

Transformacions geomètriques al pla:

Són els moviments (mantenen les distàncies), les semblances (multipliquen les distàncies per un factor) = moviment seguit d'una homotècia, i les afinitats (mantenen la proporcionalitat entre vectors).

En general, una aplicació afí (o *afinitat*) al pla és $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $T(X) = AX + P$, és a dir, en forma matricial:

$$T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & p_1 \\ a_{21} & a_{22} & p_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

on aquesta última és la matriu en *coordenades homogènies* que ens permet transformar punts $(x, y, 1)$ i vectors $(x, y, 0)$. Matrius bàsiques 2×2 : rotació d'angle α $\mathcal{R}_\alpha$, simetria eix x $\mathcal{S}_x$ o eix y $\mathcal{S}_y$, projecció ortogonal eix x $\mathcal{P}_x$ o eix y $\mathcal{P}_y$. Considerem un sistema de referència ortonormal i orientat positivament. Tenim el següent catàleg d'afinitats al pla:

1. **Translació de vector $\vec{u}$:** $T(X) = X + \vec{u}$. (anàleg a l'espai).

$$T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & u_1 \\ 0 & 1 & u_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. **Homotècia de raó r i centre C :** $T(X) = r\overrightarrow{CX} + C$. (anàleg a l'espai).

$$T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + (1-r) \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} r & 0 & (1-r)c_1 \\ 0 & r & (1-r)c_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. **Rotació d'angle α i centre C :** $T(X) = \mathcal{R}_\alpha \overrightarrow{CX} + C$.

$$T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 - \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & 1 - \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & \hat{c}_1 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & \hat{c}_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

4. **Simetria central de centre C (rotació de $\alpha = 180^\circ$):** $T(X) = -\overrightarrow{CX} + C$.

$$T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2c_1 \\ 0 & -1 & 2c_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

5. **Simetria respecte una recta d'inclinació α i punt C :** $T(X) = \mathcal{R}_\alpha \mathcal{S}_x \mathcal{R}_\alpha^t \overrightarrow{CX} + C$.

$$T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - c_1 \\ y - c_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}.$$

L'eix de simetria té per equació: $-\sin \alpha (x - c_1) + \cos \alpha (y - c_2) = 0$.

Si tenim el vector director de la recta $\vec{u}$ ($\tan \alpha = \frac{u_2}{u_1}$):

$$T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{u_1^2 + u_2^2} \begin{pmatrix} u_1 & -u_2 \\ u_2 & u_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 & u_2 \\ -u_2 & u_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - c_1 \\ y - c_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}.$$

5.1 Si la recta és paral·lela a l'eix x ($\alpha = 0$): $T(X) = \mathcal{S}_x \overrightarrow{CX} + C$.

$$T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 2c_2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2c_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

5.2 Si la recta és paral·lela a l'eix y ($\alpha = 90^\circ$): $T(X) = \mathcal{S}_y \overrightarrow{CX} + C$.

$$T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2c_1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2c_1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

6. **Projecció ortogonal sobre una recta d'inclinació α i punt C :** $T(X) = \mathcal{R}_\alpha \mathcal{P}_x \mathcal{R}_\alpha^t \overrightarrow{CX} + C$.

$$T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - c_1 \\ y - c_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}.$$

L'eix de la projecció té per equació: $-\sin \alpha (x - c_1) + \cos \alpha (y - c_2) = 0$.

Si tenim el vector director de la recta $\vec{u}$ ($\tan \alpha = \frac{u_2}{u_1}$):

$$T(X) = \frac{\overrightarrow{CX} \cdot \vec{u}}{\|\vec{u}\|^2} \vec{u} + C.$$

$$T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{u_1^2 + u_2^2} \begin{pmatrix} u_1 & -u_2 \\ u_2 & u_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 & u_2 \\ -u_2 & u_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - c_1 \\ y - c_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}.$$

6.1 i 6.2 anàlegs a 5.1 i 5.2 respectivament canviant -1 per 0 .

Transformacions inverses: $T^{-1}: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $T^{-1}(X) = A^{-1}X - A^{-1}P$, si $\det(A) \neq 0$.

$$T^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} x - p_1 \\ y - p_2 \end{pmatrix}, \quad \left(\begin{array}{c|c} A^{-1} & -A^{-1}P \\ \hline 0 & 1 \end{array} \right).$$

1. Translació: $T^{-1}(X) = X - \vec{u}$, translació de vector oposat.
2. Homotècia: $T^{-1}(X) = \frac{1}{r} \overrightarrow{CX} + C$, $r \neq 0$, homotècia de raó inversa.
3. Rotació: $T^{-1}(X) = \mathcal{R}_{-\alpha} \overrightarrow{CX} + C$, $\mathcal{R}_{-\alpha} = \mathcal{R}_\alpha^t = \mathcal{R}_\alpha^{-1}$, rotació d'angle oposat.
4. Simetria central: $T^{-1}(X) = T(X)$, la inversa és ella mateixa. $T^2(X) = X$, repetir una simetria dona la identitat.
5. Simetria axial: $T^{-1}(X) = T(X)$, la inversa és ella mateixa.
6. Les projeccions ortogonals no són invertibles. $T^2(X) = T(X)$, repetir una projecció o fer-la una sola vegada és el mateix.

Composició d'afinitats: multiplicació (per ordre) de les corresponents matrius en coordenades homogènies.

Punts fixos: són els punts que es transformen en si mateixos $X = AX + P$, és a dir, són les solucions del sistema lineal $(Id - A)X = P$. Les translacions ($\vec{u} \neq \vec{0}$) no tenen punts fixos. Les homotècies ($r \neq 1$), les rotacions ($\alpha \neq 0$), i les simetries centrals tenen un únic punt fix C (el centre). Les simetries axials i les projeccions ortogonals tenen una recta de punts fixos que és el propi eix. Noteu que $\det(Id - \mathcal{R}_\alpha \mathcal{S}_x \mathcal{R}_\alpha^t) = 0$.