varepsilon_a$. També hem vist durant la demostració que tenim cert marge en triar $a(\alpha)$, de manera que podem triar ε_a i les constants c_1, c_2 tals que $a_0 = \varepsilon_a\, a(\alpha) < \frac{1}{2(1+M_0)}$. Triades ε_a, c_1 i c_2 també ha quedat determinat $\varepsilon_a b(r)$. Així, el lema A.16 i l'observació A.17 ens permeten concloure que

$$\overline{\Sigma}_{\pi/2+\delta_0'}(c) = \{z \in \mathbb{C}, |arg(z-c)| \leq \pi/2 + \delta_0'\} \subset \rho(A_\varepsilon) \quad si\ \varepsilon < \varepsilon_a$$

i

$$\|R(\lambda, A_\varepsilon)\| \leq \frac{2M_0}{|\lambda|} \quad \forall\, \lambda \in \overline{\Sigma}_{\pi/2+\delta_0'}(c),\ si\ \varepsilon < \varepsilon_a \tag{5.27}$$

on $0 < \delta_0' \leq \delta_0$ i $c = 2\,\dfrac{\varepsilon_a b(r)\, M_0}{1/2 - \varepsilon_a a(\alpha)(M_0+1)}$.

(c) Tenim $\sigma(A_0)$ separat en dues parts per la recta $\{Re\, z = -c(\alpha)\}$, on $0 < c(\alpha) < min\,\{1/\alpha\,,\, \alpha\pi^2/2\}$ amb $Re\,\sigma(A_0|_{H_1^0}) < -c(\alpha) < Re\,\sigma(A_0|_{H_2^0}) \leq 0$.

Sabem també que A_ε convergeix a A_0 en sentit generalitzat en norma $\|\cdot\|_{\mathcal{H}}$ quan $\varepsilon \to 0$ (recordem el teorema 4.21) i que, si $\varepsilon < \varepsilon_a$ el conjunt resolvent de A_ε conté un sector independent de ε, on l'operador resolvent està acotat independentment de ε de la forma (5.27), tal i com hem vist en l'apartat anterior. Per tant, el teorema A.12 de l'apèndix A ens permet dir que existeix un cert ε_c tal que:

$$\left\| e^{A_\varepsilon|_{H_1^\varepsilon}\, t}\, V \right\|_{\mathcal{H}} \leq M\, e^{-c(\alpha)\, t}\, \|V\|_{\mathcal{H}} \quad \forall\, V \in H_1^\varepsilon,\ \ \forall t \geq 0,\ si\ \varepsilon < \varepsilon_c$$

per a una certa M independent de ε, de manera que és evident que:

$$\left\| e^{\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\left(A_\varepsilon|_{H_1^\varepsilon}\right) t}\, V \right\|_{\mathcal{H}} \leq M\, e^{\frac{-c(\alpha)}{\sqrt{\varepsilon}}\, t}\, \|V\|_{\mathcal{H}} \quad \forall\, V \in H_1^\varepsilon,\ \ \forall t \geq 0 \tag{5.28}$$

si $\varepsilon < \varepsilon_c$. Però ens interessa veure aquest tipus d'acotació amb la norma $\|\cdot\|_\varepsilon$ i, per tant, haurem de treballar una mica més. El que ens ajudarà és el fet que l'operador A_ε sigui dissipatiu amb la norma $\|\cdot\|_\varepsilon$, tal i com havíem vist en el lema 3.11, cosa que implica que:

$$\left\| e^{A_\varepsilon\, t} \right\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H},\mathcal{H};\,\varepsilon)} \leq 1 \quad \forall\, t \geq 0$$

En particular, també serà cert que

$$\left\| e^{\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\left(A_\varepsilon|_{H_1^\varepsilon}\right) t} V \right\|_\varepsilon \leq \|V\|_\varepsilon \quad \forall\, t \geq 0,\ \forall\, V \in H_1^\varepsilon \tag{5.29}$$

D'altra banda, la relació entre les normes $\|\cdot\|_\varepsilon$ i $\|\cdot\|_{\mathcal{H}}$ fa que (5.28) impliqui que:

$$\left\| e^{\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\left(A_\varepsilon|_{H_1^\varepsilon}\right)t} V \right\|_\varepsilon \leq \frac{M}{\sqrt{\varepsilon}} e^{\frac{-c(\alpha)}{\sqrt{\varepsilon}}t} \|V\|_\varepsilon \quad \forall V \in H_1^\varepsilon, \quad \forall t \geq 0, \text{ si } \varepsilon < \varepsilon_c \tag{5.30}$$

Ajuntant (5.30) i (5.29), tenim la següent acotació:

$$\left\| e^{\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\left(A_\varepsilon|_{H_1^\varepsilon}\right)t} \right\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H},\mathcal{H};\varepsilon)} \leq min\left\{ \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} M e^{\frac{-c(\alpha)}{\sqrt{\varepsilon}}t}, 1 \right\}, \ \forall t \geq 0, \text{ si } \varepsilon < \varepsilon_c$$

per a tot $\varepsilon < \varepsilon_c$, d'on és immediat comprovar que

$$\left\| e^{\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\left(A_\varepsilon|_{H_1^\varepsilon}\right)t} \right\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H},\mathcal{H};\varepsilon)} e^{\frac{c(\alpha)}{\sqrt[4]{\varepsilon}}t} \leq M'(\varepsilon) \quad \forall t \geq 0, \quad \text{si } \varepsilon < \varepsilon_c$$

on

$$M'(\varepsilon) = \left(\frac{\sqrt{\varepsilon}}{M}\right)^{-\sqrt[4]{\varepsilon}}$$

Com que $\lim_{\varepsilon \to 0} M'(\varepsilon) = 0$, aquesta està acotada independentment de ε per un cert $M' > 0$ si $\varepsilon < \varepsilon_c$, de manera que

$$\left\| e^{\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\left(A_\varepsilon|_{H_1^\varepsilon}\right)t} \right\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H},\mathcal{H};\varepsilon)} \leq M' e^{\frac{-c(\alpha)}{\sqrt[4]{\varepsilon}}t} \quad \forall t \geq 0, \quad si\ \varepsilon < \varepsilon_c$$

amb M' independent de ε. □

Lema 5.13 (hipòtesis 7 i 8). *El semigrup generat per* $(1/\sqrt{\varepsilon})\left(A_\varepsilon|_{H_2^\varepsilon}\right)$*, la restricció de l'operador* A_N *al subespai de dimensió finita, compleix que:*

$$\|e^{\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}A_\varepsilon|_{H_2^\varepsilon}t} V\|_\varepsilon \leq e^{\left(2\sqrt{2}+O(\sqrt{\varepsilon})\right)|t|}\|V\|_\varepsilon$$

per a tot $V \in \mathcal{H}_2^\varepsilon$ *i per a tot* $t \in \mathbb{R}$*.*

Demostració. És fàcil veure que si T és un operador acotat, aleshores:

$$\left\|e^{Tt}\right\| \leq e^{|t|\|T\|}, \quad t \in \mathbb{R}$$

on la norma és la mateixa en ambdós costats de la desigualtat. Per tant, la demostració es basarà en acotar convenientment la norma $\|\cdot\|_\varepsilon$ de l'operador que ens interessa:

$$\left\| \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} A_\varepsilon|_{H_2^\varepsilon} \right\|^2_{\mathcal{L}(\mathcal{H},\mathcal{H};\varepsilon)} = \sup_{0 \neq Y \in H_2^\varepsilon} \frac{\left\| \left(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} A_\varepsilon\right) Y \right\|^2_\varepsilon}{\|Y\|^2_\varepsilon} \tag{5.31}$$

Si $Y \in H_2^\varepsilon$, subespai propi que havíem definit en (5.17), i denotem λ_0^+ per λ, aleshores:

$$Y = a\Psi_\varepsilon^1 + b\Psi_\varepsilon^2 = \begin{pmatrix} (a\,\phi_\varepsilon^1 + b\,\phi_\varepsilon^2\,,\; a\,\phi_\varepsilon^1(1) + b\,\phi_\varepsilon^2(1)) \\ (a\,\lambda\,\phi_\varepsilon^1 + b\,\overline{\lambda}\,\phi_\varepsilon^2\,,\; a\,\lambda\,\phi_\varepsilon^1(1) + b\,\overline{\lambda}\,\phi_\varepsilon^2(1)) \end{pmatrix}$$

per certs $a, b \in \mathbb{C}$. Si recordem la definició de ϕ_ε^1 i ϕ_ε^2, tenim:

$$(5.31) = \sup_{(a,b)\neq(0,0)} \frac{\int_0^1 \left| \left(\frac{\lambda}{\sqrt{\varepsilon}}\, a \sin C(\varepsilon)x + \frac{\overline{\lambda}}{\sqrt{\varepsilon}}\, b \sin \overline{C(\varepsilon)}x \right)_x \right|^2 dx}{\|Y\|_\varepsilon^2} +$$

$$\frac{\int_0^1 \left| \left(\frac{\lambda}{\sqrt{\varepsilon}}\, a\lambda \sin C(\varepsilon)x + \frac{\overline{\lambda}}{\sqrt{\varepsilon}}\, b\overline{\lambda} \sin \overline{C(\varepsilon)}x \right) \right|^2 dx}{\|Y\|_\varepsilon^2} + \frac{\frac{1}{\varepsilon} \left| \frac{\lambda}{\sqrt{\varepsilon}}\, a\lambda \sin C(\varepsilon) + \frac{\overline{\lambda}}{\sqrt{\varepsilon}}\, b\overline{\lambda} \sin \overline{C(\varepsilon)} \right|^2}{\|Y\|_\varepsilon^2}$$

on

$$\|Y\|_\varepsilon^2 = \int_0^1 \left| \left(a \sin C(\varepsilon)x + b \sin \overline{C(\varepsilon)}x \right)_x \right|^2 dx +$$

$$\int_0^1 \left| \left(a\lambda \sin C(\varepsilon)x + b\overline{\lambda} \sin \overline{C(\varepsilon)}x \right) \right|^2 dx \; + \; \frac{1}{\varepsilon} \left| a\lambda \sin C(\varepsilon) + b\overline{\lambda} \sin \overline{C(\varepsilon)} \right|^2$$

Per acotar convenientment aquesta norma, essencialment buscarem equivalents asimptòtics dels termes que apareixen en el numerador i el denominador. Començarem per acotar inferiorment el denominador si ε és prou petit. Usant aproximacions en sèries de potències de les funcions de ε que hi apareixen podem veure que:

$$\int_0^1 \left| \left(a \sin C(\varepsilon)x + b \sin \overline{C(\varepsilon)}x \right)_x \right|^2 dx =$$

$$\int_0^1 \left[aC(\varepsilon) \cos C(\varepsilon)x + b\overline{C(\varepsilon)} \cos \overline{C(\varepsilon)}x \right] \left[\overline{a}\,\overline{C(\varepsilon)} \cos \overline{C(\varepsilon)}x + \overline{b}C(\varepsilon) \cos C(\varepsilon)x \right] dx =$$

$$= \left(|a|^2 + |b|^2 + \overline{a}b + a\overline{b} \right) \varepsilon + O(\sqrt{\varepsilon})^3 \qquad (5.32)$$

i

$$\int_0^1 \left| \left(a\lambda \sin C(\varepsilon)x + b\overline{\lambda} \sin \overline{C(\varepsilon)}x \right) \right|^2 dx =$$

$$\int_0^1 \left[\left(a\lambda \sin C(\varepsilon)x + b\overline{\lambda} \sin \overline{C(\varepsilon)}x \right) \right] \left[\left(\overline{a}\,\overline{\lambda} \sin \overline{C(\varepsilon)}x + \overline{b}\lambda \sin C(\varepsilon)x \right) \right] dx =$$

$$= \left(|a|^2 + |b|^2 - \overline{a}b - a\overline{b} \right) \frac{\varepsilon^2}{3} + O(\sqrt{\varepsilon})^5 \qquad (5.33)$$

i

$$\frac{1}{\varepsilon} \left| \left(a\lambda \sin C(\varepsilon) + b\overline{\lambda} \sin \overline{C(\varepsilon)} \right) \right|^2 = \left(|a|^2 + |b|^2 - \overline{a}b - a\overline{b} \right) \varepsilon + O(\sqrt{\varepsilon})^3 \quad (5.34)$$

tot això usant equivalències asimptòtiques de λ ($\lambda \sim i\sqrt{\varepsilon}$), $C(\varepsilon)$ ($C(\varepsilon) \sim \sqrt{\varepsilon}$), $\sin C(\varepsilon)$ i $\cos C(\varepsilon)$, pensats com a funcions de ε entorn de $\varepsilon = 0$ (vegi's (5.15)). Ajuntant (5.32), (5.33) i (5.34), tenim:

$$\|Y\|_\varepsilon^2 = 2\,\left(|a|^2 + |b|^2\right)\varepsilon + O(\sqrt{\varepsilon})^3$$

Observem que en (5.34) és important l'ε dividint que prové de considerar la norma $\|\cdot\|_\varepsilon$ en lloc de la norma $\|\cdot\|_{\mathcal{H}}$. Com que no sabem el signe dels termes d'ordre $(\sqrt{\varepsilon})^3$, l'únic que podem dir és que si ε és prou petit llavors

$$\|Y\|_\varepsilon^2 \geq \left(|a|^2 + |b|^2\right)\varepsilon \quad si\ \varepsilon < \varepsilon_0 \tag{5.35}$$

Tot això ho utilitzarem per acotar cadascun dels sumands de (5.31) per separat. En primer lloc, separem en els numeradors els termes amb a dels termes amb b:

$$\frac{\left\|\left(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}A_\varepsilon\right)\,Y\right\|_\varepsilon^2}{\|Y\|_\varepsilon^2} \leq$$

$$\frac{2\,\left|\frac{\lambda}{\sqrt{\varepsilon}}\right|^2\left[\int_0^1 |(a\sin C(\varepsilon)x)_x|^2dx + \int_0^1 |a\lambda \sin C(\varepsilon)x|^2dx + \frac{1}{\varepsilon}|a\lambda\sin C(\varepsilon)|^2\right]}{\|Y\|_\varepsilon^2} +$$

$$\frac{2\,\left|\frac{\lambda}{\sqrt{\varepsilon}}\right|^2\left[\int_0^1 |(b\sin \overline{C(\varepsilon)}x)_x|^2dx + \int_0^1 |b\overline{\lambda} \sin \overline{C(\varepsilon)}x|^2dx + \frac{1}{\varepsilon}|b\overline{\lambda}\sin \overline{C(\varepsilon)}|^2\right]}{\|Y\|_\varepsilon^2}$$

Fixem-nos en els termes amb a (els altres s'acotaran anàlogament). Observem que (5.35) ens diu també que

$$\|Y\|_\varepsilon^2 \geq \varepsilon|a|^2 \quad si\ \varepsilon < \varepsilon_0$$

Per tant, si $\varepsilon < \varepsilon_0$:

$$\frac{\left|\frac{\lambda}{\sqrt{\varepsilon}}\right|^2 \int_0^1 |(a\sin C(\varepsilon)x)_x|^2dx}{\|Y\|_\varepsilon^2} \leq \frac{\left|\frac{\lambda}{\sqrt{\varepsilon}}\right|^2 |a|^2|C(\varepsilon)|^2\int_0^1 |\cos C(\varepsilon)x|^2dx}{\varepsilon|a|^2} \tag{5.36}$$

Buscant els desenvolupaments entorn $\varepsilon = 0$, tenim de forma immediata que:

$$(5.36) = 1 + O(\varepsilon) \quad si\ \varepsilon < \varepsilon_0 \tag{5.37}$$

De la mateixa manera,

$$\frac{\left|\frac{\lambda}{\sqrt{\varepsilon}}\right|^2 |\lambda|^2 \int_0^1 |a\sin C(\varepsilon)x|^2dx}{\|Y\|_\varepsilon^2} \leq \left(\frac{1}{3} + O(\sqrt{\varepsilon})\right)\varepsilon = O(\varepsilon) \quad si\ \varepsilon < \varepsilon_0 \tag{5.38}$$

i també

$$\frac{\frac{1}{\varepsilon}\left|\frac{\lambda}{\sqrt{\varepsilon}}\right|^2 |\lambda|^2|a|^2|\sin C(\varepsilon)|^2 dx}{\|Y\|_\varepsilon^2} \leq 1 + O(\sqrt{\varepsilon}) \quad si\ \varepsilon < \varepsilon_0 \tag{5.39}$$

I pels termes del numerador amb b tindríem les mateixes acotacions si utilitzem que (5.35) ens diu també que

$$\|Y\|_\varepsilon^2 \geq \varepsilon |b|^2 \quad si\ \varepsilon < \varepsilon_0$$

Per tant, ajuntant (5.37), (5.38) i (5.39) (i les mateixes acotacions pels termes amb b), tenim que:

$$\sup_{0\neq Y\in H_2^\varepsilon} \frac{\left\|\left(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}A_\varepsilon\right) Y\right\|_\varepsilon}{\|Y\|_\varepsilon} \leq \sup_{0\neq Y\in H_2^\varepsilon} \sqrt{4\left(2+O(\sqrt{\varepsilon})\right)} = 2\sqrt{2} + O(\sqrt{\varepsilon}) \quad si\ \varepsilon < \varepsilon_0$$

Per tant,

$$\left\|\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} A_\varepsilon|_{H_2^\varepsilon}\right\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H},\mathcal{H};\,\varepsilon)} \leq 2\sqrt{2} + O(\sqrt{\varepsilon}) \quad si\ \varepsilon < \varepsilon_0 \tag{5.40}$$

Tot això ho volíem per acotar el semigrup generat per aquest operador. Per tant, (5.40) ens assegura que:

$$\|e^{\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}A_\varepsilon|_{H_2^\varepsilon}\, t}\, V\|_\varepsilon \leq e^{\left(2\sqrt{2}+O(\sqrt{\varepsilon})\right)|t|}\|V\|_\varepsilon$$

per a tot $V \in H_2^\varepsilon$ i per a tot $t \in \mathbb{R}$, si $\varepsilon < \varepsilon_0$, tal i com havia enunciat el lema. □

Amb totes les hipòtesis demostrades, podem passar ja a la demostració de l'existència d'una varietat invariant exponencialment atractora.

Demostració del teorema 5.9. Havent vist els lemes 5.10, 5.11 i 5.13, més que una demostració el que farem és fer algunes observacions sobre els lemes anteriors per acabar d'assegurar-nos que podem aplicar el teorema de varietats invariants 5.6.

El primer és fixar-nos que la norma que considerem en els subespais invariants és la induïda per la de l'espai $\mathcal{H}$, és a dir, $\|\cdot\|_\varepsilon$, que és una norma que va canviant amb el paràmetre respecte al qual fem el límit.

La segona cosa és recordar que, en el nostre cas, l'exponent fraccionari és 0, tal i com ja havíem vist.

I, per últim, només queda veure que els exponents de les hipòtesis 5-6 i 7-8 ens van bé, és a dir, si $\beta(\varepsilon) = c(\alpha)/\sqrt[4]{\varepsilon}$ (l'exponent de la hipòtesi 5, que ens ha donat el lema 5.11) i $\rho(\varepsilon) = 2\sqrt{2} + O(\sqrt{\varepsilon})$ (l'exponent de les hipòtesis 7 i 8, que ens ha donat el lema 5.13) és immediat veure que

$$\lim_{\varepsilon\to 0} (\beta(\varepsilon) - \rho(\varepsilon)) = +\infty$$

Per tant, aplicant el teorema de varietats invariants 5.6 tenim ja demostrada l'existència d'una varietat invariant exponencialment atractora σ_ε que convergeix a zero quan $\varepsilon \to 0$ en norma $\|\cdot\|_\varepsilon$, tant ella com la seva derivada.

Per últim, vegem que el flux sobre la varietat invariant ve donat per $V = V_2 + \sigma_\varepsilon(V_2)$, on V_2 és solució de (5.19). Recordem que podem escriure (5.18), el model no lineal, de forma abstracta com:

$$\frac{d}{dt} V = A_N V + F_N(V) \ , \ V \in \mathcal{D}(A_\varepsilon)$$

En particular, si $V \in S_\varepsilon$ l'equació anterior és:

$$\frac{d}{dt} \left(V_2 + \sigma_\varepsilon(V_2)\right) = A_N \left(V_2 + \sigma_\varepsilon(V_2)\right) + F_N \left(V_2 + \sigma_\varepsilon(V_2)\right)$$

I com que H_2^ε i H_1^ε són subespais invariants de A_N:

$$\frac{d}{dt} V_2 + \frac{d}{dt} \sigma_\varepsilon(V_2) = A_N \left(V_2\right) + A_N \left(\sigma_\varepsilon(V_2)\right) + F_N \left(V_2 + \sigma_\varepsilon(V_2)\right)$$

Aquesta equació es pot desdoblar en dues equacions, una en H_2^ε i l'altra en H_1^ε, de manera que de forma immediata tenim que V_2 és solució de:

$$\frac{d}{dt} V_2 = A_N \left(V_2\right) + P_2^\varepsilon \left[F_N \left(V_2 + \sigma_\varepsilon(V_2)\right)\right], \quad V_2 \in H_2^\varepsilon$$

□

Observació 5.14. *Serà important en els apartats següents el fet que la norma amb què la varietat invariant i la seva derivada tendeixin a zero sigui la norma $\|\cdot\|_\varepsilon$. De tota manera, també es pot demostrar el teorema 5.9 amb la norma $\|\cdot\|_{\mathcal{H}}$, de manera que també existiria una varietat invariant exponencialment atractora tal que ella i la seva derivada convergirien a zero quan $\varepsilon \to 0$ en la norma $\|\cdot\|_{\mathcal{H}}$. Però això resulta no ser suficient a l'hora de demostrar que el sistema (5.18) convergeix en norma $\mathcal{C}^1$ a l'equació diferencial ordinària límit que trobarem en l'apartat 5.3.4 a no ser que f només depengui de la funció (és a dir, $f = f(u(1))$) i no de la funció i la derivada com és el nostre cas. Però en aquesta situació, l'equació límit no seria estructuralment estable. Per tant, ens interessa mirar-nos el teorema anterior amb la norma $\|\cdot\|_\varepsilon$.*

5.3.3 Conseqüències del teorema d'existència de varietats invariants.

En el teorema anterior hem demostrat l'existència d'una varietat invariant exponencialment atractora per al nostre model no lineal donada per $\sigma_\varepsilon : H_2^\varepsilon \to H_1^\varepsilon$ i que, a més, compleix que:

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \sup_{V_2 \in H_2^\varepsilon} \|\sigma_\varepsilon(V_2)\|_\varepsilon = 0 \qquad \text{i} \tag{5.41}$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\sup_{V_2\in H_2^\varepsilon}\|D\sigma_\varepsilon(V_2)\|_{\mathcal{L}(H_2^\varepsilon,H_1^\varepsilon)}=\lim_{\varepsilon\to 0}\sup_{V_2\in H_2^\varepsilon}\left(\sup_{W_2\in H_2^\varepsilon}\frac{\|D\sigma_\varepsilon(V_2)[W_2]\,\|_\varepsilon}{\|W_2\|_\varepsilon}\right)=0 \tag{5.42}$$

Escrivim amb més detall què significa això. En primer lloc, com que H_2^ε és un espai de dimensió 2, podem pensar σ_ε com a funció dels dos paràmetres de què depèn $V_2\in H_2^\varepsilon$. Així, σ_ε es pot escriure com:

$$\sigma_\varepsilon(a,b)=\begin{pmatrix}(\sigma_\varepsilon^{11}(a,b)\ ,\ \sigma_\varepsilon^{12}(a,b))\\(\sigma_\varepsilon^{21}(a,b)\ ,\ \sigma_\varepsilon^{22}(a,b))\end{pmatrix}\in H_1^\varepsilon\subset\mathcal{H}$$

per $a,b\in\mathbb{C}$, i on $\sigma_\varepsilon^{12}(\cdot,\cdot)=\sigma_\varepsilon^{11}(\cdot,\cdot)|_{x=1}$ ja que $\sigma_\varepsilon\in\mathcal{H}$.

Justifiquem-ho una mica més. A través de l'isomorfisme entre H_2^ε i H_2^0, que donarem de manera explícita en l'apartat 5.3.4, es pot veure que existeix una base de H_2^ε on un element de la forma:

$$\begin{pmatrix}(u,u(1))\\(v,v(1))\end{pmatrix}\in H_2^\varepsilon$$

té coordenades $(u(1),v(1))$ i que aquesta base té com a límit quan $\varepsilon\to 0$ a la base de H_2^0:

$$\left\{\begin{pmatrix}(x,1)\\(0,0)\end{pmatrix},\begin{pmatrix}(0,0)\\(x,1)\end{pmatrix}\right\}.$$

Per tant, si:

$$V_2=\begin{pmatrix}(u,u(1))\\(v,v(1))\end{pmatrix}\in H_2^\varepsilon$$

podem pensar $\sigma_\varepsilon(V_2)$ en funció de les coordenades de V_2 en aquesta base, és a dir, $\sigma_\varepsilon(u(1),v(1))$.

Pensant σ_ε en funció de dos paràmetres tenim en particular que la norma $\|\cdot\|_\varepsilon$ per a elements d'aquest tipus és:

$$\|\sigma_\varepsilon(a,b)\|_\varepsilon^2=\int_0^1|\left(\sigma_\varepsilon^{11}(a,b)\right)_x|^2\,dx+\int_0^1|\sigma_\varepsilon^{21}(a,b)|^2\,dx+\frac{1}{\varepsilon}|\sigma_\varepsilon^{22}(a,b)|^2$$

Així, la condició (5.41) en particular ens diu que:

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\sup_{a,b\in\mathbb{C}}\frac{|\sigma_\varepsilon^{22}(a,b)|}{\sqrt{\varepsilon}}=0 \tag{5.43}$$

però també que

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\sup_{a,b\in\mathbb{C}}|\sigma_\varepsilon^{12}(a,b)|=0 \tag{5.44}$$

ja que σ_ε^{12} és el valor a l'extrem de σ_ε^{11}.

Mirem-nos ara la condició sobre la diferencial. Si fixem un punt de H_2^ε, que representarem per les seves coordenades $(a_0, b_0)^T$, la diferencial de σ_ε en aquest punt és l'aplicació lineal definida per

$$D\sigma_\varepsilon(a_0,b_0)\cdot\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} (\partial_1\sigma_\varepsilon^{11}(a_0,b_0)\cdot a+\partial_2\sigma_\varepsilon^{11}(a_0,b_0)\cdot b\ ,\ \partial_1\sigma_\varepsilon^{12}(a_0,b_0)\cdot a+\partial_2\sigma_\varepsilon^{12}(a_0,b_0)\cdot b) \\ \\ (\partial_1\sigma_\varepsilon^{21}(a_0,b_0)\cdot a+\partial_2\sigma_\varepsilon^{21}(a_0,b_0)\cdot b\ ,\ \partial_1\sigma_\varepsilon^{22}(a_0,b_0)\cdot a+\partial_2\sigma_\varepsilon^{22}(a_0,b_0)\cdot b) \end{pmatrix}$$

on ∂_i denota la derivada respecte la i-èssima variable. La condició (5.42) ens diu que

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\ \sup_{a_0,b_0\in\mathbb{C}}\ \sup_{(a,b)\neq(0,0)}\ \frac{\left\|D\sigma_\varepsilon(a_0,b_0)\cdot(a,b)^T\right\|_\varepsilon}{\left\|(a,b)^T\right\|_\varepsilon}=0 \tag{5.45}$$

on denotem per $\left\|(a,b)^T\right\|_\varepsilon$ la ε-norma de l'element H_2^ε que té coordenades $(a,b)^T$. Ens interessarà escollir unes certes direccions on mirar-nos aquestes derivades que més endavant seran molt útils. En primer lloc, si prenem $(a,b)^T=(1,0)^T$, es dedueix de (5.45) que

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\ \sup_{a_0,b_0\in\mathbb{C}}\left\|\begin{pmatrix} (\partial_1\sigma_\varepsilon^{11}(a_0,b_0),\ \partial_1\sigma_\varepsilon^{12}(a_0,b_0)) \\ \\ (\partial_1\sigma_\varepsilon^{21}(a_0,b_0),\ \partial_1\sigma_\varepsilon^{22}(a_0,b_0)) \end{pmatrix}\right\|_\varepsilon=0 \tag{5.46}$$

ja que el denominador està acotat inferiorment de manera independent de ε quan $\varepsilon\to 0$. Només cal escriure la norma anterior, que és:

$$\int_0^1\left|\left((\partial_1\sigma_\varepsilon^{11})(a_0,b_0)\right)_x\right|^2\,dx+\int_0^1\left|(\partial_1\sigma_\varepsilon^{21})(a_0,b_0)\right|^2\,dx+\frac{1}{\varepsilon}\left|(\partial_1\sigma_\varepsilon^{22})(a_0,b_0)\right|^2$$

i tenim que:

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\sup_{a_0,b_0\in\mathbb{C}}\frac{|(\partial_1\sigma_\varepsilon^{22})(a_0,b_0)|}{\sqrt{\varepsilon}}\right)=0 \tag{5.47}$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\sup_{a_0,b_0\in\mathbb{C}}\left|(\partial_1\sigma_\varepsilon^{12})(a_0,b_0)\right|\right)=0 \tag{5.48}$$

Si ens mirem ara la norma $\|\cdot\|_\varepsilon$ de la diferencial en la direcció $(0,1)^T$, el que tenim és:

$$\sup_{a_0,b_0\in\mathbb{C}}\frac{\left\|D\sigma_\varepsilon(a_0,b_0)\cdot(0,1)^T\right\|_\varepsilon}{\left\|(0,1)^T\right\|_\varepsilon}\xrightarrow[\varepsilon\to 0]{}0$$

Però observem que:

$$\frac{\sqrt{\varepsilon}\left\|D\sigma_\varepsilon(a_0,b_0)\cdot(0,1)^T\right\|_\varepsilon}{\left\|(0,1)^T\right\|_{\mathcal{H}}}\leq\frac{\left\|D\sigma_\varepsilon(a_0,b_0)\cdot(0,1)^T\right\|_\varepsilon}{\left\|(0,1)^T\right\|_\varepsilon}$$

de manera que també tenim:

$$\sup_{a_0,b_0\in\mathbb{C}} \sqrt{\varepsilon}\left\|D\sigma_\varepsilon(a_0,b_0)\cdot(0,1)^T\right\|_\varepsilon \underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} 0$$

és a dir,

$$\sup_{a_0,b_0\in\mathbb{C}} \varepsilon\int_0^1 \left|\left((\partial_2\sigma_\varepsilon^{11})(a_0,b_0)\right)_x\right|^2 dx+ \\ +\varepsilon\int_0^1 \left|(\partial_2\sigma_\varepsilon^{21})(a_0,b_0)\right|^2 dx+\varepsilon\frac{1}{\varepsilon}\left|(\partial_2\sigma_\varepsilon^{22})(a_0,b_0)\right|^2 \underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} 0$$

En particular, si ens mirem aquest últim límit, també és cert que:

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\sup_{a_0,b_0\in\mathbb{C}}\left|(\partial_2\sigma_\varepsilon^{22})(a_0,b_0)\right| = 0 \tag{5.49}$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\sup_{a_0,b_0\in\mathbb{C}}\sqrt{\varepsilon}\left|(\partial_2\sigma_\varepsilon^{12})(a_0,b_0)\right| = 0 \tag{5.50}$$

5.3.4 Equació límit.

Teorema 5.15 (Equació límit). *L'equació sobre la varietat invariant exponencialment atractora de dimensió 2:*

$$\frac{d}{dt}V_2 = A_N(V_2) + P_2^\varepsilon\left[F_N\left(V_2+\sigma_\varepsilon(V_2)\right)\right], \quad V_2\in H_2^\varepsilon \tag{5.51}$$

convergeix quan $\varepsilon\to 0$ en la topologia $\mathcal{C}^1$ al sistema bidimensional següent:

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} u(1)\\ w(1)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w(1)\\ -u(1)-\kappa f(u(1),w(1))\end{pmatrix} \tag{5.52}$$

(on les variables s'anomenaran $u(1), w(1)$). En particular, si (5.52) és estructuralment estable aleshores, per ε suficientment petit, el flux en la varietat invariant donat per (5.51) és topològicament equivalent al flux de (5.52).

Les implicacions d'aquest enunciat les comentarem en l'apartat 5.3.5.

Observació 5.16. *Podem reescriure el sistema (5.52) com l'equació diferencial ordinària no lineal límit:*

$$u''(1)+u(1)+\kappa f(u(1),u'(1)) = 0 \tag{5.53}$$

Per tant, el teorema anterior ens permet dir que les solucions de l'equació en derivades parcials no lineal (5.6) (el nostre model) amb el temps accelerat convergeixen a les solucions de l'equació diferencial ordinària no lineal (5.53) quan $\varepsilon\to 0$. Per tant, podem dir que l'equació en derivades parcials no lineal (5.6) té com a límit l'equació diferencial ordinària no lineal (5.53) quan $\varepsilon\to 0$.

La idea del teorema 5.6 és que quan el temps es fa gran, les solucions de l'equació s'acosten exponencialment a solucions de l'equació sobre la varietat invariant σ_ε. Per escriure què significa això en el nostre cas, ens cal donar abans certa notació i repassar alguns fets que hem vist.

Recordem que en l'observació 5.8 de l'apartat anterior havíem vist que els espais H_2^ε i H_2^0 són isomorfs i si ε és prou petit les projeccions corresponents convergien en norma (recordem també les notacions introduïdes en aquest apartat). De fet, podem donar aquest isomorfisme. Considerem la restricció de P_2^0 a H_2^ε, que denotem per P_0:

$$P_0 = P_2^0|_{H_2^\varepsilon} : H_2^\varepsilon \subset \mathcal{H} \longrightarrow H_2^0$$

i sigui

$$\begin{gathered} Q_\varepsilon : H_2^0 \longrightarrow H_2^\varepsilon \\ \begin{pmatrix} (u(1)x\ ,\ u(1)) \\ (v(1)x\ ,\ v(1)) \end{pmatrix} \longrightarrow a\Psi_\varepsilon^1 + b\Psi_\varepsilon^2 \end{gathered}$$

on $u(1), v(1) \in \mathbb{C}$ són les coordenades del punt de H_2^0 i on $a, b \in \mathbb{C}$ són tals que $P_0 \circ Q_\varepsilon = Id|_{H_2^0}$. Per tant, a i b vénen d'imposar que

$$P_0\left(a\Psi_\varepsilon^1 + b\Psi_\varepsilon^2\right) = \begin{pmatrix} (u(1)x\ ,\ u(1)) \\ (v(1)x\ ,\ v(1)) \end{pmatrix}$$

Utilitzant l'expressió explícita de P_2^0 (i per tant de P_0) vista en l'observació 5.8 i igualant components, trobar a i b es converteix en resoldre un sistema lineal de dues variables, el resultat del qual és:

$$a = u(1)\,\frac{\lambda_0^-}{\left(\lambda_0^- - \lambda_0^+\right)\sin C(\varepsilon)} \;+\; v(1)\,\frac{-1}{\left(\lambda_0^- - \lambda_0^+\right)\sin C(\varepsilon)}$$

$$b = u(1)\,\frac{-\lambda_0^+}{\left(\lambda_0^- - \lambda_0^+\right)\sin \overline{C(\varepsilon)}} \;+\; v(1)\,\frac{1}{\left(\lambda_0^- - \lambda_0^+\right)\sin \overline{C(\varepsilon)}}$$

Amb això, ja tenim definit l'isomorfisme entre H_2^ε i H_2^0 per a $\varepsilon > 0$. Aquest isomorfisme ens permet fer un canvi de variables en (5.51) que serà la manera convenient d'escriure l'equació sobre la varietat invariant per tal de poder trobar l'equació límit. Efectivament, ja que podem pensar $V_2 \in H_2^\varepsilon$ com $V_2 = Q_\varepsilon V_0$, amb $V_0 \in H_2^0$, de manera que (5.51) es pot escriure com:

$$\frac{d}{dt}\,Q_\varepsilon V_0 = A_N\left(Q_\varepsilon V_0\right) + P_2^\varepsilon\left[F_N\left(Q_\varepsilon V_0 + \sigma_\varepsilon(Q_\varepsilon V_0)\right)\right], \quad V_0 \in H_2^0$$

Però encara podem fer-ho més fàcil, ja que aplicant $P_0 = Q_\varepsilon^{-1}$ a l'anterior equació continuem tenint les mateixes solucions:

$$\frac{d}{dt}\,V_0 = P_0 A_N\left(Q_\varepsilon V_0\right) + P_0 P_2^\varepsilon\left[F_N\left(Q_\varepsilon V_0 + \sigma_\varepsilon(Q_\varepsilon V_0)\right)\right], \quad V_0 \in H_2^0 \qquad (5.54)$$

L'equació sobre la varietat invariant és la mateixa, però sobre els elements de H_2^0 serà més fàcil d'escriure.

De fet, ens interessarà pensar encara un altre canvi de variables en V_0. En primer lloc, si pensem que els elements de H_2^0 són de la forma

$$V_0 = \begin{pmatrix} (u(1)x\ ,\ u(1)) \\ (v(1)x\ ,\ v(1)) \end{pmatrix}$$

per $u(1), v(1) \in \mathbb{C}$, podem definir $w(1)$ de manera que $v(1) = \sqrt{\varepsilon}w(1)$, o sigui que podem partir d'elements de H_2^0 de la forma

$$V_0 = \begin{pmatrix} (u(1)x\ ,\ u(1)) \\ (\sqrt{\varepsilon}w(1)x\ ,\ \sqrt{\varepsilon}w(1)) \end{pmatrix}. \tag{5.55}$$

De la mateixa manera, hem vist en l'apartat anterior que podem pensar $\sigma_\varepsilon(Q_\varepsilon V_0)$ com a funció de les coordenades de $Q_\varepsilon V_0$, que ja hem vist que són funció de les coordenades de V_0. Si a més ho ajuntem amb el canvi de variables anterior tenim:

$$\sigma_\varepsilon(Q_\varepsilon V_0) = \sigma_\varepsilon(u(1), v(1)) = \sigma_\varepsilon(u(1), \sqrt{\varepsilon}w(1))$$

que és

$$\begin{pmatrix} (\sigma_\varepsilon^{11}(u(1), \sqrt{\varepsilon}w(1))\ ,\ \sigma_\varepsilon^{12}(u(1), \sqrt{\varepsilon}w(1))\ ) \\ (\sigma_\varepsilon^{21}(u(1), \sqrt{\varepsilon}w(1))\ ,\ \sigma_\varepsilon^{22}(u(1), \sqrt{\varepsilon}w(1))\ ) \end{pmatrix} \tag{5.56}$$

Escrivim l'equació (5.54) en les noves variables i obtenim la següent equació, que és complicada en notació, però que estarà escrita en les variables convenients:

$$\frac{d}{dt} V_0 = (P_0 A_N Q_\varepsilon) V_0 + P_0 P_2^\varepsilon \left[F_N \left(Q_\varepsilon V_0 + \sigma_\varepsilon(Q_\varepsilon V_0)\right)\right] \tag{5.57}$$

on $\sigma_\varepsilon(Q_\varepsilon V_0) := \sigma_\varepsilon(u(1), \sqrt{\varepsilon}w(1))$ definida en (5.56) si V_0 ve donat per (5.55). Però podem sumar i restar un mateix terme, i pensar l'equació anterior com:

$$\begin{gathered} \frac{d}{dt} V_0 = (P_0 A_N Q_\varepsilon) V_0 + \\ P_0 P_2^\varepsilon \left[F_N \left(Q_\varepsilon V_0 + \sigma_\varepsilon(Q_\varepsilon V_0)\right)\right] - P_2^0 P_2^0 \left[F_N \left(Q_\varepsilon V_0 + \sigma_\varepsilon(Q_\varepsilon V_0)\right)\right] + \\ P_2^0 P_2^0 \left[F_N \left(Q_\varepsilon V_0 + \sigma_\varepsilon(Q_\varepsilon V_0)\right)\right] - P_2^0 F_N(V_0) + \\ + P_2^0 F_N(V_0) \end{gathered} \tag{5.58}$$

La idea és que els termes diferència, de fet van cap a zero quan $\varepsilon \to 0$, de manera que (5.58) convergeix en algun sentit que ara precisarem a

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} u(1) \\ w(1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w(1) \\ -u(1) + \kappa f(u(1), w(1)) \end{pmatrix}$$

que és l'equació límit que havíem enunciat en el teorema 5.15. Per veure que és l'equació límit, només cal usar les definicions dels operadors per escriure les components de cadascuna de les parts de (5.58) i trobar-ne el seu límit en norma $\mathcal{C}^1$, cosa que veurem en els següents lemes.

Lema 5.17 (Operador lineal). *Sigui V_0 de la forma donada per (5.55). Aleshores:*

$$(P_0 A_N Q_\varepsilon)\, V_0 =$$

$$= \begin{pmatrix} (\, w(1)x, w(1)\,) \\ (\, -\sqrt{\varepsilon}\,[c_1(\varepsilon)u(1) + (c_2(\varepsilon)+r)\sqrt{\varepsilon}w(1)]\, x, -\sqrt{\varepsilon}\,[c_1(\varepsilon)u(1) + (c_2(\varepsilon)+r)\sqrt{\varepsilon}w(1)]\,) \end{pmatrix}$$

on, si denotem $\lambda_0^+(\varepsilon)$ per λ, tenim:

$$c_1(\varepsilon) = \frac{(1+\alpha\lambda)\ \bar{\lambda}\ C(\varepsilon)\cos C(\varepsilon)}{(\bar{\lambda}-\lambda)\sin C(\varepsilon)} \ - \ \frac{\left(1+\alpha\bar{\lambda}\right)\ \lambda\ \overline{C(\varepsilon)}\cos\overline{C(\varepsilon)}}{(\bar{\lambda}-\lambda)\sin\overline{C(\varepsilon)}}$$

$$c_2(\varepsilon) = \frac{-\,(1+\alpha\lambda)\ \ C(\varepsilon)\cos C(\varepsilon)}{(\bar{\lambda}-\lambda)\sin C(\varepsilon)} \ + \ \frac{\left(1+\alpha\bar{\lambda}\right)\ \ \overline{C(\varepsilon)}\cos\overline{C(\varepsilon)}}{(\bar{\lambda}-\lambda)\sin\overline{C(\varepsilon)}}$$

A més, es pot veure que

$$\lim_{\varepsilon\to 0} c_1(\varepsilon) = 1$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0} c_2(\varepsilon) = \alpha$$

Demostració. La demostració d'aquest lema no serà res més que escriure amb detall aquest terme utilitzant les definicions que hem donat fins ara. Si partim de

$$V_0 = \begin{pmatrix} (u(1)x\ ,\ u(1)) \\ (\sqrt{\varepsilon}w(1)x\ ,\ \sqrt{\varepsilon}w(1)) \end{pmatrix}$$

per $u(1), w(1) \in \mathbb{C}$ qualssevol, aleshores, la definició de Q_ε ens diu que:

$$Q_\varepsilon V_0 = \begin{pmatrix} (a\sin C(\varepsilon)x + b\sin\overline{C(\varepsilon)}x\ ,\ u(1)) \\ (a\lambda\sin C(\varepsilon)x + b\overline{\lambda}\sin\overline{C(\varepsilon)}x\ ,\ \sqrt{\varepsilon}w(1)) \end{pmatrix}$$

on

$$a = u(1)\,\frac{\overline{\lambda}}{\left(\overline{\lambda}-\lambda\right)\sin C(\varepsilon)} \ + \ \sqrt{\varepsilon}w(1)\,\frac{-1}{\left(\overline{\lambda}-\lambda\right)\sin C(\varepsilon)}$$

$$b = u(1)\,\frac{-\lambda}{\left(\overline{\lambda}-\lambda\right)\sin\overline{C(\varepsilon)}} \ + \ \sqrt{\varepsilon}w(1)\,\frac{1}{\left(\overline{\lambda}-\lambda\right)\sin\overline{C(\varepsilon)}}$$

Per tant,

$$P_0 A_N Q_\varepsilon V_0 = \begin{pmatrix} \left(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\sqrt{\varepsilon}w(1)x\ ,\ \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\sqrt{\varepsilon}w(1)\right) \\ (\ -\sqrt{\varepsilon}(d+\sqrt{\varepsilon}rw(1))\,x, -\sqrt{\varepsilon}(d+\sqrt{\varepsilon}rw(1))\ ) \end{pmatrix}$$

on

$$d = \frac{\partial}{\partial x}\left[(1+\lambda\alpha)a\sin C(\varepsilon)x + (1+\overline{\lambda}\alpha)b\sin\overline{C(\varepsilon)}x\right]\Big|_{x=1}$$

Si desenvolupem d agrupant els termes en $u(1)$ i $w(1)$ tenim que:

$$d = c_1(\varepsilon)u(1) + \sqrt{\varepsilon}c_2(\varepsilon)w(1)$$

on $c_1(\varepsilon)$ i $c_2(\varepsilon)$ són les definides en l'enunciat del lema, de manera que $P_0 A_N Q_\varepsilon V_0$ queda tal i com volíem demostrar.

L'altra part de l'enunciat, que és trobar els límits d'aquests dos coeficients, s'obté després de certs càlculs. Observem en primer lloc que

$$c_1(\varepsilon) = 2\,Re\,\frac{(1+\alpha\lambda)\ \bar{\lambda}\ C(\varepsilon)\cos C(\varepsilon)}{(\bar{\lambda}-\lambda)\sin C(\varepsilon)}$$

$$c_2(\varepsilon) = 2\,Re\,\frac{-(1+\alpha\lambda)\ \ C(\varepsilon)\cos C(\varepsilon)}{(\bar{\lambda}-\lambda)\sin C(\varepsilon)}$$

Desenvolupant cadascuna de les funcions de ε entorn de $\varepsilon = 0$ es pot concloure que els límits són els que s'han enunciat. □

De la part no lineal, el que ens portarà més feina és el que recull el següent lema.

Lema 5.18 (Primer terme diferència). *En la notació anterior tenim que:*

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \left\| P_2^0(P_2^\varepsilon - P_2^0)\,G\right\|_{\mathcal{C}^1(\mathcal{H},\mathcal{H})} = 0$$

quan

$$G\begin{pmatrix}(u,u(1))\\(v,\beta)\end{pmatrix} = G(u(1),\beta) = \begin{pmatrix}(0,0)\\(f(u(1),\beta),f(u(1),\beta))\end{pmatrix}.$$

Si denotem per

$$P_2^\varepsilon\begin{pmatrix}(0,0)\\(-\kappa f(\xi,\eta),-\kappa f(\xi,\eta))\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}(p_\varepsilon^{11}(\xi,\eta)\ ,\ p_\varepsilon^{12}(\xi,\eta))\\(p_\varepsilon^{21}(\xi,\eta)\ ,\ p_\varepsilon^{22}(\xi,\eta))\end{pmatrix} \in H_2^\varepsilon$$

llavors tenim que

$$P_0 P_2^\varepsilon\left[F_N\left(Q_\varepsilon V_0 + \sigma_\varepsilon(Q_\varepsilon V_0)\right)\right] - P_2^0 P_2^0\left[F_N\left(Q_\varepsilon V_0 + \sigma_\varepsilon(Q_\varepsilon V_0)\right)\right] =$$

$$\sqrt{\varepsilon}\begin{pmatrix} (\,p_\varepsilon^{12}(\tilde u,\tilde w)\,x\ ,\ p_\varepsilon^{12}(\tilde u,\tilde w)\,) \\ (\,[p_\varepsilon^{22}(\tilde u,\tilde w)+\kappa f(\tilde u,\tilde w)]\ x\ ,\ [p_\varepsilon^{22}(\tilde u,\tilde w)+\kappa f(\tilde u,\tilde w)]\,) \end{pmatrix}$$

on

$$\tilde u = u(1)+\sigma_\varepsilon^{12}(u(1),\sqrt{\varepsilon}w(1))$$
$$\tilde w = w(1)+\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\,\sigma_\varepsilon^{22}(u(1),\sqrt{\varepsilon}w(1))$$

i són certs els límits següents:

1. $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\left(\sup\limits_{u(1),\,w(1)\in\mathbb{C}}|p_\varepsilon^{12}(\tilde u,\tilde w)|\right)=0$

   i

   $$\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\sup_{u(1),\,w(1)\in\mathbb{C}}\left|\frac{\partial}{\partial u(1)}\left[p_\varepsilon^{12}(\tilde u,\tilde w)\right]\right|\right)=0$$
   $$\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\sup_{u(1),\,w(1)\in\mathbb{C}}\left|\frac{\partial}{\partial w(1)}\left[p_\varepsilon^{12}(\tilde u,\tilde w)\right]\right|\right)=0$$

2. $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\left(\sup\limits_{u(1),\,w(1)\in\mathbb{C}}|p_\varepsilon^{22}(\tilde u,\tilde w)+\kappa f(\tilde u,\tilde w)|\right)=0$

   i

   $$\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\sup_{u(1),\,w(1)\in\mathbb{C}}\left|\frac{\partial\,[p_\varepsilon^{22}(\tilde u,\tilde w)+\kappa f(\tilde u,\tilde w)]}{\partial u(1)}\right|\right)=0$$
   $$\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\sup_{u(1),\,w(1)\in\mathbb{C}}\left|\frac{\partial\,[p_\varepsilon^{22}(\tilde u,\tilde w)+\kappa f(\tilde u,\tilde w)]}{\partial w(1)}\right|\right)=0$$

on $\tilde u,\tilde w$ són les funcions de $u(1)$ i $w(1)$ anteriors.

Demostració. La idea essencial és la següent. Veure que les normes dels operadors $P_2^0(P_2^\varepsilon-P_2^0)\,G$ i la seva diferencial convergeixen a 0 quan $\varepsilon\to 0$ serà conseqüència del fet que $\|P_2^\varepsilon-P_2^0\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H},\mathcal{H})}\to 0$ en la norma $\|\cdot\|_{\mathcal{H}}$. I amb això deduirem els límits de 1 i 2, ja que són parts de les expressions de les normes anteriors i aplicar G o F_N serà, essencialment, un canvi de notació.

Comencem veient que:

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left\|P_2^0(P_2^\varepsilon-P_2^0)\,G\right\|_{\mathcal{C}^0(\mathcal{H},\mathcal{H})}=0.$$

en la norma donada per $\|\cdot\|_{\mathcal{H}}$. Efectivament, si denotem $\|\cdot\|_{\mathcal{C}^0(\mathcal{H},\mathcal{H})}$ per $\|\cdot\|_{\mathcal{C}^0_{\mathcal{H}}}$ tenim:

$$\left\|P_2^0(P_2^\varepsilon-P_2^0)\,G\right\|_{\mathcal{C}^0_{\mathcal{H}}}\le\left\|P_2^0\right\|_{\mathcal{C}^0_{\mathcal{H}}}\left\|P_2^\varepsilon-P_2^0\right\|_{\mathcal{C}^0_{\mathcal{H}}}\|G\|_{\mathcal{C}^0_{\mathcal{H}}}$$

L'únic problema és veure que $\|G\|_{\mathcal{C}^0_{\mathcal{H}}}$ està acotat quan $\varepsilon \to 0$. Però com que f està acotada per N_f, només cal escriure un moment les normes per veure que

$$\|G\|_{\mathcal{C}^0_{\mathcal{H}}} = \sup_{V\in\mathcal{H}} \|G(V)\|_{\mathcal{H}} \leq \sqrt{2}N_f$$

Per tant,

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \left\|P_0(P_2^\varepsilon - P_2^0)\, G\right\|_{\mathcal{C}^0_{\mathcal{H}}} = 0$$

Això vol dir que

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \sup_{u(1),\,\beta\in\mathbb{C}} \left\|P_2^0(P_2^\varepsilon - P_2^0)\, G\,(u(1),\beta)\right\|_{\mathcal{H}} = 0 \tag{5.59}$$

D'altra banda, podem comprovar fàcilment que

$$P_2^0(P_2^\varepsilon - P_2^0)\, F_N\ (Q_\varepsilon V_0 + \sigma_\varepsilon(Q_\varepsilon V_0)) = \sqrt{\varepsilon} P_2^0(P_2^\varepsilon - P_2^0)\, G\,(\tilde{u},\tilde{w})$$

on $\tilde{u},\tilde{w}$ són les funcions de $u(1), w(1)$ que ens donava l'enunciat:

$$\tilde{u} = u(1) + \sigma_\varepsilon^{12}(u(1), \sqrt{\varepsilon}w(1))$$

$$\tilde{w} = w(1) + \frac{\sigma_\varepsilon^{22}(u(1), \sqrt{\varepsilon}w(1))}{\sqrt{\varepsilon}}$$

I tenim:

$$P_2^0(P_2^\varepsilon - P_2^0)\, G\,(\tilde{u},\tilde{w}) = \begin{pmatrix} (\, p_\varepsilon^{12}(\tilde{u},\tilde{w})\, x\ ,\ p_\varepsilon^{12}(\tilde{u},\tilde{w})\,) \\ (\, [p_\varepsilon^{22}(\tilde{u},\tilde{w}) + \kappa f(\tilde{u},\tilde{w})]\ x\ ,\ [p_\varepsilon^{22}(\tilde{u},\tilde{w}) + \kappa f(\tilde{u},\tilde{w})]\,) \end{pmatrix}$$

I com que (5.59) ens diu que

$$\sup_{u(1),w(1)\in\mathbb{C}} \left\|P_2^0(P_2^\varepsilon - P_2^0)\, G\,(\tilde{u},\tilde{w})\right\|_{\mathcal{H}} \underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} 0$$

escrivint el quadrat d'aquesta norma utilitzant la notació de p_ε^{ij} tenim que

$$\sup_{u(1),w(1)\in\mathbb{C}} \left\{ \left|p_\varepsilon^{12}(\tilde{u},\tilde{w})\right|^2 + \frac{4}{3}\left|p_\varepsilon^{22}(\tilde{u},\tilde{w}) + \kappa f(\tilde{u},\tilde{w})\right|^2 \right\} \underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} 0$$

En particular,

$$\sup_{u(1),w(1)\in\mathbb{C}} \left|p_\varepsilon^{12}(\tilde{u},\tilde{w})\right|^2 \underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} 0 \quad , \quad \sup_{u(1),w(1)\in\mathbb{C}} \left|p_\varepsilon^{22}(\tilde{u},\tilde{w}) + \kappa f(\tilde{u},\tilde{w})\right|^2 \underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} 0$$

que són dos dels límits que volíem veure.

Ens queda demostrar el mateix per a la diferencial. Serà més llarg d'escriure, però la idea continua essent la mateixa. Només cal observar que com

que les projeccions són contínues i f és regular, podem pensar que $p_\varepsilon^{ij}(\tilde{u},\tilde{w})$ són funcions regulars en $(u(1),w(1))$.

Comencem veient que

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\ \sup_{\xi_0,\,\eta_0\in\mathbb{C}} \left\| D\ \left[P_2^0(P_2^\varepsilon - P_2^0)\,G\right][\xi_0,\eta_0]\right\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H},\mathcal{H})} = 0$$

En primer lloc, com que les projeccions són lineals, és evident que

$$D\ \left[P_2^0(P_2^\varepsilon - P_2^0)\,G\right][\xi_0,\eta_0]\cdot\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\end{pmatrix} = P_2^0(P_2^\varepsilon - P_2^0)\,DG[\xi_0,\eta_0]\cdot\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\end{pmatrix}$$

La diferencial de G en la direcció (ξ,η) és l'operador lineal següent:

$$DG[\xi_0,\eta_0]\cdot\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (0,0) \\ (\,\partial_1 f(\xi_0,\eta_0)\xi + \partial_2 f(\xi_0,\eta_0)\eta\,,\ \partial_1 f(\xi_0,\eta_0)\xi + \partial_2 f(\xi_0,\eta_0)\eta\,)\end{pmatrix}$$

on els subíndexos tornen a denotar les derivades respecte la primera o segona variable. En particular, és un operador acotat independentment de ε en la norma $\mathcal{H}$ per a qualsevol (ξ_0,η_0) ja que f és Lipschitz. Així,

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\ \sup_{\xi_0,\,\eta_0\in\mathbb{C}} \left\| D\ \left[P_2^0(P_2^\varepsilon - P_2^0)\,G\right][\xi_0,\eta_0]\right\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H},\mathcal{H})} = 0 \tag{5.60}$$

pel mateix motiu d'abans.

Mirar-nos la diferencial des d'aquest punt de vista i en dues direccions concretes ens servirà per trobar els límits que ens falten en els punts 1 i 2 de l'enunciat del lema. Concretament, si escrivim la norma de la diferencial en la direcció $(\xi,\eta)=(1,0)$ i el punt $(\xi_0,\eta_0)=(\tilde{u},\tilde{w})$, (5.60) ens diu que:

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\sup_{u(1),\,w(1)\in\mathbb{C}} |(\partial_1 p_\varepsilon^{12})(\tilde{u},\tilde{w})|\right) = 0$$

$$\text{i}\qquad \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\sup_{u(1),\,w(1)\in\mathbb{C}} \left|\ \left[(\partial_1 p_\varepsilon^{22})(\tilde{u},\tilde{w}) + \kappa(\partial_1 f)(\tilde{u},\tilde{w})\right]\right|\right) = 0 \tag{5.61}$$

ja que és una part de l'expressió d'aquesta norma. I escrivint la norma de la diferencial en la direcció $(\xi,\eta)=(0,1)$ i el punt $(\xi_0,\eta_0)=(\tilde{u},\tilde{w})$, el límit (5.60) ens permet dir que:

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\sup_{u(1),\,w(1)\in\mathbb{C}} |(\partial_2 p_\varepsilon^{12})(\tilde{u},\tilde{w})|\right) = 0$$

$$\text{i}\qquad \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\sup_{u(1),\,w(1)\in\mathbb{C}} \left|\ \left[(\partial_2 p_\varepsilon^{22})(\tilde{u},\tilde{w}) + \kappa(\partial_2 f)(\tilde{u},\tilde{w})\right]\right|\right) = 0 \tag{5.62}$$

Per tant:

1. Si $\tilde{u}, \tilde{w}$ són les funcions de $u(1), w(1)$ que hem definit abans, aplicant la regla de la cadena tenim:

$$\frac{\partial}{\partial u(1)}\left[p_\varepsilon^{12}(\tilde{u},\tilde{w})\right] = \left[(\partial_1 p_\varepsilon^{12})(\tilde{u},\tilde{w})\right]\left[1+(\partial_1\sigma_\varepsilon^{12})(u(1),\sqrt{\varepsilon}w(1))\right] + \\ + \left[(\partial_2 p_\varepsilon^{12})(\tilde{u},\tilde{w})\right]\frac{(\partial_1\sigma_\varepsilon^{22})(u(1),\sqrt{\varepsilon}w(1))}{\sqrt{\varepsilon}}$$

Per (5.61) i (5.62) la part de les projeccions tendeix a zero quan $\varepsilon \to 0$, i per (5.47) i (5.48) (que s'obtenien del fet que σ_ε i $D\sigma_\varepsilon$ convergien a zero en la norma $\|\cdot\|_\varepsilon$, tal i com hem vist en l'apartat 5.3.3), la resta està acotada quan $\varepsilon \to 0$. Per tant,

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\sup_{u(1),\,w(1)\in\mathbb{C}}\left|\frac{\partial}{\partial u(1)}\left[p_\varepsilon^{12}(\tilde{u},\tilde{w})\right]\right|\right) = 0$$

De la mateixa manera,

$$\frac{\partial p_\varepsilon^{12}(\tilde{u},\tilde{w})}{\partial w(1)} = \left[(\partial_1 p_\varepsilon^{12})(\tilde{u},\tilde{w})\right]\left[\sqrt{\varepsilon}\cdot(\partial_2\sigma_\varepsilon^{12})(u(1),\sqrt{\varepsilon}w(1))\right] + \\ + \left[(\partial_2 p_\varepsilon^{12})(\tilde{u},\tilde{w})\right]\left[1+(\partial_2\sigma_\varepsilon^{22})(u(1),\sqrt{\varepsilon}w(1))\right]$$

Per tant, (5.61), (5.62) i els resultats (5.49) i (5.50) sobre la varietat invariant de l'apartat 5.3.3 ens permeten dir que

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\sup_{u(1),\,w(1)\in\mathbb{C}}\left|\frac{\partial p_\varepsilon^{12}(\tilde{u},\tilde{w})}{\partial w(1)}\right|\right) = 0$$

2. Fixem-nos ara en els límits que ens queden:

$$\frac{\partial}{\partial u(1)}\left[p_\varepsilon^{22}(\tilde{u},\tilde{w})+\kappa f(\tilde{u},\tilde{w})\right] = \\ \left[(\partial_1 p_\varepsilon^{22})(\tilde{u},\tilde{w})+\kappa(\partial_1 f)(\tilde{u},\tilde{w})\right]\left[1+(\partial_1\sigma_\varepsilon^{12})(u(1),\sqrt{\varepsilon}w(1))\right] + \\ + \left[(\partial_2 p_\varepsilon^{22})(\tilde{u},\tilde{w})+\kappa(\partial_2 f)(\tilde{u},\tilde{w})\right]\left[(\partial_1\sigma_\varepsilon^{22})(u(1),\sqrt{\varepsilon}w(1))\right]$$

Per (5.61), (5.62) i els resultats (5.47) i (5.48) de 5.3.3 tenim:

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\sup_{u(1),\,w(1)\in\mathbb{C}}\left|\frac{\partial}{\partial u(1)}\left[p_\varepsilon^{22}(\tilde{u},\tilde{w})+\kappa f(\tilde{u},\tilde{w})\right]\right|\right) = 0$$

I, anàlogament:

$$\frac{\partial}{\partial w(1)}\left[p_\varepsilon^{22}(\tilde{u},\tilde{w})+\kappa f(\tilde{u},\tilde{w})\right] = \\ \left[(\partial_1 p_\varepsilon^{22})(\tilde{u},\tilde{w})+\kappa(\partial_1 f)(\tilde{u},\tilde{w})\right]\left[\sqrt{\varepsilon}\cdot(\partial_2\sigma_\varepsilon^{12})(u(1),\sqrt{\varepsilon}w(1))\right] + \\ + \left[(\partial_2 p_\varepsilon^{22})(\tilde{u},\tilde{w})+\kappa(\partial_2 f)(\tilde{u},\tilde{w})\right]\left[1+(\partial_2\sigma_\varepsilon^{22})(u(1),\sqrt{\varepsilon}w(1))\right]$$

i, per tant:

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\sup_{u(1),\,w(1)\in\mathbb{C}}\left|\frac{\partial}{\partial w(1)}\left[p_\varepsilon^{22}(\tilde{u},\tilde{w})+\kappa f(\tilde{u},\tilde{w})\right]\right|\right)=0$$

Amb això, hem acabat la demostració del lema. □

Els resultats dels dos lemes anteriors són la part més delicada de la demostració del teorema 5.15 i per això els hem considerat a part. El que queda, ho recollim en el lema següent.

Lema 5.19 (Segon terme diferència). *El segon terme diferència de l'equació (5.58) és:*

$$P_2^0P_2^0\left[F_N\left(Q_\varepsilon V_0+\sigma_\varepsilon(Q_\varepsilon V_0)\right)\right]-P_2^0F_N(V_0)=$$

$$\sqrt{\varepsilon}\begin{pmatrix}(0,0)\\ \left(-\kappa\,x\left[\,f(\tilde{u},\tilde{w})-f(u(1),w(1))\,\right],-\kappa\,\left[\,f(\tilde{u},\tilde{w})-f(u(1),w(1))\right]\,\right)\end{pmatrix}$$

on:

$$\tilde{u}=u(1)+\sigma_\varepsilon^{12}(u(1),\sqrt{\varepsilon}w(1)),\quad \tilde{w}=w(1)+\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\,\sigma_\varepsilon^{22}(u(1),\sqrt{\varepsilon}w(1))$$

A més, són certs els límits següents:

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\sup_{u(1),w(1)\in\mathbb{C}}\left|f(\tilde{u},\tilde{w})-f(u(1),w(1))\right|\right)=0$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\sup_{u(1),w(1)\in\mathbb{C}}\left|\frac{\partial}{\partial u(1)}\left[f(\tilde{u},\tilde{w})-f(u(1),w(1))\right]\right|\right)=0$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\sup_{u(1),w(1)\in\mathbb{C}}\left|\frac{\partial}{\partial w(1)}\left[f(\tilde{u},\tilde{w})-f(u(1),w(1))\right]\right|\right)=0$$

Demostració. La primera part del lema és escriure els operadors. Ja hem vist en el lema anterior que:

$$P_2^0P_2^0\left[F_N\left(Q_\varepsilon V_0+\sigma_\varepsilon(Q_\varepsilon V_0)\right)\right]=\sqrt{\varepsilon}\begin{pmatrix}(0,0)\\ \left(-\kappa\,f(\tilde{u},\tilde{w})x,-\kappa\,f(\tilde{u},\tilde{w})\,\right)\end{pmatrix}$$

on:

$$\tilde{u}=u(1)+\sigma_\varepsilon^{12}(u(1),\sqrt{\varepsilon}w(1)),\quad \tilde{w}=w(1)+\frac{\sigma_\varepsilon^{22}(u(1),\sqrt{\varepsilon}w(1))}{\sqrt{\varepsilon}}$$

I com que:

$$F_N\left(Q_\varepsilon V_0\right) = \sqrt{\varepsilon}\begin{pmatrix} (0,0) \\ \left(-\kappa f(u(1), \frac{\sqrt{\varepsilon}w(1)}{\sqrt{\varepsilon}}) \ , -\kappa f(u(1), \frac{\sqrt{\varepsilon}w(1)}{\sqrt{\varepsilon}})\right) \end{pmatrix}$$

de la definició de P_2^0 tenim que:

$$P_2^0\left[F_N\left(Q_\varepsilon V_0\right)\right] = \sqrt{\varepsilon}\begin{pmatrix} (0,0) \\ (-\kappa f(u(1), w(1))\, x \ , -\kappa f(u(1), w(1))) \end{pmatrix}$$

Per tant, ja tenim l'expressió que volíem per $P_2^0 P_2^0\left[F_N\left(Q_\varepsilon V_0 + \sigma_\varepsilon(Q_\varepsilon V_0)\right)\right] - P_2^0 F_N(V_0)$. Mirem-nos ara els tres límits. Si comencem pel primer, del fet que f sigui Lipschitz i de la definició de $\tilde{u}, \tilde{w}$ tenim que:

$$|f(\tilde{u}, \tilde{w}) - f(u(1), w(1))| \leq L_f\, |(\tilde{u} - u(1), \tilde{w} - w(1))| =$$

$$= L_f \sqrt{\left|\sigma_\varepsilon^{12}(u(1), \sqrt{\varepsilon}w(1))\right|^{\,2} + \frac{|\sigma_\varepsilon^{22}(u(1), \sqrt{\varepsilon}w(1))|^{\,2}}{|\sqrt{\varepsilon}|^2}}.$$

Pels resultats (5.43) i (5.44) de l'apartat 5.3.3 (és a dir, del fet que σ_ε tingui límit 0 en la norma $\mathcal{C}^1, \|\cdot\|_\varepsilon$) podem deduir que:

$$\lim_{\varepsilon \to 0}\left(\sup_{u(1), w(1) \in \mathbb{C}} |f(\tilde{u}, \tilde{w}) - f(u(1), w(1))|\right) = 0.$$

Mirem-nos les derivades. Aplicant la regla de la cadena i recordant les definicions de $\tilde{u}, \tilde{w}$ tenim:

$$\frac{\partial}{\partial u(1)}\left[f(\tilde{u}, \tilde{w}) - f(u(1), w(1))\right] = \partial_1 f(\tilde{u}, \tilde{w})\left[1 + (\partial_1 \sigma_\varepsilon^{12})(u(1), \sqrt{\varepsilon}w(1))\right] +$$

$$+ \partial_2 f(\tilde{u}, \tilde{w})\left[\frac{(\partial_1 \sigma_\varepsilon^{22})(u(1), \sqrt{\varepsilon}w(1))}{\sqrt{\varepsilon}}\right] - \partial_1 f(u(1), w(1)) \qquad (5.63)$$

Si agrupem adequadament els termes anteriors tenim que:

$$(5.63) = \left[\, \partial_1 f(\tilde{u}, \tilde{w}) - \partial_1 f(u(1), w(1))\, \right] +$$
$$+ \left[\partial_1 f(\tilde{u}, \tilde{w})\right]\left[(\partial_1 \sigma_\varepsilon^{12})(u(1), \sqrt{\varepsilon}w(1))\right] + \left[\partial_2 f(\tilde{u}, \tilde{w})\right]\left[(\partial_1 \sigma_\varepsilon^{22})(u(1), \sqrt{\varepsilon}w(1))\right]$$

Usant la regularitat de f i que $(\tilde{u}, \tilde{w})$ i $(u(1), w(1))$ són punts propers tenim que:

$$\lim_{\varepsilon \to 0}\left(\sup_{u(1), w(1) \in \mathbb{C}} |\partial_1 f(\tilde{u}, \tilde{w}) - \partial_1 f(u(1), w(1))|\right) = 0$$

Si, a més, recordem els límits (5.48) per $(\partial_1\sigma_\varepsilon^{12})$ i (5.47) per $(1/\sqrt{\varepsilon})(\partial_1\sigma_\varepsilon^{22})$, que eren conseqüència del fet que σ_ε tingués límit 0 en la norma $\mathcal{C}^1, \|\cdot\|_\varepsilon$, ja podem dir que:

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\sup_{u(1),w(1)\in\mathbb{C}}\frac{\partial}{\partial u(1)}\left[f(\tilde{u},\tilde{w})-f(u(1),w(1))\right]\right)=0$$

De la mateixa manera deduïm el límit de la derivada respecte $w(1)$. En primer lloc,

$$\frac{\partial}{\partial w(1)}\left[f(\tilde{u},\tilde{w})-f(u(1),w(1))\right]=\left[\partial_2 f(\tilde{u},\tilde{w})-\partial_2 f(u(1),w(1))\right]+$$

$$+\left[\partial_1 f(\tilde{u},\tilde{w})\right]\left[\sqrt{\varepsilon}\cdot(\partial_2\sigma_\varepsilon^{12})(u(1),\sqrt{\varepsilon}w(1))\right]+\left[\partial_2 f(\tilde{u},\tilde{w})\right]\left[(\partial_2\sigma_\varepsilon^{22})(u(1),\sqrt{\varepsilon}w(1))\right]$$

De nou, la regularitat de f, el fet que $(\tilde{u},\tilde{w})$ i $(u(1),w(1))$ són punts propers, i dels límits (5.49) per $(\partial_2\sigma_\varepsilon^{22})$ i (5.50) per $(\sqrt{\varepsilon}\cdot\partial_2\sigma_\varepsilon^{22})$, també conseqüència del fet que σ_ε tingués límit 0 en la norma $\mathcal{C}^1, \|\cdot\|_\varepsilon$, ja podem dir que:

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\sup_{u(1),w(1)\in\mathbb{C}}\frac{\partial}{\partial w(1)}\left[f(\tilde{u},\tilde{w})-f(u(1),w(1))\right]\right)=0$$

amb la qual cosa ja hem acabat la demostració. □

Amb els resultats dels tres lemes anteriors ja tenim pràcticament demostrat el teorema de l'equació límit.

Demostració del teorema 5.15. Mitjançant un canvi de variables, hem reescrit (5.51) com (5.58) i veurem que (5.58) convergeix al sistema (5.52) en la topologia $\mathcal{C}^1$ quan $\varepsilon\to 0$. En particular, si (5.52) és estructuralment estable, els fluxos de (5.51) i (5.52) seran topològicament equivalents si ε és prou petit.

Comencem escrivint (5.58) per a un $V_0\in H_2^0$ de la forma (5.55). Sabem pel lema 5.17 que:

$$(P_0 A_N Q_\varepsilon)\,V_0=$$

$$\begin{pmatrix} \left(\ \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\sqrt{\varepsilon}w(1)x\ ,\ \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\sqrt{\varepsilon}w(1)\ \right) \\ \left(\ -\sqrt{\varepsilon}\left[c_1(\varepsilon)u(1)+(c_2(\varepsilon)+r)\sqrt{\varepsilon}w(1)\right]x\ ,\ -\sqrt{\varepsilon}\left[c_1(\varepsilon)u(1)+(c_2(\varepsilon)+r)\sqrt{\varepsilon}w(1)\right]\ \right) \end{pmatrix}$$

Sabem també pel lema 5.18 que:

$$P_2^0 P_2^\varepsilon\left[F_N\left(Q_\varepsilon V_0+\sigma_\varepsilon(Q_\varepsilon V_0)\right)\right]-P_2^0 P_2^0\left[F_N\left(Q_\varepsilon V_0+\sigma_\varepsilon(Q_\varepsilon V_0)\right)\right]=$$
$$=\sqrt{\varepsilon}\begin{pmatrix}\left(\,p_\varepsilon^{12}(\tilde{u},\tilde{w})\,x\ ,\ p_\varepsilon^{12}(\tilde{u},\tilde{w})\,\right)\\ \left(\,[p_\varepsilon^{22}(\tilde{u},\tilde{w})+\kappa f(\tilde{u},\tilde{w})]\ x\ ,\ [p_\varepsilon^{22}(\tilde{u},\tilde{w})+\kappa f(\tilde{u},\tilde{w})]\,\right)\end{pmatrix}$$

i, pel lema 5.19:

$$P_2^0 P_2^0 \left[F_N \left(Q_\varepsilon V_0 + \sigma_\varepsilon(Q_\varepsilon V_0)\right)\right] - P_2^0 F_N(V_0) =$$
$$= \sqrt{\varepsilon} \begin{pmatrix} (0,0) \\ \left(-\kappa\, x \left[\, f(\tilde{u},\tilde{w}) - f(u(1),w(1))\,\right], -\kappa\, \left[\, f(\tilde{u},\tilde{w}) - f(u(1),w(1))\,\right]\,\right) \end{pmatrix}$$

on $\tilde{u}$ i $\tilde{w}$ són:

$$\tilde{u} = u(1) + \sigma_\varepsilon^{12}(u(1), \sqrt{\varepsilon} w(1)), \quad \tilde{w} = w(1) + \frac{\sigma_\varepsilon^{22}(u(1), \sqrt{\varepsilon} w(1))}{\sqrt{\varepsilon}}$$

I hem vist també que:

$$P_2^0 \left[F_N \left(V_0\right)\right] = \sqrt{\varepsilon} \begin{pmatrix} (0,0) \\ \left(-\kappa f(u(1),w(1))\, x\ , -\kappa f(u(1),w(1))\right) \end{pmatrix}$$

Per tant, (5.58) és:

$$(5.64) \quad \begin{cases} \dfrac{d}{dt} u(1) = w(1) + \sqrt{\varepsilon}\, p_\varepsilon^{12}(\tilde{u},\tilde{w}) \\ \dfrac{d}{dt} \sqrt{\varepsilon} w(1) = -\sqrt{\varepsilon}\, \left[c_1(\varepsilon) u(1) + \left(c_2(\varepsilon) + r\right) \sqrt{\varepsilon} w(1)\right] + \\ \qquad\qquad + \sqrt{\varepsilon}\, \left[p_\varepsilon^{22}(\tilde{u},\tilde{w}) + \kappa\, f(\tilde{u},\tilde{w})\right] + \\ \qquad\qquad + \sqrt{\varepsilon}\, \left[-\kappa\, f(\tilde{u},\tilde{w}) + \kappa\, f(u(1),w(1))\right] + \\ \qquad\qquad - \sqrt{\varepsilon}\, \kappa\, f(u(1),w(1)) \end{cases}$$

Vegem que (5.58) convergeix a l'equació límit (5.52) en la topologia de $\mathcal{C}^1$ per a les variables $(u(1), w(1))$ quan $\varepsilon \to 0$. La part més elaborada l'hem vist en els lemes anteriors. En efecte, si ens mirem la primera equació i utilitzem els límits de l'apartat 1 del lema 5.18, tenim que:

$$|w(1) + \sqrt{\varepsilon}\, p_\varepsilon^{12}(\tilde{u},\tilde{w})| \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{\mathcal{C}^1} w(1)$$

Pel que fa a la segona equació, podem eliminar els $\sqrt{\varepsilon}$ a banda i banda i tenim que:

1. del lema 5.17 es té que $\left[c_1(\varepsilon) u(1) + \left(c_2(\varepsilon) + r\right) \sqrt{\varepsilon} w(1)\right] \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{\mathcal{C}^1} u(1)$,
2. de l'apartat 2 del lema 5.18 tenim $|\, [p_\varepsilon^{22}(\tilde{u},\tilde{w}) + \kappa\, f(\tilde{u},\tilde{w})]| \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{\mathcal{C}^1} 0$

3. i del lema 5.19 tenim $|-\kappa\, f(\tilde{u},\tilde{w}) + \kappa\, f(u(1),w(1))| \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{\mathcal{C}^1} 0$.

Per tant, ajuntant-ho tot tenim que

$$(5.64)\ \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{\mathcal{C}^1} \begin{cases} \dfrac{d}{dt}\, u(1) = w(1) \\ \\ \dfrac{d}{dt}\, w(1) = -u(1) - \kappa f(u(1),w(1)) \end{cases}$$

que és el sistema (5.52). Si escrivim el sistema límit com una sola equació, podem dir que les solucions del nostre model no lineal (5.6) amb el temps convenientment re-escalat tenen com a límit quan $\varepsilon \to 0$ les solucions de l'equació diferencial ordinària no lineal (5.53). □

5.3.5 Alguns comentaris sobre l'equació límit.

El resultat anterior ens diu essencialment que si forcem el model no lineal de la primera part de la memòria amb una acceleració en $x = 0$ donada per una funció f, el desplaçament del model en derivades parcials no lineal amb el temps accelerat de la manera que hem vist, s'acostarà al desplaçament donat per l'equació diferencial ordinària no lineal:

$$u'' + u + \kappa f(u,u') = 0 \tag{5.65}$$

quan $\varepsilon \to 0$ i $t \to \infty$. Però això també ens ho podem mirar al revés, és a dir, preguntar-nos quin control cal introduir en el sistema per tal d'obtenir un cert desplaçament desitjat. El teorema anterior ens dóna la resposta a aquesta pregunta quan el desplaçament objectiu és solució d'una equació diferencial ordinària no lineal del tipus de (5.65). En aquest cas, el control serà una acceleració donada per f, on f és la no linealitat de l'equació anterior, i que aplicarem en l'extrem $x = 0$ tal i com hem indicat al principi d'aquest capítol.

Per exemple, imaginem que volem que el sistema molla-massa tingui un desplaçament periòdic no constant. Això seria trobar un control de manera que el model en derivades parcials no lineal tingués com a límit, per exemple, l'equació diferencial ordinària no lineal donada per

$$u'' + g(u)u' + u = 0$$

que es coneix com equació de Lienard, de la qual sabem que admet una solució periòdica estable no constant si g satisfà certes condicions. El teorema 5.15 ens diu que una manera d'obtenir l'equació de Lienard com a límit seria controlar el sistema mitjançant una acceleració en $x = 0$ donada per $f(z_1,z_2) = g(z_1)z_2$.

Un altre exemple és el que ja hem introduït al principi del capítol en el qual la no linealitat ve donada per $f(z_1,z_2) = \tanh \beta z_1$. Aquest tipus de no

linealitat tindria sentit si busquèssim una molla sense desplaçament o, el que és el mateix, d'una longitud donada. Però l'equació diferencial

$$u'' + u + \kappa \tanh \beta u = 0 \tag{5.66}$$

no és estructuralment estable i, per tant, no podríem parlar de (5.66) com a equació diferencial límit en el mateix sentit que en el cas anterior. Tot i això, estudiar l'equació en derivades parcials que s'obté de considerar aquesta no linealitat sembla tenir resultats interessants per si sol. Per exemple, estudis numèrics semblen indicar que β és un paràmetre de bifurcació que pot fins i tot donar, depenent del valor dels paràmetres dissipatius, infinits canvis en l'estabilitat del sistema.

Apèndix A

Uniformitat per a acotacions exponencials de semigrups analítics en subespais invariants

Tot i que la finalitat d'aquest apartat és demostrar que el semigrup generat per l'operador A_N definit en el capítol 5 està acotat d'una certa manera, els resultats que donarem en aquesta secció sobre la convergència generalitzada d'operadors i sobre acotacions uniformes de semigrups generats per famílies d'operadors tindran un enunciat de caràcter general. El que veurem és un conjunt de lemes tècnics l'objectiu dels quals serà demostrar el resultat principal d'aquest apèndix, que es recull en el teorema A.12. Aquest teorema serà l'eina bàsica per demostrar en el capítol 5 que el nostre model compleix les hipòtesis del teorema de varietats invariants, el teorema 5.6. La dificultat principal dels resultats que veurem la trobem en el fet que els operadors amb què tractem no són, necessàriament, autoadjunts, situació que ha esta la més usual fins ara (veure els treballs de [5],[6],[17] o [30], per exemple). Aquest fet complicarà la manera de demostrar certa uniformitat en les acotacions, tal i com veurem més endavant.

La convergència en sentit generalitzat d'operadors és un concepte que ja hem introduït en el capítol 3 i que es basa, essencialment, en la convergència de les gràfiques dels operadors en una certa distància $\hat{\delta}$. De fet, hem vist que la podem pensar com una generalització de la convergència en norma per a operadors no acotats. Ara serà una de les eines bàsiques per a demostrar el teorema A.12, però caldrà introduir alguns resultats de [22] que no havíem vist fins ara, dels quals en derivarem alguns lemes tècnics que ens seran molt útils més endavant. El primer dels resultats que necessitem està relacionat amb la continuïtat de la resolvent:

Teorema A.1 (Kato, [22]). *Sigui T un operador tancat en un espai de Banach X ($T \in \mathcal{C}(X)$) i sigui K un subconjunt compacte de $\rho(T)$. Aleshores*

existeix $\delta > 0$ tal que $K \subset \rho(S)$ per a qualsevol $S \in \mathcal{C}(X)$ que compleixi $\hat{\delta}(S,T) < \delta$.

La importància d'aquest darrer resultat és que la distància màxima entre S i T per tal que un punt de la resolvent de T estigui també en la de S pot escollir-se independentment del punt si aquest està en un compacte (òbviament, la distància sí dependrà del compacte). El següent resultat ens dóna una certa uniformitat en la convergència dels operadors resolvent quan treballem sobre compactes.

Teorema A.2 (Kato, [22]). *La resolvent $R(\xi,T)$ és contínua en $\xi \in \rho(T)$ i $T \in \mathcal{C}(X)$ en el següent sentit. Per a qualsevol $T \in \mathcal{C}(X)$, $\xi_0 \in \rho(T)$ i $\eta > 0$, existeix un $\delta > 0$ tal que $\xi \in \rho(S)$ i $\|R(\xi,S) - R(\xi_0,T)\| < \eta$ si $|\xi - \xi_0| < \delta$ i $\hat{\delta}(S,T) < \delta$.*

A partir d'aquests dos teoremes podem obtenir els lemes A.4 i A.3, que seran necessaris més endavant.

Lema A.3 (uniformitat en la convergència de resolvents). *Suposem una família d'operadors $T_\varepsilon \in \mathcal{C}(X)$, $\varepsilon > 0$, que convergeixen en sentit generalitzat a $T_0 \in \mathcal{C}(X)$ quan $\varepsilon \to 0$. Sigui $K \subset \rho(T_0)$ un compacte. Aleshores, donat $\eta > 0$ qualsevol, existeix $\delta = \delta(\eta, K, T_0)$ tal que:*

$$K \subset \rho(T_\varepsilon) \quad si\ \varepsilon < \delta \qquad i$$

$$\|R(\lambda, T_\varepsilon) - R(\lambda, T_0)\| < \eta \qquad \forall \lambda \in K \qquad si\ \varepsilon < \delta$$

El resultat s'assembla al del teorema A.2, però n'és subtilment diferent. El que és important destacar que, com en A.2, δ no depèn de ε ni de λ quan estem en compactes i ε és prou petit. Aquest resultat apareix com a comentari en [22], en la demostració del teorema de semicontinuitat superior de l'espectre (teorema 3.18 del capítol 3 d'aquesta memòria), tot i que no es demostra. És per això que hem inclòs la demostració a continuació.

Demostració. Sigui $\eta > 0$ qualsevol. Com que $K \subset \rho(T_0)$, sabem pel teorema A.2 que per a cada $\mu \in K$ existeix $\delta(\mu)$ tal que $\lambda \in \rho(T_\varepsilon)$ i

$$\|R(\lambda, T_\varepsilon) - R(\mu, T_0)\| < \frac{\eta}{2}$$

si $|\lambda - \mu| < \delta(\mu)$ i $0 < \varepsilon < \delta(\mu)$. Considerem el següent recobriment de K:

$$\bigcup_{\mu \in K} B_{\delta(\mu)}(\mu) \supset K$$

on $B_{\delta(\mu)}(\mu)$ denota la bola de centre μ i radi $\delta(\mu)$. Com que K és un compacte admet un subrecobriment finit, és a dir, que existeixen $\{\mu_1, \ldots, \mu_n\}$ punts de K tals que

$$\bigcup_{i=1}^{n} B_i \supset K$$

on $B_i = B_{\delta_i}(\mu_i)$, amb $\delta_i = \delta(\mu_i)$, per als quals es compleix

$$\|R(\lambda, T_\varepsilon) - R(\mu_i, T_0)\| < \frac{\eta}{2} \qquad si\ |\lambda - \mu_i| < \delta_i \ \ i \ \ 0 < \varepsilon < \delta_i$$

Definim $\delta_{min} := min\{\delta_1, \ldots, \delta_n\}$ (que també serà independent de λ i ε) i prenem $0 < \varepsilon < \delta_{min}$. Si $\lambda \in K$ qualsevol, en particular estarà en alguna de les boles anteriors, és a dir, $\lambda \in B_{i^*}$ per algun $i^* \in \{1, \ldots, n\}$, i serà cert que

$$\|R(\lambda, T_\varepsilon) - R(\mu_{i^*}, T_0)\| < \frac{\eta}{2} \tag{A.1}$$

ja que $0 < \varepsilon < \delta_{min} \leq \delta_{i^*}$ i $|\lambda - \mu_{i^*}| \leq \delta_{i^*}$. En particular, també serà cert que

$$\|R(\lambda, T_0) - R(\mu_{i^*}, T_0)\| < \frac{\eta}{2} \tag{A.2}$$

si $|\lambda - \mu_{i^*}| \leq \delta_{i^*}$. Però clarament,

$$\|R(\lambda, T_\varepsilon) - R(\lambda, T_0)\| < \|R(\lambda, T_\varepsilon) - R(\mu_{i^*}, T_0)\| + \|R(\mu_{i^*}, T_0) - R(\lambda, T_0)\|$$

i per (A.1) i (A.2), obtenint de forma immediata que:

$$\|R(\lambda, T_\varepsilon) - R(\lambda, T_0)\| < \eta \tag{A.3}$$

si $0 < \varepsilon < \delta_{min}$ i per a tot $\lambda \in K$, on δ_{min} només depèn de l'η donat, de l'operador límit T_0 i del compacte K on estiguem. □

L'altre resultat que caldrà està recollit en el següent lema.

Lema A.4 (convergència de restriccions d'operadors). *Sigui T_0 un operador tancat en X amb l'espectre separat en dues parts σ_0^1, σ_0^2 per una corba tancada $\Gamma \subset \rho(T_0)$ tal i com havíem definit en el capítol 3, i sigui la descomposició associada de l'espai $X = X_0 \oplus Y_0$. Sigui T_ε, $\varepsilon > 0$, una família d'operadors tancats en X que convergeixen en sentit generalitzat a T_0 quan $\varepsilon \to 0$ en una certa norma $\|\cdot\|$. En particular, la corba Γ també està en $\rho(T_\varepsilon)$ i separa l'espectre en dues parts, σ_ε^1 i σ_ε^2, si $\varepsilon < \varepsilon(\Gamma, T_0)$ (tal i com havíem vist en el capítol 3). Sigui $X = X_\varepsilon \oplus Y_\varepsilon$ la descomposició de l'espai associada a T_ε per a cada $\varepsilon < \varepsilon(\Gamma, T_0)$. Aleshores, $(P_\varepsilon|_{X_0})^{-1} T_\varepsilon (P_\varepsilon|_{X_0})$ convergeix a $T_0|_{X_0}$ en sentit generalitzat quan $\varepsilon \to 0$, on $P_\varepsilon|_{X_0} : X_0 \longrightarrow X_\varepsilon$ denota la restricció en X_0 de $P_\varepsilon : X \longrightarrow X_\varepsilon$, la projecció associada a X_ε. Anàlogament, $(P_{Y_\varepsilon}|_{Y_0})^{-1} T_\varepsilon (P_{Y_\varepsilon}|_{Y_0})$ convergeix a $T_0|_{Y_0}$ en sentit generalitzat quan $\varepsilon \to 0$, on P_{Y_ε} denota la projecció associada a Y_ε.*

Abans de demostrar aquest lema fem algunes observacions importants.

Observació A.5 (idea del lema). *Si tenim en compte que, tret d'un canvi de variables, l'operador* $(P_\varepsilon|_{X_0})^{-1}\, T_\varepsilon\, (P_\varepsilon|_{X_0})$ *és* $T_\varepsilon|_{X_\varepsilon}$*, la idea de l'enunciat del lema és clara. El fet que* T_ε *convergeixi a* T_0 *quan* $\varepsilon \to 0$ *en sentit generalitzat ens diu també que* P_ε *convergeix en norma a* P_0*, la projecció sobre* X_0 *(recordem el teorema 3.18 del capítol 3). És a dir, que* $X_\varepsilon = P_\varepsilon(X)$ *i* $X_0 = P_0(X)$ *són espais propers si* ε *és prou petit. Si restringim operadors propers a espais que també ho són, la intuïció ens diu que les restriccions seran properes, és a dir, que el límit de* $T_\varepsilon|_{X_\varepsilon}$ *hauria de ser* $T_0|_{X_0}$*. El que en realitat veiem és la convergència en sentit generalitzat de* $(P_\varepsilon|_{X_0})^{-1}\, T_\varepsilon\, (P_\varepsilon|_{X_0})$ *a* $T_0|_{X_0}$*. Això serà suficient per a demostrar el que ens interessa més endavant.*

Observació A.6 (restriccions de les projeccions). *Amb les hipòtesis del lema A.4 i si* ε *és prou petit, l'operador*

$$(P_\varepsilon|_{X_0})^{-1} : X_\varepsilon \to X_0$$

està ben definit i està acotat independentment de ε*. A més, tant* $P_\varepsilon|_{X_0}$ *com* $(P_\varepsilon|_{X_0})^{-1}$ *estan acotats independentment de* ε *si* ε *és prou petit.*

Comencem veient la injectivitat de $P_\varepsilon|_{X_0}$ *prenent* $u_0 \in X_0$ *i obtenint de forma immediata que:*

$$\|P_\varepsilon|_{X_0} u_0\| = \|P_\varepsilon u_0\| \geq \|u_0\| - \|P_0\, u_0 - P_\varepsilon u_0\| \geq \big(1 - \|P_0\, - P_\varepsilon\|_{\mathcal{L}(X,X)}\big)\, \|u_0\|$$

Com que P_ε *convergeix en norma a* P_0*, existeix* $\varepsilon_1 > 0$ *tal que si* $\varepsilon < \varepsilon_1$ *llavors* $\|P_0\, - P_\varepsilon\|_{\mathcal{L}(X,X)} < 1$ *i podem escriure:*

$$\|u_0\| \leq \frac{1}{1 - \|P_0\, - P_\varepsilon\|_{\mathcal{L}(X,X)}} \|P_\varepsilon|_{X_0} u_0\| \quad \forall u_0 \in X_0 \;\; \textit{si } \varepsilon < \varepsilon_1 \tag{A.4}$$

En particular, $P_\varepsilon|_{X_0}$ *és injectiva si* $\varepsilon < \varepsilon_1$*. Pel que fa a l'exhaustivitat, voldrem que donat* $v_\varepsilon \in X_\varepsilon$ *existeixi* $u_0 \in X_0$ *amb:*

$$P_\varepsilon|_{X_0} u_0 = v_\varepsilon \tag{A.5}$$

Buscarem u_0 *de la forma* $u_0 = P_0\, u_\varepsilon$ *amb* $u_\varepsilon \in X_\varepsilon$*. Llavors, (A.5) és equivalent a veure que donat* $v_\varepsilon \in X_\varepsilon$ *existeix* $u_\varepsilon \in X_\varepsilon$ *tal que:*

$$-P_\varepsilon P_0\, u_\varepsilon + u_\varepsilon + v_\varepsilon = u_\varepsilon$$

o, el que és el mateix, que:

$$-P_\varepsilon P_0\, u_\varepsilon + P_\varepsilon\, u_\varepsilon + v_\varepsilon = u_\varepsilon$$

És a dir, que $P_\varepsilon - P_\varepsilon P_0 + v_\varepsilon$ tingui un punt fix. Però, $P_\varepsilon - P_\varepsilon P_0$ és una contracció si ε és prou petit, ja que:

$$P_\varepsilon u_\varepsilon - P_\varepsilon P_0 u_\varepsilon = P_\varepsilon (u_\varepsilon - P_0 u_\varepsilon) = P_\varepsilon (P_\varepsilon u_\varepsilon - P_0 u_\varepsilon) = P_\varepsilon (P_\varepsilon - P_0) u_\varepsilon$$

i, com que $\|P_\varepsilon - P_0\|_{\mathcal{L}(X,X)} \longrightarrow 0$ quan $\varepsilon \to 0$, tenim que existeix un $\varepsilon_2 > 0$ tal que si $\varepsilon < \varepsilon_2$ llavors P_ε està acotat independentment de ε i, per tant, $\|P_\varepsilon (P_\varepsilon - P_0)\|_{\mathcal{L}(X,X)} < 1$ si $\varepsilon < \varepsilon_2$. D'això deduïm que $P_\varepsilon|_{X_0}$ és també exhaustiu, de manera que $(P_\varepsilon|_{X_0})^{-1}$ està ben definit i, per (A.4):

$$\|(P_\varepsilon|_{X_0})^{-1}\|_{\mathcal{L}(X_\varepsilon,X)} \leq \frac{1}{1 - \|P_0 - P_\varepsilon\|_{\mathcal{L}(X,X)}}$$

En particular, està acotat independentment de ε si $\varepsilon < \varepsilon_3$ (per exemple, si $\|P_0 - P_\varepsilon\|_{\mathcal{L}(X,X)} < 1/2$ quan $\varepsilon < \varepsilon_3$, tenim $\|(P_\varepsilon|_{X_0})^{-1}\|_{\mathcal{L}(X,X)} < 2$ quan $\varepsilon < \varepsilon_3$).

També es compleix que $\|P_\varepsilon|_{X_0} - Id|_{X_0}\| \underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} 0$. Efectivament, sabem que

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \|(P_\varepsilon - P_0)\|_{\mathcal{L}(X,X)} = 0$$

En particular,

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \|(P_\varepsilon|_{X_0} - P_0|_{X_0})\|_{\mathcal{L}(X_0,X)} = 0$$

Però $P_0|_{X_0} = Id|_{X_0}$, de manera que en realitat:

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \|(P_\varepsilon|_{X_0} - Id|_{X_0})\|_{\mathcal{L}(X_0,X)} = 0$$

Per tant,

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \|P_\varepsilon|_{X_0}\|_{\mathcal{L}(X_0,X)} \leq \|Id|_{X_0}\|_{\mathcal{L}(X_0,X)} + \lim_{\varepsilon\to 0} \|P_\varepsilon|_{X_0} - Id|_{X_0}\|_{\mathcal{L}(X_0,X)} = 1$$

En particular, $\|P_\varepsilon|_{X_0}\|_{\mathcal{L}(X,X)} < 2$ si ε és prou petit. En resum, existeix un $\varepsilon_0 > 0$ (que és el mínim entre ε_1 i ε_2) tal que si $\varepsilon < \varepsilon_0$ aleshores:

1. *$P_\varepsilon|_{X_0}$ està acotat (per exemple per 2) independentment de ε;*
2. *existeix $(P_\varepsilon|_{X_0})^{-1}$ i està acotat independentment de ε (també per 2).*

El resultat també val per $(P_{Y_\varepsilon})|_{Y_0}$ i la seva inversa.

Observació A.7 (equivalència de resolvents). *És evident que $R(\lambda, T_\varepsilon|_{X_\varepsilon}) = R(\lambda, T_\varepsilon)|_{X_\varepsilon}$ si $\lambda \in \rho(T_\varepsilon)$. També és fàcil veure que*

$$\rho((P_\varepsilon|_{X_0})^{-1} T_\varepsilon (P_\varepsilon|_{X_0})) = \rho(T_\varepsilon|_{X_\varepsilon})$$

I que si $\lambda \in \rho(T_\varepsilon|_{X_\varepsilon})$ llavors

$$R(\lambda, (P_\varepsilon|_{X_0})^{-1} T_\varepsilon (P_\varepsilon|_{X_0})) = (P_\varepsilon|_{X_0})^{-1} R(\lambda, T_\varepsilon|_{X_\varepsilon}) (P_\varepsilon|_{X_0})$$

Així, si tal i com veurem en el lema A.4 es compleix que

$$\left\|R(\lambda,(P_\varepsilon|_{X_0})^{-1}T_\varepsilon|_{X_\varepsilon}(P_\varepsilon|_{X_0}))-R(\lambda,T_0|_{X_0})\right\|_{\mathcal{L}(X_0,X)}\underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow}0$$

també és és cert que

$$\left\|(P_\varepsilon|_{X_0})^{-1}R(\lambda,T_\varepsilon|_{X_\varepsilon})(P_\varepsilon|_{X_0})-R(\lambda,T_0|_{X_0})\right\|_{\mathcal{L}(X_0,X)}\underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow}0$$

Amb aquestes observacions podem passar ja a demostrar el lema A.4.

Demostració. Sigui $0<\varepsilon<\varepsilon(\Gamma,T_0)$ i fixem $\mu\in\rho(T_0)\cap\rho(T_\varepsilon)$ (per exemple, qualsevol $\mu\in\Gamma$). En particular, també serà cert que $\mu\in\rho(T_0|_{X_0})$ i que $\mu\in\rho(T_\varepsilon|_{X_\varepsilon})$ i, per l'observació A.7, també tenim $\mu\in\rho((P_\varepsilon|_{X_0})^{-1}T_\varepsilon(P_\varepsilon|_{X_0}))$.

Veure que $(P_\varepsilon|_{X_0})^{-1}T_\varepsilon(P_\varepsilon|_{X_0})$ convergeix a T_0 en sentit generalitzat és equivalent a veure que

$$\left\|R(\mu,(P_\varepsilon|_{X_0})^{-1}T_\varepsilon(P_\varepsilon|_{X_0}))-R(\mu,T_0|_{X_0})\right\|_{\mathcal{L}(X_0,X_0)}\underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow}0 \tag{A.6}$$

(recordem que havíem vist en el capítol 3 que aquesta és una manera de veure que els operadors convergeixen en sentit generalitzat). Per veure-ho utilitzarem les observacions anteriors, en particular la convergència en sentit generalitzat dels operadors sense restringir i de les projeccions.

Vegem-ho. Per l'observació A.7 i per l'equivalència de normes de X i X_0 tenim de manera directa que

$$\left\|R(\mu,(P_\varepsilon|_{X_0})^{-1}T_\varepsilon(P_\varepsilon|_{X_0}))-R(\mu,T_0|_{X_0})\right\|_{\mathcal{L}(X_0,X_0)}=$$

$$\left\|(P_\varepsilon|_{X_0})^{-1}(T_\varepsilon-\mu\,Id)^{-1}(P_\varepsilon|_{X_0})-(T_0-\mu\,Id)^{-1}|_{X_0}\right\|_{\mathcal{L}(X_0,X)}.$$

Aplicant la desigualtat triangular,

$$\leq\left\|(P_\varepsilon|_{X_0})^{-1}(T_\varepsilon-\mu\,Id)^{-1}(P_\varepsilon|_{X_0})-Id|_{X_\varepsilon}(T_\varepsilon-\mu Id)^{-1}(P_\varepsilon|_{X_0})\right\|_{\mathcal{L}(X_0,X)}$$
$$+\left\|(T_\varepsilon-\mu Id)^{-1}(P_\varepsilon|_{X_0})-(T_0-\mu\,Id)^{-1}|_{X_0}\right\|_{\mathcal{L}(X_0,X)}. \tag{A.7}$$

Podem agrupar termes, de manera que

$$(A.7)\leq\left\|(P_\varepsilon|_{X_0})^{-1}-Id|_{X_\varepsilon}\right\|_{\mathcal{L}(X_\varepsilon,X)}\left\|(T_\varepsilon-\mu Id)^{-1}\right\|_{\mathcal{L}(X,X)}\left\|P_\varepsilon|_{X_0}\right\|_{\mathcal{L}(X_0,X)}+$$
$$+\left\|(T_\varepsilon-\mu Id)^{-1}P_\varepsilon|_{X_0}-(T_0-\mu Id)^{-1}|_{X_0}\right\|_{\mathcal{L}(X_0,X)} \tag{A.8}$$

Observem que $(T_\varepsilon-\mu Id)^{-1}$ és la resolvent de l'operador sense restringir. Té sentit, doncs, sumar-hi i restar-hi $(T_0-\mu Id)^{-1}$, que també està definit en l'espai total:

$$(A.8)\leq\left\|(P_\varepsilon|_{X_0})^{-1}-Id|_{X_\varepsilon}\right\|_{\mathcal{L}(X_\varepsilon,X)}\cdot$$
$$\cdot\left\|(T_\varepsilon-\mu Id)^{-1}-(T_0-\mu Id)^{-1}\right\|_{\mathcal{L}(X,X)}\cdot$$
$$\cdot\left\|P_\varepsilon|_{X_0}\right\|_{\mathcal{L}(X_0,X)}+$$

$$+ \left\|(P_\varepsilon|_{X_0})^{-1} - Id|_{X_\varepsilon}\right\|_{\mathcal{L}(X_\varepsilon,X)} \left\|(T_0-\mu Id)^{-1}\right\|_{\mathcal{L}(X,X)} \|P_\varepsilon|_{X_0}\|_{\mathcal{L}(X_0,X)} +$$
$$+ \left\|(T_\varepsilon-\mu Id)^{-1} P_\varepsilon|_{X_0} - (T_0-\mu Id)^{-1}|_{X_0}\right\|_{\mathcal{L}(X_0,X)} \quad (A.9)$$

De la mateixa manera, serà convenient sumar i restar $(T_0-\mu Id)^{-1} P_\varepsilon|_{X_0}$ a l'últim terme de (A.9):

$$(A.9) \leq \left\|(P_\varepsilon|_{X_0})^{-1} - Id|_{X_\varepsilon}\right\|_{\mathcal{L}(X_\varepsilon,X)} \cdot$$
$$\cdot \left\|(T_\varepsilon-\mu Id)^{-1} - (T_0-\mu Id)^{-1}\right\|_{\mathcal{L}(X,X)} \cdot$$
$$\cdot \|P_\varepsilon|_{X_0}\|_{\mathcal{L}(X_0,X)} +$$
$$+ \left\|(P_\varepsilon|_{X_0})^{-1} - Id|_{X_\varepsilon}\right\|_{\mathcal{L}(X_\varepsilon,X)} \left\|(T_0-\mu Id)^{-1}\right\|_{\mathcal{L}(X,X)} \|P_\varepsilon|_{X_0}\|_{\mathcal{L}(X_0,X)} +$$
$$+ \left\|(T_\varepsilon-\mu Id)^{-1} P_\varepsilon|_{X_0} - (T_0-\mu Id)^{-1} P_\varepsilon|_{X_0}\right\|_{\mathcal{L}(X_0,X)} +$$
$$+ \left\|(T_0-\mu Id)^{-1} P_\varepsilon|_{X_0} - (T_0-\mu Id)^{-1} Id|_{X_0}\right\|_{\mathcal{L}(X_0,X)} \quad (A.10)$$

Si agrupem termes, tenim de forma immediata que:

$$(A.10) \leq \left\|(P_\varepsilon|_{X_0})^{-1} - Id|_{X_\varepsilon}\right\|_{\mathcal{L}(X_\varepsilon,X)} \cdot$$
$$\cdot \left\|(T_\varepsilon-\mu Id)^{-1} - (T_0-\mu Id)^{-1}\right\|_{\mathcal{L}(X,X)} \cdot$$
$$\cdot \|P_\varepsilon|_{X_0}\|_{\mathcal{L}(X_0,X)} +$$
$$+ \left\|(P_\varepsilon|_{X_0})^{-1} - Id|_{X_\varepsilon}\right\|_{\mathcal{L}(X_\varepsilon,X)} \left\|(T_0-\mu Id)^{-1}\right\|_{\mathcal{L}(X,X)} \|P_\varepsilon|_{X_0}\|_{\mathcal{L}(X_0,X)} +$$
$$+ \left\|(T_\varepsilon-\mu Id)^{-1} - (T_0-\mu Id)^{-1}\right\|_{\mathcal{L}(X,X)} \|P_\varepsilon|_{X_0}\|_{\mathcal{L}(X_0,X)} +$$
$$+ \left\|(T_0-\mu Id)^{-1}\right\|_{\mathcal{L}(X,X)} \|P_\varepsilon|_{X_0} - Id|_{X_0}\|_{\mathcal{L}(X_0,X)} \quad (A.11)$$

Els termes on no hi ha diferències són normes d'operadors acotats i tots amb cotes independents de ε:

$$\|P_\varepsilon|_{X_0}\|_{\mathcal{L}(X_0,X)} \leq 2 \;\; si\ \varepsilon < \varepsilon_0 \quad \text{(observació A.6)}$$

i

$$\|\,(T_0-\mu Id)^{-1}\,\|_{\mathcal{L}(X,X)} \leq N_0$$

perquè $\mu \in \rho(T_0)$. I com que $\mu \in \rho(T_0) \cap \rho(T_\varepsilon)$, el fet que T_ε convergeixi en sentit generalitzat a T_0 és equivalent a que $\|\,(T_\varepsilon-\mu Id)^{-1} - (T_0-\mu Id)^{-1}\,\| \to 0$ quan $\varepsilon \to 0$ (recordem el lema 3.14). Usant aquest fet i també l'observació A.6, les normes de les 3 diferències que tenim en (A.11) tendeixen a zero quan $\varepsilon \to 0$, és a dir, donat $\eta > 0$ qualsevol es té que

$$\|(P_\varepsilon|_{X_0})^{-1} - Id|_{X_\varepsilon}\|_{\mathcal{L}(X_\varepsilon,X)} < min\left\{\frac{\eta}{8N_0}, 1\right\} \;\; si\ \varepsilon < \varepsilon_1$$

$$\| (T_\varepsilon - \mu Id)^{-1} - (T_0 - \mu Id)^{-1} \|_{\mathcal{L}(X,X)} < \frac{\eta}{8} \quad si\ \varepsilon < \varepsilon_2$$

$$\|P_\varepsilon|_{X_0} - Id|_{X_0}\|_{\mathcal{L}(X_0,X)} < \frac{\eta}{4N_0} \quad si\ \varepsilon < \varepsilon_3$$

Per tant,

$$(A.11) \leq \eta \quad si\ \varepsilon < \varepsilon_{min} = min\{\varepsilon_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon(\Gamma, T_0)\}$$

Resumint, hem vist que $\forall\, \eta > 0$ existeix $\varepsilon_{min} > 0$ tal que:

$$\|R(\mu, (P_\varepsilon|_{X_0})^{-1} T_\varepsilon (P_\varepsilon|_{X_0})) - R(\mu, T_0|_{X_0})\|_{\mathcal{L}(X_0,X_0)} < \eta \quad si\ \varepsilon < \varepsilon_{min}$$

per un cert $\mu \in \rho(T_0) \cap \rho(T_\varepsilon)$. Per tant, hem demostrat que l'operador $(P_\varepsilon|_{X_0})^{-1} T_\varepsilon (P_\varepsilon|_{X_0})$ convergeix en sentit generalitzat a $T_0|_{X_0}$ quan $\varepsilon \to 0$ ja que

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \|R(\mu, (P_\varepsilon|_{X_0})^{-1} T_\varepsilon (P_\varepsilon|_{X_0})) - R(\mu, T_0|_{X_0})\|_{\mathcal{L}(X_0,X_0)} = 0$$

□

Com a aplicació directa dels lemes A.3 i A.4 tenim la següent acotació uniforme per a les resolvents d'una família d'operadors restringits, acotació que utilitzarem en la demostració del teorema A.12.

Teorema A.8 (acotació uniforme de la resolvent de la restricció en compactes). *Sigui T_ε, $\varepsilon > 0$, una família d'operadors tancats en un espai de Banach X, amb una certa norma $\|\cdot\|$, que convergeixen en sentit generalitzat a un operador T_0 tancat en X. Suposem que T_ε i T_0 estan dins les hipòtesis del lema A.4. Considerem K un compacte contingut en $\rho(T_0|_{X_0})$ i en el qual tenim que $\|R(\lambda, T_0|_{X_0})\| \leq M_0/|\lambda - c|\ \forall\, \lambda \in K \setminus \{c\}$ per un cert $c \in \mathbb{R}$ amb $c \notin int(K)$. Donat $\eta > 0$ qualsevol, existeix $\varepsilon_K = \varepsilon_K(\eta, K, T_0|_{X_0}) > 0$ (en particular, independent de ε i λ) tal que:*

$$\|R(\lambda, T_\varepsilon|_{X_\varepsilon})\| \leq \frac{C_0}{|\lambda - c|} \quad si\ \varepsilon < \varepsilon_K,\ \forall \lambda \in K \setminus \{c\}$$

on $C_0 = 4 \left(\eta \max_{\lambda \in K} |\lambda - c| + M_0 \right)$.

Demostració. Com que T_ε convergeix a T_0 quan $\varepsilon \to 0$ en sentit generalitzat, el lema A.4 ens diu que $(P_\varepsilon|_{X_0})^{-1} T_\varepsilon (P_\varepsilon|_{X_0})$ convergeix a $T_0|_{X_0}$ quan $\varepsilon \to 0$ també en sentit generalitzat. Com que estem en un compacte, hem vist que el lema A.3 de fet ens deia que $K \subset \rho(T_\varepsilon|_{X_\varepsilon})$ si ε prou petit i que:

$$\|R(\lambda, (P_\varepsilon|_{X_0})^{-1} T_\varepsilon (P_\varepsilon|_{X_0})) - R(\lambda, T_0|_{X_0})\|_{\mathcal{L}(X_0,X)} < \eta \quad si\ \varepsilon < \varepsilon_K, \quad \forall \lambda \in K \tag{A.12}$$

A partir d'aquí, només es tracta de jugar amb les desigualtats. D'entrada, l'observació A.7 ens permet escriure que

$$\|R(\lambda, T_\varepsilon|_{X_\varepsilon})\|_{\mathcal{L}(X_\varepsilon,X)} = \|P_\varepsilon|_{X_0}(P_\varepsilon|_{X_0})^{-1}\, R(\lambda, T_\varepsilon|_{X_\varepsilon})\, P_\varepsilon|_{X_0}(P_\varepsilon|_{X_0})^{-1}\|_{\mathcal{L}(X_\varepsilon,X)} \leq$$

$$\leq \|P_\varepsilon|_{X_0}\|_{\mathcal{L}(X_0,X)}\|R(\lambda, (P_\varepsilon|_{X_0})^{-1}T_\varepsilon|_{X_\varepsilon}P_\varepsilon|_{X_0})\|_{\mathcal{L}(X_0,X)}\|(P_\varepsilon|_{X_0})^{-1}\|_{\mathcal{L}(X_\varepsilon,X)} \leq$$

$$\leq \|P_\varepsilon|_{X_0}\|_{\mathcal{L}(X_0,X)} \cdot$$
$$\cdot \|R(\lambda, (P_\varepsilon|_{X_0})^{-1}T_\varepsilon|_{X_\varepsilon}P_\varepsilon|_{X_0}) - R(\lambda, T_0|_{X_0})\|_{\mathcal{L}(X_0,X)} \cdot$$
$$\cdot \|(P_\varepsilon|_{X_0})^{-1}\|_{\mathcal{L}(X_\varepsilon,X)} +$$
$$+\|P_\varepsilon|_{X_0}\|_{\mathcal{L}(X_0,X)}\|R(\lambda, T_0|_{X_0})\|_{\mathcal{L}(X_0,X)}\|(P_\varepsilon|_{X_0})^{-1}\|_{\mathcal{L}(X_\varepsilon,X)} \qquad (A.13)$$

Però usant (A.12), l'acotació de l'enunciat per a la resolvent de $T_0|_{X_0}$ i que les restriccions de les projeccions estan uniformement acotades si $\varepsilon < \varepsilon_P$ (per exemple per 2) tal i com havíem vist en l'observació A.6, tenim que

$$(A.13) \leq 2\left(\eta + \frac{M_0}{|\lambda - c|}\right) 2 \leq \frac{C_0}{|\lambda - c|} \quad si\ \varepsilon < min\{\varepsilon_P, \varepsilon_K\}\ i\ \forall \lambda \in K$$

(no hi posem ε_0 perquè ja està inclòs en ε_K) on C_0 és el que apareix en l'enunciat. □

A part d'aquests resultats que es dedueixen de la convergència generalitzada d'operadors, necessitarem introduir-ne uns altres sobre l'acotació de semigrups analítics. El que farem és adaptar un resultat que podem trobar en [14] al cas d'operadors sectorials en sectors no centrats en el zero.

Definició A.9. *Denotarem per $\Sigma_\delta(c)$ el següent sector centrat en $c \in \mathbb{R}$ i d'angle δ, per un cert $\delta \in (0, \pi]$:*

$$\Sigma_\delta(c) := \{\lambda \in \mathbb{C}; |\, arg\,(\lambda - c)\,| < \delta\}$$

Si $c = 0$ denotarem el sector com Σ_δ.

Definició A.10. *Diem que un operador tancat $(T, \mathcal{D}(T))$ amb domini dens $\mathcal{D}(T) \subset X$ és* sectorial *(de sector centrat en $c \in \mathbb{R}$ i angle δ) si existeix $\delta \in (0, \pi/2]$ i $c \in \mathbb{R}$ tal que*

$$\overline{\Sigma}_{\pi/2+\delta}(c) \setminus \{c\} \subset \rho(T)$$

i existeix $C_\delta \geq 1$ tal que

$$\|R(\lambda, T)\| \leq \frac{C_\delta}{|\lambda - c|} \quad \forall\, c \neq \lambda \in \overline{\Sigma}_{\pi/2+\delta}\,(c)$$

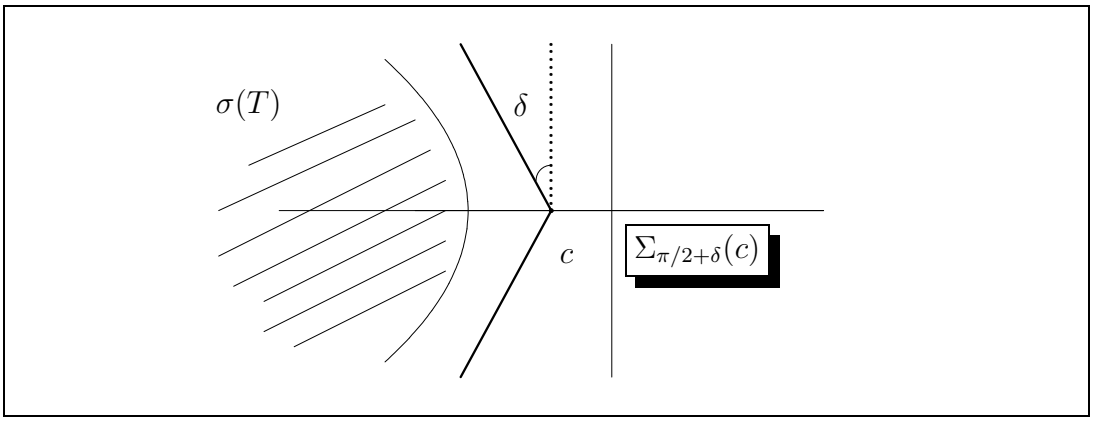


Figura A.1: Sector centrat en c i d'angle $\pi/2+\delta$

En aquest cas, per $z \in \overline{\Sigma}_\delta = \overline{\Sigma}_\delta(0)$ *podem definir* $e^{T0} := Id$ *i els operadors* e^{Tz} *per:*

$$e^{Tz} := \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma e^{\mu z}\, R(\mu, T)\, d\mu$$

on γ *és una corba regular a trossos en* $\overline{\Sigma}_{\pi/2+\delta}(c)$ *que va des de* $\infty\, e^{-i(\pi/2+\delta')}$ *a* $\infty\, e^{i(\pi/2+\delta')}$ *per algun* $\delta' \in (|arg\, z|, \delta)$

Teorema A.11 (Adaptació del teorema de [14]). *Sigui* $(T, \mathcal{D}(T))$ *un operador sectorial de sector centrat en* $c \in \mathbb{R}$ *i d'angle* $\delta \in (0, \pi/2]$*, és a dir,*

$$\|R(\lambda, T)\| \leq \frac{C_\delta}{|\lambda - c|} \quad \forall\, \lambda \in \overline{\Sigma}_{\pi/2+\delta}\,(c) \setminus \{c\} \subset \rho(T)$$

amb $C_\delta \geq 1$*. Llavors, per a qualsevol* $t \geq 0$ *es compleix que:*

$$\left\|e^{\,Tt}\right\| \leq M_\delta\, e^{\,ct}$$

on M_δ *només depèn de* C_δ *i de* δ*, concretament:*

$$M_\delta = \frac{C_\delta}{2\pi}\left[2\,\frac{e^{-\sin(\delta/2)}}{\sin(\delta/2)} + e\,(\pi+\delta)\right]$$

Demostració. La demostració és una adaptació al cas en què el sector no està centrat en el zero de la que es fa en el capítol II.3 del [14] posant de manifest la dependència de M en δ.

Volem acotar la integral

$$e^{\,Tt} = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma e^{\mu t}\, R(\mu, T)\, d\mu \tag{A.14}$$

per qualsevol $t > 0$ fixada. Observem que si $t > 0$ en particular està en $\overline{\Sigma}_\delta(0)$ i per tant, e^{Tt} està ben definit. Observem també que l'integrand és una funció analítica en $\mu \in \overline{\Sigma}_{\pi/2+\delta}(c)$, de manera que el valor de la integral serà independent de la corba. Escollim, doncs, $\gamma = \gamma_r$ on $\gamma_r = \gamma_{r,1} \cup \gamma_{r,2} \cup \gamma_{r,3}$, definides de la manera següent:

$$\gamma_{r,1} := \left\{ \rho e^{i(\pi/2+\delta/2)} + c\,;\ r \leq \rho \leq \infty \right\}$$

$$\gamma_{r,2} := \left\{ r e^{i\tau} + c\,;\ -\pi/2 - \delta/2 \leq \tau \leq \pi/2 + \delta/2 \right\}$$

$$\gamma_{r,3} := \left\{ \rho e^{-i(\pi/2+\delta/2)} + c\,;\ r \leq \rho \leq \infty \right\}$$

on $r = 1/t$. Podem veure en la figura A.2 que $\gamma_r \subset \overline{\Sigma}_{\pi/2+\delta}(c) \subset \rho(T)$. Per aco-

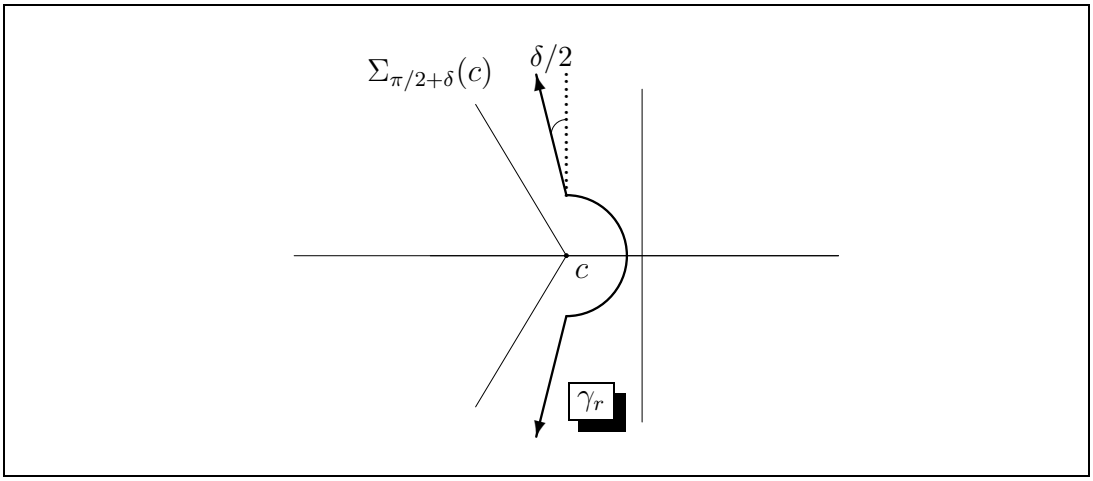


Figura A.2: Corba γ_r

tar l'expressió (A.14), acotarem la integral sobre cadascuna de les tres corbes que formen γ_r.

i) Prenem $\mu \in \gamma_{r,3}$. En aquest cas tenim:

$$arg(\mu - c) = -\frac{\pi}{2} - \frac{\delta}{2} \qquad i \qquad |\mu - c| = \rho$$

on $\delta \in (0, \pi/2]$ i $r \leq \rho \leq \infty$, de manera que

$$(\mu - c)\, t = |\mu - c|\, t\, e^{i\,(arg(\mu-c)+arg(t))} = |\mu - c|\, t\, e^{-i\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\delta}{2}\right)}$$

d'on, de forma immediata, obtenim que

$$Re\,(\mu - c)t = -|\mu - c|\, t\, \sin(\delta/2)$$

Com que $|e^{\mu\, t}| = \left|e^{(\mu-c)\, t}\, e^{c\, t}\right| = e^{ct}\, e^{Re\,(\mu-c)t}$, tenim que:

$$\left|e^{\mu t}\right| = e^{ct}\, e^{-|\mu-c|\, t\, \sin(\delta/2)} \quad \forall\, \mu \in \gamma_{r,3}$$

D'aquesta acotació és immediat veure que:

$$\|e^{\mu t} R(\mu, T)\| \leq e^{ct}\, e^{-|\mu-c|\, t \sin(\delta/2)} \frac{C_\delta}{|\mu - c|} = e^{ct}\, e^{-\rho t\, \sin(\delta/2)}\, \frac{C_\delta}{\rho},\ \forall\, \mu \in \gamma_{r,3} \tag{A.15}$$

on $r \leq \rho \leq \infty$.

ii) De manera anàloga es comprova que

$$\|e^{\mu\, t}\, R(\mu, T)\| \leq e^{ct}\, e^{-\rho\, t\, \sin(\delta/2)}\, \frac{C_\delta}{\rho} \qquad \forall\, \mu \in \gamma_{r,1} \tag{A.16}$$

on $r \leq \rho \leq \infty$.

iii) Prenem ara $\mu \in \gamma_{r,2}$. Com que

$$\left|e^{\mu\, t}\right| = \left|e^{(\mu-c)\, t}\, e^{c\, t}\right| = e^{ct}\, e^{|\mu-c|\, t\, \cos(arg\,(\mu-c))} \leq e^{ct}\, e^{|\mu-c|\, t}$$

i en $\gamma_{r,2}$ tenim $|\mu - c| = r = 1/t$, aleshores:

$$|e^{\mu\, t}| \leq e \cdot e^{ct} \quad \forall\, \mu \in \gamma_{r,2}$$

d'on es deriva l'acotació de l'integrand:

$$\|e^{\mu\, t}\, R(\mu, T)\| \leq e \cdot e^{ct} \frac{C_\delta}{r} = t\, e \cdot e^{ct} C_\delta \quad \forall\, \mu \in \gamma_{r,2} \tag{A.17}$$

Utilitzant aquestes acotacions de l'integrand en cadascuna de les tres corbes on integrem, podem acotar cadascuna de les tres integrals.

i) Usant (A.15) tenim:

$$\left\| \int_{\gamma_{r,3}} e^{\mu\, t}\, R(\mu, T)\, d\mu \right\| \leq e^{ct}\, C_\delta \int_{1/t}^{\infty} \frac{e^{-\rho\, \sin(\delta/2)\, t}}{\rho}\, d\rho$$

que es calcula fàcilment, obtenint:

$$\left\| \int_{\gamma_{r,3}} e^{\mu\, t}\, R(\mu, T)\, d\mu \right\| \leq C_\delta\, \frac{e^{-\sin(\delta/2)}}{\sin(\delta/2)}\, e^{ct} \tag{A.18}$$

ii) Anàlogament usem (A.16) per obtenir que:

$$\left\| \int_{\gamma_{r,1}} e^{\mu\, t}\, R(\mu, T)\, d\mu \right\| \leq C_\delta\, \frac{e^{-\sin(\delta/2)}}{\sin(\delta/2)}\, e^{ct} \tag{A.19}$$

iii) Acotem ara la integral en $\gamma_{r,2}$ usant (A.17):

$$\left\| \int_{\gamma_{r,2}} e^{\mu\, t}\, R(\mu, T)\, d\mu \right\| \leq t\, C_\delta\, e^{ct}\, e \left| \int_{\gamma_{r,2}} d\mu \right|$$

Parametritzant la corba com $\gamma_{r,2}(s) = 1/t\, e^{is}$, $s \in [-\pi/2-\delta/2, \pi/2+\delta/2]$ tenim que:

$$\int_{-\pi/2-\delta/2}^{\pi/2+\delta/2} |\, \gamma_{r,2}{}'(s)| ds = \int_{-\pi/2-\delta/2}^{\pi/2+\delta/2} \frac{1}{t}\, ds = \frac{\pi+\delta}{t}$$

i per tant:

$$\left\| \int_{\gamma_{r,2}} e^{\mu\, t}\, R(\mu, T)\, d\mu \right\| \leq e^{ct}\, e\, C_\delta\, (\pi + \delta) \tag{A.20}$$

Ajuntant les acotacions (A.18), (A.19) i (A.20) quan $t > 0$ i recordant que $e^{T0} = Id$, tenim l'acotació pel semigrup que s'havia enunciat en el teorema:

$$\left\| e^{T\, t} \right\| \leq M_\delta\, e^{ct} \quad \forall\, t \geq 0 \tag{A.21}$$

on

$$M_\delta = \frac{C_\delta}{2\pi} \left[2\, \frac{e^{-\sin(\delta/2)}}{\sin(\delta/2)} + e\, (\pi + \delta) \right]$$

□

Ara sí que tenim les eines per a demostrar el teorema objectiu d'aquest apartat.

Teorema A.12 (acotació uniforme dels semigrups generats per les restriccions). *Sigui T_0 un operador sectorial en un espai de Banach X amb $Re\, \sigma(T_0) \leq 0$, amb l'espectre separat en dues parts σ_0^1, σ_0^2 per la recta $\{Re\, z = c_0\}$, per un cert $c_0 < 0$, i sigui la descomposició associada de l'espai $X = X_0 \oplus Y_0$ amb $Re\, \sigma(T_0|_{X_0}) < c_0$ i $Re\, \sigma(T_0|_{Y_0}) > c_0$. Noti's que en aquest cas sabem que $T_0|_{X_0}$ genera un semigrup analític i, per tant, existeix un sector centrat en 0, $\Sigma_0 = \Sigma_{\pi/2+\delta_0}(0)$, $\delta_0 \in (0, \pi/2]$, amb $\overline{\Sigma}_0 \subset \rho(T_0|_{X_0})$ i existeix $C_0 \geq 1$ tal que*

$$\|R(\lambda, T_0|_{X_0})\|_{\mathcal{L}(X_0,X)} \leq \frac{C_0}{|\lambda|} \quad \forall\, 0 \neq \lambda \in \overline{\Sigma}_0$$

Sigui $\{T_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ una família d'operadors sectorials en X. Suposem que $Re\, \sigma(T_\varepsilon) < 0$ per a tot $\varepsilon > 0$ i que:

i) T_ε convergeix a T_0 en sentit generalitzat quan $\varepsilon \to 0$

ii) existeix un sector $\Sigma = \Sigma_{\pi/2+\delta}(r)$ *(independent de* ε*),* $\delta \in (0, \pi/2]$ *i* $r > 0$ *i existeix* $C_\delta \geq 1$ *(també independent de* ε*) tals que:*

$$\overline{\Sigma} \subset \rho(T_\varepsilon) \quad si\ \varepsilon < \varepsilon_1$$

i

$$\|R(\lambda, T_\varepsilon)\|_{\mathcal{L}(X,X)} \leq \frac{C_\delta}{|\lambda|} \quad \forall\, \lambda \in \overline{\Sigma}, \quad si\ \varepsilon < \varepsilon_1$$

per un cert $\varepsilon_1 > 0$*.*

Aleshores, existeix $\varepsilon_0 > 0$ *tal que si* $\varepsilon < \varepsilon_0$ *es té que:*

1. *L'espectre de* T_ε *està separat en dues parts* σ_ε^1*,* σ_ε^2 *per la recta* $\{Re\, z = c_0\}$*, amb descomposició de l'espai associada* $X = X_\varepsilon \oplus Y_\varepsilon$*, on* $X_\varepsilon \cong X_0$ *i* $Y_\varepsilon \cong Y_0$*.*

2. *Existeix un angle* $\delta' \in (0, \delta)$ *i una constant* $C_{\delta'} \geq 1$*, independents de* ε*, tals que el sector* $\Sigma' = \Sigma_{\pi/2+\delta'}(c_0)$ *compleix que:*

$$\overline{\Sigma'} \setminus \{c_0\} \subset \rho(T_\varepsilon|_{X_\varepsilon})\ si\ \varepsilon < \varepsilon_0$$

i

$$\|R(\lambda, T_\varepsilon|_{X_\varepsilon})\|_{\mathcal{L}(X_\varepsilon, X_\varepsilon)} \leq \frac{C_{\delta'}}{|\lambda - c_0|} \quad \forall\, c_0 \neq \lambda \in \overline{\Sigma'},\ si\ \varepsilon < \varepsilon_0$$

3. *I finalment, sota aquestes hipòtesis es compleix que:*

$$\|e^{T_\varepsilon|_{X_\varepsilon} t}\|_{\mathcal{L}(X_\varepsilon, X_\varepsilon)} \leq M e^{c_0 t} \quad si\ \varepsilon < \varepsilon_0$$

on $M = M(\Sigma', C_{\delta'})$ *i, per tant, no depèn de* ε *si* $\varepsilon < \varepsilon_0$*.*

Observació A.13. *El fet que* $T_\varepsilon|_{X_\varepsilon}$ *sigui analític per cada* ε *ens assegura que les acotacions 2 i 3 del teorema es tenen de forma immediata però possiblement amb* $C_{\delta'} = C(\varepsilon)$ *i* $M = M(\varepsilon)$*. L'interés del teorema, doncs, està en què les acotacions són uniformes en* ε *si aquest és prou petit, cosa que no és evident quan els operadors no són autoadjunts, com és el cas.*

D'altra banda, demanar la hipòtesi ii) és necessari, ja que pel fet de tenir cada T_ε *sectorial el que sabem és que existeixen un sector* $\Sigma_\varepsilon = \Sigma_{\pi/2+\delta_\varepsilon}(r_\varepsilon)$ *i una constant* $C_\varepsilon \geq 1$ *tals que* $\overline{\Sigma}_\varepsilon \subset \rho(T_\varepsilon)$ *i*

$$\|R(\lambda, T_\varepsilon)\|_{\mathcal{L}(X,X)} \leq \frac{C_\varepsilon}{|\lambda - r_\varepsilon|} \quad \forall\ r_\varepsilon \neq \lambda \in \overline{\Sigma}_\varepsilon$$

I el que es demana en la hipòtesi ii) és un sector i una constants uniformes si ε *és prou petit.*

Demostració. En primer lloc, podem suposar sense pèrdua de generalitat que

$$\overline{\Sigma} = \overline{\Sigma}_{\pi/2+\delta}(r) \subset \overline{\Sigma}_{\pi/2+\delta_0}(0)$$

que és el mateix que dir que podem suposar que $\delta_0 \geq \delta$ i per tant també és cert que

$$\overline{\Sigma}_{\pi/2+\delta}(r) \subset \rho(T_0|_{X_0}) \quad \text{i} \quad \|R(\lambda, T_0|_{X_0})\|_{\mathcal{L}(X_0,X)} \leq \frac{C_0}{|\lambda|} \ \ \forall\, \lambda \in \overline{\Sigma} = \overline{\Sigma}_{\pi/2+\delta}(r)$$

D'altra banda, com que T_0 és analític, podem suposar també que $\overline{\Sigma} \subset \rho(T_0)$ ja que, si no fos així, triaríem un sector que inclogués $\rho(T_0)$ i $\rho(T_\varepsilon)$ per $\varepsilon < \varepsilon_1$.

Amb aquestes observacions passem ja a demostrar el teorema, el primer resultat del qual serà conseqüència directa de la convergència generalitzada de T_ε a T_0 quan $\varepsilon \to 0$. Per veure-ho, considerem la corba tancada $\gamma \subset \rho(T_0)$ definida com la frontera del triangle format per les branques de Σ amb la recta $\{Re\, z = c_0\}$, tal i com s'il.lustra a la figura A.3. Per construcció, $\gamma \subset \rho(T_0)$ i separa $\sigma(T_0)$ en dues parts: $\sigma(T_0|_{X_0}) \subset ext(\gamma)$ i $\sigma(T_0|_{Y_0}) \subset int(\gamma)$. En aquesta situació, la convergència generalitzada de T_ε a T_0 ens diu que γ, que per construcció també està en $\rho(T_\varepsilon)$ si $\varepsilon < \varepsilon_1$, també separa l'espectre de T_ε de la mateixa manera que el de T_0, és a dir, tenim $X = X_\varepsilon \oplus Y_\varepsilon$ amb $X_\varepsilon \cong X_0$, $Y_\varepsilon \cong Y_0$ i $\sigma(T_\varepsilon|_{X_\varepsilon}) \subset ext(\gamma)$, $\sigma(T_\varepsilon|_{Y_\varepsilon}) \subset int(\gamma)$ si ε és prou petit (direm també si $\varepsilon < \varepsilon_1$). En particular, $Re\, \sigma(T_\varepsilon|_{Y_\varepsilon}) > c_0$. Però com que sabem també que $\overline{\Sigma} \subset \rho(T_\varepsilon) \subset \rho(T_\varepsilon|_{X_\varepsilon})$ si $\varepsilon < \varepsilon_1$, forçosament tenim que $Re\, \sigma(T_\varepsilon|_{X_\varepsilon}) < c_0$ si ε és prou petit.

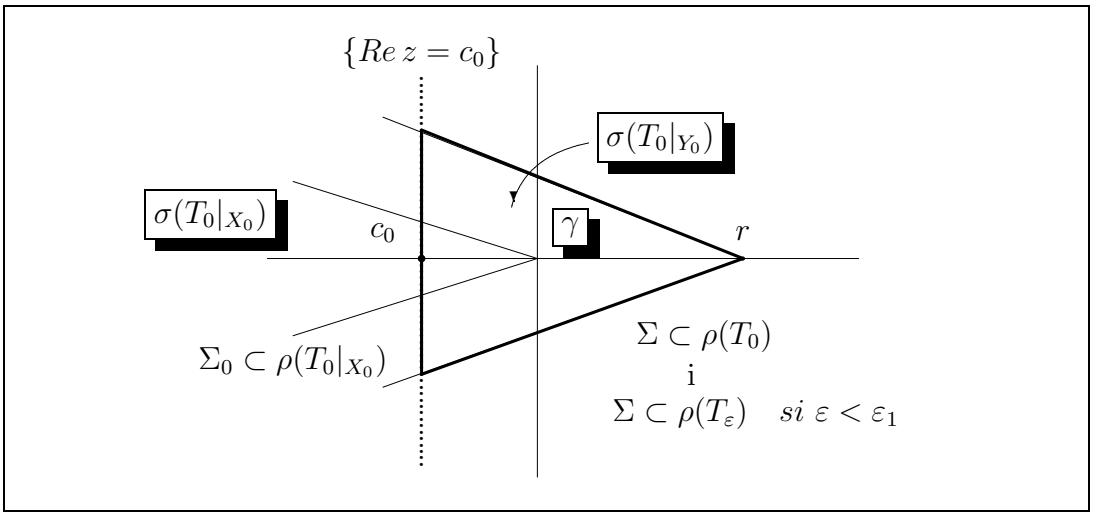


Figura A.3: Esquema dels sectors Σ_0, Σ i la corba γ.

Demostrem ara els apartats 2 i 3 de l'enunciat. Com que $Re\, \sigma(T_0|_{X_0}) < c_0 < 0$, podem construir un sector centrat en c_0 i d'angle un cert $\delta' \in (0, \pi/2)$

que estigui contingut en $\rho(T_0|_{X_0})$ i que intersecti amb les branques de $\overline{\Sigma}_{\pi/2+\delta}(r)$, és a dir que $\delta' \in (0, \delta)$, tal i com es veu en la figura A.4. Per construcció, aquest nou sector $\Sigma' = \Sigma_{\pi/2+\delta'}(c_0)$ és independent de ε (només depèn de l'espectre de $T_0|_{X_0}$ i de l'angle δ) i $\overline{\Sigma'} \subset \rho(T_0|_{X_0})$. D'altra banda, aplicant el lema A.4 tenim

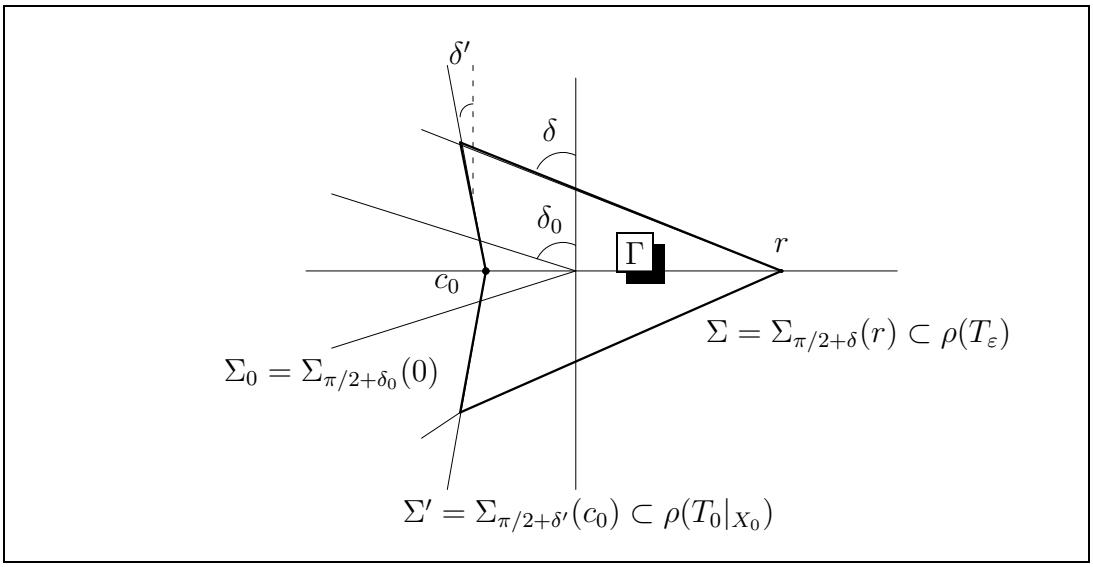


Figura A.4: Esquema dels sectors Σ_0, Σ i Σ', i de la corba Γ que formen.

que $(P_\varepsilon|_{X_0})^{-1}\, T_\varepsilon\, (P_\varepsilon|_{X_0})$ convergeix a $T_0|_{X_0}$ en sentit generalitzat de manera que els resultats de convergència generalitzada del [22] ens diuen que existeix $\varepsilon_2 > 0$ tal que

$$\overline{\Sigma}_{\pi/2+\delta'}(c_0) \subset \rho(T_\varepsilon|_{X_\varepsilon}) = \rho((P_\varepsilon|_{X_0})^{-1}\, T_\varepsilon\, (P_\varepsilon|_{X_0})) \quad si\ \varepsilon < \varepsilon_2$$

(això és evident en la part de $\overline{\Sigma'}$ inclosa en $\overline{\Sigma}$, però per la resta de $\overline{\Sigma'}$ s'ha d'utilitzar que estem en un compacte i que, per tant, podem aplicar els resultats de convergència generalitzada que hem vist). De fet, voldrem una acotació per $R(\lambda, T_\varepsilon|_{X_\varepsilon})$ en aquest sector que sigui independent de ε. Per fer això, ens fixem en què la intersecció de Σ' amb Σ divideix Σ' en dues parts. Efectivament, si anomenem Γ la corba $\Gamma = \partial(\Sigma \cap \Sigma')$ aleshores el sector Σ' queda dividit en $\Sigma' \setminus \overline{int\, \Gamma}$ i $\overline{int\, \Gamma}$. Analitzem cadascuna d'aquestes parts per separat:

i) La primera d'elles està continguda en el sector anterior Σ, del qual sabíem que està contingut en el conjunt resolvent de T_ε si ε és prou petit (hipòtesi (ii) de l'enunciat). Per tant, tenim la següent cadena d'inclusions:

$$\overline{\Sigma'} \setminus \overline{int\, \Gamma} \subset \overline{\Sigma}_{\pi/2+\delta}(r) \subset \rho(T_\varepsilon) \subset \rho(T_\varepsilon|_{X_\varepsilon})$$

si ε és prou petit. En particular, les hipòtesis del teorema ens permeten dir que:

$$\|R(\lambda, T_\varepsilon|_{X_\varepsilon})\|_{\mathcal{L}(X_\varepsilon, X_\varepsilon)} \leq \|R(\lambda, T_\varepsilon)\|_{\mathcal{L}(X,X)} \leq \frac{C_\delta}{|\lambda|} \quad \forall\, \lambda \in \overline{\Sigma'} \setminus \overline{int\,\Gamma}\ ,\ \forall \varepsilon < \varepsilon_2$$

Però si R_Γ és el radi de la circumferència de centre 0 inscrita en $int\,\Gamma$, és immediat comprovar que:

$$|\lambda - c_0| \leq \left(1 + \frac{|c_0|}{R_\Gamma}\right)|\lambda| \quad \forall\, \lambda \in \overline{\Sigma'} \setminus \overline{int\,\Gamma}$$

i, per tant:

$$\|R(\lambda, T_\varepsilon|_{X_\varepsilon})\|_{\mathcal{L}(X_\varepsilon, X_\varepsilon)} \leq \frac{C_1}{|\lambda - c_0|} \quad \forall \lambda \in \overline{\Sigma'} \setminus \overline{int\,\Gamma}\ ,\ \forall \varepsilon < \varepsilon_2 \tag{A.22}$$

on $C_1 = C_\delta/(1 + |c_0|/R_\Gamma)$.

ii) L'altra part, $K = \overline{int\,\Gamma}$ és, de fet, un compacte. En aquesta regió voldrem comparar $R(\lambda, T_\varepsilon|_{X_\varepsilon})$ amb $R(\lambda, T_0|_{X_0})$ i per això ens fixem en què com que $\lambda \in K \subset \overline{\Sigma'} \subset \rho(T_0|_{X_0})$ llavors:

$$\|R(\lambda, T_0|_{X_0})\|_{\mathcal{L}(X_0,X)} \leq C_0' \leq \frac{\tilde{C}_0}{|\lambda - c_0|} \quad \forall \lambda \in K,\ \lambda \neq c_0 \tag{A.23}$$

per un cert $\tilde{C}_0 > 0$, pel fet que K sigui un compacte (la diferència amb l'acotació donada en l'enunciat és que tenim $|\lambda - c_0|$ dividint, que és el que ens interessarà). D'altra banda, com que tenim convergència generalitzada de $(P_\varepsilon|_{X_0})^{-1}\, T_\varepsilon\, (P_\varepsilon|_{X_0})$ a $T_0|_{X_0}$ i estem en un compacte, el lema A.3 ens diu que:

$$\|R(\lambda, (P_\varepsilon|_{X_0})^{-1}\, T_\varepsilon\, (P_\varepsilon|_{X_0})) - R(\lambda, T_0|_{X_0})\| < \eta \quad si\ \varepsilon < \varepsilon_3 \ \ \forall \lambda \in K \tag{A.24}$$

per un cert $\varepsilon_3 > 0$. A partir d'aquí, només es tracta de jugar amb les desigualtats. D'entrada, l'observació A.7 ens permet escriure que:

$$\|R(\lambda, T_\varepsilon|_{X_\varepsilon})\|_{\mathcal{L}(X_\varepsilon,X)} = \|P_\varepsilon|_{X_0}(P_\varepsilon|_{X_0})^{-1} R(\lambda, T_\varepsilon|_{X_\varepsilon}) P_\varepsilon|_{X_0}(P_\varepsilon|_{X_0})^{-1}\|_{\mathcal{L}(X_\varepsilon,X)} \leq$$

$$\leq \|P_\varepsilon|_{X_0}\|_{\mathcal{L}(X_0,X)} \cdot$$
$$\cdot\, \|R(\lambda, (P_\varepsilon|_{X_0})^{-1}\, T_\varepsilon|_{X_\varepsilon}(P_\varepsilon|_{X_0})) - R(\lambda, T_0|_{X_0})\|_{\mathcal{L}(X_0,X)} \cdot$$
$$\|(P_\varepsilon|_{X_0})^{-1}\|_{\mathcal{L}(X_\varepsilon,X)} +$$
$$+ \|P_\varepsilon|_{X_0}\|_{\mathcal{L}(X_0,X)} \|R(\lambda, T_0|_{X_0})\|_{\mathcal{L}(X_0,X)} \|(P_\varepsilon|_{X_0})^{-1}\|_{\mathcal{L}(X_\varepsilon,X)} \tag{A.25}$$

Però usant (A.24), l'acotació (A.23) i que les projeccions estan uniformement acotades si $\varepsilon < \varepsilon_4$ (per exemple per 2) perquè convergeixen a la identitat (recordem l'observació A.6), tenim que:

$$(A.25) \leq 2\left(\eta + \frac{\tilde{C}_0}{|\lambda - c_0|}\right) 2 \leq \frac{C_2}{|\lambda - c_0|} \quad si\ \varepsilon < min\{\varepsilon_3, \varepsilon_4\}\ i\ \forall\, c_0 \neq \lambda \in K \tag{A.26}$$

Ajuntant (A.22) i (A.26), i prenent $\varepsilon_0 = min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4\}$ i $C_{\delta'} = max\{C_1, C_2\}$, tenim que:

$$\overline{\Sigma'} = \overline{\Sigma}_{\pi/2+\delta'}(c_0) \subset \rho(T_\varepsilon|_{X_\varepsilon}) \quad \text{si } \varepsilon < \varepsilon_0 \quad \text{i}$$

$$\|R(\lambda, T_\varepsilon|_{X_\varepsilon})\|_{\mathcal{L}(X_\varepsilon, X)} \leq \frac{C_{\delta'}}{|\lambda - c_0|} \quad \forall\, c_0 \neq \lambda \in \overline{\Sigma'} = \overline{\Sigma}_{\pi/2+\delta'}(c_0), \quad \text{si } \varepsilon < \varepsilon_0 \tag{A.27}$$

on el sector i la constant no depenen de ε.

Havent vist (A.27), l'apartat 3 del teorema és una aplicació directa de l'adaptació del teorema de [14], el teorema A.11, d'on obtenim que

$$\|e^{T_\varepsilon|_{X_\varepsilon} t}\|_{\mathcal{L}(X_\varepsilon, X)} \leq M_{\delta'}\, e^{c_0\, t} \quad si\ \varepsilon < \varepsilon_0 \tag{A.28}$$

amb $M_{\delta'}$ que depèn només de l'angle δ' i de l'anterior constant $C_{\delta'}$. En particular, no depèn de $\varepsilon > 0$ si $\varepsilon < \varepsilon_0$. □

Aquest és el teorema principal d'aquest apartat, però per finalitzar inclourem dos resultats recollits del capítol III.2 de [14] i que, convenientment adaptats, ens seran útils per tal d'aplicar el teorema anterior en el capítol 5.

Definició A.14 (Engel-Nagel, [14]). *Sigui $A : \mathcal{D}(A) \subset X \to X$ un operador lineal en un espai de Banach X. Diem que $B : \mathcal{D}(B) \subset X \to X$ és un operador* relativament A-acotat *si $\mathcal{D}(B) \subset \mathcal{D}(A)$ i existeixen $a, b > 0$ tals que:*

$$\|Bx\| \leq a\,\|Ax\| + b\,\|x\| \quad \forall\, x \in \mathcal{D}(A) \tag{A.29}$$

Anomenem cota relativa *de B a:*

$$a_0 = inf\{a \geq 0 \text{ tals que existeix } b > 0 \text{ que verifica (A.29)}\}$$

Lema A.15 (Engel-Nagel, [14]). *Sigui $(A, \mathcal{D}(A))$ un operador tancat en un espai de Banach X amb resolvent no buida i suposem que $(B, \mathcal{D}(B))$ està relativament acotat per A, amb constants $a, b \geq 0$. Sigui $\lambda_0 \in \rho(A)$ i tal que*

$$c := a\,\|A\,R(\lambda_0, A)\| + b\,\|R(\lambda_0, A)\| < 1$$

Aleshores $A + B$ és tancat i $\lambda_0 \in \rho(A + B)$ amb

$$\|R(\lambda_0, A + B)\| < \frac{1}{1 - c}\,\|R(\lambda_0, A)\|$$

Aquest lema permet demostrar el següent, que té un caràcter més general (és per tots els punts del conjunt resolvent) i que és el que realment s'utilitza en el capítol 5 per a demostrar la hipòtesi 5 del teorema de varietats invariants.

Lema A.16 (Engel-Nagel, [14]). *Sigui $(A, \mathcal{D}(A))$ un operador tancat tal que l'operador resolvent existeix per a tot $0 \neq \lambda \in \overline{\Sigma}_\delta$ i satisfà que*

$$\|R(\lambda, A)\| \leq \frac{M}{|\lambda|}$$

per certs $\delta \geq 0$ i $M \geq 1$. Suposem que $(B, \mathcal{D}(B))$ és un operador A-acotat amb cota relativa

$$a < \frac{1}{M+1}$$

Aleshores, existeixen unes constants $r \geq 0$ i $\widetilde{M} \geq 1$ tals que

$$\overline{\Sigma}_\delta \cap \{z \in \mathbb{C}; |z| > r\} \subset \rho(A+B) \quad i \quad \|R(\lambda, A+B)\| \leq \frac{\widetilde{M}}{|\lambda|}$$

per a tot $\lambda \in \overline{\Sigma}_\delta \cap \{z \in \mathbb{C}; |z| > r\}$.

Observació A.17. *Revisant les demostracions dels dos lemes anteriors, que podem trobar en [14], podem ser una mica més precisos amb les constants r i $\widetilde{M}$. Efectivament, prenent*

$$r = \frac{bM}{1 - a(M+1)}$$

garantim que $c := a\,\|A\,R(\lambda, A)\| + b\,\|R(\lambda, A)\| < 1$ si $|\lambda| > r$, i es pot veure que es pot prendre:

$$\widetilde{M} = \frac{M}{1-c}$$

Així és com es demostra en [14]. Però com que el c anterior depèn de cada λ, intentarem ser més precisos i aconseguir una cota universal. Per exemple, prenent

$$r = \frac{bM}{\frac{1}{2} - a(M+1)} \tag{A.30}$$

(amb una cota relativa que compleixi que $a < \frac{1/2}{M+1}$) tenim que $c \leq 1/2 < 1$ per a tot $\lambda \in \rho(A)$ i, per tant, podem prendre

$$\widetilde{M} = \frac{M}{1-c} \leq 2M$$

A més, $\overline{\Sigma}_\delta \cap \{z \in \mathbb{C}; |z| > r\} \supset \overline{\Sigma}_{\delta'}(2r)$ *si* $0 \leq \delta' \leq \delta$*, amb l'avantatge que parlem d'un sector, ara centrat en* $2r$*. Per tant, el lema A.16 es pot reescriure com que, sota les mateixes hipòtesis tenim:*

$$\overline{\Sigma}_{\delta'}(2r) \subset \rho(A+B) \quad i \quad \|R(\lambda, A+B)\| \leq \frac{2M}{|\lambda|}$$

per a tot $\lambda \in \overline{\Sigma}_{\delta'}(2r)$ *on* r *l'hem definida en (A.30) i on* $0 \leq \delta' \leq \delta$ *qualsevol.*

Apèndix B

Força externa aplicada a la massa i funcions de transferència. Solucions globalment acotades

En la primera part de la memòria hem estudiat el problema lineal homogeni. Considerem ara una variant d'aquest model obtinguda en aplicar una força externa $f(t)$ a la massa m de l'extrem. Concretament, pensarem en una força externa del tipus $f(t) = Ae^{i\omega t}$, on A serà l'amplitud de la força i ω en denotarà la freqüència, que de fet es pot pensar com una simplificació del cas general $f(t) \in L^2(\mathbb{R})$ (usant la transformada de Fourier de les funcions de $L^2(\mathbb{R})$). Si recordem la notació dimensional introduïda en el capítol 1, l'equació corresponent a aquesta versió no homogènia del problema lineal és:

$$\text{(B.1)} \quad \begin{cases} \rho\, u_{tt} \;=\; E_1\, u_{txx} + E\, u_{xx}, \quad 0 < x < L,\ t > 0 \\ \\ u(0,t) = 0 \\ \\ mu_{tt}(L,t) = -Eu_x(L,t) - E_1 u_{tx}(L,t) - qu_t(L,t) + Ae^{i\omega t} \end{cases}$$

que s'obté d'afegir a la versió dimensional del model homogeni (1.5) la força $f(t) = Ae^{i\omega t}$ en les condicions de contorn en $x = L$. L'objectiu serà trobar la única solució globalment acotada que admet el problema no homogeni, cosa que ens portarà a un nou concepte d'equació diferencial ordinària aproximada, diferent de la que en el capítol 1 ens donaven els valors propis dominants.

Per què ens interessem per les solucions globalment acotades? En el cas de les equacions diferencials ordinàries de segon ordre que modelitzen les oscil.lacions, les solucions globalment acotades són eines ben conegudes, tal i com veurem en el següent apartat. De fet, aquest tipus de solucions es coneixen

també com a *règim permanent* de l'equació diferencial ja que el seu principal interès està en què són la solució a la qual tendeixen la resta a mida que el temps augmenta. En aquest sentit, pot pensar-se com la única solució rellevant des d'un punt de vista físic.

B.1 L'equació diferencial ordinària i funció de transferència.

Mirem-nos per uns moments l'equació diferencial ordinària de segon ordre

$$k_2\, z''(t) + k_1\, z'(t) + k_0\, z(t) = A\, e^{i\omega t} \tag{B.2}$$

Sabem que si k_0,k_1,$k_2 > 0$ la única solució globalment acotada (és a dir, acotada en $(-\infty, \infty)$) de l'equació homogènia és $z(t) \equiv 0$, de manera que l'equació no homogènia (B.2) admet una única solució globalment acotada en $(-\infty, \infty)$. Aquesta solució té la forma:

$$z_b(t) = A\ H_{edo}(\omega)\, e^{i\omega t} \quad \text{on} \quad H_{edo}(\omega) = \frac{1}{k_0 - \omega^2\, k_2 + k_1\, i\, \omega}$$

Definició B.1. *S'anomena* funció de transferència *de l'equació diferencial (B.2) a la funció* $H_{edo}(\omega)$.

És ben conegut el comportament del mòdul d'aquesta funció de transferència segons el valor dels coeficients de l'equació diferencial, especialment del coeficient crític k_1. El trobem resumit en la figura B.1 on, per exemple, es veu reflectit el fenomen de la ressonància quan no tenim dissipació en l'equació diferencial ($k_1 = 0$).

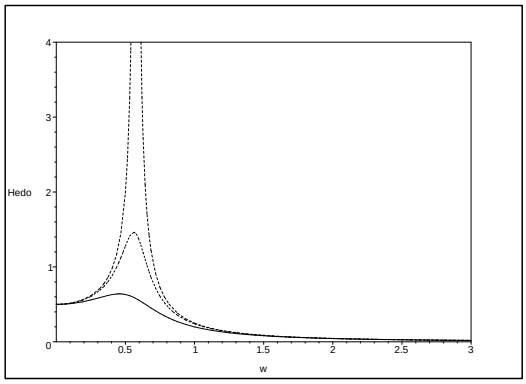


Figura B.1: Funció de transferència de l'equació diferencial (B.2) per a $k_1 = 0$, k_1 petit i k_1 gran, respectivament.

Anàlogament, si considerem a l'equació diferencial ordinària d'ordre n

$$k_n\, z^{n)}(t) + k_{n-1}\, z^{n-1)}(t) + \ldots + k_0\, z(t) = A\, e^{i\omega t} \tag{B.3}$$

també té pot tenir sentit buscar la solució globalment acotada $AH_{edo}(\omega)\, e^{i\omega t}$, obtenint així la corresponent funció de transferència.

Definició B.2. *S'anomena* funció de transferència *de l'equació diferencial d'ordre n (B.3) a la funció:*

$$H_{edo}(\omega) = \frac{1}{\sum_{j=0}^{n} k_j\, (i\,\omega)^j}$$

B.2 L'equació en derivades parcials.

La idea és que la situació en el nostre model en derivades parcials no homogeni (B.1) serà la mateixa.

Lema B.3. *Sigui A el generador infinitessimal d'un semigrup C_0 i compleix que*

$$\|e^{At}\| \leq M\, e^{-rt} \quad \forall\, 0 \leq t < \infty$$

per uns certs $r > 0$ i $M \geq 1$. Aleshores, l'equació diferencial

$$u'(t) = A\, u(t)$$

admet una única solució globalment acotada en el temps, que és la solució $u_0(t) \equiv 0$.

Demostració. Suposem que $u_0(t)$ és una solució globalment acotada de l'equació diferencial, és a dir:

$$\|u_0(t)\| \leq C \quad \forall\, t \in \mathbb{R}$$

Per propietats de semigrup, tenim que

$$u_0(t+s) = e^{At}\, u_0(s) \quad \forall\, t > 0,\, \forall\, s \in \mathbb{R}$$

Prenent normes,

$$\|u_0(t+s)\| \leq C\, M\, e^{-rt} \quad \forall\, t > 0,\, \forall\, s \in \mathbb{R}$$

Com que val $\forall\, t > 0$ i $\forall\, s$, que són independents, podem fer tendir t a ∞, de manera que:

$$\|u_0(t+s)\| \leq 0 \quad \forall\, s \in \mathbb{R} \;\Rightarrow\; \|u_0(t+s)\| = 0 \quad \forall\, s \in \mathbb{R}$$

ja que $r > 0$. Per tant, la única solució globalment acotada és $u_0(t) = 0$. □

Teorema B.4. *L'equació en derivades parcials (B.1) admet una única solució globalment acotada en el temps si $E_1 > 0$, que és:*

$$u_b(x,t) = \frac{A\, e^{i\omega t}\, \sinh ax}{[-\omega^2 m \sinh(aL) + Ea\cosh(aL)] + i\omega\,[E_1 a\cosh(aL) + q\sinh(aL)]}$$

on

$$a^2 = \frac{-\omega^2\rho}{E + E_1\omega i}$$

Demostració. Per veure que el model no homogeni admet una única solució globalment acotada en el temps, només cal veure que el problema homogeni està en les hipòtesis del lema B.3. Això es comprova si recordem que l'operador associat al model homogeni generava un semigrup analític si $\alpha > 0$ (és a dir, si $E_1 > 0$) i que la part real dels valors propis era estrictament menor que 0 si $\varepsilon > 0$, és a dir, si $m < \infty$ (recordem els capítols 3 i 4).

Trobem ara aquesta solució globalment acotada, buscant-la de la forma $u_b(x,t) = B\, e^{i\omega t}\sinh ax$, que és acotada per a tot $t \in \mathbb{R}$. Substituint en l'equació, trobem que la única solució globalment acotada del problema no homogeni és la que enuncia el teorema. □

Definició B.5. *Anomenen la funció*

$$H_{edp}(x,\omega) = \frac{\sinh ax}{[-\omega^2 m\sinh(aL) + Ea\cosh(aL)] + i\omega[E_1 a\cosh(aL) + q\sinh(aL)]}$$

funció de transferència *de l'equació en derivades parcials (B.1).*

Si ens mirem les gràfiques del mòdul de $H_{edp}(x,\omega)$, per un $x \in (0,L)$ fixat, per a diversos valors dels paràmetres E_1 i q podem observar que, almenys per freqüències petites, les gràfiques de la figura B.2 ens recorden a les obtingudes per a l'equació diferencial ordinària en la figura B.1, tot i que ara apareixen més pics ressonants quan la dissipació és petita.

La gràfica anterior sembla indicar que triant adequadament els coeficients de l'equació diferencial ordinària (B.2) podrem aconseguir que les funcions de transferència s'assemblin en un entorn de $\omega = 0$. En altres paraules, com que les solucions globalment acotades de (B.1) i (B.2) vénen donades essencialment per les corresponents funcions de transferència, buscarem aquells coeficients de l'equació diferencial ordinària que facin que les funcions de transferència s'assemblin per a freqüències baixes si fixem $x \in (0,L)$. En particular, si ens mirem les solucions en l'extrem $x = L$, voldrem que:

$$u_b(L,t) = A\, H_{edp}(L,\omega)\, e^{i\omega t} \;\simeq\; z_b(t) = A\, H_{edo}(\omega)\, e^{i\omega t} \;\text{ quan } \omega \simeq 0$$

de manera que serà suficient trobar els coeficients de l'equació diferencial (B.2) tal que

$$H_{edp}(L,\omega) \;\simeq\; H_{edo}(\omega) \;\text{ quan } \omega \simeq 0$$

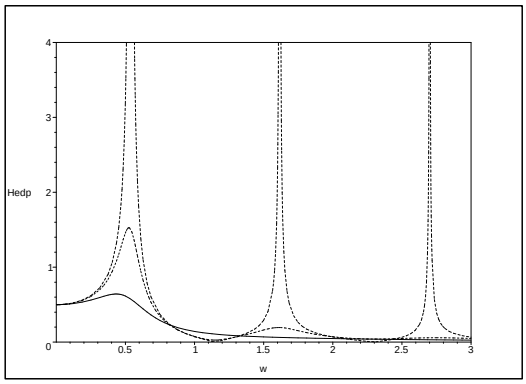


Figura B.2: Funció de transferència de l'EDP per a $E_1, q = 0$, E_1, q petits i E_1, q grans, respectivament.

Desenvolupant en sèrie de potències entorn $\omega = 0$ ambdues funcions de transferència i igualant coeficients, obtindrem els coeficients de l'equació diferencial ordinària (B.2). Com que en aquest cas tenim tres graus de llibertat serà suficient desenvolupar les funcions de transferència fins a $O(\omega^3)$:

$$H_{edp}(L,\omega) = \frac{L}{E} - i\,\frac{L(E_1+qL)}{E^2}\,\omega -$$

$$\frac{L\left(-3LmE - L^2E\rho + 3E_1^2 + 6E_1qL + 3q^2L^2\right)}{3E^3}\,\omega^2 + O(\omega^3)$$

i

$$H_{edo}(\omega) = \frac{1}{k_0} - \frac{i\,k_1}{k_0^2}\,\omega + \frac{\frac{k_2}{k_0} - \left(\frac{k_1}{k_0}\right)^2}{k_0}\,\omega^2 + O(\omega^3)$$

Igualant coeficients tindríem l'equació diferencial ordinària aproximada de segon ordre:

$$\left(m + \frac{1}{3}\rho L\right)\,z''(t) + \left(\frac{E_1}{L} + q\right)\,z'(t) + \left(\frac{E}{L}\right)\,z(t) = A\,e^{iwt} \tag{B.4}$$

que aproximaria l'equació en derivades parcials (B.1) per a qualssevol valors fixats dels paràmetres en el sentit que, com que $|H_{edo} - H_{edp}| = O(\omega^3)$, les corresponents solucions globalment acotades compleixen que $|u_b(L,t) - z_b(t)| = A \cdot O(\omega^3)$. De fet, en el nostre cas es pot veure que no hi ha termes d'ordre 3, de manera que tenim $|u_b(L,t) - z_b(t)| = A \cdot O(\omega^4)$. Si volem que la funció de transferència de l'equació diferencial ordinària aproximi la de l'equació en derivades parcials fins a un ordre més alt (i, per tant, l'aproximació a la solució $u_b(L,t)$ sigui millor), calen més graus de llibertat i, per tant, partir d'una

equació diferencial ordinària d'ordre superior. Així si busquem l'equació diferencial ordinària d'ordre 4 tal que la seva funció de transferència aproximi millor la funció $H_{edp}(L,\omega)$ obtenim:

$$\left(\frac{-L^3\,r^2}{45E}\right)\,z^{iv)} + \left(m+\frac{1}{3}\rho L\right)\,z''(t) + \left(\frac{E_1}{L}+q\right)\,z'(t) + \left(\frac{E}{L}\right)\,z(t) = A\,e^{iwt}$$

En aquest cas, l'error entre les funcions de transferència és d'ordre 5. D'aquesta manera podríem anar trobant els coeficients d'una equació diferencial ordinària d'ordre n, que aproximaria la solució de la nostra equació en derivades parcials, igualant cada cop més termes de les sèries de les funcions de transferència, essent l'error de la diferència almenys com ω^{n+1}.

Tornem ara a l'equació (B.4). Si prescindim del terme no homogeni i comparem els seus coeficients amb els de l'equació diferencial ordinària límit obtinguda a partir dels valors propis dominants (veure l'equació (4.31) del capítol 4) veurem que no tenen massa relació, fins i tot si reescrivim els coeficients de (4.31) per tal que el coeficient de $w''(t)$ sigui $m+\rho L/3$. Per començar, els coeficients de (B.4) no són aproximats, cosa que sí que passa amb els de (4.31). A més, les solucions del model lineal homogeni s'assemblaven a les de (4.31) quan $\varepsilon \to 0$ i per temps grans, però ara les solucions que s'assemblen només són les globalment acotades i ho fan en un entorn de $\omega = 0$, per a qualsevol valor dels paràmetres i per a tot temps.

Veiem, doncs, que fixar-nos en les solucions globalment acotades ens ha portat un nou concepte d'equació límit. Si abans una millor aproximació de la solució passava necessàriament per augmentar els nombre de valors propis dominants per tal d'aproximar millor els coeficients de (4.31), l'equació diferencial ordinària límit d'ordre 2, ara ens cal que la diferència entre les funcions de transferència sigui d'ordre més gran, cosa que s'aconsegueix permetent més graus de llibertat i, per tant, partint d'una equació diferencial ordinària d'ordre superior. L'aproximació, doncs, és conceptualment diferent ja que per a una millor aproximació del model en derivades parcials cal una equació ordinària d'ordre més gran (i si la volem d'un ordre determinat, és única), mentre que abans una millor aproximació era una millor aproximació dels coeficients d'una equació diferencial ordinària del mateix ordre, que ve donat pel nombre de valors propis dominants.

Per a veure gràficament com funcionen aquestes aproximacions, podem fixar-nos en les figures B.3 i B.5, on estan representats els mòduls de les funcions de transferència prop de $\omega = 0$ per a diferents valors dels paràmetres dissipatius E_1 i q, però també per a equacions diferencials aproximades d'ordres diferents (ordre 2 en B.3 i ordre 4 en B.5). Podem veure com efectivament l'error es manté baix en un entorn més gran de $\omega = 0$ quan augmentem l'ordre de l'equació aproximada (la diferència entre els mòduls la trobem representada en les figures B.4 i B.6). A més, podem veure també altres fenòmens, com ara

els pics ressonants que apareixen en les gràfiques, sobretot per a valors petits dels coeficients dissipatius E_1 i q. Aquests pics són també els causants de les principals diferències entre ambdues aproximacions. Sembla, doncs, que es compleix quelcom que físicament té sentit: introduir més dissipació al sistema suavitza la resposta i, a grans trets, l'equació en derivades parcials es pot aproximar millor per una equació diferencial ordinària.

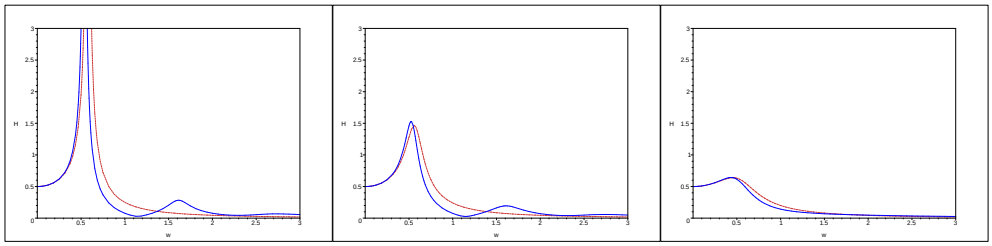


Figura B.3: Mòdul de les funcions de transferència de l'EDP i l'EDO d'ordre 2 per a $E_1, q = 0$, E_1, q petits i E_1, q grans, respectivament.

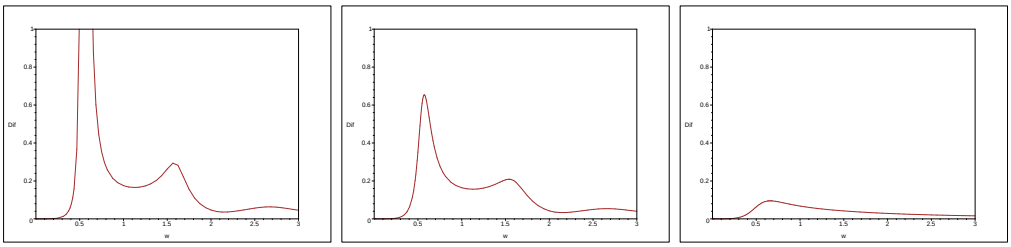


Figura B.4: Mòdul de la diferència de les funcions de transferència de l'EDP i l'EDO d'ordre 2 per als mateixos valors dels paràmetres.

Per acabar, una simulació de les solucions globalment acotades del model en derivades parcials i de l'equació diferencial ordinària aproximada d'ordre 2 ens permetrà comparar visualment aquestes dues modelitzacions d'un mateix fenomen. Si ho provem per a diferents freqüències, podrem comprovar en la figura B.7 com la posició de la molla modelitzada per l'equació en derivades parcials és, per a cada instant de temps, similar a la de la solució de l'equació diferencial ordinària si ω és petita.

En canvi, per a freqüències més grans hi ha diferència entre ambdues solucions, posant-se de manifest la necessitat de recórrer en alguns casos a les derivades parcials per a explicar, per exemple, diferències en la deformació interna de la molla, tal i com es veu en la figura B.8.

Així, tot i que l'equació diferencial ordinària és vàlida com a primera aproximació, en alguns casos és necessari el model en derivades parcials per explicar fenòmens que es posen de manifest per a certs valors dels paràmetres.

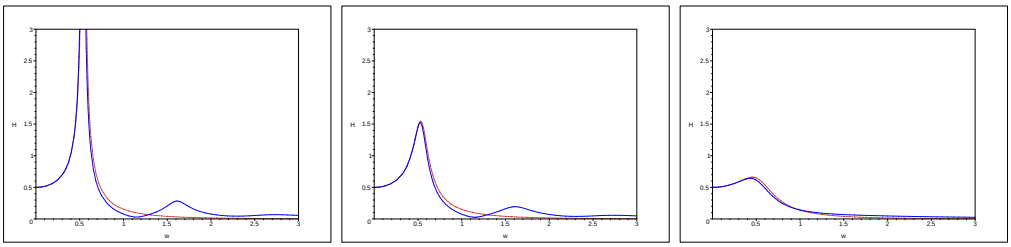


Figura B.5: Mòdul de les funcions de transferència de l'EDP i l'EDO d'ordre 4 per als mateixos valors dels paràmetres.

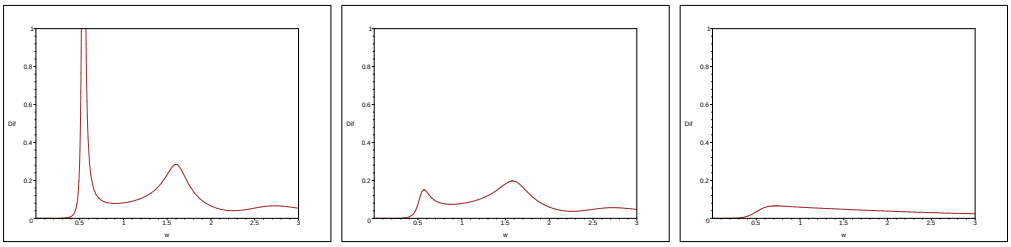


Figura B.6: Mòdul de la diferència de les funcions de transferència de l'EDP i l'EDO d'ordre 4 per als mateixos valors dels paràmetres.

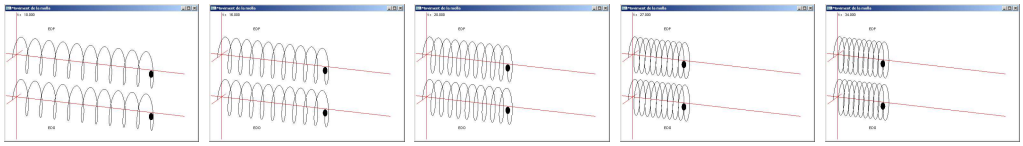


Figura B.7: Simulació de les solucions globalment acotades de l'EDP (B.1) i de l'EDO (B.4) per a diferents temps quan $f(t) = 5e^{0.1\,i\,t}$.

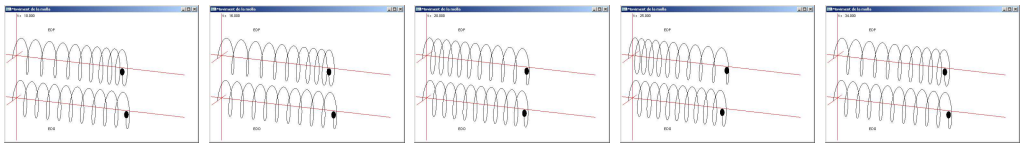


Figura B.8: Simulació de les solucions globalment acotades de l'EDP (B.1) i de l'EDO (B.4) per a diferents temps quan $f(t) = 7e^{i\,t}$.

Bibliografia

[1] H.A. Barnes, J.F. Hutton, K. Walters: *An introduction to rheology.* Elsevier (1989).

[2] H. Brézis: *Análisis Funcional. Teoría y aplicaciones.* Alianza Editorial (1984).

[3] À. Calsina, X. Mora, J. Solà-Morales: *The dynamical approach to elliptic problems in cylindrical domains, and a study of their parabolic singular limit.* J. of Differential Equations, 102 (1993), no.2, 244-304.

[4] V.L. Carbone: *Problemas parabólicos em materiais compostos unidimensionais. Propriedade de Morse Smale.* Tesi doctoral Universidad de Sao Paulo (2003).

[5] A.N. Carvalho: *Infinite dimensional dynamics described by ordinary differential equations.* J. Differential Equations, 116, no. 2 (1995), 338-404

[6] A.N. Carvalho: *Parabolic problems with nonlinear boundary conditions in cell tisues.* Resenhas 3 (1997), no. 1, 123-138.

[7] A.N. Carvalho, G. Lozada-Cruz: *Patterns in parabolic problems with nonlinear boundary conditions.* Cadernos de Matemática, 02 (2001), 325-345.

[8] A.N. Carvalho, A.L. Pereira: *A scalar parabolic equation whose asymptotic behavior is dictated by a system of ordinary differential equations.* J. of Differential Equations, 112 (1994), 81-130.

[9] C. Castro, E. Zuazua: *Boundary controllability of a hybrid system consisting in two flexible beams connected by a point mass.* SIAM J. Control Optim., 36 (1998), no. 5, 1576-1595.

[10] S. Chen, K. Liu, Z. Liu: *Spectrum and stability for elastic systems with global or local Kelvin-Voigt damping.* SIAM J. Appl. Math., 59 (1999), 651-668.

[11] N. Cónsul, J. Solà-Morales: *Stability of local minima and stable nonconstant equilibria.* J. of Differential Equations, 157 (1999), 61-81.

[12] J.B. Conway: *Functions of one complex variable.* Springer-Verlag (1978).

[13] J.L. Davis: *Mathematics of wave propagation.* Princeton University Press (2000).

[14] K-J. Engel, R. Nagel: *One parameter semigroups for linear evolution equations.* Springer-Verlag (2000).

[15] L.C. Evans: *Partial differential equations.* AMS (1998).

[16] A. Freiria Neves, H. de Souza Ribeiro, O. Lopes: *On the spectrum of evolution operators generated by hyperbolic systems.* J. of Functional Analysis, 67 (1986), no. 3, 320-344.

[17] G. Fusco: *On the explicit construction of an ODE which has the same dynamics as a scalar parabolic PDE.* J. of Differential Equations, 69 (1987), no. 1, 85-110.

[18] I.C. Gohberg, M.G. Kreĭn: *Introduction to the theory of linear nonselfadjoint operators in a Hilbert space.* AMS (1969).

[19] M. Grobbelaar-van Dalsen: *On fractional powers of a closed pair of operators and a damped wave equation with dynamic boundary conditions.* Appl. Analysis, 53 (1994), no.1-2, 41-54.

[20] R. Haberman: *Mathematical models. Mechanical vibrations, population dynamics, and traffic flow. An introduction to applied mathematics.* Prentice-Hall (1977).

[21] D. Henry: *Geometric theory of semilinear parabolic equations.* Springer-Verlag (1981).

[22] T. Kato: *Perturbation theory for linear operators.* Springer-Verlag (1995).

[23] K. Liu: *Locally distributed control and damping for the conservative systems.* SIAM J. Cont. Optim., 35 (1997), 1574-1590.

[24] K. Liu, Z. Liu: *Exponential decay of energy of the Euler-Bernoulli beam with locally distributed Kelvin-Voigt damping.* SIAM J. Cont. Optim., 36 (1998), 1086-1098.

[25] P. Massat: *Limiting behaviour for strongly damped nonlinear wave equations.* J. of Differential Equations, 48 (1983), 334-349.

[26] X. Mora, J. Solà-Morales: *The singular limit dynamics of semilinear damped wave equations.* J. of Differential Equations, 78 (1989), no.2, 262-307.

[27] A. Pazy: *Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations.* Springer-Verlag (1983).

[28] M. Pellicer: *Asymptotic behavior and oscillations in a viscoelastic problem.* Proceedings XVIII CEDYA-VIII CMA (2003).

[29] M. Pellicer, J. Solà-Morales: *Analysis of a viscoelastic spring-mass model.* J. Mathem. Analysis and Applications, 294/2 (2004), 687-698.

[30] A.L. Pereira, L.A.F. de Oliveira : *Invariant manifolds and limiting equations for a hyperbolic problem.* Dynam. Contin. Discrete Impuls. Systems, 7 (2000), no.4, 503-524.

[31] M. Renardy: *On the type of certain C_0-semigroups.* Comm. Partial Diff. Eqs., 18 (1993), 1299-1307.

[32] L.I. Sedov: *Similarity and dimensional methods in mechanics.* CRC Press (1993).

[33] R.I. Tanner: *Engineering rheology.* Clarendon Press. Oxford (1988).