Curvatures i interpolació en disseny de lents.

Report recopilat per Marta Pellicer

1 Disseny actual de les lents progressives

Actualment, el procés de disseny de lents progressives consisteix en el disseny inicial d'una lent preliminar amb les potències desitjades i en un posterior procés d'optimització per tal de millorar-ne l'astigmatisme. Per trobar aquesta lent inicial, es parteix de les dues potències o curvatures mitjanes donades, això és un tros d'esfera de curvatura mitjana P_1 a la part superior de la lent i una de curvatura mitjana P_2, a la inferior, que caldrà unir de manera suau. Amb aquest objectiu es construeix una corba guia unidimensional que passi de P_1 a P_2 també de manera suau tal i com s'indica en la figura 1, sobre la qual es trien uns punts umbilicals com a suport d'arcs de circumferència d'aquella curvatura.

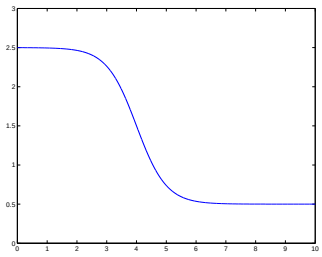


Figura 1: Corba guia

Així s'aconsegueix l'esquelet d'una superfície $u_0(x, y)$ que s'utilitza com a primera aproximació de la lent i que es voldrà refinar per rebaixar-ne l'astigmatisme. Ara bé, trobar la superfície amb astigmatisme mínim es pot pensar

també com trobar la superfície $u(x, y)$ que minimitzi un cert funcional. Diverses eleccions d'aquest funcional són possibles, com veurem més endavant, i $u_0(x, y)$ és la llavor de què es parteix per minimitzar-lo. En el tractament numèric d'aquests funcionals, les superfícies es representen mitjançant certs polinomis interpoladors, tal i com ja s'havia indicat en el plantejament del problema.

El resultat d'aquest procés es tradueix en unes lents amb astigmatisme baix en les zones centrals, però elevat en les laterals. Això porta a una revisió del mètode actual i, de forma natural, apareixen diverses qüestions, algunes ja formulades en el plantejament del problema: seria convenient minimitzar algun altre funcional? Podem aconseguir un astigmatisme baix independentment de la potència preassignada? A més, cal tenir en compte que les zones amb potència donada tampoc estan perfectament determinades.

2 Algunes consideracions de geometria diferencial

Recordem els elements principals amb què treballarem.

Definició *Si denotem per k_1 i k_2 les curvatures principals d'una superfície (ometrem parlar del punt per no carregar la notació), l'astigmatisme ve donat per $A = k_1 - k_2$, la potència P és, essencialment, la curvatura mitjana $H = \frac{1}{2}(k_1 + k_2)$, i denotarem per K la curvatura de Gauss, és a dir, $K = k_1 k_2$.*

Observació *Amb aquestes notacions, és fàcil veure la següent relació entre aquestes quantitats:*

$$A^2 = 4H^2 - 4K \tag{1}$$

El primer que ens preguntem és si és possible construir aquesta superfície d'astigmatisme zero. La resposta la trobem en els teoremes clàssics de geometria diferencial (veure, per exemple, [1]):

Definició *Sigui una superfície $S \subset \mathbb{R}^3$ i p un punt d'aquesta superfície. Diem que p és un punt umbilical de S si tenim $k_1 = k_2$ en aquest punt.*

Proposició *Si $S \subset \mathbb{R}^3$ és una superfície connexa on tots els punts són umbilicals, aleshores S està continguda en un pla o en una esfera.*

Com a aplicació al nostre cas, és immediat el següent corol.lari:

Corol.lari *Una lent progressiva no pot tenir astigmatisme zero en tots els punts.*

Observem que aquest resultat també val si només ens mirem una part de la lent que inclogui diferents potències. Així doncs, com a molt podrem aspirar a tenir una lent amb astigmatisme baix o, almenys, un astigmatisme baix en les zones que ens interessi, quan això sigui possible. En aquest sentit, voldrem veure en aquest primer apartat fins a quin punt la potència donada condiciona l'astigmatisme de la lent. És amb aquest objectiu que introduïm alguns resultats de geometria diferencial que ens seran útils en el nostre estudi (veure de nou [1]).

2.1 Teorema de Gauss-Bonnet i conseqüències.

Recordem alguns conceptes.

Definició *Sigui C una corba regular orientada continguda en una superfície $S \subset \mathbb{R}^3$ i p un punt d'aquesta corba. Considerem $\alpha(s)$ una parametrització per l'arc de C en un entorn de p. Anomenem curvatura geodèsica de C en p al valor algebraic de la derivada covariant $k_g = [D\alpha'(s)/ds]$.*

També podem pensar que si k_C és la curvatura de la corba C i k_n la curvatura normal de $C \subset S$ llavors

$$k_C^2 = k_g^2 + k_n^2$$

és a dir, la curvatura geodèsica mesura el que dista la corba C de ser una geodèsica de la superfície S.

Definició *Donada una triangulació d'una superfície $S \subset \mathbb{R}^3$ denotem per F el nombre de cares, per A el nombre d'arestes i per V el nombre de vèrtexs. Aleshores, el nombre*

$$\chi(S) = F - A + V$$

es coneix com la característica d'Euler de la superfície S (que no depèn de la triangulació).

Teorema (Gauss-Bonnet) *Sigui S una superfície connexa, compacta i orientable de $\mathbb{R}^3$. Denotem per ∂S la seva vora, que suposem formada per la*

unió de r components connexes, regulars i orientades positivament, és a dir, $\partial S = C_1 \cup \cdots \cup C_r$. *Aleshores,*

$$\int_S K + \sum_{i=1}^{r} \int_{C_i} k_g = 2\pi\, \chi(S) \tag{2}$$

on k_g *denota la curvatura geodèsica de les corbes respecte la superfície i* $\chi(S)$ *és la característica d'Euler de la superfície.*

Com s'aplica en el nostre cas? El primer que cal pensar és que una lent és topològicament equivalent al disc i, per tant, tindran la mateixa característica d'Euler:

$$S \cong D^2 \;\Rightarrow \chi(S) = 1$$

A més, la vora de la lent està formada per una sola component, és a dir, $\partial S = C$. Si a més recordem la relació donada per (1), el teorema de Gauss-Bonnet ens dóna la següent igualtat:

$$\int_S A^2 = 4 \int_S H^2 + 4 \int_C k_g - 8\pi \tag{3}$$

Una primera observació que caldria fer és el fet que, almenys aparentment, la vora de la lent influeix en l'astigmatisme global d'aquesta. De fet, veurem que realment és així en l'apartat 3, on, lluny de pensar-ho com una dificultat afegida, ho veurem com una eina útil a l'hora de controlar l'astigmatisme.

Però revisem la fórmula (3) en dos casos elementals.

1. S superfície amb vora tangent a un pla.

   En aquest cas, el terme de la curvatura geodèsica és $\int_C k_g = 2\pi$ i, per tant:

   $$\int_S A^2 = 4 \int_S H^2 \tag{4}$$

2. $C = \partial S$ és una geodèsica de S.

   Com que la curvatura geodèsica ens mesura com dista la corba de ser o no una geodèsica de la superfície, en aquest cas tenim $\int_C k_g = 0$, de manera que:

   $$\int_S A^2 = 4 \int_S H^2 - 8\pi \tag{5}$$

Observem que en el cas particular que, a més, S sigui una semiesfera (tindríem $C = S^1$) no tindríem astigmatisme, de manera que

$$4\int_S H^2 = 8\pi \tag{6}$$

El teorema anterior ens permet donar alguns resultats que indiquen fins a quin punt la potència donada condiciona l'astigmatisme de la lent. Això tindrà com a conseqüència la impossibilitat geomètrica d'un astigmatisme baix (almenys globalment) per a lents amb potències molt grans.

1. *Fita superior de l'astigmatisme global.* És raonable suposar que les dues curvatures principals de la lent tenen el mateix signe, és a dir, que $K \geq 0$. Aleshores, la primera versió del teorema de Gauss-Bonnet ens diu que:

   $$\left[\int_C k_g - 2\pi\right] = -\int_S K \leq 0$$

   De forma immediata a partir de (3), obtenim:

   $$\int_S A^2 \leq 4\int_S H^2 \tag{7}$$

   on la igualtat s'assoleix en el cas en què ∂S és tangent a un pla, tal i com havíem vist en (4). En altres paraules, donada la distribució de potències de la lent, l'astigmatisme no pot créixer desmesuradament i si la potència global és baixa també pot ser-ho l'astigmatisme.

2. *Fita inferior de l'astigmatisme global.* Com que sempre és cert que $\int_C k_g \geq 0$, també obtenim de forma immediata a partir de (3) una fita inferior per a l'astigmatisme global:

   $$\int_S A^2 \geq 4\int_S H^2 - 8\pi \tag{8}$$

   on el terme de la dreta s'anul.la quan S és una semiesfera, tal i com havíem vist en (6). En tot cas, el que sí ens diu aquesta desigualtat és quelcom tan raonable com que no podem baixar arbitràriament l'astigmatisme global d'una lent amb una distribució de potències fixada. Una altra qüestió és si podem carregar grans quantitats d'astigmatisme en les zones més perifèriques de la lent per tal d'aconseguir que en les zones centrals tinguem millor qualitat de visió.

D'aquestes desigualtats també es pot observar una línia raonable per seguir, com és el fet de considerar superfícies que siguin pertorbacions locals de l'esfera, que és la que té les propietats desitjables. És a dir, superfícies del tipus següent:

$$S = E + \varepsilon(u, v)\, N$$

on E és l'esfera i N el vector normal a la superfície.

3 Equacions en derivades parcials i minimització de funcionals

Des del punt de vista de les equacions en derivades parcials convé revisar la coneguda equació de la curvatura mitjana:

$$\text{(9)} \qquad \begin{cases} \nabla \cdot \left(\dfrac{\nabla u}{\sqrt{1 + |\nabla u|^2}} \right) = P \quad en\ \Omega \\ \\ u = \varphi \quad en\ \partial\Omega \end{cases}$$

que té solució i és única si $P = P(x, y)$ per $(x, y) \in \Omega$ i $\varphi = \varphi(x, y)$ per $(x, y) \in \partial\Omega$ són donades i suficientment regulars (com a referència del problema, veure [4]). En aquest cas, la solució $u(x, y)$ representa la gràfica de l'única superfície de curvatura mitjana $P(x, y)$ que té la vora prefixada a $\varphi(x, y)$. És a dir, només amb la curvatura mitjana no és suficient per determinar la superfície, sinó que també calen unes condicions sobre el contorn: en aquest problema les hem considerat de tipus Dirichlet, ja que té sentit fixar la forma de la lent a la vora. En aquest cas, sí que es pot concloure que donades la potència de la lent i la forma de la vora, la superfície queda únicament determinada i, per tant, també l'astigmatisme. Però només donant $P(x, y)$ tenim infinites solucions possibles i, per tant, poc control sobre l'astigmatisme. Així, tot i que sembli afegir complicacions addicionals al problema i que actualment no s'imposin restriccions sobre el contorn de la lent, el fet d'imposar una vora podria ser un ajut a l'hora d'obtenir l'astigmatisme desitjat.

3.1 Minimització de funcionals

Resoldre l'equació en derivades parcials (9) equival a trobar la funció $u(x, y)$ que minimitzi el funcional d'àrea següent:

$$\mathcal{A}(u) = \int_\Omega \left(\sqrt{1 + |\nabla u|^2} + P\, u \right) \, dxdy \tag{10}$$

entre totes les funcions que compleixen $u = \varphi$ en $\partial\Omega$. La minimització de funcionals per obtenir la superfície desitjada és una tècnica coneguda en el disseny de lents, però el tipus de funcionals que s'utilitzen no són del tipus de (10). Un exemple del que s'utilitza, força semblant als treballats per INDO S.A. (veure [3]), el trobem en [5]:

$$\mathrm{J}(u) = \int_\Omega \alpha(x, y)\, A(x, y)^2 \, dxdy + \int_\Omega \beta(x, y)\, \left[H(x, y) - P(x, y) \right]^2 \, dxdy \tag{11}$$

on $\alpha(x, y)$ i $\beta(x, y)$ són pesos que ponderen un astigmatisme $A(x, y)$ baix enfront la potència desitjada $P(x, y)$ en funció de la regió de la lent on ens trobem. Podem fer el pas que hem fet amb l'equació (9) en sentit invers i escriure l'equació d'Euler-Lagrange equivalent al funcional (11), que prop del pla resulta ser l'equació de quart ordre següent:

$$\Delta \left((\alpha + \beta) \Delta u \right) - 2 \left[(\alpha\, u_{yy})_{xx} + (\alpha\, u_{xx})_{yy} - 2 (\alpha\, u_{xy})_{xy} \right] = \Delta \left(2 \beta P \right) \tag{12}$$

Quines condicions de contorn hem d'imposar? Podríem pensar també en condicions que fixessin la forma de la vora, com en l'equació anterior, però també podria ser que resultessin més convenients per al funcional (11) altres tipus de condicions de contorn com ara una lent prou plana en la frontera, o les condicions naturals que es derivarien de la minimització de $\mathrm{J}(u)$ sense restriccions (tal i com està fet en [5]).

Si tornem, però, a l'equació (12) obtinguda a partir del funcional (11) podem observar que és d'ordre superior a la de la curvatura mitjana, l'equació (9). Això és perquè en $\mathrm{J}(u)$ apareixen derivades segones, però en $\mathcal{A}(u)$ només tenim derivades primeres, de manera que l'equació en derivades parcials serà d'ordre més baix. En aquesta línia, una possibilitat seria provar un funcional que combinés ambdues formulacions: la de $\mathcal{A}(u)$ per obtenir una superfície amb la potència desitjada però que utilitzaria termes d'ordre més baix que els de (11), i l'ús de $\int_\Omega A(x, y)^2$ i dels pesos per tenir un astigmatisme baix

allà on volem, tal i com es fa en J(u). El funcional que proposem, doncs, seria el següent:

$$\mathcal{F}(u) = \int_\Omega \alpha(x,y) A(x,y)^2 \, dxdy \, + \, \int_\Omega \beta(x,y) \left[\sqrt{1+|\nabla u|^2} + P\, u \right] \, dxdy \tag{13}$$

que es podria millorar des del punt de vista numèric si trobéssim una expressió en termes de derivades primeres que substituís a $\int_\Omega \alpha(x,y)\, A(x,y)^2 \, dxdy$. En tot cas, l'equació d'Euler-Lagrange equivalent a (13) prop del pla seria:

$$\Delta(\alpha \Delta u) - 2\nabla \cdot (\beta \nabla u) - 2\left[(\alpha\, u_{xx})_{yy} + (\alpha\, u_{yy})_{xx} - 2(\alpha\, u_{xy})_{xy} \right] = -2\beta\, P$$

Quedaria per fer un anàlisi detallat del problema: quines condicions de contorn serien les adequades, el.lipticitat de l'operador, existència i unicitat de solucions, etc.

A més de la proposta d'un nou tipus de funcional, aparentment més tractable des del punt de vista numèric, també ens va semblar interessant ressaltar l'equivalència entre el fet de resoldre equacions diferencials i trobar mínims de certs funcionals, ja que a part de les tècniques d'optimització per trobar aquests mínims també cal tenir present tota la metodologia numèrica que es coneix en el tractament de les equacions en derivades parcials (elements finits), en particular de les de quart ordre com tenim aquí.

3.2 Inequacions variacionals i el problema de l'obstacle

També des del camp de les equacions en derivades parcials es va apuntar una manera de tractar el problema des del punt de vista de l'extrapolació, és a dir, com unir de manera suau dues esferes de radis diferents. Aquest és un problema conegut, que rep el nom de problema de l'obstacle, i que essencialment intenta descriure la forma que adopta una membrana d'extrems fixats que es deixa anar lliurement sobre un cert obstacle (o diversos obstacles), tal i com indica la figura 2.

Com a referència per aquest tipus de problemes podem veure [2]. L'aplicació al disseny de lents progressives és directa si entenem que la membrana és la forma que adoptarà la lent entre les dues esferes, que farien el paper d'obstacles (veure figura 3). Caldria, doncs, veure quines hipòtesis sobre la membrana serien raonables en aquest cas.

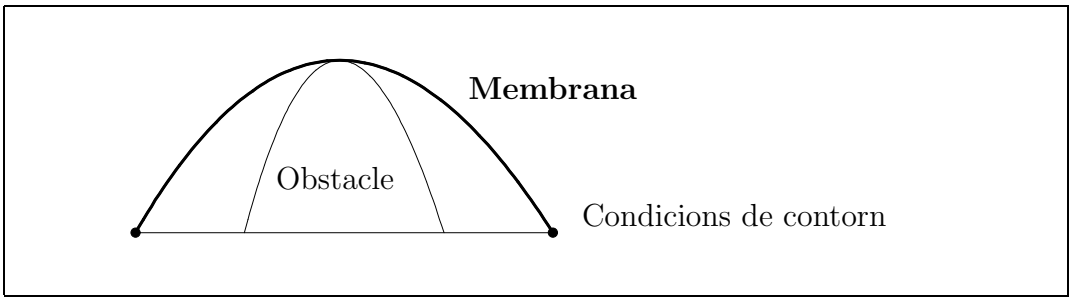


Figura 2: Problema de l'obstacle

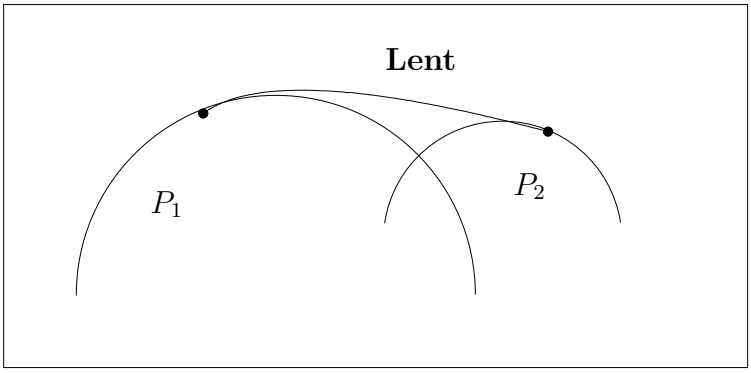


Figura 3: Problema de l'obstacle aplicat al disseny de lents progressives

4 Estudi de les superfícies de revolució

Les superfícies de revolució no són superfícies vàlides en la construcció de lents progressives. Tot i així, creiem que un estudi d'aquest tipus de superfícies pot servir per conèixer les dificultats inherents al problema plantejat que, sobre aquest tipus de superfícies, pot veure reduïda la seva dificultat ja que passem a treballar amb una variable menys i, per tant, apareixen equacions diferencials ordinàries en lloc d'equacions en derivades parcials.

Les superfícies de revolució són aquelles que es generen per la rotació d'una certa corba $r(x)$ entorn un eix. En el nostre cas, l'eix de rotació considerat és el que uneix els centres x_1 i x_2 de les dues esferes de radis R_1 i R_2 que haurem d'unir, però queda com a primera proposta el considerar altres alternatives com a possibles eixos de rotació.

Si $r(x)$ és la corba que revolucionem, la superfície que genera es pot

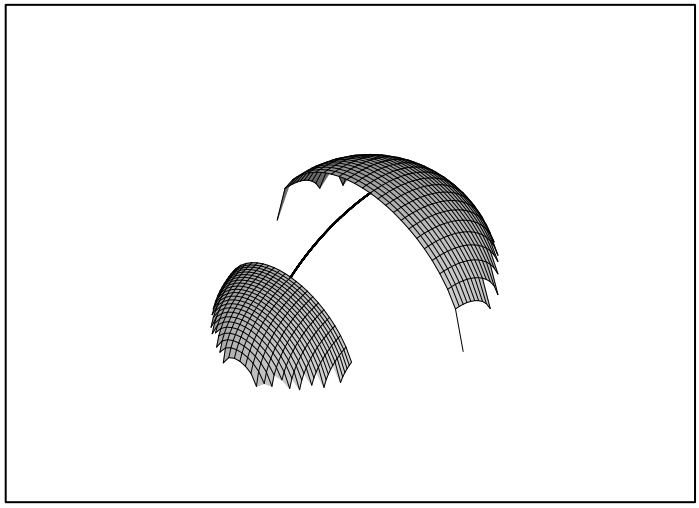


Figura 4: Esquema per a la lent de revolució.

escriure com:

$$S(x,\theta) = (x, r(x)\cos\theta, r(x)\sin\theta)$$

Però nosaltres ens ho mirem com un problema invers: voldrem trobar la corba $r(x)$ que genera una superfície de revolució amb astigmatisme mínim i que enganxi *bé* amb els dos talls d'esfera donats. L'astigmatisme d'aquesta superfície (recordem que és la diferència de les curvatures principals) es pot escriure en termes de $r(x)$ i resulta ser:

$$A = A(x) = \frac{r\,r'' + 1 + (r')^2}{r\sqrt{(1+(r')^2)^3}}$$

La resposta immediata, que és demanar astigmatisme zero, ens porta directament al que ja sabíem per l'apartat 2: una superfície formada per arcs de circumferència. És a dir, obtenim les lents trifocals (tres talls d'esfera enganxats). Però aquesta superfície no enganxa de manera suau amb les esferes que ja teníem. Per tant, haurem de minimitzar l'astigmatisme sota algunes restriccions.

Això ens porta altre cop a una formulació variacional del problema: volem trobar $r(x)$ que minimitzi

$$\int_{x_1}^{x_2} A^2(x)dx$$

o altres funcionals de l'astigmatisme. Observem, però, que ara volem minimitzar un funcional d'una variable, i no de dues com abans. Si no imposem restriccions sobre la corba (o la superfície) obtenim com a equació d'Euler-Lagrange l'equació següent:

$$\left(\frac{a(r)}{r\left(1+(r')^2\right)^3}\right)'' + \left(\frac{r'\left(3rr''+1+(r')^2\right)\,a(r)}{r^2\left(1+(r')^2\right)^4}\right)' - \left(\frac{a(r)}{r^3\left(1+(r')^2\right)^2}\right) = 0$$

on $a(r) = rr'' + 1 + (r')^2$. Hem obtingut una equació diferencial ordinària de quart ordre i no una equació en derivades parcials. Però, és clar, si no imposéssim restriccions recuperaríem les lents trifocals com a solució. Quin tipus de restriccions serien raonables en aquest plantejament? Totes elles són restriccions temptatives i que van quedar en un estat molt preliminar, però les condicions immediates són les que ens donarien continuïtat en la corba i les derivades:

$$r(x_1) = y_1 \quad i \quad \frac{\partial r}{\partial x}(x_1^-) = \frac{\partial r}{\partial x}(x_1^+)$$

Però per a què la superfície intermitja *enganxi suaument* amb les esferes que teníem caldrà demanar continuïtat en les curvatures, és a dir:

$$H(x_1) = \frac{1}{R_1}\,, \quad H(x_2) = \frac{1}{R_2}$$

Podem demanar les mateixes restriccions en l'altra banda de la superfície, $r(x_2) = y_2$ i $\frac{\partial r}{\partial x}(x_2^-) = \frac{\partial r}{\partial x}(x_2^+)$? Potser estem imposant massa condicions i no hi ha superfície que ho compleixi. Però estem oblidant un factor important que quedava amagat fins ara: sí que tenim fixades les dues esferes superior i inferior, però tenim un cert marge pel que fa fins a quina zona abarquen. Per exemple, pot ser més important tenir la potència que toca en una zona més àmplia a la part inferior que a la superior, si tenim en compte que usem més la visió lateral en mirar objectes propers que quan mirem de lluny. Aquest marge a l'hora d'escollir el punt (o els punts) de contacte de la superfície amb l'esfera (o les esferes) també és una eina que ha de jugar al nostre favor.

5 Conclusions i línies de futur

Aquest és un recull de les discussions del Grup d'Estudi que, aprofitant la pluralitat disciplinar dels assistents, es van centrar en diversos punts de vista,

complementaris entre ells. Com a conclusions més rellevants caldria destacar el paper fonamental de la vora de la lent a l'hora de determinar-ne l'astigmatisme, la possible minimització d'altres funcionals d'ordre inferior o el tractament de les equacions en derivades parcials equivalents, i les fites sobre l'astigmatisme que ens donen una idea de com la distribució de potències condiciona aquesta quantitat.

En la línia que s'apuntava en l'anterior secció, és a dir, el marge d'elecció de les zones superior i inferior de la lent, també es va apuntar la possibilitat de tractar el problema com a problema de frontera lliure, que és un tipus de problema on la frontera del domini també és una de les variables que cal trobar.

Una altra idea que es podria treballar és veure si prendre la corba $r(x)$ de l'apartat anterior com a corba guia per construir la superfície llavor $u_0(x, y)$ (recordem l'apartat 1) ens milloraria els resultats en algun sentit. També seria raonable estudiar la possibilitat d'utilitzar altres corbes en lloc d'arcs de circumferència per construir aquesta superfície llavor, corbes que enviessin l'astigmatisme lluny de les zones centrals, que és on més es notaria. Per exemple, els arcs d'el.lipse mantindrien la curvatura semblant a la de la corba guia durant més estona. La idea és que si l'astigmatisme global no es pot reduir, almenys el repartiríem de manera que es concentrés en les zones laterals, que serien les menys problemàtiques.

Per últim, voldríem agrair a l'empresa INDO S.A. el fet de plantejar un problema que combina l'interés tecnològic amb el matemàtic, així com la seva disposició a l'hora de comentar i discutir els dubtes, idees o propostes que van anar sorgint.

Referències

[1] M. P. do Carmo: *Differential geometry of curves and surfaces.* Prentice-Hall (1976)

[2] Duvaut, G., Lions, J.-L. : *Inequalities in mechanics and physics.* Springer-Verlag (1976)

[3] E. Fontdecaba: *High performance algorithms for progressive addition lens design.* Tesi Doctoral Universitat Politècnica de Catalunya (2000)

[4] M. Giaquinta, S. Hildebrandt: *Calculus of variations I.* Springer-Verlag (1996)

[5] J. Wang, R. Gulliver, F. Santosa: *Analysis of a variational approach to progressive lens design.* Per aparèixer en SIAM J. Appl. Math.

6 Autors

Aquest text ha estat escrit a partir de les discussions del Grup d'Estudi, que va incloure els participants següents: Miguel Ángel Barja, Joaquim Bruna, Xavier Cabré, Antonio Capella, José Antonio Carrillo, Neus Cónsul, Jordi Faro, Toni Guillamon, Hildebrando Muñoz, Marta Pellicer, Jordi Ripoll, Jordi Saludes, Manel Sanchón, Jordi Saperas, Joan Solà-Morales i Joan Verdera.